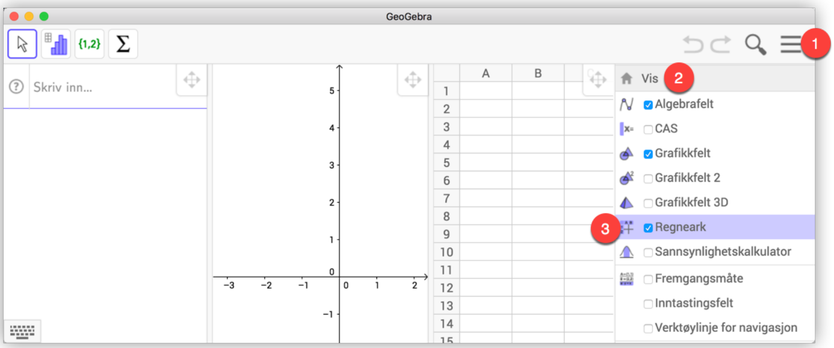
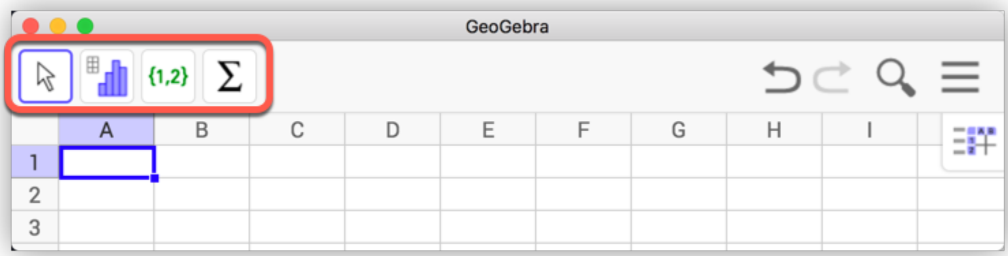
3 Regnearket

3.1 Generelt om regnearket

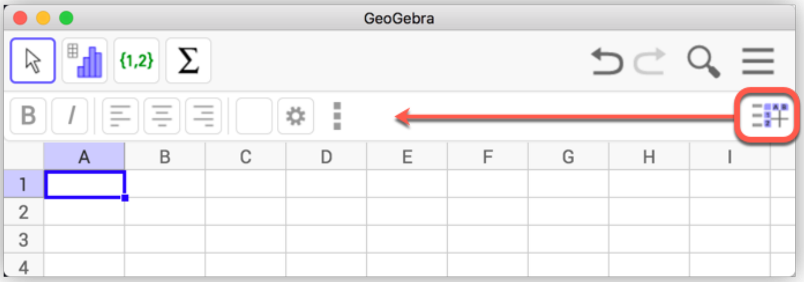
Et regneark kan ses på som en stor tabell med rader og kolonner. På samme måte som i Excel og andre typer regneark, angis en celle i denne tabellen ved å fortelle hvilken kolonne og hvilken rad som det henvises til. Kolonnene angis med bokstaver som A, B, ..., mens radene nummereres med tall 1, 2, ... Vi kan utføre regneoperasjoner på celler (som A3+B5) og vi kan skrive inn tekst i cellene. I GeoGebra blir en celle formatert som tekst dersom du setter teksten i anførselstegn. Vi kan også skrive til en celle fra algebrafeltet. Skriver du `A2=10` i algebrafeltet vil det stå 10 i celle A2. Dette kan være nyttig dersom du skal bruke GeoGebras egne verktøy på cellene. Du kan for eksempel skrive `A1=Integral(x^2-2, 2, 5)`. Svaret vil da stå i celle A1. Du åpner regnearket ved å hake det av under «Vis» (2) i menyen (1):



Merk at dersom du er i regnearket vil menyene endre seg:



Regnearket har også en egen stilmeny. Klikk på stilmenyknappen oppe i høyre hjørne for å få fram stilmenyen. Toppen av regnearket vil da se slik ut:



Vi skal i dette kapittelet bruke regnearket til å løse en del oppgaver. Første eksempelet er hentet fra eksamen i 10. klasse.

Eksempel 3.1

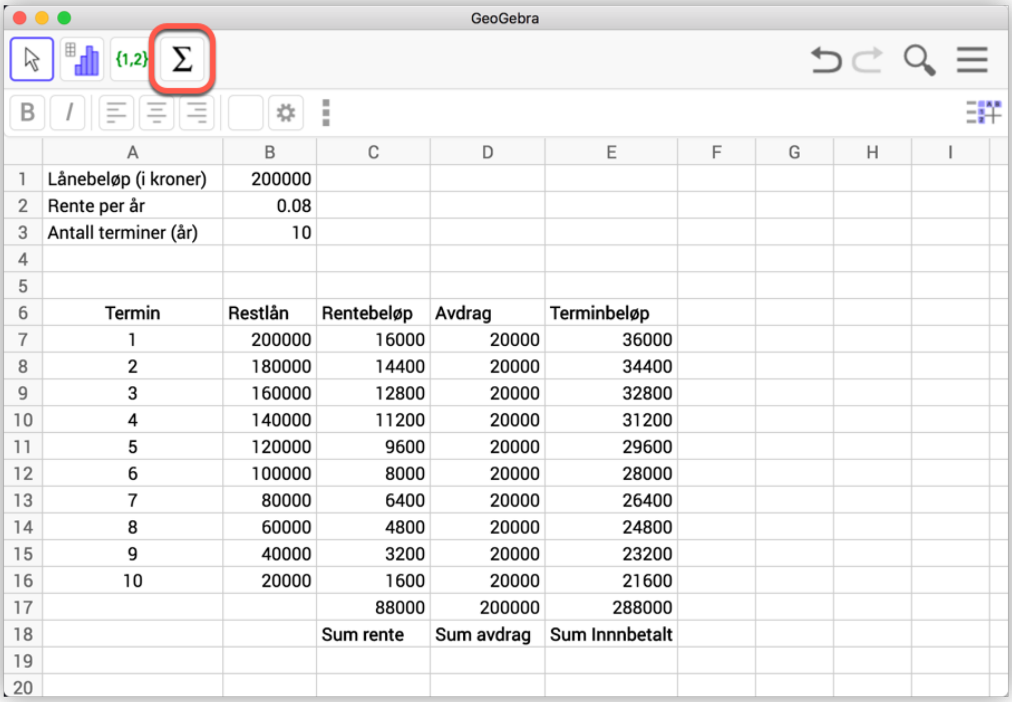
Synne kjøper ny motorsykkel og får et serielån i banken. Lånebeløpet er 200 000 kroner. Hun betaler ned lånet med én termin per år i 10 år. Renten er 8 % per år. Nedenfor ser du begynnelsen på betalingsplanen fra banken. Fullfør betalingsplanen i et regneark.

	A	B	C	D	E
1	Lånebeløp (i kroner)	200000			
2	Rente per år	8 %			
3	Antall terminer (år)	10			
4					
5					
6	Termin	Restlån	Rentebeløp	Avdrag	Terminbeløp
7	1	200000	16000	20000	36000
8	2	180000	14400	20000	34400
9	3	160000			
10	4				
11	5				
12	6				
13	7				
14	8				
15	9				
16	10				
17					
18			Sum rente	Sum avdrag	Sum innbetalt

Løsning:
Vi fører tallene inn i regnearket. I celle C7 har vi skrevet inn `=B7*B$2` og i celle E7 har vi skrevet inn `=C7+D7`. I celle B8 har vi skrevet inn `=B7-D7`.

