NTNU
Institutt for lærerutdanning
Matematikksenteret

Hvordan utfordre?

Forfatter:

Anne-Gunn Svorkmo

Publisert: 8. januar 2019

For å lykkes i matematikk er det blant annet viktig å kunne arbeide systematisk og strukturert. Dette er noe alle elever bør kunne, men det er spesielt viktig for elever som presterer lavt.

Elever som presterer lavt, kan ha usystematiske eller tungvinte strategier i matematikk, og de trenger hjelp til å oppdage at det finnes en struktur, et system eller et mønster de kan arbeide etter. I undervisningen kan læreren løfte fram elevenes tenkning for å tydeliggjøre hvordan man på ulike måter kan finne strukturer, systemer og mønstre. Det å arbeide strukturert og systematisk er en arbeidsform i matematikk som er gunstig i mange sammenhenger når elevene løser matematiske problemer. Denne fagteksten handler om hvordan man kan utfordre elever på systematikk.

Kuleisoppgaven, som er en kombinatorikkoppgave, blir brukt som eksempel. Den inneholder mange nok kombinasjonsmuligheter til at det er nødvendig å arbeide strukturert for å kunne finne alle kombinasjonene og løsningene. Det skapes et behov for systematikk. Ved å legge til rette for at elevene beskriver stegvis hva de selv gjør, eller ved at de ser eksempler på og lytter til medelever som forklarer og viser andre måter å arbeide systematisk på, gis elevene mulighet til å oppdage hva det vil si å arbeide systematisk. I tillegg kan den måten elevene representerer sine løsninger på, støtte opp under og hjelpe elevene med å utvikle egen strategi, slik at den blir mer strukturert og effektiv.

English (2005) beskriver tre faser i å arbeide systematisk på, og mener at det å løse kombinatorikkoppgaver krever en form for kartlegging. Hun studerte yngre elever mens de arbeidet med slike oppgaver, og identifiserte forskjellige strategier som de brukte. I ettertid delte hun elevenes ulike strategier inn i tre faser (stadier):

- **Prøve- og feilefasen («random»)**
  I prøve- og feilefasen finner elevene løsninger mer eller mindre tilfeldig. For å løse oppgaven, det vil si for å finne alle løsningene, må elevene sammenligne nye løsninger med løsninger som de tidligere har funnet, for å sjekke om noen av dem er like.
- **Overgangsfasen («transition»)**
  Overgangsfasen er når elevene begynner med en strukturert strategi, men ikke klarer å holde

fast på denne strategien. Av den grunn går de tilbake til en mer tilfeldig leting etter løsninger ved å prøve og feile.

- **Telleverkfasen («odometer»)**
  I telleverkfasen bruker elevene en organisert og strukturert strategi for å finne løsninger, ofte ved å beholde et element konstant og variere de andre systematisk. Uavhengig av hvilken strategi elevene arbeider etter, vil det kunne mangle kombinasjoner, eller den samme kombinasjonen blir representert flere ganger (duplikat).

Disse fasene bygger på hverandre, slik at den neste fasen er mer effektiv enn den forrige når det gjelder å finne alle mulige kombinasjoner, og strukturen i måten å arbeide på hjelper elevene til å få bedre oversikt. Når læreren skal utfordre elevene på systematikk, er det om å gjøre å få dem til å bevege seg mot neste fase.

Eksemplene nedenfor viser ulike representasjoner for hver av de fire problemstillingene i kuleisoppgaven. Måten elevene representerer løsningene sine på, kan avdekke en struktur eller et mønster som igjen kan støtte og hjelpe dem til å arbeide mer systematisk. Ulike representasjoner kan gjøre det enklere for elevene å oppdage at noen løsninger mangler, eller at det blant løsningene finnes duplikater. I tillegg kan elevene bruke representasjonene sammen med en forklaring for å bevise og begrunne at alle løsningene er funnet.

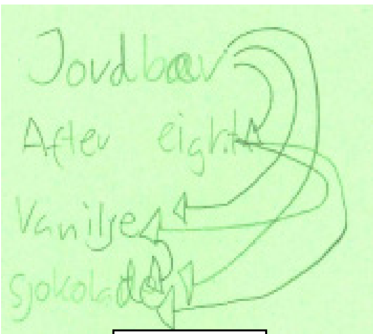
Tabellen nedenfor, som også ble brukt i fagteksten under *A – Forarbeid*, viser de fire problemstillingene i kuleisoppgaven.

