Telenor

Abel-konkurransen 1999–2000

Fasit til første runde

Oppgave 1: Uttrykket $\pi^3 \cdot 3^\pi$ kan ikke omskrives til noen av de angitte forslagene. **E**

Oppgave 2: $14x + 1 = 2(7x + 1) - 1 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$. **C**

Oppgave 3: Terningen har $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ øyne og 6 sider. Gjennomsnitt per side blir da $21/6 = 3\frac{1}{2}$. **D**

Oppgave 4: Det er 6 gutte-elever og 12 jente-elever. Tilsammen 18 elever. **D**

Oppgave 5: Hvis x er sidelengden i kvadratet, finner vi ved Pythagoras at diagonalen har lengde $\sqrt{2}x$. Altså er $x = \sqrt{2}$ og arealet blir $x^2 = 2$. **B**

Oppgave 6: La K være antall kuer og H antall høner. Da er $4K+2H = 2(K+H)+14$. Denne likningen gir $2K = 14$, altså er det 7 kuer. **C**

Oppgave 7: Tallet 10! kan ikke ha noen primfaktorer større enn 10. 10! kan dermed ikke være delelig med primtallet 13, og derfor heller ikke med $4 \cdot 13 = 52$. **B**

Oppgave 8: Ved å bruke Pythagoras finner man at høyden i trekanten er $\sqrt{3/4}$ og radien i sirkelen er $\sqrt{3/16}$. Arealet av trekanten blir da $\frac{1}{4}\sqrt{3}$, mens arealet av halvsirkelen blir $\frac{3}{32}\pi$. Arealet av det skraverte området er differensen av de to arealene vi har funnet: $\frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{3}{32}\pi = \frac{1}{4}(\sqrt{3} - \frac{3}{8}\pi)$. **C**

Oppgave 9: Siden summen $p+q = 111$ er et oddetall, må enten p eller q være et partall. Eneste primtall som er partall er 2, altså er $q = 2$ og $p = 109$. Dermed er $p - q = 107$. **D**

Oppgave 10: Anta vi har tatt ut N sokker. Fjern så en sokk fra hver av de fargene som opptrer i et odde antall. Alle de resterende sokker kan da parres. Hvis vi har 24 sokker har vi høyst 4 farger med et odde antall, så vi står igjen med minst 20 sokker eller 10 par etter en slik fjerning. 23 sokker kan være fordelt på de 5 fargene med henholdsvis 5, 5, 5, 5 og 3 som bare gir 9 par av sokker. Man må altså ta ut 24 sokker for å være sikker på å få minst 10 par. **C**

Oppgave 11: $(1+\sqrt{2})^4 = (3+2\sqrt{2})^2 = 17+12\sqrt{2}$. Siden $(12\sqrt{2})^2 = 288$ og $(16,5)^2 = 272,25 < 288 < 289 = 17^2$ ligger $12\sqrt{2}$ mellom 16,5 og 17. Det følger at $(1+\sqrt{2})^4$ ligger mellom 33,5 og 34. **D**

Oppgave 12: Kall sentrum i sirklene for O, tangeringspunktet for T og la R og r være radiene i henholdsvis den store og den lille sirkelen. Ved å bruke Pythagoras på trekanten OTP ser vi at $R^2 - r^2 = 8^2$. Arealet av området mellom sirklene blir da $\pi R^2 - \pi r^2 = 64\pi$. **B**

Oppgave 13: La oss bare betrakte de tre yngste barna. I utgangspunktet er det 8 like sannsynlige muligheter for kjønnsfordelingen: GGG, GGJ, GJG, GJJ, JGG, JGJ, JJG, JJJ, der den første bokstaven angir kjønnet til det yngste barnet osv. Eneste tilleggsopplysning gitt i oppgaven er at JJJ ikke kan forekomme. Det gjenstår da 7 muligheter som alle er like sannsynlige, og 3 av disse har en jente som yngste barn. Sannsynligheten er dermed 3/7. **C**

Oppgave 14: Dersom alle bokstavene hadde vært forskjellige hadde vi fått $7! = 5040$ forskjellige ord. Siden det er 2 K'er og 2 R'er i KORREKT må dette tallet deles på $2!2!$. Antall kombinasjoner blir da $5040/4 = 1260$. **E**

Oppgave 15: Ved bare å kjøpe esker med 6 eller 9 skruer kan man få et hvert antall på formen $3k$ der $k \geq 2$ (dvs. 6, 9, 12, 15, 18 osv.). Med en 20-pakning i tillegg oppnår man alle antall på formen $3k+2$ som er større eller lik 26 (dvs. $26, 29, 32, \ldots$). Tilsvarende, med 2 20-pakninger oppnår man alle antall på formen $3k+1$ som er større eller lik 46 (dvs. $46, 49, 52, \ldots$). Alt over 43 kan altså oppnås ved enten ingen, en eller to 20-pakninger, men 43 er ikke mulig. **D**

Oppgave 16: $2160 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$. Divisorer til dette tallet er tall på formen $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ der $a \in \{0,1,2,3,4\}$, $b \in \{0,1,2,3\}$ og $c \in \{0,1\}$. Det er altså 5, 4 og 2 muligheter for henholdsvis a, b og c, så totalt blir det $5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$ slike tall. **A**

Oppgave 17: La O være sirkelens sentrum, la T være trekantens toppunkt, la A være et annet av trekantens hjørner, og la B være punktet der AT skjærer sirkelbuen. Siden buen til en halvsirkel er $180°$, må hver av de to buene som er utenfor trekanten være $40°$. AOB er dermed en likebent trekant med toppvinkel $40°$. Dermed er $\angle OAB = 70°$. De to like vinklene i den opprinnelige likebente trekanten er altså $70°$ og det følger at toppvinkelen u er $40°$. **B**

Oppgave 18: $1260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. For at et tall skal være en 3.potens må alle eksponentene være delelige med 3. Minste n slik at $1260n$ har denne egenskapen er $n = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 7350$. **E**

Oppgave 19: La D være skjæringspunktet mellom BC og halveringslinjen til $\angle A$. La h være avstanden fra A til linjen BC, og la s være avstanden fra D til hver av linjene AC

og AB (disse avstandene er like siden D ligger på halveringslinjen). Cosinussetningen gir at $AC^2 = 2AB^2 - 2AB^2 \cos 120°$ som igjen gir $AC = \sqrt{3}AB$. Nå har vi at

$$\frac{CD}{DB} = \frac{CD \cdot h}{DB \cdot h} = \frac{Areal(ACD)}{Areal(ADB)} = \frac{AC \cdot s}{AB \cdot s} = \frac{AC}{AB} = \sqrt{3}$$

E

Oppgave 20: Setter vi $y = 0$ får vi likningen $f(x) = f(x)f(0) + f(x) + f(0)$ som kan omskrives til $f(0)(f(x)+1) = 0$. Siden $f(0) \neq 0$ må vi ha at $f(x) + 1 = 0$ for alle x. Det vil si at $f(x) = -1$, og denne funksjonen tilfredsstiller også betingelsene i oppgaven. Dermed er $f(6) = -1 < 0$. **A**