Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
Finale 2021–2022 – *Løsninger*

8. mars 2022

Oppgave 1.

a. Først er $2025 = 45^2$, så $n = 1$ passer. Dersom $n \geq 2$ er $2022 + 3^n \equiv 6 \pmod 9$, men 6 er ikke et kvadrat modulo 9, så det er ikke flere muligheter.

b. Først må $p \mid n$, for i motsatt fall er $5^{n/p}$ irrasjonal. (Bevis: Anta $5^{n/p} = u/v$ med u og v innbyrdes primiske positive heltall. Det gir $5^n v^p = u^p$, så $5 \mid u$. La k være største eksponent slik at $5^k \mid u$. Det gir $n = kp$.)

Med $n = kp$ får vi (etter divisjon med p)

$$k \cdot 5^{k(p-1)} = (p-1)!\,(p^2+1) + k$$

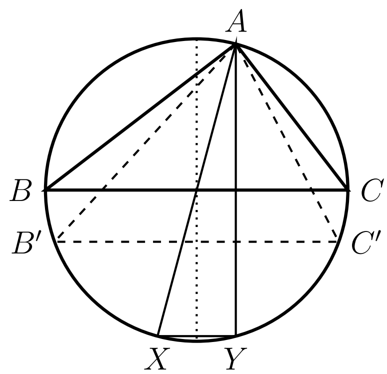
Fermats lille teorem gir $5^{k(p-1)} \equiv 1 \pmod p$ dersom $p \neq 5$. Wilsons teorem sier $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$, så vi har $k \equiv -1 + k \pmod p$ dersom $p \neq 5$. Det er umulig, så bare $p = 5$ må undersøkes nærmere. Nå skal vi ha

$$k \cdot 5^{4k} - k = 24 \cdot 26 = 5^4 - 1,$$

og vi ser at $k = 1$ passer. Det er ganske opplagt at $k \cdot 5^{4k} - k$ øker når $k \geq 1$ og k erstattes med $k+1$, så det er ikke flere muligheter. Altså: $p = n = 5$ er eneste mulighet.

Oppgave 2.

a. Vi starter argumentasjonen med en sirkel ω og en korde XY. Vi kan finne A som et skjæringspunkt* mellom ω og normalen til XY i Y. Fordi $\angle XYA$ er rett, er XA en diameter til ω. Fordi to diametere skjærer hverandre i begges midtpunkt, er betingelsene i oppgaven oppfylt dersom BC er en diameter. Da er $\angle BAC = 90°$.



Det gjenstår å vise at dette er eneste mulighet. Enhver korde i sirkelen som er parallell med XY (og dermed BC) har sitt midpunkt i skjæringen med midtnormalen på BC (punktstiplet i figuren). Dette punktet er forskjellig fra skjæringen med XA for alle korder $B'C'$ som er parallelle med, men forskjellig fra, BC.

*Det kunne også tenkes at $A = Y$. Men da blir jo $AX \parallel BC$, som strir mot det som er oppgitt.

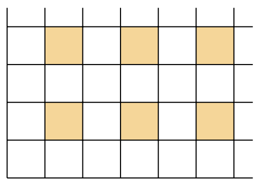
b. Vi skal bruke et enkelt faktum: *Anta at k, l, m er tre parallelle linjer der m er refleksjonen av k over l* (slik at også k er refleksjonen av m over l). *Dersom n er en linje som ikke er parallell med disse linjene, så vil skjæringene med k, l og m skjære ut to like lange linjestykker av n.* (Vises enkelt med noen kongruente trekanter: Trekk en normal til l gjennom skjæringen med n.)

La nå P være punktet m_A, m_B og m_C har felles. Fordi DE er speilingen av m_C i AB, vil DE skjære PA i et punkt A' slik at A ligger midtveis mellom P og A' (forrige avsnitt). På samme måte, Fordi DF er speilingen av m_B i AC, vil DF skjære PA i et punkt A'' slik at A ligger midtveis mellom P og A''. Men da er jo $A'' = A'$. Og siden dette punktet ligger på både DE og DF, er $A'' = A' = D$.

På samme måte ser vi at B er midtpunktet på linjestykket PE, og C er midtpunktet på linjestykket PF. Vi har vist at trekanten DEF er bildet av ABC ved en homoteti med faktor 2. Dermed er arealet av DEF fire ganger så stort som arealet av ABC.

NB. Det kan tenkes at en eller to (men ikke alle tre) av linjene m_A, m_B, m_C faller sammen med henholdsvis linjene BC, CA eller AB. Argumentet over kan trenge en justering for disse spesialtilfellene. Men for øvrig, om P ligger innenfor eller utenfor ABC er irrelevant for argumentet slik det er stilt opp her.

Oppgave 3. Dersom $M = 1$, eller $N = 1$, eller $M = N = 2$, er det ikke nødvendig å fargelegge noen ruter, siden brikken ikke får plass i rutenettet.



Dersom rutenettet er større enn det, kan vi fargelegge alle ruter $(2m, 2n)$ med $2m \leq M$ og $2n \leq N$, der vi nummererer rutene med $(1, 1)$ i et hjørne. Enkleste måte å se det på, er at i annenhver rad er annenhver rute fargelagt, så brikken kan ikke dekke to ruter i en slik rad. Tilsvarende gjelder for kolonnene.

Vi klarer oss altså med å fargelegge $\lfloor M/2 \rfloor \cdot \lfloor N/2 \rfloor$ ruter. At det også er nødvendig, ser vi ved å betrakte rutenett i størrelse $2 \cdot 4$, som krever minst to fargelagte ruter, og $2 \cdot 6$, som krever minst tre. Fordi alle rutenett med M og N partall (unntatt $2 \cdot 2$) kan dekkes fullstendig med slike, er vi ferdig med det tilfellet. Dersom M eller N (eller begge) er odde, kan trenger vi å fargelegge minst like mange ruter som vi trenger for et $(2\lfloor M/2 \rfloor) \times (2\lfloor N/2 \rfloor)$ rutenett, altså om vi runder M og N ned til nærmeste liketall. Det fullfører argumentet.

Oppgave 4.

a. Vi har altså $f(1/x) \geq x^2 f(x)$. Erstatter vi x med $1/x$ og rydder, får vi $f(1/x) \leq x^2 f(x)$. Det følger at alle de gitte ulikhetene er likheter. Setter vi inn $f(1/x) = x^2 f(x)$, får vi så $1 - f(x) = x^2 f(x)$, så $f(x) = 1/(1 + x^2)$.

b. Produktet av alle de gitte polynomene må da bli

$$c \sum_{n=0}^{k-1} x^n = c \frac{1 - x^k}{1 - x} \qquad (\text{der } k = 2022 \cdot 2021 + 1).$$

Vi benytter faktoriseringsteoremet for polynomer: Ethvert reelt polynom kan entydig faktoriseres i et produkt av null eller flere polynomer på formen $x - a$ og et polynom (muligens konstant) uten noen reelle røtter.

Vi har faktoriseringen

$$1 - x^k = (1 - x)q(x) \quad \text{der } q(x) = 1 + x + \cdots + x^{k-1}.$$

Her har faktoren $q(x)$ ingen reelle røtter, fordi venstresiden bare har $x = 1$ som rot (siden k er et oddetall) og $x = 1$ er ikke rot i $q(x)$.

Men ethvert polynom av grad 2021 har minst én reell rot, så faktoriseringen av $1 - x^k$ skulle inneholdt minst 2021 faktorer på formen $x - a$, og det er altså ikke tilfelle.