Abel-konkurransen 1996–97
FINALE

Oppgave 1

Et positivt heltall n kalles lykkelig hvis det finnes hele tall a og b slik at $n = a^2+b^2$. La t være et lykkelig tall.

a) Vis at $2t$ er lykkelig. (5 poeng)

b) Vis at $3t$ ikke er lykkelig. (5 poeng)

Oppgave 2

a) La ABC være en likesidet trekant, og la P være et punkt inne i trekanten. La Q, R og S være fotpunktene til normalene fra P på henholdsvis AB, BC og CA. Vis at summen $PQ + PR + PS$ er uavhengig av valg av P. (5 poeng)

b) La A, B og C være tre forskjellige punkter på en sirkel slik at $AB = AC$. La E være et punkt på linjestykket BC, og la D være skjæringspunktet mellom sirkelen og forlengelsen av AE ($D \neq A$). Vis at produktet $AE \cdot AD$ er uavhengig av valg av E. (5 poeng)

Oppgave 3

a) Hvert utvalg på 97 av 1997 gitte reelle tall har positiv sum. Vis at summen av alle de 1997 tallene er positiv. (3 poeng)

b) På en skole med 91 elever fordelt på 3 klasser var alle elevene med på en konkurranse. For hvert utvalg av 6 elever av samme kjønn fikk minst 2 lik poengsum. Vis at det finnes 4 elever som går i samme klasse, er av samme kjønn og som oppnådde samme resultat i konkurransen. (7 poeng)

Oppgave 4

La $p(x)$ være et polynom med heltallige koeffisienter. Anta at det finnes forskjellige heltall a og b slik at $p(a) = b$ og $p(b) = a$. Vis at ligningen $p(x) = x$ har høyst én heltallig løsning. (10 poeng)