Merk at dollartegnet er skrevet inn foran to-tallet i den første av disse formlene for å få absolutt referanse til B2. Vi kan nå autokopiere cellene nedover på samme måte som i Excel. Merk at dette fungerer kun om du har valgt to celler.

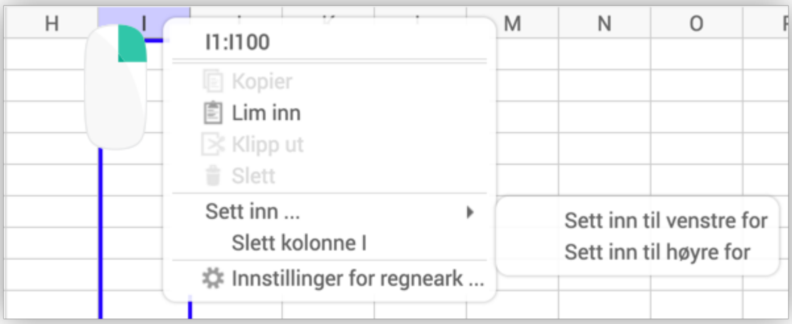
Summene regner vi ut ved enten å markere tallene vi vil legge sammen og klikke på Σ på verktøylinjen (se figur 3.1) eller ved å klikke i cellen du ønsker at summen skal stå i og så skrive inn for eksempel formelen `=Sum(C7:C16)`.



	A	B	C	D	E
1	Lånebeløp (i kroner)	200000			
2	Rente per år	0.08			
3	Antall terminer (år)	10			
4					
5					
6	Termin	Restlån	Rentebeløp	Avdrag	Terminbeløp
7	1	200000	16000	20000	36000
8	2	180000	14400	20000	34400
9	3	160000	12800	20000	32800
10	4	140000	11200	20000	31200
11	5	120000	9600	20000	29600
12	6	100000	8000	20000	28000
13	7	80000	6400	20000	26400
14	8	60000	4800	20000	24800
15	9	40000	3200	20000	23200
16	10	20000	1600	20000	21600
17			88000	200000	288000
18			Sum rente	Sum avdrag	Sum Innbetalt
19					
20					

Figur 3.1: Du kan summere tall fra en kolonne ved å markere tallene og deretter klikke på Σ. Du får da skrevet inn summen i cellen under de markerte tallene.

Tips! Dersom du ønsker å sette inn en ekstra kolonne eller rad i regnearket kan du gjøre dette ved å høyreklikke på den blå kanten (der hvor rad- eller kolonnenummerene står) og velge «Sett inn».



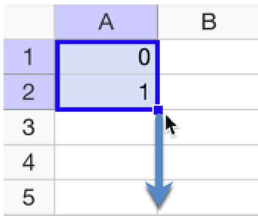
Figur 3.2: Du kan sette inn kolonner (eller rader) ved å høyreklikke øverst i kolonnen og velge «Sett inn...»

I regnearket til GeoGebra er det ikke bare tekst, tall og formler som kan plasseres i de ulike cellene, men alle typer objekter fra GeoGebra.

Eksempel 3.2

Lag en sirkel med sentrum i origo og radius 1. Bruk regnearket til å tegne inn 12 punkt som ligger jevnt fordelt på sirkelen slik at det ene punktet ligger i $(1,0)$. Tegn også inn (ved å bruke regnearket) de elleve linjestykkene som går fra $(1,0)$ og ut til de andre punktene.

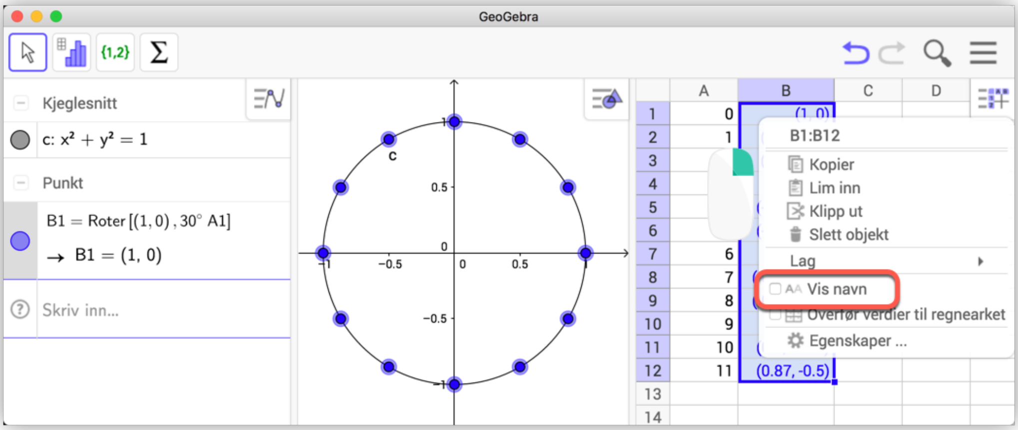
Løsning:
Vi skriver inn $x^2+y^2=1$ i algebrafeltet for å tegne opp sirkelen. Åpner regnearket og skriv inn 0 i celle A1 og 1 i celle A2. Markerer A1 og A2, velger det lille kvadratet nederst i høyre hjørne av A2 og drar nedover slik at vi får tallene 0 til 11 i cellene A1 til A12.



I B1 ønsker vi å skrive Roter((1,0), 30° A1). Her kan det bli en utfordring å få gradetegnet fram. Derfor velger vi å skrive inn

```
B1=Roter((1,0), 30°A1)
```

i algebrafeltet (hvor gradetegnet kommer fram ved å trykke Ctrl + o). Marker deretter celle B1, velg det lille kvadratet i nedre høyre hjørne og dra dette nedover for å autokopiere formelen ned til celle B12. Du vil da få regnet ut koordinatene til punktene. For å få vise dem i grafikkfeltet må du markere cellene B1 til B12, høyreklikke i det blå området og hake av for «Vis objekt». Det kan også være lurt å hake vekk «Vis navn». Se figur 3.3.



Figur 3.3: For å vise punktene laget i regnearket, kan du høyreklikke og hake av for «Vis objekt». Du kan også velge å ikke vise navn.

1

Oppgave 3.1

Lag de elleve linjestykkene som går fra $(1,0)$ til de andre punktene. Hva blir produktet av lengdene til disse linjestykkene? Eksperimenter med andre antall punkt/linjestykker.

3.2 Statistikk

GeoGebra er et flott verktøy til å tegne histogrammer og søylediagrammer. For å gjøre dette, kan det være greit å bruke regnearket i GeoGebra til å føre inn de ulike tallene. Men vi kan også lage lister direkte i algebrafeltet, slik følgende eksempler viser.

