Abel-konkurransen 1999–2000

FINALE - 3. februar 2000

Tid: 4 timer
På hver oppgave gis det inntil 10 poeng

Oppgave 1

a) Vis at ethvert oddetall kan skrives som differansen mellom to kvadrattall.

b) Avgjør om det finnes en uendelig følge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ av positive heltall slik at for alle $n \geq 1$ er summen $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$ et kvadrattall.

Oppgave 2

a) La x, y og z være reelle tall slik at $x + y + z = 0$. Vis at $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

b) La a, b, c og d være ikkenegative reelle tall slik at $a + b + c + d = 4$. Vis at

$$\sqrt{a+b+c} + \sqrt{b+c+d} + \sqrt{c+d+a} + \sqrt{d+a+b} \geq 6.$$

Oppgave 3

a) Hvert punkt på omkretsen av et kvadrat er fargelagt enten rødt eller blått. Vis at det finnes en rettvinklet trekant der alle hjørnene ligger på kvadratets omkrets, og slik at alle hjørnene ligger på punkter av samme farge.

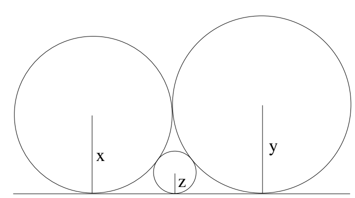
b) Vis at det er mulig å fargelegge hvert punkt på omkretsen av et kvadrat rødt, hvitt eller blått slik at det ikke finnes en rettvinklet trekant der alle de tre hjørnene ligger på punkter av samme farge.

Oppgave 4

Likningen $x^c + y^c = z^c$ kan for enkelte verdier av c illustreres geometrisk. For eksempel kan tilfellet $c = 2$ illustreres ved en rettvinklet trekant. Med dette mener vi at x, y, z er en løsning av likningen $x^2 + y^2 = z^2$ hvis og bare hvis det finnes en rettvinklet trekant med kateter x og y og hypotenus z. I denne oppgaven skal vi se på tilfellene $c = -\frac{1}{2}$ og $c = -1$.

a) La x, y og z være radiene i tre sirkler som tangerer hverandre og en linje, som vist på figuren. Vis at

$$x^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}} = z^{-\frac{1}{2}}.$$



b) Tegn en geometrisk figur som på tilsvarende måte illustrerer tilfellet $c = -1$. Figuren skal kunne konstrueres med passer og linjal. Beskriv en slik konstruksjon, og bevis at det på figuren er linjestykker x, y og z som tilfredsstiller $x^{-1} + y^{-1} = z^{-1}$. (Alle positive løsninger av denne likningen skal kunne være mulige verdier for x, y og z på en slik type figur, men det trenger du ikke bevise.)