

Intensiv opplæring i matematikk

Forfattere:

Olaug Ellen Lona Svingen
Svein Anders Heggem

Publisert dato: 24.03.2021

© Matematikkenteret

Alle elever har behov for og kan utvikle en dypere matematisk forståelse, men noen trenger litt bedre tid og mer målrettet innsats for å trenge inn i matematikken. De trenger å bli utfordret og engasjert slik at matematikk skaper mening og blir relevant. Intensiv opplæring kan gi elevene denne muligheten og være avgjørende for at de kan glede seg over egne oppdagelser og styrke den indre motivasjonen. Denne artikkelen gir noen innspill til hvordan man kan planlegge og gjennomføre intensiv opplæring.

Inspirasjon til innholdet i denne artikkelen er hentet fra Nationellt Centrum för Matematikutbildning (NCM) i Göteborg. Svenske matematikdidaktikere har gjort verdifulle erfaringer med intensiv opplæring. De konsentrerer arbeidet i et matematisk område og lar elevene gjøre laborative erfaringer, bearbeide disse, forenkle og abstrahere, bruke og gjennomtenke hva de har lært gjennom de fire fasene: laborativ, representerende, abstraherende og oppsummerende fase. (Lundqvist et al., 2011; Pilebro et al., 2010). Fasene henger sammen og det matematiske innholdet må gå som en rød tråd gjennom alle fasene. Hvordan man kan arbeide med de fire fasene, blir beskrevet mer detaljert seinere i artikkelen.

I tillegg til å planlegge innhold i den intensive opplæringen må man ta stilling til hvilke elever som skal få tilbud om intensiv opplæring, omfanget av tilbudet, når på dagen opplæringen skal gjennomføres, og hvilke lærere som skal være intensivlærere.

Organisering av intensiv opplæring

Med bakgrunn i resultater fra kartlegging og daglige observasjoner i klasserommet kan læreren oppdage elever som har behov for en ekstra innsats for å henge med på klassens matematikkundervisning. En måte å møte disse elevenes behov på kan være å gi tilbud om intensiv opplæring som et supplement til klasseundervisning. Opplæringen kan gis til enkeltelever, en liten gruppe elever eller hele klassen. Undervisningen planlegges med elevenes behov i sentrum. Dersom den intensive opplæringen skal gis til enkeltelever eller til en liten gruppe elever som et supplement, får de tilbud om å delta. For å kunne støtte barnet må hjemmet få mulighet til å ha et nært samarbeid med skolen i den intensive perioden. Det er ønskelig at foreldrene kan komme med innspill til planleggingen, gjennomføringen og hvordan de skal følge opp hjemme. Dermed får hjemmet et eierforhold og en større forpliktelse til å støtte eleven underveis.

Opplæringen må ta utgangspunkt i kartlegging av elevens kompetanse. Like viktig som å beskrive vanskene til eleven er det å undersøke hva han eller hun allerede kan eller nesten kan. Intervju eller dynamisk kartlegging er eksempel på vurderingsverktøy som gir læreren verdifull innsikt for å beskrive hvor eleven er i sin utvikling, hvordan han eller hun tenker, og hva man kan bygge på for å videreutvikle elevens kompetanse. Disse beskrivelsene er et godt utgangspunkt for å planlegge innhold og progresjon i den intensive opplæringen. Ut fra kartlegging velger man hvilket matematisk tema som skal ha fokus i perioden.

Den intensive undervisningen må ha en viss varighet og kontinuitet om den skal ha effekt, slik at eleven opplever mestring, fremgang og større forståelse. I den svenske modellen gis det intensiv opplæring i en periode på 10 uker, fire ganger à 40 minutter i

uken. Her får eleven sin intensive opplæring utenom den ordinære undervisningstiden. I Norge har vi eksempel på at man har fått til to–tre økter i uken i 12 uker, der hver økt har vart i omtrent 25 minutter (Dalvang & Torkildsen, 2018). En eventuell gruppe som får tilbud om intensiv undervisning, bør ikke være for stor, maksimalt 5 elever. Ved denne undervisningsformen får læreren mulighet til å se, lytte til, stille spørsmål og bli bedre kjent med elevens styrker og svakheter. Det er nødvendig med tett oppfølging i form av underveisvurdering og tilpassing av innhold.

