Telenor

Abel-konkurransen 1999–2000

Fasit til andre runde

Oppgave 1: Ved konjugatsetningen er uttrykket lik $777 - 66 = 711$. **711**

Oppgave 2: 3 elementer fra en mengde på 8 kan velges på $\binom{8}{3} = 56$ måter. For hver av disse er det 3 mulige valg av formann. Totalt blir det altså $56 \cdot 3 = 168$ muligheter. **168**

Oppgave 3: Vi setter $xy = 6$ inn i den andre likningen og får $7(x+y) = 63$ eller $x + y = 9$. Kvadrering gir $x^2 + y^2 + 2xy = 81$ og dermed $x^2 + y^2 = 81 - 2xy = 81 - 12 = 69$. **69**

Oppgave 4: La A være sentrum i sirkelen og B tangeringspunktet mellom linja og sirkelen. Pythagoras brukt på trekanten PAB gir likningen $(24 + 12)^2 + r^2 = (24 + r)^2$, som gir $r = 15$. **15**

Oppgave 5: Hvis $u \geq 39$ vil det finnes minst 39 heltall mellom $20u$ og $21u$, og minst to av disse vil være delelig med 19. Men hvis $u = 38$ er både $20u$ og $21u$ delelig med 19, og det eneste tall imellom som er delelig med 19 er $20u + 19$. **38**

Oppgave 6: Observer først at vi ved den siste betingelsen ikke kan ha 4 tall i S som har forskjellig siste siffer. Det er dermed høyst tre muligheter for siste siffer til tallene i S og det er høyst hundre tall i S med et gitt siste siffer. Dette gir maksimalt 300 tall i S, som er oppnåelig ved f.eks. å la S bestå av alle tall mellom null og tusen som slutter med 1, 2 eller 3. **300**

Oppgave 7: La polynomet $4x^2 - 30x + 12$ ha røttene y_0 og y_1. Da kan vi skrive $4x^2 - 30x + 12 = 4(x^2 - \frac{15}{2}x + 3) = 4(x - y_0)(x - y_1)$, og vi ser at $y_0 + y_1 = \frac{15}{2}$. Vi ser at $p(x)$ har nullpunktene $2y_0 + 1$ og $2y_1 + 1$, og summen av disse er $2(y_0 + y_1) + 2 = 17$. **17**

Oppgave 8: La P være skjæringspunktet mellom AE og CD, og sett $a = PA, b = PE, c = PD, d = PC$. Observer at $AC = 2 \cdot DE$ og at trekantene EPD og APC er formlike. Dermed er $a = 2b$ og $d = 2c$. Pythagoras gir nå $a^2 + c^2 = 9$ og $b^2 + d^2 = 16$. Legger vi sammen disse to likningene får vi $5b^2 + 5c^2 = 25$. Dette gir $AC^2 = a^2 + d^2 = 4b^2 + 4c^2 = 20$. **20**

Oppgave 9: Sett $p(x) = (3x^2 - x - 2)^6 = a_{12}x^{12} + a_{11}x^{11} + \ldots + a_1 x + a_0$. Da er opplagt $p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{12}$ og $p(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + a_{12}$. Dette gir at $a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{12} = \frac{1}{2}(p(1) + p(-1)) = \frac{1}{2}(0 + 2^6) = 32$. **32**

Oppgave 10: Hver gang man trekker en ny linje vil man dele i to alle områder denne linjen kommer innom. Dette antallet er en mer enn antall linjer den nye linjen skjærer. La oss starte med det ene hjørnet. Trekker vi de n linjene får vi $n + 1$ områder. Hver av linjene fra det neste hjørnet vil skjære n linjer og vil dermed gi opphav til $n+1$ nye områder. Så langt har vi altså $2n$ linjer og $(n+1)^2$ områder. Hver av linjene fra det siste hjørnet gir et bidrag på $2n + 1$ til antall områder. Totalt antall områder er dermed $S_n = (n+1)^2 + n(2n+1) = 3n^2 + 3n + 1$. Setter vi $n = 10$ får vi $S_{10} = 331$. **331**