Institutt for lærerutdanning
Matematikksenteret

Intensiv opplæring i matematikk

Forfattere:
Olaug Ellen Lona Svingen
Svein Anders Heggem

Publisert dato: 25.06.2019

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Alle elever har behov for og kan utvikle en dypere matematisk forståelse, men noen trenger litt bedre tid og mer målrettet innsats for å trenge inn i matematikken. De trenger å bli utfordret og engasjert slik at matematikk skaper mening og blir relevant. Intensiv opplæring kan gi elevene denne muligheten og være avgjørende for at de kan glede seg over egne oppdagelser og styrke den indre motivasjonen. Denne artikkelen gir noen innspill til hvordan man kan planlegge og gjennomføre intensiv opplæring.

Inspirasjon til innholdet i denne artikkelen er hentet fra Nationellt Centrum för Matematikutbildning (NCM) i Göteborg. Svenske matematikkdidaktikere har gjort forsøk med intensiv opplæring. De organiserer innholdet i den intensive opplæringen med utgangspunkt i fire faser: laborativ fase, representerende fase, abstraherende fase og oppsummerende fase (Lundqvist, Nilsson & Sterner, 2011; Pilebro, Skogberg & Sterner, 2010). Hvordan man kan arbeide med de fire fasene, blir beskrevet mer detaljert seinere i artikkelen.

I tillegg til å planlegge innhold i den intensive opplæringen må man ta stilling til hvilke elever som skal få tilbud om intensiv opplæring, omfanget av tilbudet, når på dagen opplæringen skal gjennomføres, og hvilke lærere som skal være intensivlærere.

Organisering av intensiv opplæring

Med bakgrunn i resultater fra kartlegging og daglige observasjoner i klasserommet kan læreren oppdage elever som har behov for en ekstra innsats for å henge med på klassens matematikkundervisning. En måte å møte disse elevenes behov på kan være å gi tilbud om intensiv opplæring som et supplement til klasseundervisning. Opplæringen kan gis til enkeltelever, en liten gruppe elever eller hele klassen. Undervisningen planlegges med elevenes behov i sentrum. Dersom den intensive opplæringen skal gis til enkeltelever eller til en liten gruppe elever som et supplement, får de tilbud om å delta. For å kunne støtte barnet må hjemmet få mulighet til å ha et nært samarbeid med skolen i den intensive perioden. Det er ønskelig at foreldrene kan komme med innspill til planleggingen, gjennomføringen og hvordan de skal følge opp hjemme. Dermed får hjemmet et eierforhold og en større forpliktelse til å støtte eleven underveis.

Opplæringen må ta utgangspunkt i kartlegging av elevens kompetanse. Like viktig som å beskrive vanskene til eleven er det å undersøke hva han eller hun allerede kan eller nesten kan. Intervju eller dynamisk kartlegging er eksempel på vurderingsverktøy som gir mulighet til å utarbeide funksjonsbeskrivelser som viser hvor eleven er i sin utvikling, hvordan han eller hun tenker, og hva man kan bygge på for å videreutvikle elevens kompetanse. Funksjonsbeskrivelser er et godt utgangspunkt for å planlegge innhold og progresjon i den intensive opplæringen. Ut fra kartlegging velger man hvilket matematisk tema som skal ha fokus i perioden.

Den intensive undervisningen må ha en viss varighet om den skal ha effekt, slik at eleven opplever mestring, fremgang og større forståelse. I den svenske modellen gis det intensiv opplæring i en periode på 10 uker, fire ganger à 40 minutter i uken. Her får eleven sin intensive opplæring utenom den ordinære undervisningstiden. I Norge har vi eksempel på at man har fått til to–tre økter i uken i 12 uker, der hver økt har vart i omtrent 25 minutter (Dalvang & Torkildsen, 2018). En eventuell gruppe som får tilbud om intensiv undervisning, bør ikke være for stor, maksimalt 5 elever. Ved denne undervisningsformen får læreren mulighet til å se, lytte til, stille spørsmål og bli bedre kjent med elevens styrker og svakheter. Det er nødvendig med tett oppfølging i form av underveisvurdering og tilpassing av innhold.