Eksempel 3.3

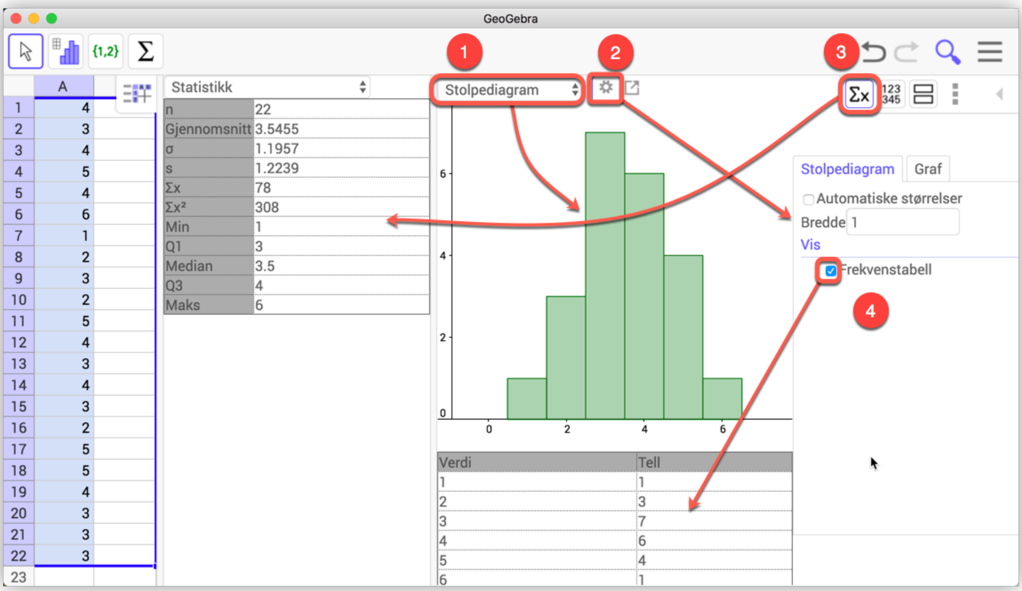
På en prøve har en klasse fått følgende karakterer:
4, 3, 4, 5, 4, 6, 1, 2, 3, 2, 5, 4, 3, 4, 3, 2, 5, 5, 4, 3, 3, 3.

a) Lag en grafisk framstilling av resultatene.

b) Finn gjennomsnittskarakteren og medianen.

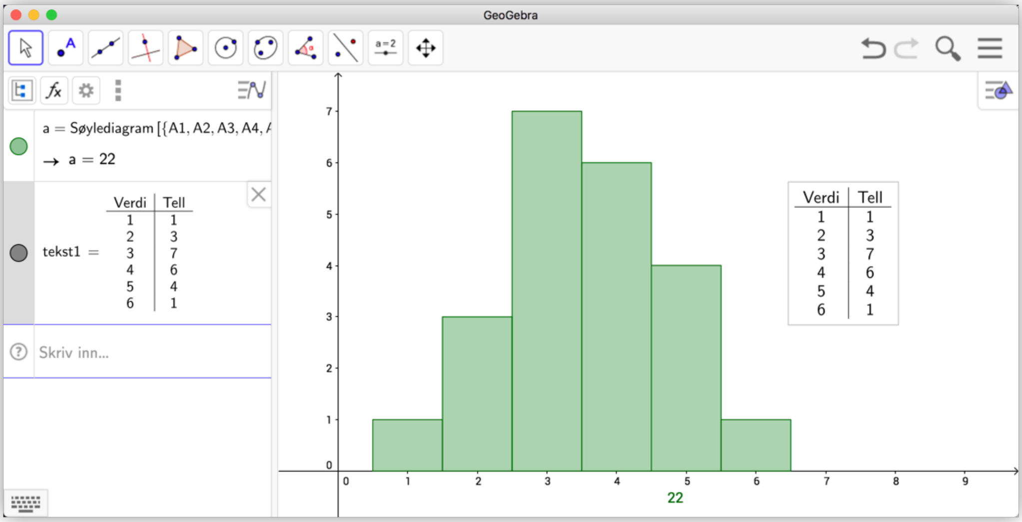
Løsning:

a) Vi bruker GeoGebra til å illustrere resultatene med et søylediagram. Åpne regnearket og før tallene inn i celle A1 til A22. Marker deretter tallene og klikk på verktøyet *Analyse av en variabel*. Du må så velge *Stolpediagram* (se (1) på figur 3.4). Dersom du ønsker å endre bredden på søylene klikker du på innstillinger (2), haker vekk Automatisk størrelse og skriver inn ønsket bredde. Her kan du også velge å få laget en frekvenstabell (4). For å svare på oppgave b) kan vi klikke på *Vis statistikk* Σx (3). Vi ser at gjennomsnittet er ca 3,5 og Medianen er 3,5.



Figur 3.4: I Dataanalyse kan du få mye informasjon om datamaterialet.

Dersom du ønsker å få tegnet opp dette diagrammet i grafikkfeltet klikker du på og velger «Kopier til grafikkfelt». Da får du tegnet opp søylediagrammet og det blir laget en frekvenstabell i grafikkfeltet som vist på figur 3.5 dersom du haket av for *Frekvenstabell* i *Analyse av en variabel* (se (4) på figur 3.4).



Figur 3.5: Søylediagram med frekvenstabell.

b) Når vi krysser ut *Analyse av en variabel* forsvinner alle sentral- og spredningsmål som vi kunne lese av slik vi ser i figur 3.4. Dersom vi ønsker å lagre slike størrelser i algebrafeltet, kan vi gjøre dette ved å skrive inn passende kommandoer. For å finne gjennomsnittet kan vi for eksempel skrive inn

```
g=gsnitt(A1:A22)
```

På samme måte kan vi finne medianen ved å skrive inn

```
m=Median(A1:A22)
```

Vi ser at gjennomsnittet er 3,55 og medianen er 3,5.

Eksempel 3.4

Elevene i en klasse hadde følgende skostørrelser:

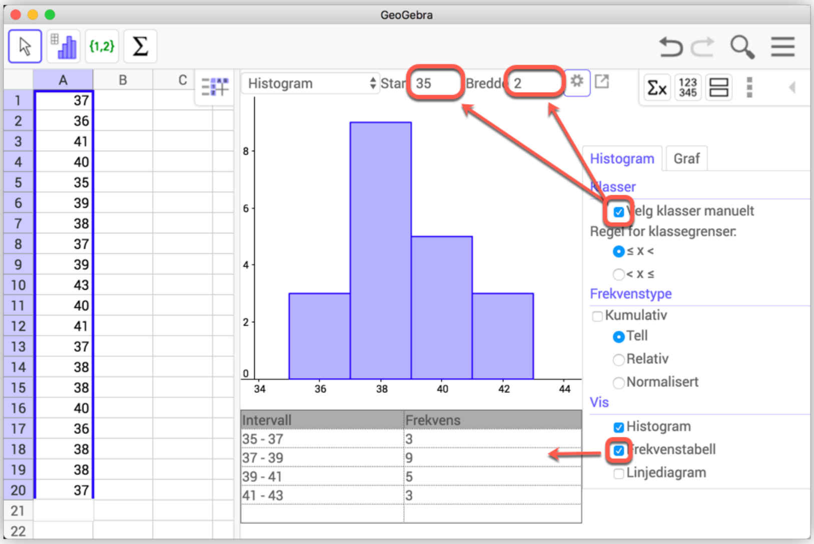
$$37, 36, 41, 40, 35, 39, 38, 37, 39, 43, 40, 41, 41, 37, 38, 38, 40, 36, 38, 38, 37$$

Illustrer tallene med et histogram der klassegrensene er 35, 37, 39, 41, 43 og 45.

Løsning:
Vi skriver inn tallene i regnearket, marker dem og klikker på . Vi får da opp et vindu som vist på figur 3.6. Legg merke til at grensene til histogrammet i utgangspunktet ikke er helt slik som vi ønsker dem. Klikk på innstillinger og velg klasser manuelt. Velg at klassene skal starte på 35 og at bredden skal være 2. På figur 3.6 har vi også valgt å vise Frekvenstabell. Merk at denne metoden går fint dersom klassebredden er lik for hver klasse. Skal du bruke klasser med ulik klassebredde må du bruke Historgram-kommandoen I dette tilfelle kunne vi ha skrevet inn

```
Histogram({35, 37, 39, 41, 43},A1:A21, false)
```

Vi har skrevet inn «false» for å få høyden lik klassefrekvens. Skriver vi «true» (eller ingen ting) blir høydene lik tetthetsfaktor · klassefrekvens/klassebredde.



