5 Geometri

GeoGebra blir ofte omtalt som et dynamisk geometri-program. Det vil si at vi kan gjøre geometriske konstruksjoner og eksperimentere med disse på en dynamisk måte. I dette kapittelet skal vi jobbe oss gjennom en rekke eksempler på dette. I programmet er det en del innebygde verktøy som for eksempel *Midtnormal* og *Parallell linje*. Disse kan vi selvsagt bruke. Men vi vil først se hvordan vi kan bruke GeoGebra til å gjennomføre slike konstruksjoner «med passer og linjal». Det kan være praktisk å kunne dette dersom vi ønsker å lage et løsningsforslag til elevene som viser hvordan en slik konstruksjon kan se ut om vi brukte kun passer og linjal.

5.1 Konstruksjoner

Vi vil her vise hvordan vi kan bruke GeoGebra til å konstruere ulike objekt. Merk at GeoGebra har en del verktøy tilgjengelig som gjør at noen kan være skeptiske til om det faktisk er konstruksjoner som blir gjort. Vi har en lang tradisjon når det gjelder vår tolkning av hva det vil si å konstruere en figur. Denne tradisjonen går tilbake til Euklid. I en konstruksjon er det i denne tradisjonen kun passer og (umerket) linjal som kan brukes. Det er i denne forstand at ordet konstruksjon skal forstås på en eksamen. Men dersom det står at en figur skal tegnet er det selvsagt fritt fram til å bruke alle verktøyene i GeoGebra. Konstruksjoner vil være mest aktuelt på del 1, mens det vil være mer aktuelt å tegne figurer på del 2. For en utdypning av dette henviser vi til vurderingsveiledningen fra Utdanningsdirektoratet.

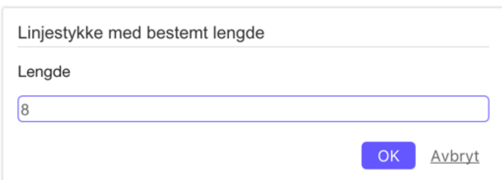
Eksempel 5.1

I $\triangle ABC$ er $AB = 8{,}0\,\text{cm}$, $\angle A = 60^\circ$ og $\angle B = 30^\circ$.

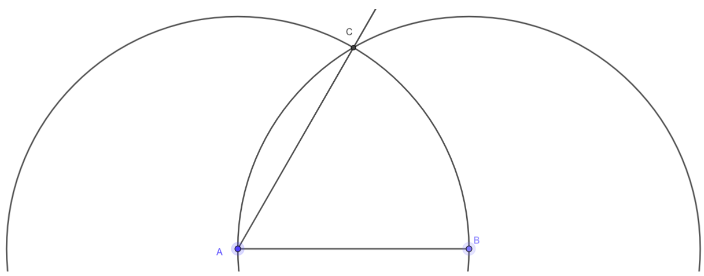
Konstruer $\triangle ABC$

Løsning:
Før vi starter selve konstruksjonen, kan det være en god idé å velge oppsettet *Geometri*.

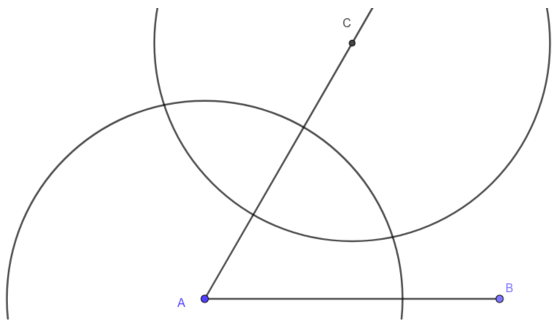
1 Vi setter først av AB ved å bruke verktøyet *Linjestykke med bestemt lengde*. Når dette verktøyet er valgt klikker vi i grafikkfeltet der hvor vi vil ha A. Du får da opp et vindu hvor du skriver inn lengden på AB $(= 8)$.



2 Vi konstruerer så vinkel A ved å først tegne to sirkler med lik radius og sentrum i hunholdsvis A og B. På figuren nedenfor har har vi tegnet to sirkler med radius 8. Vi finner skjæringspunktet mellom sirklene ved å bruke verktøyet *skjæring mellom to objekter* . Vi trekker så en stråle gjennom dette skjæringspunktet. Merk at GeoGebra kaller dette punktet for C. Dette er noe vi må endre på når figuren er ferdig, siden dette ikke er hjørnet C som vi skal finne.

