# Abel-konkurransen 1998–99

## Fasit til første runde

**Oppgave 1:** Dersom $7x < 100$, så er $x < \frac{100}{7} = 14\frac{2}{7}$. Det største slike heltall er dermed 14. **C**

**Oppgave 2:** En terning har 6 sideflater, 12 kanter og 8 hjørner. Summen er dermed 26. **D**

**Oppgave 3:** Merk at $10^3 = 1000$ mens $2^{10} = 1024$, og at både $10^{-3}$ og $2^{-10}$ er mindre enn en. Alternativene A og C er de eneste som er større enn 1024, henholdsvis $1024^{\frac{1}{1024}}$ og $1024^{\frac{1}{1000}}$. Siden $1000 < 1024$ er $\frac{1}{1000} > \frac{1}{1024}$, så alternativ C er størst. **C**

**Oppgave 4:** Summen av de to likningene gir $3a = (a+b) + (2a-b) = 7 + 17 = 24$, hvilket gir $a = 8$. Da blir $b = -1$ og $a - b = 9$. **E**

**Oppgave 5:** La $n$ være antall trinn. Når Per er kommet halvveis opp, har han tatt $\frac{n}{2}$ trinn; Kari har da tatt $\frac{n}{2} - 52$ trinn. Når Per er kommet helt opp, har han tatt $n$ trinn og Kari $n - 52$ trinn. Siden Kari da er kommet tre ganger så langt, er $n - 52 = 3 \cdot (\frac{n}{2} - 52)$. Ved å løse denne likningen finner man at $n = 208$. **C**

**Oppgave 6:** Anta at punktene ligger på linjen $y = ax + b$. Ved å sette inn $(x, y) = (2, -3)$ og $(4, 3)$ får vi at $2a + b = -3$ og $4a + b = 3$. Differansen $2a = (4a + b) - (2a + b) = 3 - (-3) = 6$ gir $a = 3$; da blir $b = -9$. Dersom $(5, \frac{k}{2})$ ligger på linjen, må $\frac{k}{2} = 5a + b = 5 \cdot 3 - 9 = 6$, hvilket gir $k = 12$. **D**

**Oppgave 7:** Hvis vi legger til $x$ i teller og nevner på begge brøkene, får vi at $\frac{2+x}{3+x} = \frac{20+x}{23+x}$. Det er mulig å gange opp med nevnerne og så løse den likningen man får. En annen metode er å se at det må finnes et tall $k$ slik at $20 + x = k \cdot (2 + x)$ og $23 + x = k \cdot (3 + x)$. Trekker vi den første likningen fra den siste, får vi at $3 = (23 + x) - (20 + x) = k \cdot (3 + x) - k \cdot (2 + x) = k$, hvilket gir $k = 3$. Da får vi likningen $20 + x = 6 + 3x$, som gir $x = 7$. Dette er en faktor i $56 = 7 \times 8$. **C**

**Oppgave 8:** Ved å sette inn $n = 1$ får man $a_1^2 - a_0a_2 = 3^2 - a_2$ som skal være lik $(-1)^1 = -1$; dette gir $a_2 = 10$. Ved å sette $n = 2$ får man $a_2^2 - a_1a_3 = 10^2 - 3a_3$ som skal være lik $(-1)^2 = 1$; dette gir $a_3 = 33$. **D**

**Oppgave 9:** La sirkelen ha radius $r$, og la $x$ være sidelengden i det lille kvadratet (det som ligger i halvsirkelen.) Dersom vi trekker en linje fra sentrum i sirkelen til et av hjørnene på sirkelbuen, får vi en rettvinklet trekant der hypotenusen har lengde $r$ og katetene har lengder $x$ og $\frac{x}{2}$. Pytagoras' setning gir at $r^2 = x^2 + (\frac{x}{2})^2 = \frac{5}{4}x^2$, og det følger at arealet av dette kvadratet blir $K_1 = x^2 = \frac{4}{5}r^2$.

La så $y$ betegne sidelengden i det store kvadratet. Fordi diagonalen til kvadratet også er en diameter i sirkelen, har den lengden $2r$. Pytagoras gir at $y^2 + y^2 = (2r)^2$, og derfor blir $y^2 = K_2 = 2r^2$. Forholdet $K_1 : K_2$ er da $\frac{2}{5}$. **B**

**Oppgave 10:** Siden 3 er et oddetall er også $3^{11}$ et oddetall; tilsvarende er $5^{12}$ et oddetall. Summen $3^{11} + 5^{12}$ blir dermed et partall: det er delelig med 2. Siden 2 er det minste primtall som finnes, og 2 deler $3^{11} + 5^{12}$, er svaret 2. **A**

**Oppgave 11:** Det første punktet kan velges på 12 forskjellige måter og det andre på 11 forskjellige måter. Siden hvert par av punkter kan velges i to forskjellige rekkefølger, er da hvert par tatt med to ganger. Antallet par blir altså $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$. **C**

