Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
Første runde 2022-2023 – *Løsninger*

17. november 2022

Oppgave 1. Skriv O for omkretsen av den store firkanten. Summen av lengdene til alle linjestykkene i figuren er både lik summen av omkretsene til de to firkantene, altså $O+38$, og summen av omkretsene til alle trekantene, altså $22+27+20+23=92$. Så vi har $O+38=92$, og dermed $O=54$. . . . . **A**

Oppgave 2. $\dfrac{a\sqrt{ab^4}}{(\sqrt{ab})^3}=\dfrac{ab^2\sqrt{a}}{ab\sqrt{ab}}=\dfrac{b}{\sqrt{b}}=\sqrt{b}$ . . . . **C**

Oppgave 3. Siden $4^3=64$ og $5^3=125$, er $4<\sqrt[3]{100}<5$. Videre er $(4\frac{1}{2})^3=\frac{9^3}{2^3}=\frac{729}{8}<100$, så korrekt avrundet svar er 5. . . . . **C**

Oppgave 4. Benytt primtallsfaktoriseringen: $n=p_1^{m_1}\cdot p_2^{m_2}\cdot\dots\cdot p_k^{m_k}$ der p_1, p_2, …, p_k er distinkte primtall. Produktet er et kvadrattall hvis og bare hvis hver multiplisitet m_i er et partall, og et kubikktall hvis og bare hvis hver m_i er delelig med 3. Vi er altså ute etter tall der m_i er delelig med 6. Siden $2^6=64$ og $3^6=729$, ser vi at ingen sjettepotenser av et produkt av to forskjellige primtall er mindre enn 1000. Dermed står vi bare igjen med potenser av ett primtall: $2^6=64$ og $3^6=729$. Man trenger knapt regne ut $2^{12}=4096$ og $5^6=15625$ for å se at disse tallene er større enn 1000, så det er ikke flere muligheter. . . . . **C**

Oppgave 5. Det er i alt $\frac{12\cdot 11}{2}=66$ mulige sokkepar Pål kan trekke ut av skuffen. Av disse er det $\frac{3\cdot 2}{2}=3$ blå, $\frac{4\cdot 3}{2}=6$ røde og $\frac{5\cdot 4}{2}=10$ gule sokkepar, i alt 19 ensfargede sokkepar. Så sjansen for et ensfarget sokkepar er $\frac{19}{66}$. . . . . **E**

Oppgave 6. Ligningene har løsning for $a=0$ ($x=\pm 1$, $y=-x$), $a=1$ ($x=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $y=1-x=\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{3}$) og $a=-1$ ($x=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $y=-1-x=-\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{3}$). Det finnes ingen løsninger for $|a|\geq 2$, for da følger av $x+y=a$ at $|x|>1$ eller $|y|>1$, eller muligens $|x|=|y|=1$, og ingen av disse er forenlig med $x^2+y^2=1$. Det er i alt tre muligheter for a.

Man kan se dette enkelt geometrisk, siden den første ligningen beskriver en sirkel med sentrum i origo og radius 1, mens den andre ligningen beskriver en rett linje med avstand $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a$ fra origo.

Enda en løsningsmetode er å sette inn $y=x-a$ fra den andre ligningen i den første og rydde litt, med resultat $2x^2-2ax+a^2-1=0$. Det er en annengradsligning med diskriminant $8-4a^2$ (etter forenkling), som har reelle løsninger kun for $|a|\leq\sqrt{2}$. . . . . **D**

Oppgave 7. Naborom har alltid motsatt paritet: Naboene til et oddetallsrom har partallsnummer, og omvendt. Siden rotta startet i et oddetallsrom og flytter seg et partalls antall ganger, må den nødvendigvis ende opp i et oddetallsrom igjen, altså en av nodene 1, 3, eller 5. Alle disse er mulige. For eksempel kan rotta gå frem og tilbake mellom rom 1 og 2, og altså alltid være i node 1 etter et jevnt antall steg. Men den kan også gjøre det til og med steg 2020, og deretter gå til rom 4 og så til rom 3 eller 5. Så alle de tre mulighetene er åpne. . . . . **B**

