Abel-konkurransen 1997–98
Andre runde

Oppgave 1

I en klasse har noen av elevene tysk, de andre har fransk. Antall jenter som har fransk og gutter som har tysk er til sammen 16. Ialt 11 elever har fransk og det er 10 jenter i klassen. Utenom jentene som har fransk er det 16 elever. Hvor stor er klassen?

A) 18 B) 21 C) 23 D) 27 E) 31

Oppgave 2

Hvor mange reelle løsninger har ligningen $|x - |2x + 1|| = 3$. (Her er $|x|$ absolutt-verdien til x: dvs. dersom $x \geq 0$ er $|x| = |-x| = x$.)

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

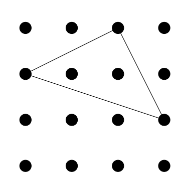
Oppgave 3

La $f_i(x)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ være definert ved at $f_1(x) = \dfrac{1}{1-x}$ og $f_{i+1}(x) = f_i(f_1(x))$. Da er $f_{1998}(1998)$ lik

A) 0 B) 1998 C) $-\dfrac{1}{1997}$ D) $\dfrac{1997}{1998}$ E) Ingen av disse

Oppgave 4

Vi har et kvadratisk nett av 4 ganger 4 punkter. Hvor mange trekanter finnes slik at hjørnene i trekanten ligger på tre av punktene? (De tre hjørnene kan ikke ligge på linje.)



A) 252 B) 256 C) 360 D) 516 E) 560

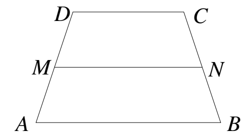
Oppgave 5

Bestem $m > 0$ slik at ligningen $x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2 = 0$ har fire reelle løsninger som danner en aritmetisk rekke: dvs. at løsningene er a, $a + b$, $a + 2b$ og $a + 3b$ for passende a og b.

A) 1 B) 3 C) 7 D) 12 E) Ingen av disse

Oppgave 6

La $ABCD$ være et trapes der $AB||CD$. La $a = AB$ og $b = CD$. Dersom $MN||AB$ er slik at M ligger på AD, N ligger på BC og trapesene $ABNM$ og $MNCD$ har like store arealer, så er lengden av MN lik



A) $\sqrt{ab}$ B) $\frac{a+b}{2}$ C) $\frac{a^2+b^2}{a+b}$ D) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$
E) $\frac{a^2+(2\sqrt{2}-2)ab+b^2}{\sqrt{2}(a+b)}$

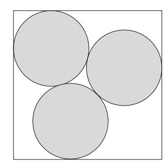
Oppgave 7

For hvor mange heltall m skjærer linjene $13x+11y = 700$ og $y = mx-1$ hverandre i et punkt med heltallige koordinater?

A) Ingen B) 1 C) 2 D) 3 E) Uendelig mange

Oppgave 8

Legg tre sirkelskiver med radius r inn i et kvadrat med sidelengde 1 slik at sirkelskivene ikke overlapper: som på figuren. Hva er da største mulige verdi av r?



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ D) $2\sqrt{2}-\sqrt{6}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

Oppgave 9

Hva er summen $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{1996\cdot 1997\cdot 1998}$ lik?

A) $\frac{2\cdot 1997}{3\cdot 1996\cdot 1998}$ B) $\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 1998}$ C) $\frac{1}{4}-\frac{1}{1997^2}$
D) $\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 1997\cdot 1998}$ E) $\frac{1}{4}-\frac{1}{2\cdot 1997\cdot 1998}$

Oppgave 10

Minimumsverdien til $f(x) = \sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{(x-b)^2+c^2}$ er

A) $a+b+c$ B) $\sqrt{a^2+(b+c)^2}$ C) $\sqrt{b^2+(a+c)^2}$
D) $\sqrt{(a+b)^2+c^2}$ E) Ingen av disse