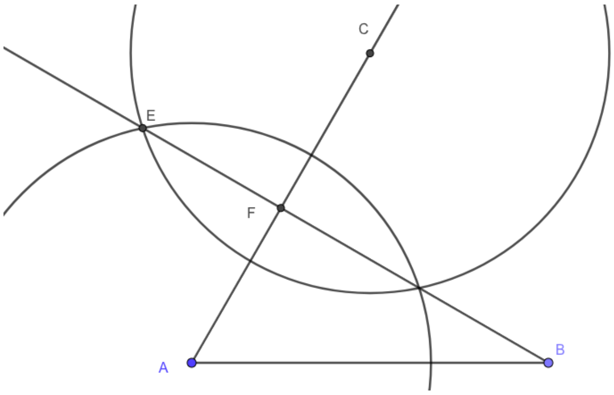


3 Vi konstruerer $\angle B$ ved å halvere vinkel ABC (husk at vi skal endre navn på C til slutt). Dette gjør vi ved å konstruere to sirkler med samme radius gjennom henholdsvis A og «C». Om du konstruer en sirkel med sentrum i C, så kan du bruke verktøyet *Passer* til å tegne en sirkel med samme radius i A. Velger du dette verktøyet er det bare å klikke på sirkelen med sentrum i C og deretter på punktet A (som da blir sentrum til den «kopierte» sirkelen).

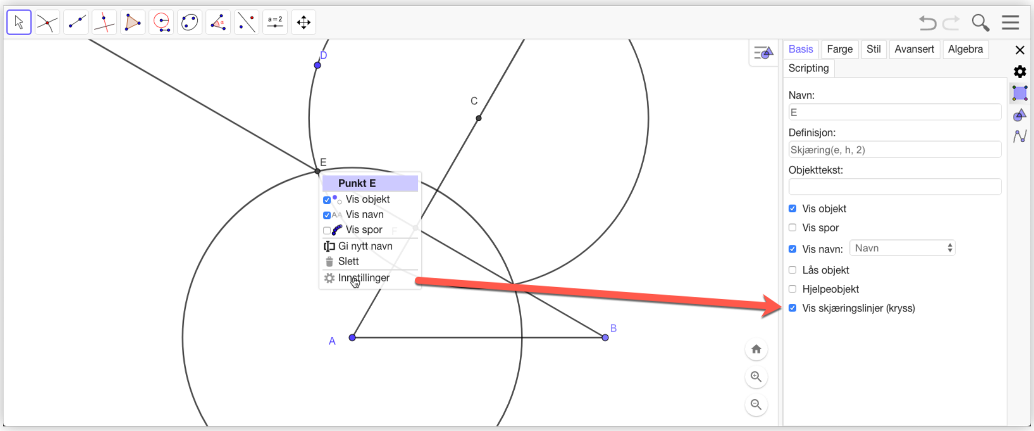


Merk at vi har skjult de to sirklene fra konstruksjonen av $\angle A$. Dette gjør du ved å høyreklikke på sirklene og hake vekk «Vis objekt» Vis objekt .

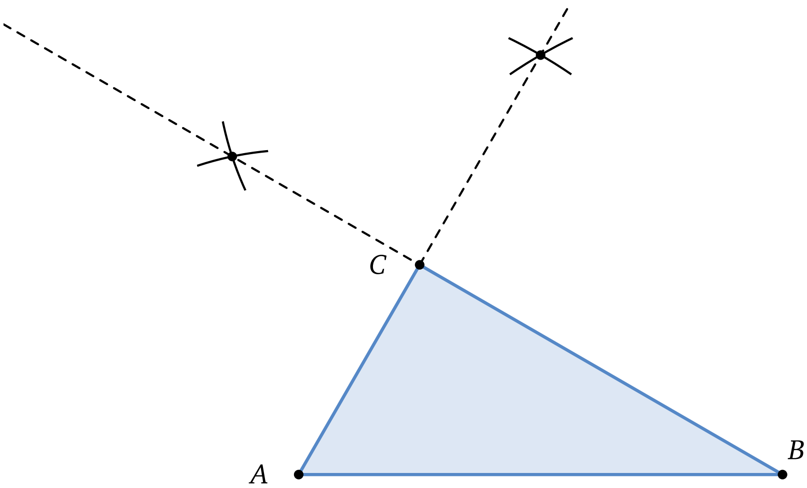
4 Finner et av skjæringspunktene mellom de to sirkelen og tegner en stråle gjennom B og dette punktet. Punktet C i oppgaven vil da være skjæringspunktet mellom de to strålene:



5 Vi rydder litt opp i figuren ved å skjule alle sirklene og endre navn på F (til C og skjuler navn på alle andre punkt enn A, B og C. For å vise hvordan figuren er konstruert høyreklikker jeg så på D og velger egenskaper. Der haker jeg av for «Vis skjæringslinjer (kryss)»:



Gjør det samme for punktet som definerte det andre punktet på strålen gjennom A og C (vårt gamle C). Du vil da få følgende pene figur:



Når alle punkta er tegnet, bruker du verktøyet *Mangekant* for å få tegnet trekanten. Når dette verktøyet er valgt, er det bare å klikke rundt på hjørnene i trekanten. Husk at du må avslutte mangekanten ved å klikke på det første punktet.

