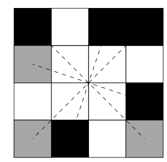
Abel-konkurransen 1997–98

Fasit til første runde

Oppgave 1: Hvis vi legger sammen det vi faller ned, dvs. 5 meter, og trekker fra det vi har gått oppover, dvs. $1 + 2$ meter, blir differansen 2 meter. **B**

Oppgave 2: Vi ser at to kortsider er like lange som en langside i rektangelene. Siden den lange siden er 1, må da de korte sidene være $1/2$. Lengden AB består av en kortside og en langside, dvs. $3/2$. **B**

Oppgave 3: Det vil være par av to og to ruter som er hverandres speilbilder om midtpunktet. Dersom den ene av disse er farget og den andre ikke er det, må den andre av dem farges. Av de fem fargede rutene er det to som er hverandres speilbilder. De resterende tre fargede rutene har speilbilder som må fargelegges for at figuren skal bli symmetrisk. **C**



Oppgave 4: Arealet av en kvartsirkel med radius 2 er π. Arealet av den ikke-skraverte biten som ligger utenfor begge kvartsirklene er $4 - \pi$ der 4 er arealet av 2×2 kvadratet som inneholder kvartsirkelen og vi tar bort arealet av kvartsirkelen. Den andre ikke-skraverte biten er en kvartsirkel med areal π. Det ikke-skraverte området har derfor areal 4. Siden hele rektangelet har areal 6, må arealet av det skraverte området ha areal 2. **B**

Oppgave 5: Det er fire hele uker pluss tre dager i januar. Dermed finnes det tre ukedager som kommer fem ganger. Siden disse kommer på rad og ikke kan inneholde en torsdag eller søndag må de være mandag, tirsdag og onsdag. Første dag i måneden må derfor ha vært en mandag. **A**

Oppgave 6: Siden ABC er likebenet med $\angle A = 100°$, må $\angle B = \angle C = 40°$. Videre er både AB og BC lengre enn radiusen 6, så området som er definert er en sirkelsektor på $40°$. Arealet av denne blir da $\pi 6^2 \cdot 40°/360° = 4\pi$. **B**

Oppgave 7: La v være antall voksne og b være antall barn. Da er $v + b = 50$ og $10v + 5b = 350$. Ved å sette inn $b = 50 - v$ får vi at $10v + 5b = 10v + 250 - 5v = 350$ som gir $5v = 100$, altså $v = 20$. **B**

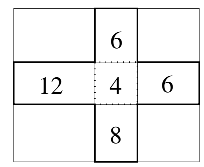
Oppgave 8: Trekk en linje gjennom punktet med vinkel u som er parallell med AB og CD. Denne deler u i to mindre vinkler. Den nederste blir $180° - 150° = 30°$ og den andre blir $35°$. Dette gir at $u = 65°$. **C**

Oppgave 9: Perioden er 6, dvs. at fra 6, 12, 18, osv. ser mønsteret ut som ved 0. Vi har at $1997 = 332 \cdot 6 + 5$, så 1997 ser ut som ved 5. Biten fra 1997 til 2000 blir da lik biten fra 5 til 8. **E**

Oppgave 10: La oss første telle antall hele tall fra 100 til 399 som ikke inneholder 2. Første siffer kan da velges til 1 eller 3: 2 altlernativer. De to andre sifrene kan så velges fritt såfremt de er forskjellige fra 2: altså 9 muligheter for hvert siffer. Dette gir totalt $2 \cdot 9 \cdot 9 = 162$ tall som ikke inneholder 2. Det er totalt 300 tall fra 100 til 399, så det må da være 138 tall som inneholder 2. **B**

Oppgave 11: Tenk deg at mennene plasseres på rekke med nummer fra 1 til 6. Spørsmålet er dermed i hvor mange forskjellige rekkefølger de 6 kvinnene kan ordnes. For den første er det 6 muligheter, for den andre er det igjen 5 muligheter, osv. Totalt antall muligheter blir dermed $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. **D**

Oppgave 12: Omkretsen rundt det store rektangelet er lik omkretsen rundt tolvkanten satt sammen av de fem mindre rektangelene. Denne omkretsen er igjen lik summen av omkretsene til de fire ytterste av disse minus omkretsen til den i midten: dvs. $12 + 8 + 6 + 6 - 4 = 28$. **B**



Oppgave 13: La t og $2t$ være tidsforbruket på de to delene. Tilbakelagt avstand er $800t$ på den første delen og $700 \cdot 3t = 2100t$ totalt. Den siste delen av turen har da lengde $1300t$, hvilket gir gjennomsnittlig hastighet $1300t/2t = 650$. **D**

Oppgave 14: Pytagoras gir at $AC^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2$, så radiusen til sirkelen er 5. Kvartsirkelen har da areal $25\pi/4$. Rektangelet har areal $3 \cdot 4 = 12$, så arealet $a = 25\pi/4 - 12 = 7.63\ldots$. (Det er tilstrekkelig har å bruke at $3.1 < \pi < 3.2$.) **C**

Oppgave 15: Alle myntenhetene er multipla av 3, så alle betalelige beløp må være delelige med 3. Dette kan gjøres på mange forskjellige måter, f.eks. ved å betale med 5×60 og få tilbake 9×33. **C**

Oppgave 16: Vi har $3 = f(2) = f(1) + f(1) + 1$ som gir $f(1) = 1$. Dette gir $f(a+1) = f(a) + a + 1$. Dette gir videre at $f(11) = f(10) + 11 = \cdots = f(1) + 2 + \cdots + 11 = 66$. **B**

Oppgave 17: La m, k og b angi antall menn, kvinner og barn henholdsvis. Da er $m + k = 3b$ og $13m + 10k + 6b = 159$. Ved å sette inn $3b = m + k$ gir dette $15m + 12k = 159$. Ved å dele med 3 blir dette $5m + 4k = 53$. Denne har løsninger $(m, k) = (1, 12)$, $(5, 7)$ og $(9, 2)$. Den eneste av disse som gir $m + k$ delelig med 3 er $(m, k) = (5, 7)$. **C**

Oppgave 18: Siden $1/(1+\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1$ er $(x+\frac{1}{x})^2 = x^2+2+\frac{1}{x^2} = (1+\sqrt{2})+2+(\sqrt{2}-1) = 2+2\sqrt{2} = 2x^2$. Altså er $x+\frac{1}{x} = \sqrt{2}\cdot x$. **C**

Oppgave 19: Vi har at $PQ = QR = RS = SP$ alle er like radiusen til sirkelen. Derfor blir omkretsen 12. **D**

Oppgave 20: Siden $p(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc$ er $a+b+c = -2$ og $ab+ac+bc = -5$. Dette gir $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2-2(ab+ac+bc) = 14$. For $x = a, b, c$ er $x^3 = -2x^2+5x-1$, derfor blir $a^3+b^3+c^3 = -2(a^2+b^2+c^2)+5(a+b+c)-3 = -41$. **D**