Den intensive opplæringen må være godt planlagt, tidspunkt avtalt og formelle avtaler må være gjort med skolens ledelse i samarbeid med eleven og hjemmet. Opplæringen bør planlegges i samhandling med matematikkundervisningen i klassen. Nært samarbeid mellom den intensive opplæringen og den ordinære opplæringen er viktig for at utbyttet skal bli best mulig. Det er viktig at intensivlæreren har god kompetanse i å undervise matematikk og kjenner eleven. Hvis det er mulig, og skolens ledelse legger til rette for det, kan den intensive opplæringen foregå før eller etter skoletid, slik at klassens lærer i matematikk også har intensivopplæringen.

Suksesshistorier der vanske endres til mestring, har som oftest en felles faktor – relasjonen til læreren. En lærer som ser eleven, inviterer eleven til å delta på egne premisser, er nysgjerrig på hvordan eleven tenker, gir eleven tid og bidrar til at eleven blir trygg (Dalvang & Torkildsen, 2018). Denne relasjonen har betydning for motivasjon, engasjement og vilje til å yte en ekstra innsats i den intensive perioden. Eleven må være klar over at det forventes full deltakelse, og at det kreves hardt arbeid i perioden. Læreren vil gi eleven økt oppmerksomhet og støtte, som forhåpentligvis øker den faglige forståelsen og motivasjonen til økt innsats. Det er også viktig å snakke om målet for opplæringen, at den intensive opplæringen har læring og forståelse som uttalt mål fremfor prestasjon, karakterer og rangering. På lengre sikt vil faglig fremgang, opplevelse av mestring og opplevelse av å kunne få brukt kreative evner, gi seg utslag i karakterer og resultater.

Innhold i opplæringen

Opplæringen skal være planlagt med omsorg for elevenes behov og med et avklart og spesifikt mål. De fire fasene danner en syklus og gir opplæringen en fast struktur. Det gir elevene mulighet til å fordype seg i begreper, og knytte tidligere og ny kunnskap til erfaringene de gjør underveis i syklusen. Siden fasene er en del av en syklus, kan de ikke betraktes som fragmenterte undervisningsdeler med tette skott mellom. Læreren må planlegge innhold i de ulike fasene og tenke igjennom hvordan aktivitetene i fasene henger sammen. Læreren må også tenke igjennom hvilke aktiviteter elevene blir invitert inn i. De trenger å møte aktiviteter der de kan bruke sin kreativitet og kan resonnere og argumentere for sine løsninger. Når det er valgt et matematisk tema som skal ha fokus, vil det være nyttig å lage en oversikt over hvilke sentrale matematiske ideer som er involvert. Denne oversikten vil hjelpe læreren til å se hvor eleven er i sin utvikling, og også hvor eleven er på vei.

Laborative fase

Elevene arbeider med matematiske ideer gjennom flere sanser, og gjør ulike erfaringer som seinere legger grunnlag for læring på et mer abstrakt nivå. I denne fasen gjør de fysiske og aktive handlinger. I den laborative fasen tar man i bruk laborativt materiell. Laborativt materiell kan deles i to grupper: hverdagslige gjenstander og pedagogisk materiell. Om det er det ene eller det andre, avgjøres av hvordan materiellet brukes, og hva hensikten er med å bruke det. Hovedhensikten er at materiellet skal støtte elevenes utvikling av forståelse av matematiske begreper. I den laborative fasen vektlegges en undersøkende arbeidsmåte (Rystedt & Trygg, 2005). Fra de praktiske erfaringene elevene gjør seg, kommer man fram til generelle sammenhenger som brukes i det videre arbeidet.

