Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
Første runde 2021-2022 – *Løsninger*

11. november 2021

Oppgave 1. Szymon har 13 valg av forrett. For hvert av disse valgene, kan han velge en av 12 hovedretter. I alt $13 \cdot 12 = 156$ muligheter. . . . . **E**

Oppgave 2. Kall radien r. De to halvsirklene kan settes sammen til en hel sirkel med areal πr^2. La oss kalle kateten i trekanten a. Hypotenusen i trekanten har lengde $4r$, så Pytagoras gir oss $a^2 + a^2 = (4r)^2$, og derfor $a^2 = 8r^2$. Arealet av trekanten blir $\frac{1}{2}a^2 = 4r^2$, slik at hele figuren får areal $4r^2 + \pi r^2 = (4+\pi)r^2$. Men da er $(4 + \pi)r^2 = 1$, og dermed $r = 1/\sqrt{4+\pi}$. . . . . **B**

Oppgave 3. Mulighetene med ett siffer er 0, 6 og 9. Med to siffer kan vi få til 77, 14 og 41. Med tre siffer kan vi få til 111. Flere muligheter finnes ikke. Summen av disse tallene er 258. . . . . **D**

Oppgave 4. Vi multipliserer det første kjøpet med 3, og det andre med 2: Ni epler, tolv bananer og seks pærer koster da 189 kroner, mens ti epler, tolv bananer og seks pærer koster 194 kroner. Derfor koster ett eple $194 - 189 = 5$ kroner, og vi kan få kjøpt $120/5 = 24$ epler for 120 kroner. . . . . **C**

Oppgave 5. Det er 6^3 mulige utfall når du kaster tre terninger. For at produktet skal bli et *oddetall*, må alle terningene gi oddetall. Det kan skje på 3^3 måter. Sannsynligheten for å få oddetallsprodukt, er derfor $3^3/6^3 = (\frac{3}{6})^3 = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$. Sannsynligheten for å få et partallsprodukt er så $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$. . . . . **E**

Oppgave 6. Trekantene OCE og OCA er halvparten av henholdsvis romben $OCDE$ og $OCBA$, og hver av disse rombene er en tredjepart av hele sekskanten, altså med areal $\frac{1}{3}$. Det blir da også arealet av firkanten $ACEO$. . . . . **A**

Oppgave 7. Først er $B > \sqrt{16} = D > E$. Videre er $B^6 = 17^3 < 18^3 = 8 \cdot 9^3 < 9^4 = C^6$, så $C > B$. Til sist er $A^3 = 80 < 81 = C^3$, så $C > A$. . . . . **C**

Oppgave 8. Det endrer ikke noe om du skriver alle tallene med fire siffer, med ledende nuller om det trengs. Altså 0001, 0002, 0003 og så videre. Da skriver du opp alle tekststrenger med lengde 4, som inneholder ett av de ni symbolene $0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9$. Sifferet 1 forekommer i *første* posisjon i 9^3 av disse, og i *andre* posisjon i 9^3, og tilsvarende i *tredje* og *fjerde* posisjon. Tilsammen skriver du da $4 \cdot 9^3$ enere. Siste siffer i 9^3 er 9, så siste siffer i $4 \cdot 9^3$ er 6. . . . . **D**

Oppgave 9. Vi regner ut nevneren i de forskjellige brøkene nedenfra:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} &= 1,\\
\frac{1}{4} + \frac{1}{1} &= \frac{5}{4},\\
\frac{1}{5} + \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} &= 1,\\
\frac{1}{6} + \frac{1}{1} &= \frac{7}{6},
\end{aligned}
$$

og så videre. Her er det et mønster: Nevneren på formen $\frac{1}{n} + \frac{1}{\cdots}$ får verdien 1 når n er et oddetall, men verdien $\frac{n+1}{n}$ når n er et partall. Siden 2020 er et partall, ender vi opp med $\frac{2021}{2020}$. . . . . D

Oppgave 10. Alle unntatt D kan være feil. Moteksempler: A $x = 0{,}05$ og $y = 0{,}1$; B $x = 1$ og $y = 2$; C $x = -2$ og $y = -1$, og E $x = -1$ og $y = 1$. Men D holder alltid, fordi $y^3 - x^3 = (y-x)(y^2+xy+x^2)$ og $y^2 + xy + x^2 > |y|^2 - 2|x| \cdot |y| + |x|^2 = (|y| - |x|)^2 \geq 0$. . . . . D