Figur 3.6: Histogram i Datanalyse

Oppgave 3.2

I en undersøkelse ble en del elever spurt om hvor mange blyanter de hadde med seg på skolen. Her er resultatet:

3, 2, 3, 5, 4, 4, 5, 7, 2, 7, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 5, 4, 3, 3, 4.

a) Lag et histogram som viser hvor mange elever som hadde mellom 0 og 2 blyanter, 3 og 5 blyanter og 6 og 10.

b) Du kan også lage et søylediagram. Skriv inn `Søylediagram(L_1,0.5)`. Du vil da få søyler med bredde lik 0,5.

c) Finn gjennomsnittet ved å bruke kommandoen `gsnitt(L_1)`.

d) Finn typetallet ved å bruke kommandoen `Typetall(L_1)`.

Oppgave 3.3

Listen angir antall timer ulike elever i en klasse bruker på spill i uken:

$$7, 7, 8, 8, 5, 4, 8, 3, 6, 5, 4, 7, 2, 1, 8, 7, 7, 0, 1, 4, 5, 8, 12, 14, 12, 3$$

a) Representer tallene i et histogram med 5 som klassebredde (0-5, 5-10,...).

b) Hvor mange timer bruker elevene i gjennomsnitt?

c) Hva er typetallet?

GeoGebra kan også finne første og tredje kvartil til et datasett. Du bruker da kommandoene Q1(<liste>) og Q3(<liste>). Du kan selvsagt også finne andre kvartil ved å bruke kommandoen Median(liste). Variasjonsbredden finner du ved å skrive inn kommandoen Maks(<liste>)-Min(<liste>). Kvartilavviket og standaravvik finner du ved å skrive inn henholdsvis (Q3(<liste>)-Q1(<liste>))/2 og stavv(<liste>)[1].

Eksempel 3.5

Lengdehopp er en gren av friidrett som går ut på å hoppe så langt man kan i et hopp. I konkurranser har man som regel tre hopp, der det beste hoppet teller.

Anna og Petra konkurrerer om å kvalifisere seg til lengdehoppkonkurransen i et friidrettsstevne. De får ti hopp hver, og den beste av dem er kvalifisert til konkurransen. Her er resultatene (oppgitt i meter) fra kvalifiseringen:

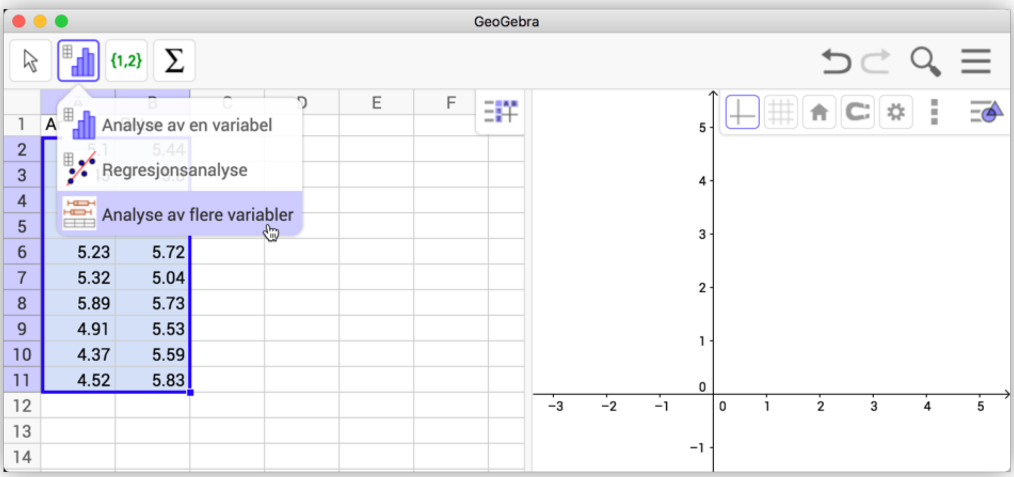
Hopp	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anna	5,10	5,45	5,92	4,10	5,23	5,32	5,89	4,91	4,37	5,42
Petra	5,44	5,80	5,67	5,74	5,72	5,04	5,73	5,53	5,59	5,83

a) Finn gjennomsnitt og median for hver av de to jentenes resultater.

b) Finn variasjonsbredde og standardavvik for hver av de to jentenes resultater.

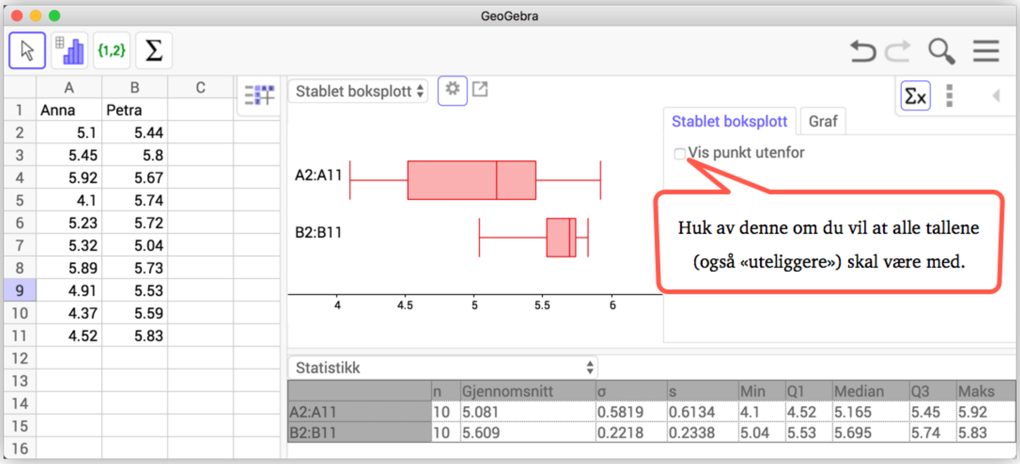
c) Foreta en vurdering av jentenes resultater og det du fant i a) og b), og argumenter for hvem du synes skal bli kvalifisert.

Løsning:
Vi fører tallene inn i regnearket. Deretter markerer vi alle tallene og klikker på verktøyet *Analyse av flere variable* som vi finner i samme gruppe på verktøylinjen som *Analyse av en variabel*.



[1]Om rådata er et utvalg av en større polulasjon kan du bruke stavvp(<liste>)

Du får da opp følgende vindu:



Figur 3.7: Analyse av flere variable

Vi kan nå lese av alle tallene som det blir spurt om i oppgaven. Unntaket er variasjonsbredden (som vi må regne ut manuelt ut fra tallene i tabellen over).

Vi ser også en grei grafisk framstilling som viser at Petra er jevnt over bedre til å hoppe enn Anna, noe som blir fanget opp av blant annet standardavvik og middelverdi. Men Anna kan vinne en konkurranse der det er det lengste hoppet som er avgjørende!

Neste eksempel er hentet fra eksempelsettet til Matematikk 2P for ny eksamensordning våren 2015. Her får du se at du også lett kan ta utgangspunkt i en frekvenstabell.

Eksempel 3.6

Våren 2012 var klasse 2A og klasse 2B ved en skole oppe til eksamen i matematikk 2P. Tabellen nedenfor viser hvordan karakterene fordelte seg i de to klassene.

Karakter	Klasse 2A (Frekvens)	Klasse 2B (Frekvens)
1	2	0
2	2	0
3	3	6
4	5	8
5	4	6
6	4	0

a) Bruk regneark til å lage en grafisk framstilling som viser karakterfordelingen i de to klassene.