Representerende fase

I denne fasen skal man gjengi det man arbeidet med i den laborative fasen. I den laborative fasen arbeider man ofte med konkrete gjenstander, og når de tas bort, finnes det ingen spor igjen av det laborative arbeidet. Det er derfor viktig å gjengi dette arbeidet på en slik måte at man kan gå tilbake og se hva man fant ut. Denne dokumentasjonen er viktig for at det laborative arbeidet skal bli noe mer enn noe man bare gjør, slik at man beveger seg mot et mer abstrakt nivå. Gjennom dokumentasjonen får elevene mulighet til å styrke og bevise det de har lært og funnet ut av. Denne prosessen bidrar til at tankene skjerpes. Når elevene skal uttrykke tanker eksplisitt, blir de også bevisst dem. Dokumentasjonen kan gjøres på ulike måter: Man kan skrive tekst, tegne eller bruke matematiske modeller, for eksempel tallinje eller rutenett. Til å begynne med velger man kanskje å tegne så nøyaktig som mulig, men etter hver ønsker man å slippe litt arbeid og tegner mer skjematisk.

Abstraherende fase

Å abstrahere betyr å skape en allmenn, overordnet forestilling om noe. I denne fasen arbeider man med å omsette arbeidet fra de to foregående fasene over til abstrakt språk, uavhengig av den praktiske situasjonen man har arbeidet med. Laborativt materiell og representasjoner erstattes med symboler, regneregler, matematiske lover og konvensjoner. Arbeidet som er gjort i de to første fasene, skaper mening og innhold i det abstrakte.

Oppsummerende fase

I den oppsummerende fasen befester man det som er lært gjennom øving. Læreren må legge til rette for å skape variasjon i øvingen, både i form av oppgaver og aktiviteter. Det er nyttig for elevene å bli utfordret på nye situasjoner, der det som nettopp er lært, blir anvendt. I oppsummeringen må læreren be elevene se etter sammenhenger med andre matematiske ideer, og beskrive mønster og sammenhenger man har sett i de tre foregående fasene. Læreren hjelper elevene til å løfte blikket og knytte den nye kunnskapen til andre matematiske områder.

De fire fasene blir vist med to eksempler:

Eksempel 1: Forståelse av multiplikasjon[1]
Eksempel 2: LIST-oppgave

---

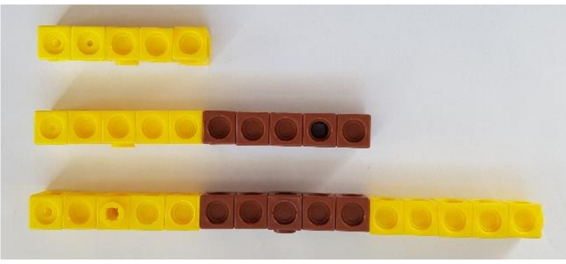
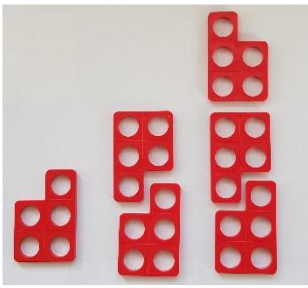
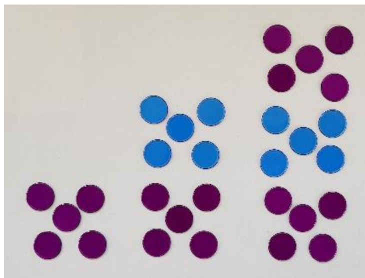
[1] Etter en idé fra Görel Sterner, http://ncm.gu.se/media/nywebb/matematikutvecklare/forelasare/intensivundervisning.pdf

NTNU
Institutt for lærerutdanning
Matematikksenteret

Eksempel 1: Forståelse av multiplikasjon

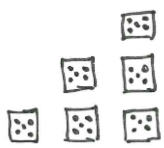
Laborativ fase

Den grunnleggende matematiske ideen i denne fasen er å forstå multiplikasjon som gjentatt addisjon. Elevene bruker tellebrikker, Numicon, Mulitlink-kuber eller lignende til å undersøke praktiske situasjoner som inneholder multiplikasjon som gjentatt addisjon. Det kan være praktiske situasjoner, for eksempel pakker med fotballkort, kartonger med egg, poser med boller eller esker med sjokolade.
I dette eksemplet er oppgaven til elevene: *I en pakke med fotballkort er det fem kort. Utforsk hvor mange fotballkort du har hvis du har én pakke, to pakker, osv.*
Det er viktig at elevene får utforske med laborativt materiell på egne premisser, og at de får lage sitt eget system. De oppfordres til å forklare hvordan de tenker underveis i prosessen. Bildene viser eksempler på hvilke strukturer de kan lage med Multilink-kuber, Numicon-brikker og tellebrikker.

