Abel-konkurransen 1995–96

Fasit til andre runde

Oppgave 1: Siden hvert tiende tall slutter på null er det 199 tall som slutter på null. Antall som har nest siste siffer lik null er 190: det er 19 som slutter på to nuller og så har man ti muligheter for siste siffer. Antall tall som har null som tredje siffer er tilsvarende 100. Dette gir 199+190+100=489. **A**

Oppgave 2: Dersom vi skalerer høyden av rektangelet blir forholdet mellom arealene ikke påvirket, ei heller lengdene AQ og BQ. Vi kan derfor anta at rektangelet er kvadratisk. Siden trekantene skal ha samme areal bå $DP = BQ = 2$ og dermed $AP = AQ$. La $x = AQ$. Da er kvadratets sidelengde $x + 2$. For at arealene skal være like må da $x^2 = 2 \cdot (2 + x)$ hvilket gir $x = 1 + \sqrt{5}$. **D**

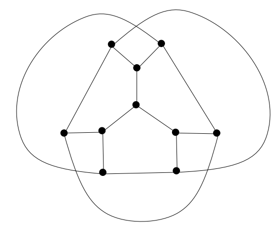
Oppgave 3: Hvis vi multipliserer to tall $10a + x$ og $10b + y$ der x og y er mellom 0 og 9, blir produktet $10(10ab + ay + bx) + xy$. Siste siffer i produktet er derfor det samme som siste siffer i produktet xy. Siden vi kun er på siste siffer holder det derfor å se på 7^{1996}. Vi kan da bruke at $7^4 = 2401$ slutter på 1. Siden $1996 = 4 \cdot 499$ gir dette at $7^{1996} = 2401^{499}$. Siden vi kun ser på siste siffer blir dette $1^{499} = 1$. **A**

Oppgave 4: La hajørnene til A dele sidene av det store kvadratet i to biter av lengde x og $1 - x$. Siden hver av trekantene utenfor A har areal $x(1 - x)/2$, må $A = 1 - 2x(1 - x)$. La kvadratet B ha sidelengde y. For at hjørnet på B skal berøre kanten av A må $\frac{y}{x} + \frac{y}{1-x} = 1$ (ligningen for en linje). Denne gir $y = x(1 - x) = (1 - A)/2$. Da blir $B = y^2 = (1 - A)^2/4$. **E**

Oppgave 5: Poenget er å vise at $x_n = \frac{a}{1-an}$. Vi ser at dette holder for x_1. Dersom vi antar at det holder for x_n, så blir $X_{n+1} = f(x_n) = \frac{x_n}{1-x_n n} = \frac{\frac{a}{1-an}}{1-\frac{a}{1-an}} = \frac{a}{1-an-a} = \frac{a}{1-a(n+1)}$. Ved induksjon følger da at $x_n = \frac{a}{1-an}$ for alle n. Dette gir $x_{1996} = \frac{a}{1-1996a} = 1$ som gir $a = \frac{1}{1997}$. **B**

Oppgave 6: La x_n være antall nummer av lengde n. Da er $x_1 = 2$ og $x_2 = 3$. For å finne antall nummer av lengde $n > 2$ ser vi at dersom første siffer er 1 må neste være 2 og derpå følger et nummer av lengde $n - 2$; dersom første siffer er 2 følger et nummer av lengde $n - 1$. Alle nummer av lengde n blir da tatt med nøyaktig en gang: $x_n = x_{n-2} + x_{n-1}$. Dette gir $x_3 = x_1 + x_2 = 5$, $x_4 = x_2 + x_3 = 8$, $\ldots$, $x_{11} = 233$. **B**

Oppgave 7: Vi kan illustrere klassen ved at hver elev er et punkt og at venner forbindes med en linje. Begyn med en person (punktet i midten). Denne har tre venner (de neste tre). Ingen av de tre kan være venner med hverandre for da ville to venner hatt en felles venn. Hver av de tre vennene har to venner til, men ingen kan være venn med mere enn en av de fire første fordi vi da ville hatt to elever som hadde to felles venner, derfor kan vi tegne opp to venner til hver av de siste tre. Dette gir et diagram. Til sist må diagrammet fullføres slik at kriteriene er tilfredsstilt.



Siden alle elevene som ble tegnet opp var nødvendige finnes det ingen løsninger med færre enn ti elever. Det kan heller ikke være flere enn ti siden alle skal være venn med personen i midten av diagrammet eller være venn av en venn.

C

Oppgave 8: Ligningen $f(x) = a$ gir $x - 1/x = a$ eller $x^2 - ax - 1 = 0$. Denne annengradsligningen har alltid to forskjellige løsninger. Dersom har vi at løsningsmengden til $f(x) = 1$ består av to punkter: a_1 og a_2. Tilsvarende har da $f(f(x)) = 1$ fire løsninger: $f(b_1) = a_1$, $f(b_2) = a_1$, $f(b_3) = a_2$ og $f(b_4) = a_2$. Videre gir dette at $f(f(f(x))) = 1$ har åtte løsninger: to for hver b_i der $f(x) = b_i$.

E

Oppgave 9: Vi trenger 11×11 ruter for å få plass til sirkelen. Hvis vi følger sirkelen ved å hoppe fra rute til rute ser vi at en runde gir 10 hopp til venstre og 10 hopp til høyre, samt 10 hopp oppover og 10 hopp nedover. Dette gir totalt 40 hopp før vi er tilbake ved utgangspunktet og derfor 40 ruter. **C**

Oppgave 10: La $q(x) = p(x) - x$. Da er $q(1) = q(2) = q(3) = q(4) = q(5) = q(6) = 0$. Da må $q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$. Ved å sette inn $x = 7$ får vi at $p(7) = q(7) + 7 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 7 = 727$.

E