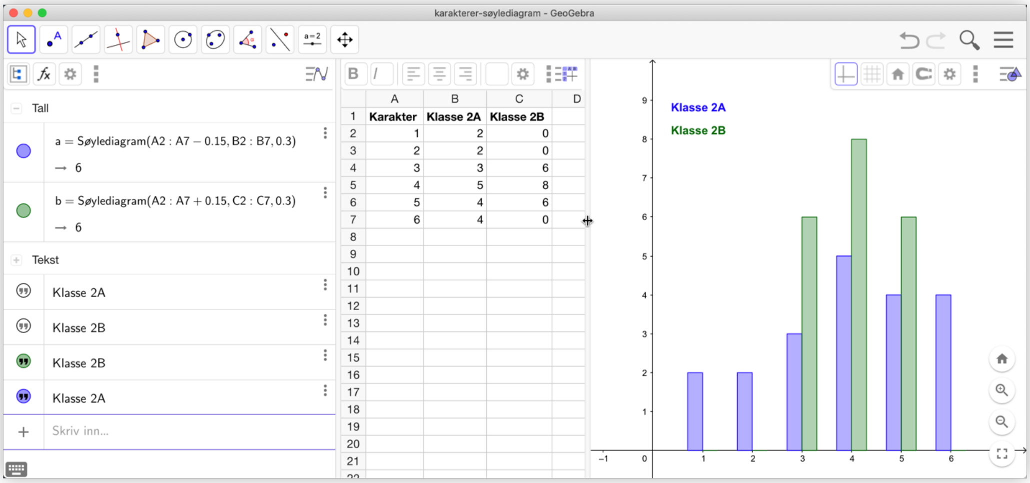
b) Bruk regneark til å bestemme gjennomsnittskarakter, mediankarakter og standardavvik for karakterene i hver av de to klassene. Hva forteller svarene om resultatene i de to klassene?

Løsning:

a) Før tallene inn i regnearket til GeoGebra. Siden vi har to sett med data her (to klasser), så er det ikke så lett å få tegnet opp to søylediagram direkte ved å bruke *Analyse av en variabel*. Derfor vil vi her bruke kommandoer i algebrafeltet for å få tegnet opp søylediagrammene. For å få tegnet inn de to diagrammene pent på siden av hverandre har vi forskjøvet de to diagrammene litt (slik at de ikke ligger oppå hverandre). Dette har vi gjort ved å legge til 0.15 til listen med data (A2:A7). Kommandoene vi har brukt er derfor:

```
Søylediagram(A2:A7-0.15,B2:B7,0.3)
Søylediagram(A2:A7+0.15,C2:C7,0.3)
```

Resulatet blir som vist på figuren nedenfor.



b) Du kan skrive inn formler i regnearket. Dersom formlene er litt lange eller du ikke er sikker på syntaksen, kan det være et godt tips å skrive til cellene fra algebrafeltet.

I cellene på figuren til høyre har jeg skrevet inn følgende kommandoer i algebrafeltet:

```
B9=gsnitt(A2:A7, B2:B7)
C9=gsnitt(A2:A7, C2:C7)
B10=Median(A2:A7, B2:B7)
C10=Median(A2:A7, C2:C7)
B11=stavvp(A2:A7, B2:B7)
C11=stavvp(A2:A7, C2:C7)
```

	A	B	C
1	Karakter	Klasse 2A	Klasse 2B
2	1	2	0
3	2	2	0
4	3	3	6
5	4	5	8
6	5	4	6
7	6	4	0
8			
9	Gjennomsnitt:	3.95	4
10	Median:	4	4
11	Standardavvik:	1.56	0.77

Vi ser at de to klassene har ca samme sentralmål, men det er mye større spredning i klasse 2A. Dette ser vi både grafisk og ved at 2A har mye større standardavvik enn 2B.

Til slutt tar vi med et eksempel der vi regner på et klassedelt materiale. Igjen er det eksempelsettet for 2015 fra Utdanningsdirektoratet som er utgangspunkt.

Eksempel 3.7

Politiet har gjennomført fartskontroller på to veistrekninger. Den ene veistrekningen har fartsgrense 50 km/h og den andre 80 km/h. Nedenfor ser du resultatene fra hver av de to kontrollene

Fartsgrense 50 km/h	
Fart	Antall biler
$[45, 50\rangle$	25
$[50, 55\rangle$	26
$[55, 60\rangle$	23
$[60, 65\rangle$	3
$[65, 70\rangle$	2
$[70, 75\rangle$	1

Fartsgrense 80 km/h	
Fart	Antall biler
$[70, 75\rangle$	7
$[75, 80\rangle$	43
$[80, 85\rangle$	17
$[85, 90\rangle$	8
$[90, 95\rangle$	0
$[95, 125\rangle$	5

Bestem gjennomsnittsfarten til bilene i hver av de to kontrollene.

Løsning:
Før inn tallene i et regneark som vist på figuren til høyre. Skriv inn følgende kommandoer:

```
B9=gsnitt(A1:A7, B1:B6)
E9=gsnitt(D1:D7, E1:E6)
```

	A	B	C	D	E
1	45	25		70	7
2	50	26		75	43
3	55	23		80	17
4	60	3		85	8
5	65	2		90	0
6	70	1		95	5
7	75			125	

Da kan du lese av at gjennomsnittsfarten i den ene kontrollen var 53 km/h mens den var 81 km/h i den andre kontrollen. Merk at vi her må ha med ett tall mer i kolonne A og D. Dette gjør vi for å markere hvor høyt opp det siste intervallet skal gå.

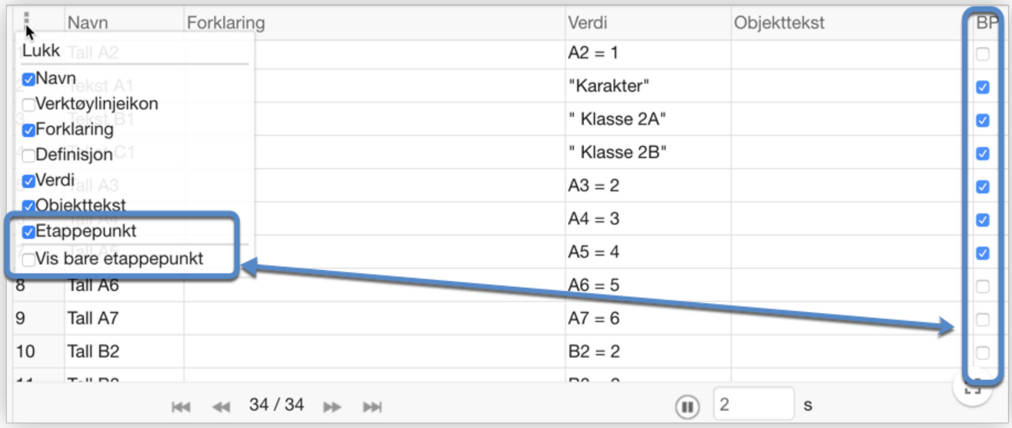
3.3 Vis formlene

På samme måte som du i Excel kan bruke tastekombinasjonen ALt + d for å vise formlene i regnearket. Du tråkler da gjennom tre alternativer: Verdi, Definisjon og Kommando. Merk at du må klikke deg inn i regnearket, slik at dette er aktivt, for at dette skal kunne virke.

