Abel-konkurransen 1997–98
FINALE — FASIT

Oppgave 1

Felles for begge punktene er at vi ser på $x_i = a_i/a_{i-1}$. At $a_i^2 > a_{i-1}a_{i+1}$ er da det samme som at $x_i > x_{i+1}$.

a) Siden $a_0 = 1$ er $x_1 = k$ der vi lar $k = a_1$. Siden $x_{i+1} < x_i$, er følgen x_i strengt avtagende, derfor må $x_i < x_1 = k$ for alle $i > 1$. Siden $x_i = a_i/a_{i-1}$, er

$$a_i = x_i a_{i-1} = \cdots = x_i x_{i-1} \cdots x_1 a_0 < k^i \quad \text{for alle } i > 1.$$

b) Anta at det finnes en n slik at $a_n \leq n$ og la n være den minste slike n: dvs. første tilfelle der $a_n \leq n$. Siden $a_0 = 1 > 0$, må da $n \geq 1$. Vi har da at $a_{n-1} \geq n \geq a_n$ og derfor at $x_n = a_n/a_{n-1} \leq 1$. Siden $x_n > x_{n+1} > \cdots$, vil derfor $x_i < 1$ for $i > n$ og dermed blir $a_i = x_i a_{i-1} < a_{i-1}$ for $i > n$. Vi får da en strengt avtagende følge av positive heltall: $a_n > a_{n+1} > \cdots$. Siden en strengt avtagende følge av heltall før eller siden må inneholde negative tall, er ikke dette mulig.

Oppgave 2

Dersom n er et oddetall er antall felter på brettet odde. Siden alle brikkene dekker 4 felter må antall felter være et partall. Derfor kan ikke n være odde.

Alle brikkene kan danne 4×4-kvadrater; i punkt b kan man faktisk danne 2×4-rektangler. Dersom n er delelig med 4 kan vi stykke brettet opp i 4×4-kvadrater og dekke hvert av disse med 4 brikker. Alle brikkene kan derfor brukes for å dekke brettet dersom n er delelig med fire.

Da gjenstår brett der n er et partall som ikke er delelig med 4: $n = 2m$ der m er et oddetall. Vi trenger da m^2 brikker, hvilket er et odde antall.

a) Farvelegg brettet som et sjakkbrett: annethvert felt sort og hvitt slik at to nabofelter ikke har samme farve. Hver brikke vil da dekke enten 3 sorte og 1 hvitt felt eller 3 hvite og 1 sort. Dersom man teller antall sorte minus antall hvite får man enten $+2$ eller -2 for hver av brikkene. Hvis det er k brikker som dekker 3 sorte og 1 hvitt felt, må det finnes like mange brikker som dekker 3 hvite og 1 sort siden det på brettet (faktisk på hver enkelt linje) er like mange sorte som hvite felter. Da må det være $2k$ brikker, mens vi fra tidligere har at antall brikker, m^2, er odde. Dette gir en selvmotsigelse, så et slikt brett kan ikke dekkes med denne brikken.

b) For de L- og Γ-formedede brikkene løses oppgaven tilsvarende, men her farvelegger vi annenhver rad sort og hvit. Vi finner igjen at hver brikke dekker enten 3 sorte og 1 hvitt felt eller 3 hvite og 1 sort felt, mens det på hele brettet er like mange hvite som sorte felter. Derfra blir beviset som over.

Oppgave 3

a) Hvis vi regner modulo n, får vi at $(n-k)^5 + (n+k)^5 \equiv (-k)^5 + k^5 \equiv 0$: altså er $(n-k)^5 + (n+k)^5$ delelig på n. Alternativt kan vi gange ut og få $(n-k)^5 + (n+k)^5 = n \cdot (2n^4 + 20n^2k^2 + 10k^4)$.