Den intensive opplæringen må være godt planlagt, tidspunkt avtalt og formelle avtaler må være gjort med skolens ledelse i samarbeid med eleven og hjemmet. Opplæringen bør planlegges i samhandling med matematikkundervisningen i klassen. Nært samarbeid mellom den intensive opplæringen og den ordinære opplæringen er viktig for at utbyttet skal bli best mulig. Det er viktig at intensivlæreren har god kompetanse i å undervise matematikk og kjenner eleven. Hvis det er mulig, og skolens ledelse legger til rette for det, kan den intensive opplæringen foregå før eller etter skoletid, slik at klassens lærer i matematikk har ansvar for intensivopplæringen.

Suksesshistorier der vanske endres til mestring, har som oftest en felles faktor – relasjonen til læreren. En lærer som ser eleven, inviterer eleven til å delta på egne premisser, er nysgjerrig på hvordan eleven tenker, gir eleven tid og bidrar til at eleven blir trygg (Dalvang & Torkildsen, 2018). Denne relasjonen har betydning for motivasjon, engasjement og vilje til å yte en ekstra innsats i den intensive perioden. Eleven må være klar over at det forventes full deltakelse, og at det kreves hardt arbeid i perioden. Læreren vil gi eleven økt oppmerksomhet og støtte, som forhåpentligvis øker den faglige forståelsen og motivasjonen til økt innsats. Det er også viktig å snakke om målet for den intensive opplæringen, at den har læring og forståelse som uttalt mål fremfor prestasjon, karakterer og rangering. På lengre sikt vil faglig fremgang, opplevelse av mestring og opplevelse av å kunne få brukt kreative evner, gi seg utslag i bedre forståelse og resultater.

Innhold i opplæringen

Opplæringen skal være planlagt med omsorg for elevenes behov og med et avklart og spesifikt mål. Vi vil presentere fire faser som utgjør et forløp som gir opplæringen en fast og forutsigbar struktur fra det konkrete til det mer abstrakte. Det gir elevene mulighet til å fordype seg i begreper og matematiske ideer. Gjennom erfaringene de gjør underveis i forløpet knytter de tidligere og ny kunnskap sammen. Siden fasene utgjør en helhet, kan de ikke betraktes som fragmenterte undervisningsdeler med tette skott mellom. Læreren må planlegge innhold i de ulike fasene og tenke igjennom hvordan aktivitetene i fasene henger sammen. Læreren må også tenke igjennom hvilke aktiviteter elevene blir invitert inn i. De trenger å møte utforskende aktiviteter der de kan bruke sin kreativitet og kan resonnerer og argumentere for sine løsninger. Når det er valgt et matematisk tema som skal ha fokus, vil det være hensiktsmessig å knytte det til aktuelle kompetansemål i LK20.

Laborative fase

Å laborere vil si å arbeide med et problem. I den laborative fasen arbeider elevene med matematiske problemer gjennom flere sanser, og gjør ulike erfaringer som seinere legger

grunnlag for læring på et mer abstrakt nivå. I denne fasen gjør de fysiske og aktive handlinger. Når et nytt begrep eller en matematisk idé skal introduseres, bør elevene eksperimentere, utforske og lage modeller ut fra egne ideer. I den laborative fasen tar man i bruk laborativt materiell som tellebrikker, knapper, tibasemateriell, multilink-kuber, centikuber, unifix-kuber, cuisenairestaver, numicon, tau, etc. Ved å la elevene arbeide muntlig i kombinasjon med laborativt materiell, kan opplæringen bidra til at matematiske begreper og ideer blir mer forståelige. Videre gir laborering også kinestetiske og taktile erfaringer som kan bidra til å bedre arbeidsminnet, elevene husker bedre. I den laborative fasen vektlegges en undersøkende arbeidsmåte (Rystedt & Trygg, 2005). Fra de praktiske erfaringene elevene gjør seg, begynner man å se generelle sammenhenger som brukes i det videre arbeidet.