	A	B	C
1	**Karakter**	**Klasse 2A**	**Klasse 2B**
2	1	2	0
3	2	2	0
4	3	3	6
5	4	5	8
6	5	4	6
7	6	4	0
8			
9	Gjennomsnitt:	gsnitt(A2:A7, B2:B7)	gsnitt(A2:A7, C2:C7)
10	Median:	Median(A2:A7, B2:B7)	Median(A2:A7, C2:C7)
11	Standardavvik:	stavvp(A2:A7, B2:B7)	stavvp(A2:A7, C2:C7)

Figur 3.8: Her ser du formlene som er brukt i eksempel 3.6

Vi kan også dokumentere hva som er gjort i regnearket (eller andre felt) i «Framgangsmåte». Ulempen med dette er at den blir veldig lang, siden alle cellene som det er skrevet noe i vil få en egen rad. En mulig løsning kan være å lage «etappepunkt». Dette kan du gjøre ved å hake av for etappepunkt under menyen ⋮ øverst til høyre i fremgangsmåte:



Figur 3.9: Du kan velge etappepunkt dersom du har haket av for dette i kolonnefeltet i stilmenyen.

Når du har valgt etappepunkt kan du skjule alle de andre ved å velge «Vis bare etappepunkt» i menyen under ⋮. Se figur 3.9.

3.4 Regresjon

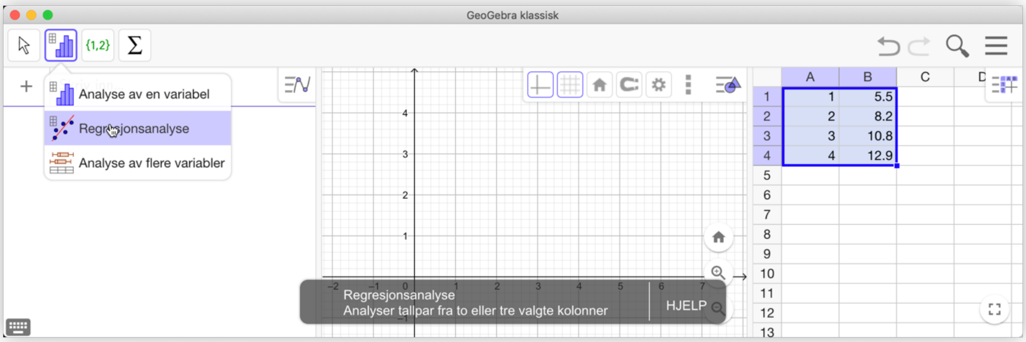
Når vi skal gjennomføre regresjon kan det være en god idé å bruke regnearket til GeoGebra. Vi skal i dette kapittelet bruke regnearket til å føre inn datamaterialet som danner grunnlag for regresjon. Vi tar som vanlig utgangspunkt i noen eksempler.

Eksempel 3.8

Finn en lineær funksjon som passer bra med følgende tall:

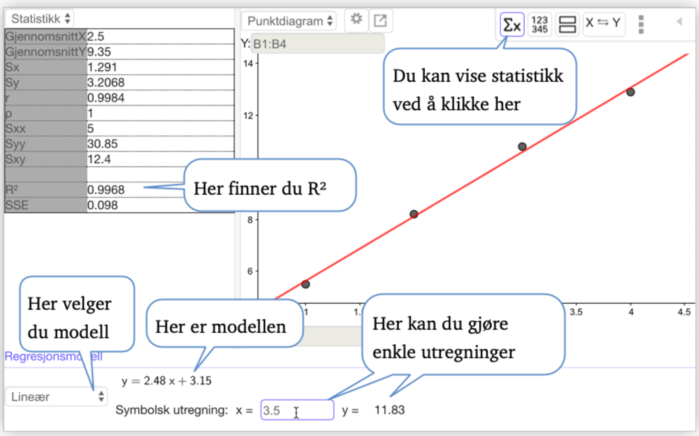
x	1	2	3	4
y	5,5	8,2	10,8	12,9

Løsning:
Vi fører tallene inn i regnearket, markerer dem og velger *Regresjonsanalyse* i verktøymenyen som vist på figur 3.10:



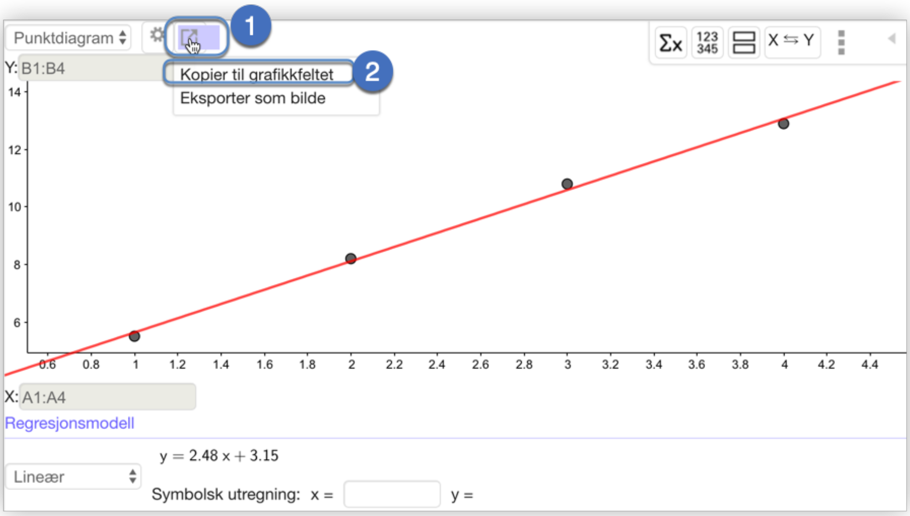
Figur 3.10: Marker tallene i regnearket og velg *Regresjonsanalyse*

Du får da opp et vindu som vist på figur 3.11. Vi velger «Lineær modell» og ser at $y = 2{,}48x + 3{,}15$ passer bra med tallene i tabellen. Også her kan du klikke på $\boxed{\Sigma x}$ for å få fram for eksempel R^2.



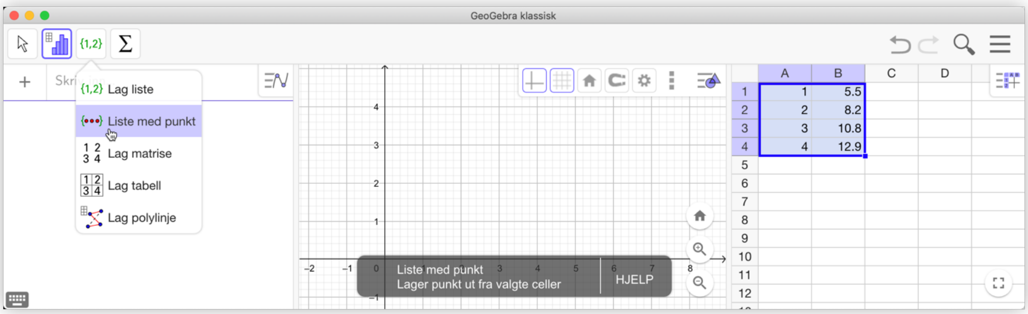
Figur 3.11: *Regresjonsanalyse* er effektiv å bruke.

Du kan kopiere regresjonen du har gjort i Regresjonsanalyse ved å klikke på og velge «Kopier til grafikkfeltet». Du får da laget en liste med punkt og en funksjon definert ut fra regresjonen du har valgt.

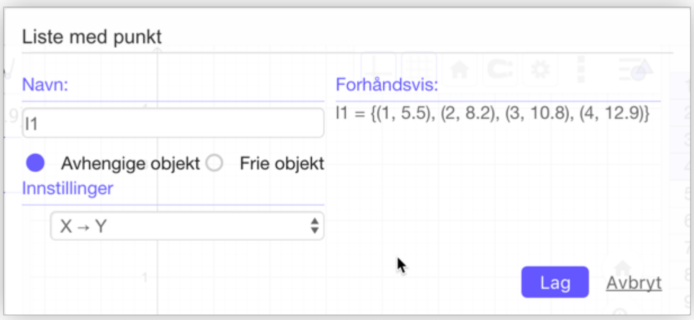


Figur 3.12: Du kan kopiere til grafikkfeltet fra Regresjonsanalyse.