Representerende fase

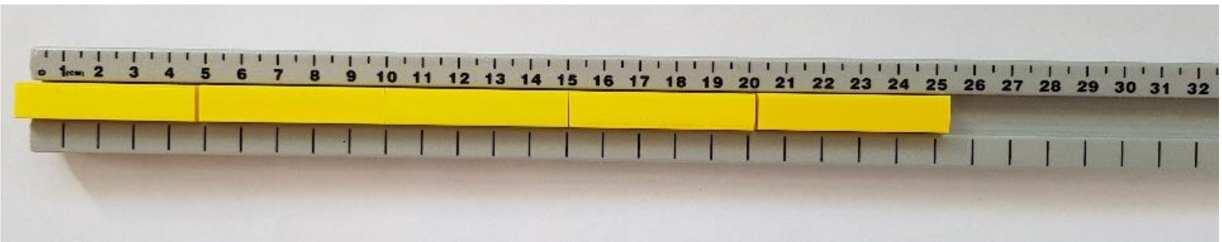
I denne fasen omsettes arbeidet med laborativt materiell til en annen representasjon som forsterker forståelsen av multiplikasjon som gjentatt addisjon. Elevene skal nå dokumentere det de har funnet ut i den laborative fasen. I starten kan det tenkes at de tegner nøyaktig det de har gjort. For eksempel slik:



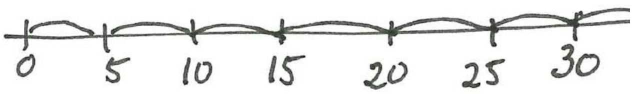
Etter hvert vil de kanskje synes at dette er litt for tungvint, og forenkler representasjonen. Da kan det se slik ut:

NTNU
Institutt for lærerutdanning
Matematikksenteret

Læreren har en viktig oppgave i å tilby representasjoner som kan forenkle arbeidet til elevene. De kan oppmuntres til å bruke en konkret tallinje, som kan fylles med cuisinairestaver. De må finne hvilken stav som kan representere femmeren, og i dette ligger et viktig steg i utviklingen. I stedet for å se fem som en mengde med fem elementer, ser de femmeren som en enhet. De trenger ikke lenger se alle elementene i mengden for å vite at det er fem. Bildet viser hvordan cuisinairestaver er brukt.

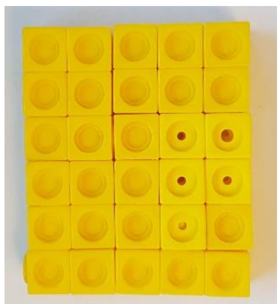


Ved å utfordre elevene til å tegne en enklest mulig modell av den fysiske tallinja, er veien kort til tallinja, slik vi er vant til å bruke den.



Abstraherende fase

Her kommer det abstrakte matematiske språket inn, og man bruker tall og symboler for å uttrykke det man har arbeidet med i de to tidligere fasene. Nå erstattes representasjonene i den forrige fasen med abstrakte symboler. Det er viktig å knytte det muntlige uttrykket til de abstrakte symbolene. Eksempel: $3 \cdot 5$ er tre ganger av en gruppe på fem eller tre ganger femmerhopp. Når man bevisst bruker «ganger» som begrep når man beskriver multiplikasjon som gjentatt addisjon, forsterkes koblingen til det abstrakte symbolet, som i dagligspråk omtales som gangetegn. Elevene arbeider med konkrete oppgaver: $4 \cdot 5$, $8 \cdot 5$ osv. De kan også arbeide med oppgaver der de anvender multiplikasjon.



