Abel-konkurransen 1999–2000
FINALE — FASIT

Oppgave 1

a) Hvis $m = 2t + 1$ er et oddetall, kan vi skrive $m = (t+1)^2 - t^2$ som er en differanse mellom to kvadrattall.

b) Det finnes en slik følge. En mulig konstruksjon er følgende: La $a_1 > 2$ være et oddetall. Da er a_1^2 også odde, og vi vet fra løsningen av a) at vi kan finne positive tall p og q slik at $a_1^2 = q^2 - p^2$, med andre ord $a_1^2 + p^2 = q^2$. Vi lar $a_2 = p$. Vi vet at modulo 4 er et odde kvadrattall alltid kongruent med 1, mens et jevnt kvadrattall er kongruent med 0. Dette gir som eneste mulighet at p er jevn og q er odde. Vi kan nå gjenta prosessen med q^2 som utgangspunkt i stedet for a_1^2, og på den måten få konstruert et partall a_3 slik at $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ er et kvadrat. Ved induksjon kan vi utvide følgen i det uendelige.

Oppgave 2

a) Setter vi $z = -x - y$, får vi $x^3 + y^3 + z^3 = x^3 + y^3 + (-x-y)^3 = x^3 + y^3 - x^3 - y^3 - 3x^2y - 3xy^2 = 3xy(-x-y) = 3xyz$.

b) Siden $d \geq 0$ er $\sqrt{a+b+c} = \frac{1}{2}\sqrt{a+b+c+d}\sqrt{a+b+c} \geq \frac{1}{2}(a+b+c)$. Tilsvarende for de tre andre rotuttrykkene. Summererer vi de 4 ulikhetene vi nå har, får vi

$$\sqrt{a+b+c} + \sqrt{b+c+d} + \sqrt{c+d+a} + \sqrt{d+a+b} \geq \frac{3}{2}(a+b+c+d) = 6.$$

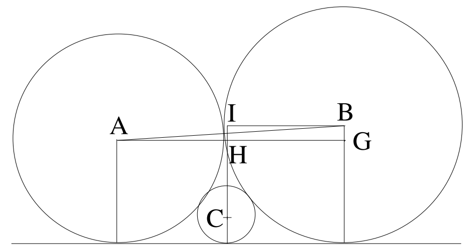
Oppgave 3

a) Anta at det ikke finnes en slik trekant. La $ABCD$ være kvadratet, og la K, L, M og N være midtpunktene på henholdsvis AB, BC, CD og DA. Vi ser at K og M må ha forskjellig farge, for dersom begge var (for eksempel) blå, måtte alle firkantens hjørner være røde, noe som gir en motsigelse. På samme måte må L og N være forskjellige, og vi kan anta uten tap av generalitet at K og L er røde, mens M og N er blå. Da må punktet B være blått, mens D må være rødt. Men uansett hvilken farge vi gir A vil vi nå få en ensfarget rettvinklet trekant: enten DAK eller NAB. Vi har dermed oppnådd en motsigelse.

b) Følgende fargelegging fungerer med 3 farger (rødt, hvitt og blått): La siden AB, inkludert endepunktene A og B, være rød. Fargelegg det indre (altså ikke endepunktene) av AD hvit og det indre av BC blå. Punktene D og C lar vi være henholdsvis blått og hvitt. Til slutt farger vi det indre av siden CD enten hvit eller blå. Det finnes nå opplagt ingen ensfargete rettvinklete trekanter med hjørner på kvadratets omkrets.

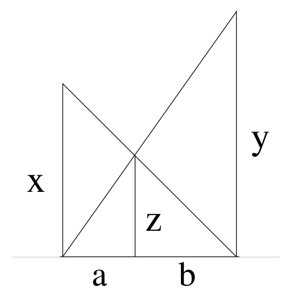
Oppgave 4

a) La punktene A, B, C, G, H og I være som vist på figuren. (Punktet I er konstruert slik at vinkel CIB er rett, og H er skjæringspunktet mellom CI og AG.) Løsningen bygger på å finne to forskjellige uttrykk for lengden AG. Først, fordi $AB = x+y$ og $BG = y-x$, gir pythagoras at $AG^2 = (x+y)^2 - (y-x)^2 = 4xy$, slik at $AG = 2\sqrt{xy}$.



Bruker vi på tilsvarende måte pythagoras på trekantene AHC og GHC får vi at $AH = 2\sqrt{xz}$ og $HG = 2\sqrt{yz}$. Fordi $AG = AH + HG$, har vi derfor at $2\sqrt{xy} = 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{yz}$, og ved å dele overalt med $2\sqrt{xyz}$ får vi den ønskede relasjonen.

b) En løsning er denne figuren, der x, y og z er lengdene av tre parallelle linjer. For å konstruere figuren trekker man først den vannrette linjen, og deretter to parallelle linjestykker opp fra denne. Så forbindes toppunktet på den ene linjen med fotpunktet på den andre, og omvendt. Til slutt konstrueres en linje gjennom skjæringspunktet parallell med de to andre parallelle linjene. Ved å betrakte noen likeformede trekanter får vi lett følgende to likninger (a og b er definert på figuren): $\frac{(a+b)}{x} = \frac{b}{z}$ og $\frac{(a+b)}{y} = \frac{a}{z}$. Ved å legge sammen disse to likningene får vi



$$\frac{a+b}{x} + \frac{a+b}{y} = \frac{a+b}{z},$$

og etter divisjon med $a+b$ er vi framme.

En annen løsning er et kvadrat innskrevet i en rettvinklet trekant som vist på figuren. Konstrueres ved først å tegne en vilkårlig rettvinklet trekant, og så markere punktet der halveringslinjen til det rettvinklete hjørnet treffer hypotenusen. Ved å regne ut arealet av trekanten på to måter, ser vi at $\frac{xz}{2} + \frac{yz}{2} = \frac{xy}{2}$, og ved å dele på $\frac{xyz}{2}$ på begge sider, oppnår vi det ønskede resultat.