Oppgave 8. Fordi $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$ og $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$ (multipliser hver ligning med nevneren på venstre side), blir det gitte uttrykket lik

$$\frac{\sqrt{6}\,(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\sqrt{3}\,(2+\sqrt{3})}{\sqrt{2}-1} = \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-(2\sqrt{3}+3)}{\sqrt{2}-1} = 3.$$

. . . . **B**

Oppgave 9. Vi har $3^{a-1} = 3^a/3 = 2$ og $2^{2b-1} = 4^b/2 = 3$, så $3^{(a-1)(2b-1)} = 2^{2b-1} = 3$, og dermed $(a-1)(2b-1) = 1$. . . . . **A**

Oppgave 10. Herman kan først velge to av seks plasser i tårnet for de røde klossene. Det kan han gjøre på $\frac{6\cdot5}{2} = 15$ måter. Så kan han velge to av de fire gjenværende plassene for de blå klossene. Det kan han gjøre på $\frac{4\cdot3}{2} = 6$ måter. I alt har han $15\cdot6 = 90$ muligheter. . . . . **E**

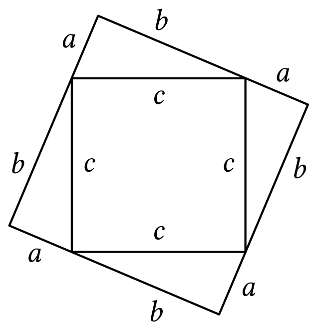
Oppgave 11. Siden $5^3 = 125 > 100$, må $b, c \in \{1,2,3,4\}$, og dermed $b^3, c^3 \in \{1,8,27,64\}$. Det skader ikke å anta at $b \le c$, siden alt er uendret om vi bytter om b og c. Det gir da ti muligheter for summen b^3+c^3:

$$b^3+c^3 \in \{2,9,28,65,16,35,72,91,128\}.$$

Den siste kan vi se bort fra, og får (i samme rekkefølge)

$$100-(b^3+c^3) \in \{98,91,72,35,84,65,28,9\}.$$

Av disse er bare ett kvadrattall, nemlig 9, som kom fra $b = 3$, $c = 4$ (med $b^3+c^3 = 91$). Da må $a = 3$, så $ab+bc+ca = 9+12+12 = 33$. . . . . **B**



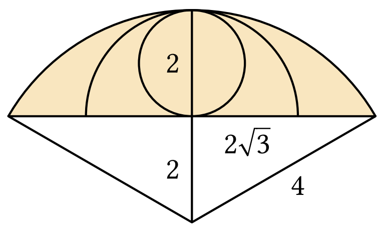
Oppgave 12. Legg til en trekant lik den første på de tre andre sidene av kvadratet, som vist i figuren. Resultatet blir et større kvadrat (fordi summen av de spisse vinklene i en rettvinklet trekant er 90°) med areal $529 + 4 \cdot 108 = 961$. Det store kvadratet har da sidekant $a + b = \sqrt{961} = 31$, mens det opprinnelige kvadratet har sidekant $c = \sqrt{529} = 23$. Femkantens omkrets er $3c + a + b = 69 + 31 = 100$.

Alternativ løsning: Pytagoras anvendt på trekanten gir oss $a^2 + b^2 = c^2$, mens arealet er $\frac{1}{2}ab = 108$. Dermed blir $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 529 + 432 = 961 = 31^2$. Femkantens omkrets er som før $3c + a + b = 69 + 31 = 100$. . . . . **D**

Oppgave 13. Før Nils har strøket ut noen tall, har han skrevet opp tallene $3n+1$ for $n = 0, 1, \ldots, 133$, i alt 134 tall. Tallene han så stryker ut, er 10, 25, 40 …, 400, altså alle tall på formen $15k + 10$ for $k = 0, 1, \ldots, 26$, i alt 27 tall. Det står igjen $134 - 27 = 107$ tall.

