Telenor

Abel-konkurransen 1996–97

Fasit til andre runde

Oppgave 1: Parallell med x-aksen finnes 9 linjer. Tilsvarende får vi med y- og z-aksene. I tillegg er det to linjer (diagonaler) i hvert av de tre planene som er parallelle med xy-planet. Tilsvarende for xz- og yz-planene. Videre er det fire linjer som går diagonalt gjennom terningen. Dette gir totalt 49 linjer. **C**

Oppgave 2: Siden $xyz = 78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$ og $x^2 + y^2 + z^2 = 206 < 26^2$ kan hverken x, y eller z være noe annet multiplum av 13 enn 13 selv. Vi kan anta at $x = 13$. Da gjenstår $yz = 6$, $y^2 + z^2 = 37$ som gir at y og z er tallene 1 og 6. Summen $x + y + z$ blir da 20 ($\{x, y, z\} = \{1, 6, 13\}$). **B**

Oppgave 3: Velg E på AB slik at DE er parallell med BC. Da er $BE = CD = 2$. Vi får også $\angle B = \angle CDE = \angle EDA = \angle AED$. Siden AED er likebenet blir $AE = AD = 5$. Dermed blir $AB = AE + BE = 7$. **A**

Oppgave 4: Fordelingen av de fem oppgavene kan være $1+1+3$ eller $1+2+2$. I begge tilfeller er det tre muligheter for hvem som får hvilket antall oppgaver: f.eks. hvem som får tre oppgaver av de tre. For $1 + 1 + 3$ er det fem muligheter for hvilken oppgave den første av dem får og da gjenstår fire muligheter for den andre, hvilket gir 20 muligheter. For tilfellet $1+2+2$ er igjen fem muligheter for den første av dem og så seks muligheter for å fordele de resterende fire oppgavene. Dette gir totalt $3 \cdot (20 + 30) = 150$ muligheter. **E**

Oppgave 5: Vi har at $120 = 10 \cdot 12 = 8 \cdot 15$. Dermed blir $f(120) = 12f(10) + 10f(12) = 15f(8) + 8f(15)$. Ved å sette inn tallene, får vi at $15f(8) = 12 \cdot 19 + 10 \cdot 52 - 8 \cdot 26 = 540$, hvilket gir $f(8) = 36$. **C**

Oppgave 6: Vi har at motstående vinkler i en firkant som er innskrevet i en sirkel har sum lik $180°$. Dette gir at $\angle BCD = 180° - \alpha$. Siden summen av vinklene i BCD skal være $180°$, må $\angle DBC = \alpha - \gamma$. **B**

Oppgave 7: Hvis u er den fjerde løsningen, blir $x^4 + ax^2 + bx + c = (x-1)(x-2)(x-3)(x-u)$. Ganger vi ut finner vi at $x^4 + ax^2 + bx + c = x^4 - (6+u)x^3 + (11+6u)x^2 - (6+11u)x + 6u$, hvilket gir $u = -6$ (siden det ikke er noe x^3 ledd) og dermed at $a = -25$ og $c = -36$. Dette gir $a + c = -61$. **D**

Oppgave 8: Ved å velge $x = 7^2 \cdot 11$ og $y = 7^3 \cdot 11^2$ blir $11x^5 = 7y^3$ og dermed blir differansen null. **E**

Oppgave 9: Forholdet $A_{AB'C'}/A_{ABC} = AB' \cdot AC'/AB \cdot AC$. Ved å bruke at $AB' = AC'$ etc., finner vi $AB' = AC' = (AB + AC - BC)/2$ og tilsvarende for de andre hjørnene. Ved så å bruke $A_{A'B'C'} = A_{ABC} - A_{AB'C'} - A_{A'BC'} - A_{A'B'C}$ får vi $A_{A'B'C'}/A_{ABC} = 1 - 2^2/3 \cdot 5 - 1/3 \cdot 4 - 3^2/4 \cdot 5 = 1/5$. **B**

Oppgave 10: Siden $3M \geq (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + (x_4 + x_5) = 100 + x_4 \geq 100$ er $M \geq 100/3$. Ved å la $x_1 = x_3 = x_5 = 100/3$ og $x_2 = x_4 = 0$ har vi oppnådd $M = 100/3$. **B**