Abel-konkurransen 1996–97

Fasit til første runde

Oppgave 1: Siden $\angle RQS + \angle PQS = \angle PQR = 90°$ og $\angle RQS = \angle PQS + 50°$ blir $\angle RQS + \angle PQS = 2\angle PQS + 50° = 90°$, hvilket gir $\angle PQS = 20°$. **A**

Oppgave 2: Antall tall i sekvensen $a+1, a+2, \ldots, b-1$ er $b-1-a$. Trekk a fra alle tall i sekvensen så ser du det lett. **A**

Oppgave 3: $60.1/0.99$ må være litt større enn 60, mens 3.95 er litt mindre enn 4. Summen må derfor ligge nær 64 og dermed må kvadratroten ligge nær 8. Mere formelt kan man bruke at $60.1/0.99+3.95 > 60+3 = 63$ og at $60.1/0.99+3.95 < 60.1\cdot 1.02+4 < 66$. Altså ligger tallet mellom $\sqrt{63}$ og $\sqrt{66}$. Vi kan så bruke at $7.5^2 < \sqrt{63} < \sqrt{66} < 8.5^2$. **B**

Oppgave 4: Vi er ute etter $(1/8 + 7/12)/2 = (3/24 + 14/24)/2 = 17/48$. **E**

Oppgave 5: Økningen er $n\%$, hvilket er n hundredeler av m: $nm/100$. Summen blir da $m + nm/100 = m(1 + n/100)$. **D**

Oppgave 6: Vinkelen fra minuttviseren til toppen svarer til 25 minutter (tiden til neste hele time) og er dermed $360° \cdot 25/60 = 150°$. Vinkelen fra toppen til timeviseren er $30° \cdot 35/60 = 17.5°$ ($30°$ er den vinkelen timeviseren beveger seg i løpet av en time). Vinkelen blir dermed $167.5°$. **D**

Oppgave 7: Lengden av en halvsirkel er πr (omkretsen av en sirkel er jo $2\pi r$), så radiene til den store og de to små sirkelbuene er henholdsvis 12 og 6. Arealet av en halvsirkel er $\pi r^2/2$, så arealet blir $12^2\pi/2 - 6^2\pi = 36\pi$. **B**

Oppgave 8: Vi har at $1.236 \cdot 10^{15} - 5.23 \cdot 10^{14} = 12.36 \cdot 10^{14} - 5.23 \cdot 10^{14} = (12.36 - 5.23) \cdot 10^{14} = 7.13 \cdot 10^{14}$. **E**

Oppgave 9: Å speile om linjen $y = 4$ svarer til at man bytter ut $y - 4$ med $4 - y$: alternativt at man bytter ut y med $8 - y$. Dersom man gjør det i ligningen $y = 3x + 1$ får man $8 - y = 3x + 1$ som gir $y = 7 - 3x$. **E**

Oppgave 10: Merk at alle leddene kan skrives $2/(n-1)(n+1) = 1/(n-1) - 1/(n+1)$. Dermed blir summen lik $(1/1 - 1/3) + (1/3 - 1/5) + \cdots + (1/19 - 1/21) = 1/1 - 1/21 = 20/21$. **B**

Oppgave 11: Hvis A er beløpet A betalte osv., så har vi at $A+B+C+D=60000$. Vi har da at $A=(B+C+D)/2=(60000-A)/2$ som gir $A=20000$. Tilsvarende blir $B=15000$ og $C=12000$. Dette gir $D=60000-A-B-C=13000$. **B**

Oppgave 12: Når vi adderer 329 og $2x4$ får vi $533+10\cdot x$. Siden dette skal bli $5y3$ ser vi at $y=3+x$. Mulighetene for x er da 0, 1, 2, 3, 4, 5 og 6; dersom $x\geq 7$ får vi mente slik at summen ville blitt større enn 600. For at $5y3$ skal være delelig med 3 må tverrsummen $5+y+3$ være delelig med tre. Dette skjer dersom $5+y+3=8+y=11+x$ er delelig med 3: når x er 1 eller 4. Største mulige x er dermed 4. **B**