Tilbakelegging Rekkefølge	Hver smak kan velges én gang (uten tilbakelegging)	Hver smak kan velges flere ganger (med tilbakelegging)
Kulenes plassering har ingen betydning (uordnet utvalg)	A (6)	B (10)
Kulenes plassering har betydning (ordnet utvalg)	C (12)	D (16)

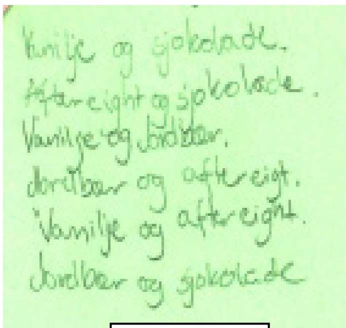
Eksempler på representasjoner som kan egne seg å bruke under de fire ulike problemstillingene A, B C og D:

A Hver smak kan velges én gang, og kulenes plassering har ingen betydning.
I figur 1 har elevene på 5. trinn brukt piler som viser at hver smak, en etter en, er kombinert med alle de andre smakene. Disse to elevene har arbeidet systematisk, og vi kan anta at de er i en telleverkfase. Denne tegningen er det enkleste beviset på at alle løsningene er funnet ut fra gitte betingelser. Når elevene skulle telle hvor mange løsninger de hadde funnet, skrev de 3 + 2 + 1 = 6 på arket. Regnestykker avspeiler systematikken i løsningene. Figur 3 viser den samme måten å representere løsningene på som i figur 1, men her representerer runde tellebrikker i fire forskjellige farger de fire smakene.

Vi kan anta at elevene i figur 2 kan ha funnet løsningene ved å prøve og feile, og at de for hver ny løsning har sjekket om den står på arket fra før av. De har funnet alle løsningene og har ingen doble løsninger. Det kan se ut som de har telt opp løsningene en etter en, for nederst på arket har de skrevet seks løsninger (ikke synlig på bildet). For å hjelpe de to elevene til å bli mer strukturert i måten de arbeider på, kunne læreren først ha spurt hvordan de tenkte da de kom fram til de seks løsningene. For å få en bedre oversikt over løsningene kunne læreren videre ha oppfordret dem til å sortere eller systematisere løsningene. Kanskje ville elevene selv da hatt en idé om hvordan sorteringen kunne foregå. Hvis ikke kunne læreren ha kommentert at elevene har funnet tre kombinasjoner som begynner med vanilje, to kombinasjoner som begynner med jordbær, og én kombinasjon med After Eight.



Figur 1



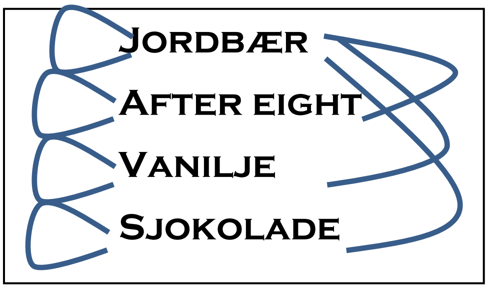
Figur 2

Figur 3

B Kulenes plassering har ingen betydning, og hver smak kan velges mer enn én gang.

Hvis elevene under disse betingelsene bruker den samme måten å representere løsningene sine på som i figur 1, kan det se ut som figur 4. I tillegg til antall løsninger som med symboler kan skrives 3 + 2 + 1, vil antall løsninger øke med fire ettersom det er lov til å kombinere to kuler med samme smak.

Figur 5 viser hvordan elevene kan strukturere løsningene sine i en tabell. Den gir en oversikt over alle mulige løsninger, men de løsningene som oppfyller kravene om at kulenes plassering ikke har betydning, og at hver smak kan velges mer enn én gang, er markert.



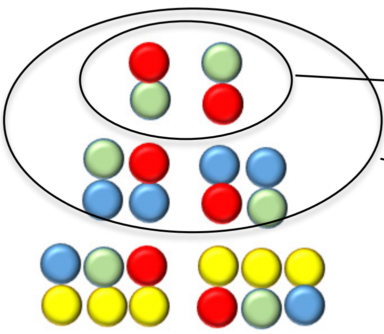
Figur 4

	sjokolade	vanilje	pistasj	blåbær
sjokolade	**ss**	sv	sp	sb
vanilje	vs	**vv**	vp	vb
pistasj	ps	pv	**pp**	pb
blåbær	bs	bv	bp	**bb**

Figur 5

C Hver smak kan velges én gang, og kulenes plassering har betydning.

Løsningene kan enten representeres i en tabell, slik figur 5 viser, eller de kan representeres på samme måte som i figur 1 og 3, men da må hver forbindelseslinje mellom to smaker telles to ganger.