Representerende fase

Representasjoner i matematikk er måter å uttrykke matematiske begrep, sammenhenger og problem på. Representasjoner kan være konkrete, kontekstuelle, visuelle, verbale og symbolske. (Utdanningsdirektoratet, 2020) Ved å dokumentere arbeidet fra den laborative fasen får elevene mulighet til å ta i bruk andre representasjoner. Denne dokumentasjonen er viktig for at det laborative arbeidet skal bli noe mer enn noe man bare gjør, slik at man beveger seg mot et mer abstrakt nivå. Det bidrar til å bygge bro mellom den laborative fasen og den abstraherende fasen. Gjennom dokumentasjonen får elevene mulighet til å styrke og bevise det de har lært og funnet ut av. Denne prosessen bidrar til at tankene skjerpes. Når elevene skal uttrykke tanker eksplisitt, blir de også bevisst dem.

Dokumentasjonen kan gjøres på ulike måter: Man kan skrive tekst, tegne eller bruke matematiske modeller. Til å begynne med velger man kanskje å tegne så nøyaktig som mulig, men etter hvert ønsker man å forenkle arbeidet og tegner mer skjematisk. Enkle tegninger, streker, sirkler, hopp på ei tallinje etc., tas i bruk for å løse oppgaver.

Abstraherende fase

Å abstrahere betyr å skape en allmenn, overordnet forestilling om noe. I denne fasen arbeider man med å omsette arbeidet fra de to foregående fasene over til abstrakt språk, i forlengelsen av den praktiske situasjonen man har arbeidet med. Laborativt materiell og representasjoner forenkles med symboler, regneregler, matematiske lover og konvensjoner. Arbeidet som er gjort i de to første fasene, skaper mening og innhold i det abstrakte. Arbeidet med å abstrahere erfaringer og representasjoner krever tid. Elevene benytter representasjoner som gir mening og støtter opp om forståelsen. Forklaringer og resonnement ledsages av symboler, regneregler, matematiske mønster etc. I denne fasen av arbeidet trekker elevene tråden tilbake til tidligere faser, generaliserer og bruker forståelsen til å løse problemer.

Oppsummerende fase

I den oppsummerende fasen ser elevene tilbake på arbeidet som er gjort, forklarer og viser ny forståelse og nye ferdigheter og bekrefter det som er lært. For at elevene skal øke bevisstheten om egen læring, er det viktig å stoppe opp og knytte ny kunnskap til tidligere forståelse. Det kan gjøres gjennom øving, ved å lage et tankekart e.l. Læreren legger til rette for variasjon av oppgavetyper og aktiviteter i øvingen. Elevene blir utfordret på å anvende kompetansen i nye og litt ukjente situasjoner. Videre ser elevene relevans, oppdager sammenhenger, forklarer hva som er lært og hva som nå kan gjøres eller foretas av beregninger. Elevene får hjelp til å løfte blikket og knytte den nye kunnskapen til andre matematiske områder. Dette vil danne grunnlag for videre læring.

De fire fasene blir vist med to eksempler:

Eksempel 1: Forståelse av multiplikasjon¹

Eksempel 2: LIST-oppgave

Eksempel 1: Forståelse av multiplikasjon

Laborativ fase

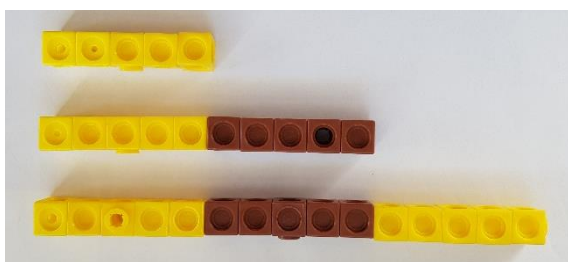
Den grunnleggende matematiske ideen i denne fasen er å forstå multiplikasjon som gjentatt addisjon. Elevene bruker tellebrikker, Numicon, Multilink-kuber eller lignende til å undersøke praktiske situasjoner som inneholder multiplikasjon som gjentatt addisjon. Det kan være praktiske situasjoner, for eksempel pakker med fotballkort, kartonger med egg, poser med boller eller esker med sjokolade.