For å være helt sikre på hvilke tall Nils stryker, merk at $3n + 1$ er delelig med 5 hvis og bare hvis $2(3n + 1) = 5n + (n + 2)$ er delelig med 5, det vil $n + 2$ delelig med 5. Det gir $n = 5k + 3$ for et heltall k, altså $3n + 1 = 15k + 10$. . . **E**

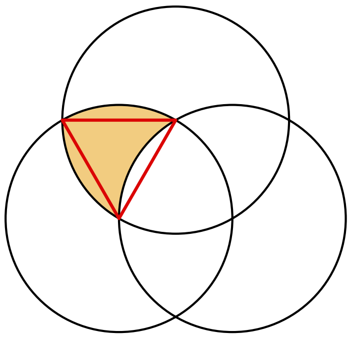
Oppgave 14. Det første av fire sifre kan velges på ni måter (det kan ikke være null). Da kan det andre sifferet som finnes i tallet, velges fritt blant de øvrige ni sifrene (inkludert null). Til slutt finnes det $2^3 = 8$ måter å lage de siste tre sifrene på med de to som nå er valgt, men en av de åtte måtene (alle siffer lik det første) er ikke tillatt, så det er bare sju valg igjen. I alt har vi $9 \cdot 9 \cdot 7 = 567$ muligheter. . . . . **B**



Oppgave 15. Sirkelen med radius 1 har areal $F = \pi \cdot 1^2 = \pi$. Halvsirkelen med radius 2 har areal $F + G = \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 = 2\pi$, så $G = \pi$ også. Det gjenstår å finne arealet av den store sirkelskalken $F + G + H$ (skyggelagt i figuren). Trekanten nede til høyre i figuren blir en 30-60-90-trekant, med areal $2\sqrt{3}$. Sirkelsektoren i figuren har åpningsvinkel 120°, så arealet av den er $\frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 = \frac{16}{3}\pi$. Dermed blir arealet av sirkelskalken $F + G + H = \frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3}$, slik at $H = \frac{10}{3}\pi - 4\sqrt{3}$. Men vi er mer interessert i å sammenligne: Altså, er $H - G = \frac{7}{3}\pi - 4\sqrt{3}$ positiv eller negativ? Vi kvadrerer hvert av de to leddene: $(\frac{7}{3}\pi)^2 = 49(\frac{\pi}{3})^2 > 49$ og $(4\sqrt{3})^2 = 48$, så $H - G > 0$. . . . . **A**

Oppgave 16. Fordi $1024 = 2^{10}$, må hvert av de tre tallene være en toerpotens: 2^k for $k = 0, 1, \ldots, 10$. Alle primtall større enn 2 er odde, så det minste av de tre tallene må være 1. Det betyr at de to gjenværende tallene er 2^k og 2^{10-k} for en $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. (Vi tar ikke med $k = 5$ fordi alle tallene skal være forskjellige.) Vi har følgende muligheter for k og summen av de tre tallene: $k = 1$: Sum $1 + 2 + 512 = 515$; $k = 2$: sum $1 + 4 + 256 = 261$; $k = 3$: sum $1 + 8 + 128 = 137$; $k = 4$: sum $1 + 16 + 64 = 81$. Av disse summene er bare 137 et primtall, så det største av de tre opprinnelige tallene er 128. . . . . **B**

Oppgave 17. Det skyggelagte arealet i figuren er summen av arealet av trekanten pluss arealet av to «sirkelskalker», minus arealet av én «sirkelskalk». Netto blir det arealet av trekanten pluss én «sirkelskalk». Men det er arealet av en sirkelsektor med vinkel 60°, med andre ord $\frac{\pi}{6}$ (ettersom radien er 1). Vi ganger med 3, og får arealet $\frac{\pi}{2}$. . . . . **E**