Slike regresjoner kan du også gjøre ved å skrive inn kommandoer. Da må du først lage liste med punkt. Du kan lage slike lister med punkt ved å bruke regnearket. Marker tallene og klikk på verktøyet *Lag liste med punkt* , som vist på figuren nedenfor.



Du får da opp følgende vindu:



Her kan du velge om punktene skal være avhengig eller uavhengig av tallene fra regnearket (Frie objekt). Dersom du velger «Avhengige objekt», så vil punktene automatisk endres dersom du endrer tallene i regnearket. Motsatt gjelder også. Dersom du flytter på et av punktene, så vil tallene i regnearket automatisk bli endret.

Når du så har laget en liste med punkt, kan du bruke kommandoer på denne listen. I dette tilfellet er en av følgende kommandoer aktuelle:

```
RegLin(l1)
```

Merk at svaret blir en linje og ikke en funksjon når vi gir kommandoen `RegLin`. Men ønsker du å finne y når $x = 5$ kan du skrive inn `a(5)` i algebrafeltet (dersom linjen har fått navnet `a`). Du finner da at $y = 15{,}5$.

Gir du derimot kommandoen

```
RegPoly(l1,1)
```

vil du få funksjonen $f(x) = 2{,}48x + 3{,}15$ som svar. Du kan da bruke denne funksjonen til å gjøre ulike beregninger, som for eksempel å regne ut $f(5)$.

Oppgave 3.4

En parabel går gjennom punktene $(2,1)$, $(4,4)$ og $(6,-1)$. Åpne et nytt arbeidsark og bruk regresjon til å finne et funksjonsuttrykk for andregradsfunksjonen.

Du trenger ikke å bruke regnearket til å tegne inn punktene. Du kan lage en liste direkte ved å gi kommandoen

```
L={(2, 1), (4, 4), (6, -1)}
```

Du må her bruke kommandoen `RegPoly(L, 2)`.

Oppgave 3.5

Sammenhengen mellom kostnaden $K(x)$ i kroner ved produksjon av en vare og tallet på produserte enheter x er gitt i tabellen nedenfor.

x	0	100	300	500	700
$K(x)$	30 000	83 000	207 000	355 000	527 000

a) Bruk regresjon og finn en god modell for $K(x)$. I GeoGebra kan du velge mellom `RegEksp`, `RegLin`, `RegLog`, `RegLogist`, `RegPoly`, `RegPot` og `RegSin`

b) Finn $K'(300)$.

Oppgave 3.6 — Fra MAT1015 Matematikk 2P, Høsten 2010.

Den mest nøyaktige måten å finne makspulsen din på er å gjennomføre en fysisk test der du presser deg maksimalt for å se hvor høy puls det er mulig å oppnå. Fem personer med ulik alder har gjennomført en slik test. Resultatene ser du i tabellen nedenfor. Finn en lineær sammenheng mellom alder x og makspuls y.

Alder	17	25	37	48	60
Makspuls	195	189	183	175	166

Oppgave 3.7 — Eksamen REA3026 Matematikk S1, Våren 2008.

Tabellen viser antall registrerte personbiler per 1000 innbyggere i Norge for noen år i perioden 1985 - 2005.

x	0	5	10	15	20
$f(x)$	417	418	426	460	496

Her er $f(x)$ antall registrerte personbiler per 1000 innbyggere x år etter 1985.

a) Bestem gjennomsnittlig veksthastighet fra 1990 til 2000. Hva forteller dette tallet oss?

b) Bruk regresjon til å finne en polynomfunksjon f av andre grad som tilnærmet beskriver utviklingen ovenfor.

c) Tegn grafen til f, og marker punktene i tabellen i samme koordinatsystem.

d) Bestem momentan veksthastighet i år 2000. Marker den momentane veksthastigheten på grafen til f.

e) I år 2001 var det ca. 4 500 000 innbyggere i Norge. Bruk d) til å anslå hvor mange registrerte biler det var dette året.

3.5 Overføre verdier til regnearket

Du kan overføre verdier til regnearket.

Eksempel 3.9

Hva er arealet til en rektangulær femkant med side s?

Løsning:
Du kan selvsagt betrakte dette rent teoretisk og komme fram til formelen

$$A(s) = \frac{1}{4}\sqrt{10\sqrt{5}+25}\cdot s^2$$

En annen måte å løse problemet på er å gjøre en del eksempler og så bruke regresjon til å finne formelen.

1. Lag et linjestykke f mellom to punkt A og B.
2. Velg verktøyet *Regulær mangekant*  og klikk på A og B. Velg at polygonet skal ha 5 hjørner.
3. Åpne regnearket. Dette må være åpent for at du skal kunne overføre verdier til regnearket.
4. Høyreklikk på linjestykket i algebrafeltet og velg «Overfør verdier til regnearket».
5. Gjør det samme med polygonet: Høyreklikk på Mangekant1 og velg «Overfør verdier til regnearket».
6. Flytt litt rundt på et av hjørnene i polygonet. Du vil da få satt av tilhørende verdier i regnearket.[2]
7. Gjør en regresjon på (f, Mangekant1) ved å markere tallene i regnearket. Velg potensfunksjon. Du vil da få $y = 1{,}7205x^2$. Det vil si at

   $$A(s) = 1{,}7205\cdot s^2$$

Oppgave 3.8
Gjør tilsvarende som i eksempel 3.9 med en regulær sekskant. Kan du også finne en eksakt verdi for arealet?

Å overføre verdier til regnearket er en fin måte å samle opp de ulike utfallene vi får når vi simulerer for eksempel et terningkast. La oss si vi ønsker å gjøre et forsøk der vi kaster en terning flere ganger. Vi ønsker da for eksempel å samle opp de ulike tallene i en frekvenstabell. Slik kan vi da gå fram:

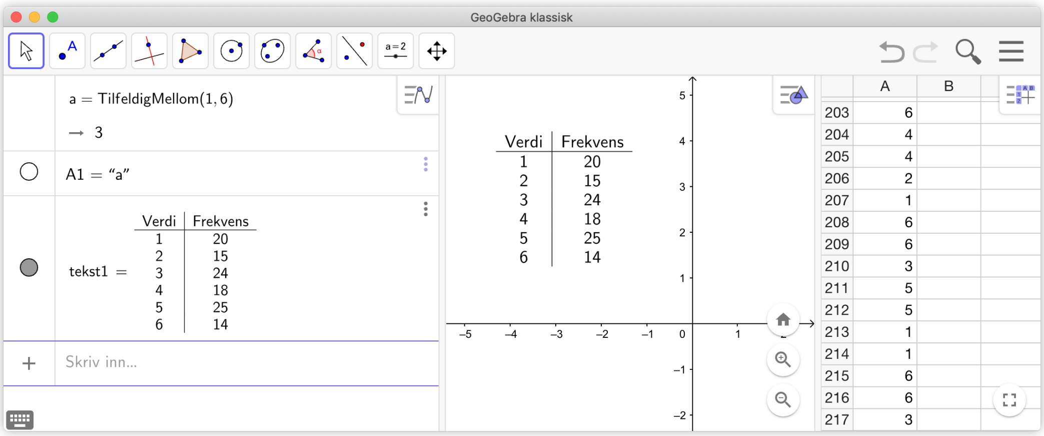
[2]Det forekommer at GeoGebra fører opp en verdi dobbelt. Prøv da å lagre dokumentet, lukke GeoGebra og åpne igjen.