I dette eksemplet er oppgaven til elevene: *I en pakke med fotballkort er det fem kort.*

Utforsk hvor mange fotballkort du har hvis du har én pakke, to pakker, osv.

Det er viktig at elevene får utforske med laborativt materiell på egne premisser, og at de får lage sitt eget system. De oppfordres til å forklare hvordan de tenker underveis i prosessen.

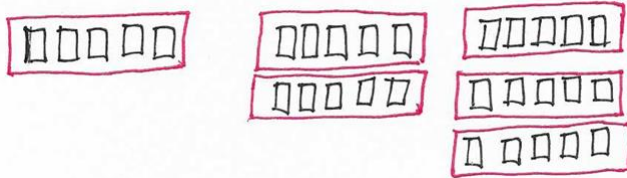
Bildene viser eksempler på hvilke strukturer de kan lage med Multilink-kuber, Numicon-brikker og tellebrikker.



¹ Etter en idé fra Görel Sterner,
<http://ncm.gu.se/media/nywebb/matematikutvecklare/forelasare/intensivundervisning.pdf>

Representerende fase

I denne fasen omsettes arbeidet med laborativt materiell til en annen representasjon som forsterker forståelsen av multiplikasjon som gjentatt addisjon. Elevene skal nå dokumentere det de har funnet ut i den laborative fasen. I starten kan det tenkes at de tegner nøyaktig det de har gjort. For eksempel slik:

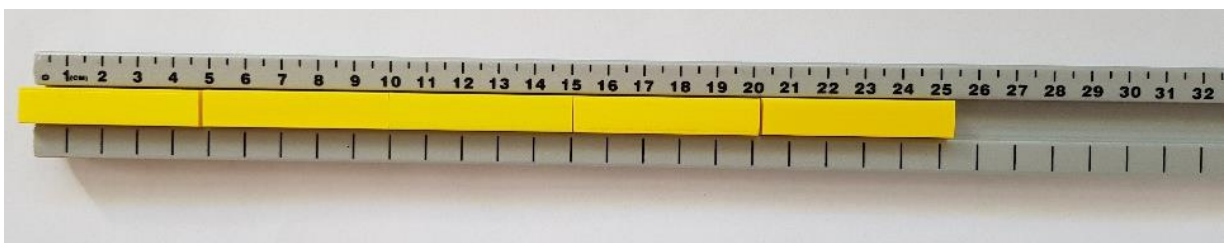


Etter hvert vil de kanskje synes at dette er litt for tungvint, og forenkler representasjonen.

Da kan det se slik ut:



Læreren har en viktig oppgave i å tilby representasjoner som kan forenkle arbeidet til elevene. De kan oppmuntres til å bruke en konkret tallinje, som kan fylles med cuisenairestaver. De må finne hvilken stav som kan representere femmeren, og i dette ligger et viktig steg i utviklingen. I stedet for å se fem som en mengde med fem elementer, ser de femmeren som en enhet. De trenger ikke lenger se alle elementene i mengden for å vite at det er fem. Bildet viser hvordan cuisenairestaver er brukt.



Ved å utfordre elevene til å tegne en enklest mulig modell av den fysiske tallinja, er veien kort til tallinja, slik vi er vant til å bruke den.