Dersom n er et partall kan summen i oppgaven skrives

$$\left(1^5 + (2n-1)^5\right) + \left(3^5 + (2n-3)^5\right) + \cdots + \left((n-1)^5 + (n+1)^5\right)$$

der hvert av leddene er på formen $(n-k)^5 + (n+k)^5$ og er derfor delelig med n. For n odde kan summen i oppgaven skrives

$$\left(1^5 + (2n-1)^5\right) + \left(3^5 + (2n-3)^5\right) + \cdots + \left((n-2)^5 + (n+2)^5\right) + n^5$$

der hvert av leddene er på formen $(n-k)^5 + (n+k)^5$ eller lik n^5 og er derfor delelig med n. I begge tilfeller er derfor summen delelig med n.

b) Det er et kjent resultat at $P(k) = 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = (1 + 2 + \cdots + k)^2 = k^2(k+1)^2/4$; alternativt kan dette vises med induksjon som vist nedenfor. Vi kan så skrive

$$\begin{aligned}
1^3 + 3^3 + \cdots + (2n-1)^3 &= \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (2n-1)^3\right) \\
&\quad - \left(2^3 + 4^3 + \cdots + (2n-2)^3\right) \\
&= P(2n-1) - 8P(n-1) \\
&= n^2(2n^2-1).
\end{aligned}$$

Summen er derfor delelig med n^2.

For å vise at $1^3+2^3+\cdots+k^3 = P(k)$ der $P(k) = k^2(k+1)^2/4$ brukes induksjon. Det holder opplagt for $k=1$ eftersom dette gir $P(1) = 1$. Hvis vi antar at $P(k-1) = 1^3 + 2^3 + \cdots + (k-1)^3$, så er $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = P(k-1) + k^3$; vi ønsker å vise at dette er lik $P(k)$. Ved å gange ut, finner man lett at $P(k) - P(k-1) = k^3$, dermed blir $P(k-1) + k^3 = P(k)$. Det følger da ved induksjon at $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = P(k)$ for alle k.

Alternativt kan man bevise direkte at $1^3 + 3^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$ ved en tilsvarende induksjon.

Oppgave 4

Vi kan legge det hele inn i et koordinatsystem, plassere A i origo og B i $(1,0)$ med l langs x-aksen. La $P=(p,0)$. Vi kan godt anta at $p>1$ uten tap av generalitet. Videre kan vi la $Q=(0,q)$ og $R=(1,r)$; siden APQ og BPR er likeformede, er $r/q=(p-1)/p=1-1/p$: dette gir at $p=q/(q-r)$.

a) Siden AR og BS står normalt på hverandre er produktet av stigningstallene -1. Siden AR har stigningstall r, må BS ha stigningstall $-1/r$; det gir $S=(0,1/r)$. Tilsvarende får vi at $T=(1,1/q)$. Alternativt er det mulig å benytte seg av at ABT er likeformet med AVB som i sin tur er likeformet med QAB og at vi derfor har $QA/AB=AB/BT$, hvilket gir $BT=1/QA=1/q$.

Linjen ST skjærer x-aksen i punktet $P'=(p',0)$. Som for P, Q og R har vi da at $AP'S$ og $BP'T$ er likeformede og dermed at $BP'/AP'=BT/AS=(1/q)/(1/r)=r/q$. Dette gir at $BP'/AP'=(p'-1)/p'=1-1/p'$ blir lik $r/q=1-1/p$ og dermed at $p=p'$: $P=P'$, så P, S og T ligger på linje.

b) Linjen AR er gitt ved $y=rx$, mens linjen BS er gitt ved $x+ry=1$. Dette gir at $U=(\frac{1}{1+r^2},\frac{r}{1+r^2})$. Tilsvarende blir $V=(\frac{q^2}{1+q^2},\frac{q}{1+q^2})$. Hvis vi regner ut stigningstallet til linjen PU og bruker $p=q/(q-r)$, finner vi at stigningstallet er $(U=(x_U,y_U))$

$$\frac{y_U}{x_U-p}=\frac{\frac{r}{1+r^2}}{\frac{1}{1+r^2}-\frac{q}{q-r}}=\frac{r-q}{1+qr}.$$

Tilsvarende kan vi regne ut stigningstallet til linjen PV:

$$\frac{y_V}{x_V-p}=\frac{\frac{q}{1+q^2}}{\frac{q^2}{1+q^2}-\frac{q}{q-r}}=\frac{r-q}{1+qr}.$$

De to linjene PU og PV har altså samme stigningstall og må derfor være samme linje: P, U og V ligger på en linje.