**Oppgave 12:** Trekk linjestykker fra sentrum i sirkelen til punktene der linjene tangerer sirkelen; disse to linjestykkene skjærer ut en tredjedel av sirkelen. Linjen fra sirkelsenteret til $A$ deler $\angle A$ i to like store deler, slik at trekanten bestemt av punktene $A$, sirkelsenteret og ett av tangeringspunktene, er en $30°$–$60°$–$90°$-trekant. Siden den korteste kateten, radiusen, er 1, er hypotenusen 2; den andre kateten blir dermed $\sqrt{3}$ ifølge Pytagoras' setning. Trekanten har dermed areal $\frac{\sqrt{3}}{2}$, og de to trekantene som utgjør det skraverte området pluss sirkelsektoren har areal $\sqrt{3}$. Sirkelen har areal $\pi$, og siden sirkelsektoren utgjør en tredjedel, har denne areal $\frac{\pi}{3}$. Arealet av det skraverte området er derfor $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$. **A**

**Oppgave 13:** Vi har $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2} - 1$ og $\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$. Vi kan også merke oss at $\sqrt{2}(2 - \sqrt{2}) = 2(\sqrt{2} - 1)$. Ved å sette inn disse uttrykkene får vi at $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{\sqrt{3}-1} = (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{2} - 1) - (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} + 1) = 0$. **A**

**Oppgave 14:** La $S$ være sentrum i sirkelen, og la $A$ og $B$ være to nabohjørner på åttekanten. Trekanten $SAB$ er da en likebent trekant med $\angle S = 45°$. Arealsetningen gir at arealet av trekanten blir $\frac{1}{2} \cdot SA \cdot SB \cdot \sin 45° = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$. Det er åtte slike trekanter i åttekanten, og det samlede arealet er derfor $32\sqrt{2}$. **B**

**Oppgave 15:** En heltallig løsning av likningen er $(m, n) = (20, 0)$. De andre kan man få ved å legge til $5k$ på $n$ og trekke fra $6k$ fra $m$ der $k$ er et heltall: $m = 20 - 6k$, $n = 5k$. Dette gir $nm = 30(\frac{10}{3}k - k^2) = 30((\frac{10}{6})^2 - (k - \frac{10}{6})^2)$. Dette uttrykket er størst mulig når $k$ ligger nærmest mulig $\frac{10}{6}$: det vil si for $k = 2$. Da blir $m = 8$, $n = 10$ og $nm = 80$. **C**

**Oppgave 16:** Siden 89 er et primtall må $a, b \in \{1, -1, 89, -89\}$. Dersom $a = \pm 1$, får vi at $a = \pm 1 < b < a^2 = 1$, hvilket ikke er mulig for $b = \pm 89$. Dermed må $a = \pm 89$ og $b = \pm 1$; men for $a = 89$ og $b = \pm 1$ blir $a = 89 < b$ umulig, så eneste mulighet er $a = -89$, $b = -1$. Ved å sette inn finner vi at dette er en løsning. **B**

**Oppgave 17:** La $AC = 2x$ og $BC = 2y$. Da er $AD^2 = (2x)^2 + y^2$ og $BE^2 = x^2 + (2y)^2$. Vi ønsker å finne $AB = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$. Vi tar summen $AD^2 + BE^2 = 5(x^2 + y^2)$ som også er lik $7^2 + 4^2 = 65$: det gir $x^2 + y^2 = 13$. Dermed har vi at $AB = 2\sqrt{13}$. **C**

**Oppgave 18:** Vi har at $x > y$. For at $x^3 + y^4$ skal bli negativ, må $x < 0$. Vi finner for eksempel at $x = -0.3$ og $y = -0.4$ gir $x^3 + y^4 = -0.027 + 0.0256 < 0$. Dersom vi setter $x = 0$ og $y = -1$, vil de tre siste uttrykkene, $x^4 + y^3$, $x^3 + y^3$ og $x^4 - y^4$, alle bli lik $-1$. Dermed er ingen av uttrykkene positive for alle $x$ og $y$. **A**

**Oppgave 19:** La $S$ være sentrum i sirkelen; da danner $CDS$ en rettvinklet trekant med kateter av lengder 5 og 12 og dermed med hypotenus $13 = \sqrt{5^2 + 12^2}$. La sirkelen tangere $AB$ i punktet $P$. $C$ $S$ og $P$ ligger da på linje og trekantene $CDS$ og $CPA$ er likeformede. Siden $SP = 5$ og $CS = 13$, er $CP = 18$. På grunn av likeformetheten er $\frac{AC}{CP} = \frac{CS}{CD} = \frac{13}{12}$, og $CP = 18$ gir til slutt $AC = \frac{39}{2}$. **B**

**Oppgave 20:** Del tallene fra 1 til 100 inn i grupper: $X_1 = \{1, 11, 21, \ldots, 91\}$, ..., $X_{10} = \{10, 20, \ldots, 100\}$. At summen av to forskjellige elementer i $A$ ikke skal være delelig med 10, betyr følgende: $A$ kan ikke innholde to forskjellige elementer fra $X_5$ eller to forskjellige elementer fra $X_{10}$, men høyst ett element fra hver av de to; $A$ kan ikke inneholde elementer fra både $X_1$ og $X_9$, fra både $X_2$ og $X_8$, fra både $X_3$ og $X_7$, eller fra både $X_4$ og $X_6$. For å få med flest mulig elementer i $A$ vil man da ha med ett element fra $X_5$ og ett element fra $X_{10}$; videre vil man ta med hele $X_1$ eller hele $X_9$, hele $X_2$ eller hele $X_8$, hele $X_3$ eller hele $X_7$, og hele $X_4$ eller hele $X_6$. Det er ti elementer i hver $X_i$-gruppe, så dette gir 42 elementer. **A**