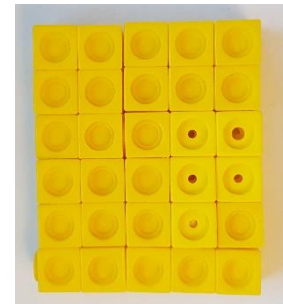


Abstraherende fase

Her kommer det abstrakte matematiske språket inn, og man bruker tekst, tall og symboler for å uttrykke det man har arbeidet med i de to tidligere fasene. Nå knyttes

representasjonene i de forrige fasene med abstrakte symboler. Det er viktig å knytte det muntlige uttrykket til de abstrakte symbolene. Eksempel: $3 \cdot 5$ er tre ganger av en gruppe på fem eller tre ganger femmerhopp. Når man bevisst bruker «ganger» som begrep når man beskriver multiplikasjon som gjentatt addisjon, forsterkes koblingen til det abstrakte symbolet, som i dagligspråk omtales som gangetegn. Elevene arbeider med konkrete oppgaver: $4 \cdot 5$, $8 \cdot 5$ osv. De arbeider med oppgaver der de anvender multiplikasjon i kontekst.

I tillegg til å gjøre konkrete oppgaver skal elevene arbeide med regneregler og matematiske egenskaper og konvensjoner. I dette eksemplet kan det være å arbeide med det todimensjonale aspektet ved multiplikasjon (arealmodellen). Dette danner grunnlag for å forstå den kommutative egenskapen ved multiplikasjon. Bildet til høyres kan ses på som 6 rader med 5 kuber, eller 5 kolonner med 6 kuber. La elevene undre seg over om dette gjelder alltid, uansett hvilke tall man har, og få dem til å sette ord på dette. Slik kan man utvikle elevenes evne til å abstrahere og generalisere. Eksempler på arealmodellen finnes det mange av i hverdagen. Her er det bare å la seg inspirere.




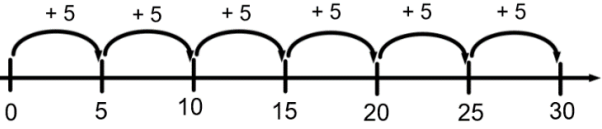
Oppsummerende fase

I arbeidet med multiplikasjon kan arbeidet i denne fasen bestå av ulike aktiviteter. Her blir det vist tre eksempler: tenkeskjema, tankekart og bruk av kunnskapen i nye situasjoner.

Tenkeskjema

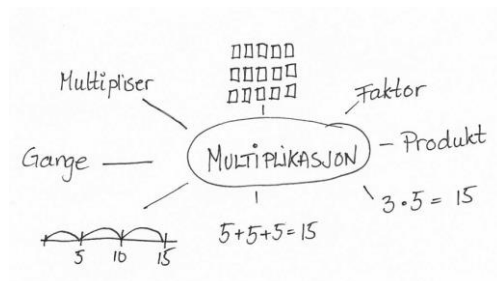
I Alle Teller! presenteres et skjema som kalles tenkeskjema. Det er likhetstrekk mellom tenkeskjemaet og de fire fasene, men ikke helt overlappende. Hvilke sammenhenger ser du mellom tenkeskjemaet og de fire fasene?² De kan arbeide med skjemaet i grupper eller alene. Skjemaet kan tilpasses til det man ønsker å fokusere på, man kan endre antall ruter eller overskrifter i rutene. Et eksempel på hvordan tenkeskjemaet kan brukes, er at elevene får se innholdet i ruta «Symboler» og skal fylle inn i de øvrige rutene.

² Dette skjemaet er bearbeidet etter en idé fra McIntosh, A., Settemsdal, M. R., Stedøy-Johansen, I., Arntsen, T. J., & Nasjonalt senter for matematikk i, o. (2007). *Alle teller! : håndbok for lærere som underviser i matematikk i grunnskolen : kartleggingstester og veiledning om misoppfatninger og misforståelser på området : tall og tallforståelse*. Matematikksenteret. .