Oppgave 18. Det lille kvadratet har sidekant 1, og vi lar det store kvadratet ha sidekant a. I figuren finner vi to likeformede rettvinklede trekanter, med felles hjørne øverst til venstre. Den store har kateter $a + 1$ og a. Den lille har derfor kateter 1 og $a/(a + 1)$. Den korteste kateten er grunnlinje i den skyggelagte trekanten, med høyde a, så den trekanten har areal $\frac{1}{2}a \cdot a/(a+1)$. Dette arealet skal være lik 1, slik at $a^2 = 2(a + 1)$, det vil si $(a - 1)^2 = 3$, med positiv løsning $a = 1 + \sqrt{3}$. Arealet av de største kvadratet blir $a^2 = 2(a+1) = 4 + 2\sqrt{3}$. . . . . **E**

Oppgave 19. Et rektangel i figuren bestemmes entydig ved å velge to av de sju vertikale linjene og to av de horisontale linjene. Hvert av de to valgene har $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ muligheter, så det er i alt 21^2 rektangler.

La de to vertikale sidene i et rektangel ligge på vertikal linje nummer a og b, der a og b er heltall med $1 \leq a < b \leq 7$.

For at rektangelet skal inneholde et skyggelagt kvadrat, må $b > 3$ og $a < 5$. Det gir fire muligheter hver for a og b, totalt 16 muligheter, men vi må fjerne tilfellet $a = b = 4$, så det er bare 15 muligheter for (a, b). På samme måte kan de horisontale sidene velges på 15 måter, så 15^2 rektangler inneholder minst ett skyggelagt kvadrat.

Antall rektangler som ikke gjør det, er da $21^2 - 15^2 = (21 - 15)(21 + 15) = 6 \cdot 36 = 216$. . . . . **A**

Oppgave 20. Om Nils kjøpte henholdsvis x, y og z smørbrød av de tre typene, så er

$$77x + 91y + 143z = 1993.$$

Konditoren må ha vært matematikkinteressert, siden hun valgte priser med slike enkle primtallsfaktoriseringer: $77 = 7 \cdot 11$, $91 = 7 \cdot 13$ og $143 = 11 \cdot 13$.

Vi noterer oss at $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$, og skriver om ligningen til

$$77x + 91y + 143z + 9 = 2002.$$

Spesielt er venstresiden delelig med 7. Vi trekker fra $77x + 91y + 140z + 7$, (et heltallig multiplum av 7), og slutter at også $3z + 2$ er delelig med 7. Gang med 5: $15z + 10$ er delelig med 7. Trekk fra $14z + 7$ og konkluder at $z + 3$ er delelig med 7. Det betyr at z er ett av tallene 4, 11, 18, ... Åpenbart er $18 \cdot 143 > 1993$, så $z = 4$ eller $z = 11$.

Nå gjennomfører vi samme argument for y og 11 som vi gjorde for z og 7, og trekker $77x + 88y + 143z$ (multiplum av 11) fra venstresiden i ligningen, og finner at $3y + 9$ er delelig med 11. Vi ganger med 4, og får at $12y + 36$ er delelig med 11, trekker fra et passende multiplum av 11, og konkluderer at $y + 3$ delelig med 11. Så y er ett av tallene 8, 19, 30, ... Igjen er bare de to første aktuelle, siden $30 \cdot 91 > 1993$.

De to mulighetene for z koster $143 \cdot 4 = 572$ og $143 \cdot 11 = 1573$, mens de to mulighetene for y koster $91 \cdot 8 = 728$ og $91 \cdot 19 = 1729$. For ikke å overskride budsjettet, må vi velge det minste alternativet for begge, med sum $91y + 143z = 91 \cdot 8 + 143 \cdot 4 = 1300$. (Det kunne vi nok sett med mindre regning, bare litt tallfølelse og et par grove overslag.) Det gir $77x = 1993 - 1300 = 693$, så $x = 9$. Dermed er $x + y + z = 9 + 8 + 4 = 21$. . . . . **D**