I tillegg til å gjøre konkrete oppgaver skal elevene arbeide med regneregler og matematiske egenskaper og konvensjoner. I dette eksemplet kan det være å arbeide med det todimensjonale aspektet ved multiplikasjon (arealmodellen). Dette danner grunnlag for å forstå den kommutative egenskapen ved multiplikasjon. Bildet til høyres kan ses på som 6 rader med 5 kuber, eller 5 kolonner med 6 kuber. La elevene undre seg over om dette gjelder alltid, uansett hvilke tall man har, og få dem til å sette ord på dette. Slik kan man utvikle elevenes evne til å abstrahere og generalisere. Eksempler på arealmodellen finnes det mange av i hverdagen. Her er det bare å la seg inspirere.

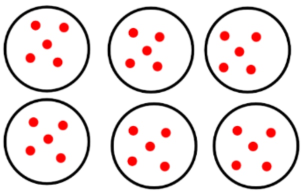
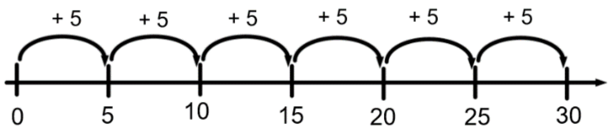


Oppsummerende fase

I arbeidet med multiplikasjon kan arbeidet i denne fasen bestå av ulike aktiviteter. Her blir det vist fire eksempler: tenkeskjema, tolking av tekstoppgaver, tankekart og bruk av kunnskapen i nye situasjoner.

Tenkeskjema

Tenkeskjemaet utfordrer elevene til å se sammenhengen mellom de ulike fasene.[2] De kan arbeide med skjemaet i grupper eller alene. Skjemaet kan tilpasses til det man ønsker å fokusere på, man kan endre antall ruter eller overskrifter i rutene. Et eksempel på hvordan tenkeskjemaet kan brukes, er at elevene får se innholdet i ruta «Symboler» og skal fylle inn i de øvrige rutene.

KONKRETER Elevene løser oppgaven med konkreter. Her kan de lime inn bilder eller tegne det de har gjort med konkreter. 	**TEGNING/FIGUR** Oppgaven kan løses med tallinje, rutenett, tabell eller andre visuelle representasjoner. 
FORTELLING/ORD Elevene skriver en regnefortelling eller forklarer med ord det de har tenkt og gjort. *Anne har 6 poser med 5 klinkekuler i hver pose.* *Da har hun 30 klinkekuler.*	**SYMBOLER** Elevene skriver tallsymboler. $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30$ $6 \cdot 5 = 30$

[2] Dette skjemaet er bearbeidet etter en idé fra McIntosh, Settemsdal, Stedøy-Johansen, Arntsen og Nasjonalt senter for matematikk (2007).

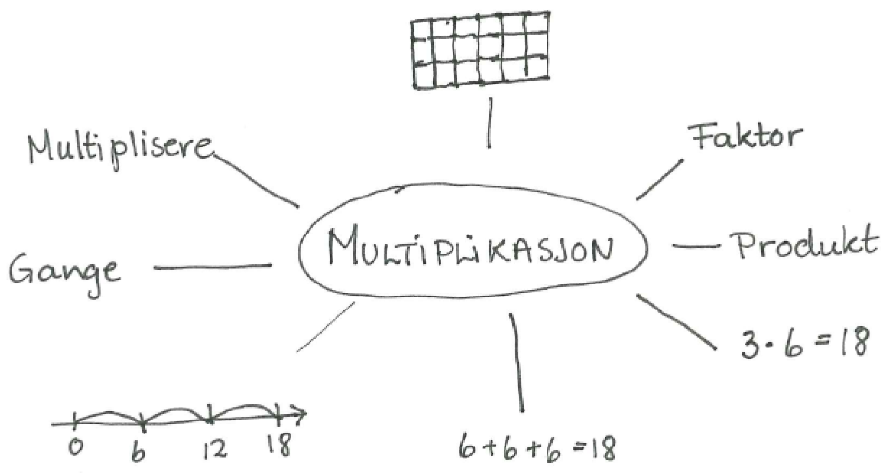
Tolking av tekstoppgaver

Punktene nedenfor ser omstendelige ut. Av og til kan man arbeide med bare noen få av punktene. Denne strukturen vil hjelpe elevene når de møter nye oppgaver.