Oppgave 11. Når $n \neq 0$, vil ikke ℓ_n og ℓ_{-n} skjære hverandre, siden ligningene for de to linjene blir

$$n^4 y + \frac{x}{n^2+1} \pm n = 0,$$

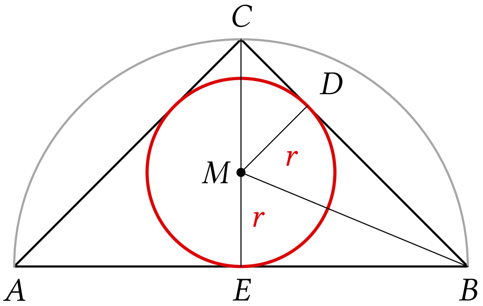
så de blir parallelle, og har ingen felles punkter. Linjen ℓ_0 har ligning $x = 0$, og den skjærer ℓ_n i punktet $(0, y)$ der $y = -1/n^3$. . . . . B

Oppgave 12. Marthe starter andre og tredje leseøkt på to forskjellige sider fritt valgt fra de siste 49 av de 50 sidene som står igjen. Disse to sidene kan hun velge på $\frac{49 \cdot 48}{2} = 1176$ måter. C

Oppgave 13. $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$, og $4 + 3 + 3 = 10 < 11$. . . . . A

Oppgave 14. Fordi siste siffer i produktet av to heltall bare avhenger av siste siffer i hvert av tallene, kan vi bare starte med å regne ut potenser av 2: Siste siffer i 2^1, 2^2, 2^3 og så videre blir 2, 4, 8, 6, 2, … og så gjentar det seg slik at siste siffer er det samme hver fjerde gang utover. Fordi $2021 = 505 \cdot 4 + 1$, får 2^{2021} samme sistesiffer som 2^1, altså 2. . . . . B

Oppgave 15. Fordi trekanten er rettvinklet, er hypotenusen en diameter i den store sirkelen, så den har sidelengde 2. I figuren er E sentrum i den store sirkelen, så EC har lengde 1. Linjestykkene MD og AC er parallelle, fordi de har en felles normal BC. Så trekanten MDC er rettvinklet med vinkel 45° ved hypotenusen. Spesielt har linjestykke MC lengde $\sqrt{2} \cdot r$. Lengden av EC blir således $1 = r + \sqrt{2} \cdot r$, slik at $r = 1/(\sqrt{2}+1) = \sqrt{2} - 1$. . . . . **D**



Oppgave 16. Johannes vinner hver runde med sannsynlighet $\frac{2}{3}$. Det tar alltid minst to runder før noen vinner leken. Etter to runder er det bare tre mulige utfall: (1) Johannes vinner begge rundene, og dermed leken. Det skjer med sannsynlighet $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. (2) Pål vinner begge rundene, og dermed leken. Det skjer med sannsynlighet $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. (3) De vinner en runde hver, og ender med ett poeng hver. Det skjer med sannsynlighet $1 - \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$. Da er det tilbake til utgangspunktet, med poengdifferanse null. Skriv p for sannsynligheten for at Johannes vinner. Da er $p = \frac{4}{9} + \frac{4}{9}p$ (dersom Johannes vinner, vinner han etter to runder, eller det er uavgjort, og så vinner han det videre spillet). Løsningen av ligningen er $p = \frac{4}{5}$. . . . . **C**

Oppgave 17. Fordi $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz)$, er $4^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot (-9)$, altså $x^2 + y^2 + z^2 = 34$. Videre er

$$\begin{aligned} x(xy+yz+xz) &= xyz + x^2(x+y+z) - x^3 \\ y(xy+yz+xz) &= xyz + y^2(x+y+z) - y^3 \\ z(xy+yz+xz) &= xyz + z^2(x+y+z) - z^3, \end{aligned}$$

og summen av de tre ligningene gir

$$(x+y+z)(xy+yz+xz) = 3xyz + (x^2+y^2+z^2)(x+y+z) - (x^3+y^3+z^3),$$

altså $-36 = -36 + 34 \cdot 4 - (x^3 + y^3 + z^3)$, med andre ord $x^3 + y^3 + z^3 = 136$. Til sist får vi da

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^3+y^3+z^3} = \frac{34}{136} = \frac{1}{4}.$$