<p>KONKRETER</p> <p>Elevene løser oppgaven med konkrete. Her kan de lime inn bilder eller tegne det de har gjort med konkrete.</p> 	<p>TEGNING/FIGUR</p> <p>Oppgaven kan løses med tallinje, rutenett, tabell eller andre visuelle representasjoner.</p> 
<p>FORTELLING/ORD</p> <p>Elevene skriver en regnefortelling eller forklarer med ord det de har tenkt og gjort.</p> <p><i>Anne har 6 pakker med 5 fotballkort i hver pakke. Da har hun 30 fotballkort.</i></p>	<p>SYMBOLER</p> <p>Elevene skriver tallsymboler.</p> $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30$ $6 \cdot 5 = 30$

Tankekart

Elevene kan lage et tankekart der de skriver inn viktige ord og begreper. Hvilke ord er vanskelige? La dem forklare med egne ord de ulike begrepene og hvordan de henger sammen.



Bruk av kunnskapen i nye situasjoner

La elevene arbeide videre med denne oppgaven:

Klassen til Anna skal stille seg i rekker med like mange i hver rekke. Det skal være minst to rekker. Hvordan kan de stille seg om det er 8 elever i klassen? 15? 24? Hva om de er 13? Hvilket antall opp til 20 er ikke mulig å få til i minst to like lange rekker?

Eksempel 2: LIST-oppgave



Noa så 12 ben som gikk ombord i arken.
 Hvor mange dyr kan han ha sett?

Hvor mange forskjellige svar kan du finne?
 Kan du forklare hvordan du kom fram til de forskjellige svarene?

Laborativ fase	Representerende fase
<p>Elevene kan arbeide med plastilin og 12 tannpirkere og lage dyr.</p> <p>Andre konkrete de kan bruke, er Numicon-brikker, Multilink-kuber, tellebrikker osv.</p>	<p>Elevene dokumenterer det de har gjort i den laborative fasen. Det kan være konkrete tegninger av dyr eller forenklete tegninger.</p>
Abstraherende fase	Oppsummerende fase
<p>Noen elever har kanskje allerede skrevet tall for å vise hvilke dyr det kan være. I denne fasen formaliseres dette mer, og elevene blir utfordret til å skrive mer formelt.</p> <p> $1 \cdot 8 + 1 \cdot 4$ $8 + 4$ $3 \cdot 4$ $4 + 4 + 4$ $2 \cdot 4 + 2 \cdot 2$ $4 + 4 + 2 + 2$ </p> <p>I denne fasen kan man også be dem undersøke om rekkefølgen av dyrene har betydning for antall ben. Er $6 + 4 + 2$ det samme som $4 + 2 + 6$?</p>	<p>Lag en bok, «Vår fortelling om 12» Elevene tegner et bilde og skriver summer under (f.eks. $4 + 4 + 2 + 2 = 12$). Så setter de alle bildene sammen til en liten bok.</p> <p>Utvid oppgaven Hva om det er flere ben – 18, 24, 19 osv. – eller færre?</p>

Referanser

- Dalvang, T., & Torkildsen, G. (2018). Intensivopplæring i matematikk ved bruk av Numicon. *Spesialpedagogikk, 0518*, 40-47.
- Lundqvist, P., Nilsson, E.-G. S., & Sterner, G. (2011). Intensivundervisning med godt resultat. *Nämnamnaren, 2010(1)*, 44-50.
http://ncm.gu.se/media/namnaren/npn/2011_1/4450_lundqvistmfl.pdf
- McIntosh, A., Settemsdal, M. R., Stedøy-Johansen, I., Arntsen, T. J., & Nasjonalt senter for matematikk i, o. (2007). *Alle teller! : håndbok for lærere som underviser i matematikk i grunnskolen : kartleggingstester og veiledning om misoppfatninger og misforståelser på området : tall og tallforståelse*. Matematikksenteret.
- Pilebro, A., Skogberg, K., & Sterner, G. (2010). Intensivundervisning. *Nämnamnaren, 2010(1)*, 54-59.
http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/5459_10_4.pdf
- Rystedt, E., & Trygg, L. J. G. N. (2005). Matematikverkstad.
- [Record #471 is using a reference type undefined in this output style.]