1. Les hele teksten.
2. Gjenta spørsmålet høyt for deg selv, og strek under spørsmålet.
3. Tegn ring rundt viktig informasjon.
4. Velg et materiell, og løs oppgaven med materiellet.
5. Hvilken regneart skal du bruke?
6. Tegn en løsning, og forklar hvordan du tenker.
7. Bruk matematikkspråk.
8. Kontroller svaret.

Tankekart

Elevene kan lage et tankekart der de skriver inn viktige ord og begreper. Hvilke ord er vanskelige? La dem forklare med egne ord de ulike begrepene og hvordan de henger sammen.



Bruk av kunnskapen i nye situasjoner

La elevene arbeide videre med denne oppgaven:

Klassen til Anna skal stille seg i rekker med like mange i hver rekke. Det skal være minst to rekker. Hvordan kan de stille seg om det er 8 elever i klassen? 15? 24? Hva om de er 13? Hvilket antall opp til 20 er ikke mulig å få til i minst to like lange rekker?

NTNU
Institutt for lærerutdanning
Matematikksenteret

Eksempel 2: LIST-oppgave

Noa så 12 ben som gikk ombord i arken.

Hvor mange dyr kan han ha sett?

Hvor mange forskjellige svar kan du finne?

Kan du forklare hvordan du kom fram til de forskjellige svarene?

Laborativ fase	**Representerende fase**
Elevene kan arbeide med plastilin og 12 tannpirkere og lage dyr. Andre konkreter de kan bruke, er Numicon-brikker, Multilink-kuber, tellebrikker osv.	Elevene dokumenterer det de har gjort i den laborative fasen. Det kan være konkrete tegninger av dyr eller forenklete tegninger.
Abstraherende fase	**Oppsummerende fase**
Noen elever har kanskje allerede skrevet tall for å vise hvilke dyr det kan være. I denne fasen formaliseres dette mer, og elevene blir utfordret til å skrive mer formelt. $1 \cdot 8 + 1 \cdot 4$ $8 + 4$ $3 \cdot 4$ $4 + 4 + 4$ $2 \cdot 4 + 2 \cdot 2$ $4 + 4 + 2 + 2$ I denne fasen kan man også be dem undersøke om rekkefølgen av dyrene har betydning for antall ben. Er 6 + 4 + 2 det samme som 4 + 2 + 6?	**Lag en bok, «Vår fortelling om 12»** Elevene tegner et bilde og skriver summer under (f.eks. 4 + 4 + 2 + 2 = 12). Så setter de alle bildene sammen til en liten bok. **Utvid oppgaven** Hva om det er flere ben – 18, 24, 19 osv. – eller færre?

Referanser

Dalvang, T., & Torkildsen, G. (2018). Intensivopplæring i matematikk ved bruk av Numicon. *Spesialpedagogikk, 0518*, 40–47.

Lundqvist, P., Nilsson, E.-G. S., & Sterner, G. (2011). Intensivundervisning med gott resultat. *Nämnaren, 2010*(1), 44–50. Hentet fra http://ncm.gu.se/media/namnaren/npn/2011_1/4450_lundqvistmfl.pdf

McIntosh, A., Settemsdal, M.R., Stedøy-Johansen, I., Arntsen, T.J., & Nasjonalt senter for matematikk (2007). *Alle teller! Håndbok for lærere som underviser i matematikk i grunnskolen: kartleggingstester og veiledning om misoppfatninger og misforståelser på området: tall og tallforståelse*. Trondheim: Matematikksenteret.

Pilebro, A., Skogberg, K., & Sterner, G. (2010). Intensivundervisning. *Nämnaren, 2010*(1), 54–59. Hentet fra http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/5459_10_4.pdf

Rystedt, E., & Trygg, L.J.G.N. (2005). Matematikverkstad.