Alternativ løsning: I dette tilfellet gjør de oppgitte tallene at vi kan komme litt raskere frem. Ligningen vi utledet ovenfor, kan skrives

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz).$$

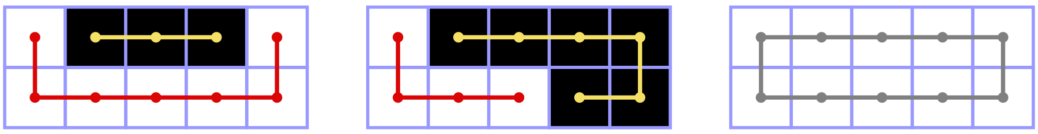
Setter vi inn de oppgitte tallene, får vi

$$x^3 + y^3 + z^3 = -36 + 4(x^2 + y^2 + z^2 + 9) = 4(x^2 + y^2 + z^2),$$

og svaret på oppgaven gir seg selv. . . . . **A**

Oppgave 18. Du må ha tatt bort $3j$ terninger til venstre for den første av de to terningene du har igjen til slutt, og $3k$ terninger mellom de to, der j og k er heltall. (Du har da tatt vekk $48-3j-3k = 3\cdot(16-j-k)$ terninger til høyre for de to.) Det betyr at den første av de to terningene hadde opprinnelig posisjon $3j+1$, mens den andre hadde opprinnelig posisjon $3j+1+3k+1 = 3(j+k)+2$. Da viste den første terningen 1 (hvis j er et partall) eller 4 (hvis j er et oddetall), mens den andre viser 2 (hvis $j+k$ er et partall) eller 5 (hvis $j+k$ er et oddetall). Alle disse kan forekomme i kombinasjon, så mulige utfall er $(1,2)$, $(1,5)$, $(4,2)$ eller $(4,5)$. . . . . **D**

Oppgave 19. Figuren nedenfor illustrerer et nyttig faktum: Dersom både de hvite og de svarte rutene danner sammenhengende områder, så kan vi lage en vei gjennom alle rutene i hvert område som ikke går mellom en rute i øverste og nederste rad, unntatt ytterst til venstre eller ytterst til høyre. Det betyr at vi kan tenke oss rutene ordnet i en ring, som i figuren til høyre.



Dersom det er både svarte og hvite ruter og hver danner sammenhengende regioner, kan vi spesifisere fargeleggingen entydig ved å spesifisere første hvite rute, og første svarte rute, når vi følger ringen i en bestemt retning, for eksempel med klokka. Vi har da 10 valg for første hvite rute, og deretter 9 valg for første svarte rute. Det gir 90 mulige fargelegginger som bruker begge farger. Deretter må vi legge til 2 for de ensfargede fargeleggingene. Resultatet blir 92 mulige fargelegginger.

Litt mer detaljert om hvorfor vi kan tenke slik: Anta at to ruter over hverandre, men ikke ytterst på enden, har samme farge, for eksempel svart. Da må alle rutene til venstre for disse, eller alle rutene til høyre, også være svarte. Det betyr at slike stabler med to likt fargede ruter oppå hverandre bare kan opptre på venstre eller høyre ende, med en eller flere slike stabler ved siden av hverandre. Mellom disse ensfargede stablene på hver side må vi alltid ha svart øverst, hvitt nederst, eller alltid omvendt. (Bildet til høyre i oppgaven illustrerer hvorfor.) Slik ser vi altså at bildene over er ganske representative.
. . . . **D**

Oppgave 20. Stigningstallet til linjen BC er $\frac{57-11}{79-10} = \frac{46}{69} = \frac{2}{3}$, og ligningen til linjen kan skrives $2x - 3y = 2 \cdot 10 - 3 \cdot 11 = -13$. Normalen til denne linjen gjennom A har ligningen $3x + 2y = 3 \cdot (-17) + 2 \cdot 45 = 39$. For å finne x-koordinaten til skjæringspunktet mellom de to linjene, ganger vi den første ligningen med 2 og den andre med 3, legger dem sammen, og får $13x = 3 \cdot 39 - 2 \cdot 13 = 7 \cdot 13$, altså $x = 7$. Da må x-koordinaten til speilbildet D være $x = 7-(-17-7) = 31$. Til slutt finner vi y-koordinaten til D fra $3 \cdot 31 + 2y = 39$, så $y = \frac{39-3\cdot 31}{2} = -\frac{54}{2} = -27$. . . . . **D**