To smaker, gir to løsninger

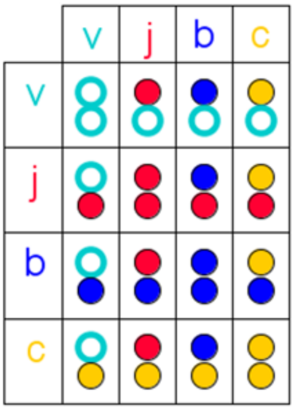
Tre smaker, gir fire løsninger i tillegg til de vi har fra før av, 2+4=6 løsninger.

Hele figur 6 viser at fire smaker gir 2+4+6=12 løsninger.

Figur 6

I figur 6 representerer runde tellebrikker de ulike smakene, og her viser representasjonen antall løsninger med 2, 3 og 4 smaker. Elevene vil kunne bruke representasjonen som støtte når de arbeider med å finne antall løsninger. For å kunne legge alle brikkene slik at de passer inn i figuren, må de arbeide strukturert og systematisk. På grunn av formen på representasjonen kan de se at det mangler løsninger. Mønsteret i representasjonen kan beskrives med tallsymboler, 2+4+6 osv.

D Hver smak kan velges flere ganger, og kulenes plassering har betydning.
Her blir det mange løsninger for elevene å holde styr på, og det blir lett å miste oversikten. Elevene bør velge en representasjon som strukturerer løsningene.



Figur 7

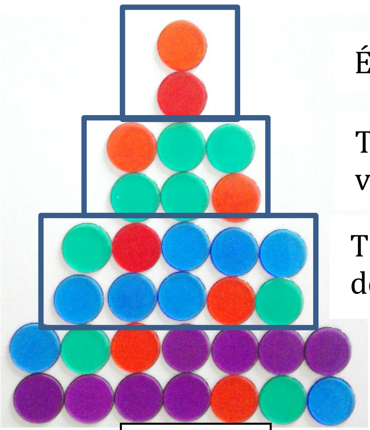
	sjokolade	vanilje	pistasj	blåbær
sjokolade	**ss**	sv	sp	sb
vanilje	vs	**vv**	vp	vb
pistasj	ps	pv	**pp**	pb
blåbær	bs	bv	bp	**bb**

1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + ...

Figur 8

Figur 7 og 8 viser hvordan løsninger er representert i en tabell. I figur 8 skisseres utviklingen av antall løsninger, og mønsteret beskrives symbolsk ved tallfølgen 1, 3, 5, 7 osv. Med to smaker blir det 2 + 2 løsninger, med 3 smaker blir det 3 + 3 + 3 løsninger, med fire smaker blir det 4 x 4 løsninger, med 5 smaker blir det 5 x 5 løsninger, eller 5^2. Dersom elevene finner denne sammenheng mellom antall smaker og antall løsninger, kan de utfordres til å uttrykke dette generelt.

Figur 9 viser en annen måte å representere løsningene på, med det samme tallmønsteret som i figur 8. To elever har ut fra figuren beskrevet utviklingen av antall løsninger slik (figur 9a): For hver ny smak plusses det på en kombinasjon på hver side.

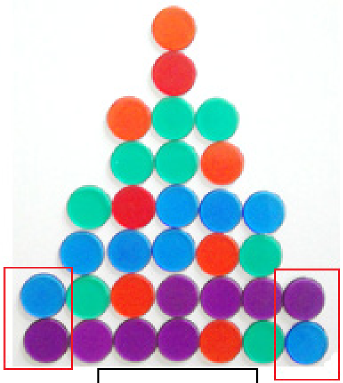


Figur 9

Én smak, én løsning.

To smaker, tre løsninger i tillegg til den vi har fra før av, 1+3=4 løsninger.

Tre smaker, fem løsninger i tillegg til de vi har før av. 1+3+5=9 løsninger.



Figur 9a

Løsningene på kuleisoppgaven kan representeres på ulike måter. Eksemplene viser at representasjonene kan kobles sammen med og støtte opp om elevenes mer eller mindre systematiske framgangsmåter når de jakter på antall mulige måter smakene i isen kan kombineres på. Læreren må synliggjøre for elevene at representasjonen kan hjelpe dem til å få bedre oversikt over løsningene sine. Representasjonen kan også hjelpe elevene til å se antall løsninger, men da må elevene bli utfordret på å finne de ulike løsningene. Det er alltid en fordel at elevene oppdager at det er en sammenheng mellom de ulike representasjonene.

Litteratur

- English, L.D. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatoral reasoning. I G.A. Jones (red.), *Exploring Probability in school: Challenges for teaching and learning*, s. 121–141. New York: Springer.