1. Skriv inn kommandoen `TilfeldigMellom(1, 6)` i algebrafeltet og få et tilfeldig tall a.

2. Åpne regnearket og høyreklikk deretter på a og velg «Overfør verdier til regnearket».

3. Når du nå oppdaterer GeoGebra (ved å klikke på ctrl + R), vil du få nye tall skrevet inn i regnearket. Vil du gjøre 100 kast kan du skrive inn `OppdaterFiguren(100)` i algebrafeltet.

4. For å samle alt i en frekvenstabell kan du skrive inn `Frekvenstabell(A1:A1000)` i algebrafeltet. Du får da en pen frekvenstabell plassert i grafikkfeltet. Se figur 3.13. Merk at det ikke er mulig i GeoGebra 6.0 å spore direkte til en liste, slik det er i GeoGebra 5.0. Vi har derfor skrevet inn A1:A1000 i kommandoen ovenfor. Det vil si at vi har bare valgt et stort tall (1000). Gjør vi mer enn 1000 kast, må vi selvsagt øke dette tallet.



Figur 3.13: GeoGebra kan lage frekvenstabeller for deg.

3.6 Mer om regresjoner

GeoGebra har et imponerende utvalg av regresjoner.

Funksjonstype	Kommando	Krav til x og y
$ax+b$	RegPoly(<liste>, 1)	ingen
$ax^n+bx^{n-1}+\cdots$	RegPoly(<liste>, n)	ingen
$a+b\ln x$	RegLog(<liste>)	$x>0$
$a\cdot e^{bx}$	RegEksp2(<liste>)	$y>0$
$a\cdot b^x$	RegEksp(<liste>)	$y>0$
ax^b	RegPot(<liste>)	$x>0$ og $y>0$
$a\sin(bx+c)+d$	RegSin(<liste>)	ingen
$\dfrac{a}{1+be^{cx}}$	RegLogist(<liste>)	ingen

Tabell 3.1: Regresjoner i GeoGebra

Med kommandoen `Reg(<liste med punkt>,<Funksjon>)` kan du selv utvide listen i tabell 3.1.

Eksempel 3.10

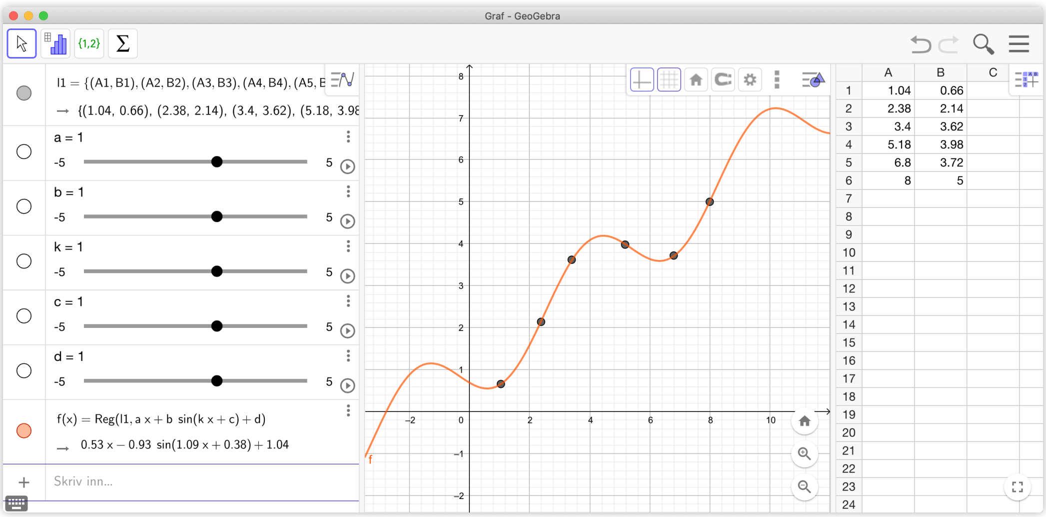
Bestem en funksjon som passer bra med punktene i tabellen nedenfor.

x	1,04	2,38	3,40	5,18	6,80	8,00
y	0,66	2,14	3,62	3,98	3,72	5,00

Før du kan bruke kommandoen `Reg()` må du definere listen med punkt og funksjonene du ønsker å bruke. La oss si at vi ønsker å bruke en regresjon av typen $ax + b\sin(kx + c) + d$. Vi går da fram på følgende måte:

1. Skrive inn noen passelige verdier for a, b, c, d og k i algebrafeltet.
2. Før inn tallene fra tabellen i regnearket og lag en liste l1.
3. Vi kan da bruke kommandoen `Reg(l1,a*x+b*sin(k*x+c)+d)` for å finne regresjonen.

Vi får da at $f(x) = 0{,}52x - 1{,}03\sin(1{,}10x + 0{,}40) + 1{,}13$ som vist på figur 3.14.



Figur 3.14: Regresjon med funksjonen $f(x) = ax + b\sin(kx + c) + d$

Dersom du får et rart resultat kan det hjelpe å endre litt på en eller flere av verdiene for a, b, c, d og k.

Oppgave 3.9
Finn en funksjon som passer bra med punktene i tabellen under.

x	0	2	4	6	8	10	12
y	54	35	25	19	16	14	13

Oppgave 3.10
Temperaturen i en kopp kaffe blir målt hvert fjerde minutt. Resultatene av målingene er vist i tabellen nedenfor.

Tid (i minutt)	0	4	8	12	16
Temperatur (i °C)	70	53	42	35	30

Lag en modell som beskriver temperaturen i koppen som funksjon av tiden.

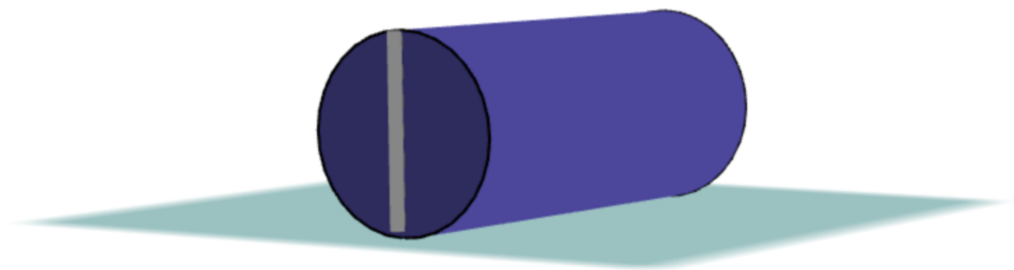
Oppgave 3.11
Bestem en funksjon som passer med tallene i tabellen:

x	−10	−8	−6	−4	−2	−1	0	2	4	6	8
y	−3,8	−4	−4,4	−5,6	−16	10	1,3	−1,1	−1,8	−2,1	−2,3

Oppgave 3.12
Bestem en funksjon som passer med tallene i tabellen:

x	−6	−4	−2	−1	−0,5	0,5	1	2	4	6
y	−9,17	−5,25	−1,5	0	0	6	6	7,5	11,3	15,2

Oppgave 3.13
En stor oljetank er sylinderformet og har lengde lik 5 meter og radius lik 1 meter. Du skal lage en målestav som du skal stikke ned i en åpning på toppen av tanken. Med denne skal du kunne avlese volumet med olje i tanken.



Oppgave 3.14
Finn en formel for arealet til en regulær syvkant med sidelengde s.