Abel-konkurransen 1997–98
FINALE — FASIT

Oppgave 1

a) $x = t^2+t+1$ med $t \geq 0$ gir ved å løse en 2.gradslikning at $t = (\sqrt{4x-3}-1)/2$. $f(x) = (\sqrt{4x-3}-1)/2$ tilfredsstiller dermed kravene i oppgaven.

b) Ulikheten kan omskrives slik:

$$(b^2 - ab + \frac{1}{4}a^2) + (c^2 - ac + \frac{1}{4}a^2) + (d^2 - ad + \frac{1}{4}a^2) + (e^2 - ae + \frac{1}{4}a^2) \geq 0.$$

Dette holder siden hver av parentesene kan skrives som et kvadrat. (F.eks. er den første parentesen lik $(b - \frac{1}{2}a)^2 \geq 0$.)

Oppgave 2

a) Likningen kan omskrives slik: $(2m-n)^2 + (n-3)^2 = 9$. Dette gir mulighetene $2m - n = \pm 3, n - 3 = 0$ og $2m - n = 0, n - 3 = \pm 3$, som gir de fire løsningene $(m,n) = (0,3), (3,3), (0,0), (3,6)$.

Alternativ løsning: Vi skriver likningen som $2m^2 - (2n)m + (n^2 - 3n) = 0$. Løser vi med hensyn på m får vi:

$$m = \frac{2n \pm \sqrt{4n^2 - 8(n^2 - 3n)}}{4} = \frac{n \pm \sqrt{n(6-n)}}{2}$$

For at m skal bli hel må $n(6-n)$ være et kvadrattall, det vil si $n = 0$, $n = 3$ eller $n = 6$. Dette gir de fire løsningene $(m,n) = (0,0), (0,3), (3,3), (3,6)$.

b) Vi tenker oss at uttrykket $(a+b+c)^{13}$ er ganget ut. Alle leddene er da på formen $a^i b^j c^k$ der $i + j + k = 13$. Ledd der i, j, k alle er positive vil være delelig med abc, så disse kan vi se bort fra. La oss se på leddene $T_m = a^m b^{13-m}$ for $m = 1, 2, \ldots, 13$. Betingelsene i oppgaven gir at a^3 er delelig med b og at både a^9 og b^3 er delelig med c.
$m = 13$: $T_m = a^{13} = aa^3a^9$ der faktorene er delelige med henholdsvis a, b og c.
$m = 10, 11, 12$: $T_m = a^{m-9}b^{13-m}a^9$ der faktorene igjen er delelige med henholdsvis a, b og c.
$m = 1, 2, \ldots, 9$: $T_m = a^m bb^{12-m}$ som er delelig med abc.
Tilsvarende vil også ledd på formen $b^m c^{13-m}$ og $c^m a^{13-m}$ være delelige med abc.
Alle ledd i $(a+b+c)^{13}$ er dermed delelige med abc.

Oppgave 3

La ΔABC være en likebent trekant med $AB = AC$ og $\angle A = 30°$. Trekanten er innskrevet i en sirkel med senter O. Punktet D ligger på sirkelbuen mellom A og C slik at $\angle DOC = 30°$. La G være punktet på sirkelbuen mellom A og B slik at $DG = AC$ og $AG < BG$. Linjestykket DG skjærer sidene AC og AB i henholdsvis E og F.

a) Ved periferivinkler er $\angle BOC = 60°$, og dermed $\angle AOC = \angle AOB = 150°$. Det følger at $\angle AOD = 120°$. Siden $AC = DG$ er $\angle AOG = \angle GOD - \angle AOD = \angle AOC - 120° = 30°$. Vi får at $\angle COG = 180°$, altså er CG en diameter, og $\angle CAG = 90°$. Dermed er $\angle GAF = \angle CAG - \angle BAC = 60°$, og $\angle AGF = 60°$ siden buen den spenner (AD) er $120°$. Det følger at AFG er likesidet.

b) Siden det er forholdet vi er på jakt etter kan vi sette $AC = AB = DG = 1$, $AE = x$ og $AF = y$. Observer så at $\angle ADE = \angle EAD$ siden vinklene spenner like store sirkelbuer. Dermed er ΔADE likebent, og vi har at $x = AE = ED$. ΔECD er en $30° - 60° - 90°$-trekant ($\angle ECD = 60°$ siden den utspenner en bue på $120°$, mens $\angle CDG = 90°$ siden CG er en diameter). $ED = x$ og $EC = 1-x$ gir at $x/(1-x) = \sin 60° = \sqrt{3}/2$ som igjen gir at $x = 2\sqrt{3}-3$. Siden $\angle GEA = \angle CED = 30°$, er ΔAEF likebent og dermed $y = AF = EF = GF$. Vi har $1 - x = EC = EG$ (siden $AE = ED$ og $AC = DG$), altså er $y = (1-x)/2 = 2 - \sqrt{3}$. Forholdet mellom arealene blir da

$$\Delta AFE/\Delta ABC = \frac{\frac{1}{2}xy\sin 30°}{\frac{1}{2}\sin 30°} = xy = (2\sqrt{3}-3)(2-\sqrt{3}) = 7\sqrt{3} - 12.$$

Oppgave 4

La S være mengden $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. For hver ikketom delmengde R av S definerer vi den alternerende summen $A(R)$ på følgende måte: Hvis $\{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$ er elementene i R ordnet i stigende rekkefølge, så er den alternerende summen lik $A(R) = r_k - r_{k-1} + r_{k-2} - \cdots - (-1)^k r_1$, der $+$ og $-$ kommer annenhver gang. For eksempel er den alternerende summen til $\{1, 3, 4, 7\}$ lik $7 - 4 + 3 - 1 = 5$.

a) La $S(R)$ være summen av elementene i en delmengde R av S. Siden a og $-a$ har samme paritet for alle heltall a, vil $A(R)$ og $S(R)$ også ha samme paritet. Anta R_1 og R_2 er to ikkeoverlappende mengder med union S og med samme alternerende sum. Da er $A(R_1) + A(R_2)$ et partall, og dermed må også $S(R_1) + S(R_2)$ være et partall. Men $S(R_1) + S(R_2) = 1 + 2 + \cdots + 10 = 55$ som er et oddetall. Denne motsigelsen viser at S ikke kan skrives som en union av to ikkeoverlappende mengder som har samme alternerende sum.

b) La oss definere den alternerende summen til den tomme mengden som 0. S har $2^{10} = 1024$ delmengder. Av disse vil $2^9 = 512$ delmengder inneholde tallet 10.

De 1024 delmengdene kan nå ordnes i 512 par på følgende måte: En delmengde fra R som inneholder tallet 10 assosieres til delmengden $R' = R \backslash \{10\}$. (Vi tar altså bare bort tallet 10 fra R.) Siden $A(R) = 10 - A(R')$ er $A(R) + A(R') = 10$. Hvert av de 512 parene (R, R') gir altså et bidrag på 10 til summen. Det følger at den summen det spørres om blir $10 \cdot 512 = 5120$.