Oppgave 13: La O betegne origo. Arealet av RPO er da $3k/2$ ($=PO\cdot$høyden fra $R/2$). Tilsvarende er arealet av QRO lik 10 og arealet av QPO lik 6. Dette gir at arealet av PQR er lik $3k/2+10-6=3k/2+4$. For at dette skal bli 8, må $k=8/3$. **B**

Oppgave 14: Siden vi skal ha $13x=100-4y=4\cdot(25-y)$ må $13x$ være et multiplum av 4; da må x være et multiplum av 4. Siden $0<13x<100$ der x er et multiplum av 4, må $x=4$. Dette gir $y=12$ og dermed $x+y=4+12=16$. **D**

Oppgave 15: Det er to aktuelle veier: rundt sideflaten eller over toppflaten og ned (evt. ned og over grunnflaten). Dersom man ruller ut sideflaten finner man at lengden er hypetenusen der katetene er høyden og halve omkretsen: $\sqrt{4^2+3^2}=5$. Dersom man går over toppflaten blir lengden lik diameteren pluss høyden: $6/\pi+4$. Siden $6>\pi$ blir $6/\pi+4>5$. Den korteste veien er derfor rundt sideflaten: 5 cm. **A**

Oppgave 16: Vi har at $f(1)=f(2-1)=2f(-1)=2f(1)$, hvilket gir $f(1)=0$. Da blir $f(5)=f(2+3)=2f(3)=2f(2+1)=4f(1)=0$. Vi har også at funksjonen $f(x)=0$ er en løsning, så det finnes en slik funksjon. **A**

Oppgave 17: Vi har at $(x^n+a_1x^{n-1}+\cdots)(x+b)=x^{n+1}+(a_1+b)x^n+\cdots$. Ved å benytte denne regelen gjentatte ganger ser vi at $(x-1)(x-2)\cdots(x-100)=x^{100}+(-1-2-\cdots-100)x^{99}+\cdots$ slik at koeffisienten til x^{99} blir $-(1+2+\cdots+100)=-5050$. **E**

Oppgave 18: Siden 8-kanten er regulær, må BE og CD være paralelle og danne en $45°$ vinkel med aksene. Linjen BE har derfor ligningen $y=x+a$ der a er en konstant. Ved å sette inn koordinatene for B finner vi at $a=4$. For punktet E får vi derfor at $q=p+4$ som gir $p-q=-4$. **B**

Oppgave 19: Vi skal ha $n^2+89=m^2$. Dette kan vi skrive om til $89=m^2-n^2=(m-n)(m+n)$. Siden 89 er et primtall (har ingen andre faktorer enn 1 og tallet selv), må en av faktorene $m-n$ og $m+n$ være ± 1. Siden vi har fastlagt at n skal være positiv og vi krever at m skal være positiv for ikke å telle samme kvadrattall to ganger, må vi ha at $m - n = 1$. Dette gir $m = n + 1$ og dermed $89 = 2n + 1$ som gir $n = 44$. Det finnes derfor kun én løsning. **B**

Oppgave 20: La h betegne høyden som vi skal bestemme. Sentrum i den siste kulen må ligge rett over sentrum i kvadratet der sentra til de firer andre kulene er hjørner. Vi trekker en trekant der hypetenusen er linjestykket fra sentrum i den siste kulen til sentrum i en av de andre hjørnene og det siste hjørnet er midtpunktet i kvadratet med sentra for de fire kulene som hjørner. Dette kvadratet ligger en høyde 10 over bordplaten og derfor har den loddrette kateten lengde $h - 10$. Hypetenusen har lengde 20 (2 radier). Den siste kateten har lengde lik avstanden fra ett av hjørene i kvadratet til sentrum i kvadratet; dette er $10\sqrt{2}$. Dermed blir $20^2 = (10\sqrt{2})^2 + (h - 10)^2$, hvilket gir $h = 10 + 10\sqrt{2}$. **C**