Merk at dersom du går til «Rediger» og velger «Kopier grafikkfeltet til utklipstavlen» og så limer dette inn i en tekstbehandler (for eksempel Word), så vil AB bli 8,0 cm på en utskrift dersom du ikke endrer størrelse på bildet som blir limt inn.

Oppgave 5.1

Trekanten ABC fra eksempel 5.1 er en del av trapeset $ABCD$ der $\angle BAD = 90°$.

Konstruer trapeset $ABCD$.

Oppgave 5.2

Åpne en ny GeoGebra-fil og slå av aksene og rutenettet (høyreklikk i grafikkfeltet og ta vekk haken for akser og rutenett).

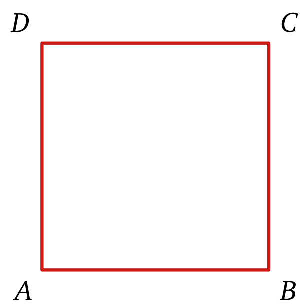
a) Tegn et linjestykke AB og bruk verktøyet *Midtpunkt eller sentrum* . Du finner dette verktøyet i samme gruppe som andre punkt-verktøy.

b) Konstruer en sirkel med AB som diameter.

c) Tegn et nytt punkt C på sirkelen. Hva kan du si om trekanten ABC? Ta tak i punktet C og flytt det rundt på sirkelen.

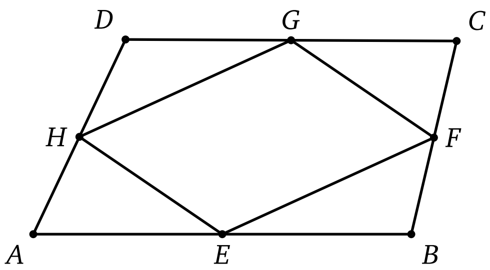
Oppgave 5.3

Gitt to punkt A og C. Konstuer et kvadrat $ABCD$ slik figuren nedenfor viser.



Oppgave 5.4

a) Lag en firkant $ABCD$. Finn midtpunktet på hver av de fire sidene. La disse bli hjørner i en ny firkant. Kall denne $EFGH$.



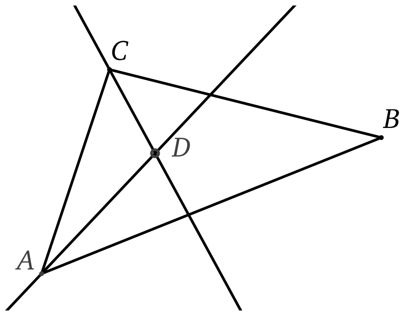
b) Grip fatt i ett av hjørnene av den opprinnelige firkanten, flytt på det og forandre på figuren. Ser du noe?

c) Hvor stort er arealet til firkant $ABCD$ i forhold til firkant $EFGH$?

d) Prøv om du kan forklare det du så i b) og c).

Oppgave 5.5

a) Tegn en trekant. Konstruer vinkelhalveringslinjen til to av sidene i trekanten. Bruk verktøyet «Halveringslinje for vinkel» .

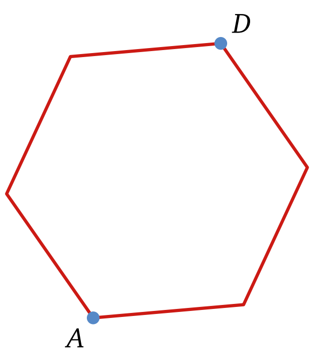


b) Konstruer så den tredje halveringslinjen. Hva ser du? Undersøk om dette gjelder alltid ved å ta tak i hjørnene og forandre på trekanten.

c) Vis at punktet D er sentrum til den innskrevne sirkelen.

Oppgave 5.6

Gitt to punkt A og D. Konstruer et regulært heksagon $ABCDEF$ som vist på figuren nedenfor.

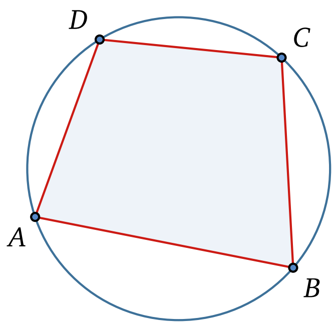


Oppgave 5.7

Konstruer en likebeina trekant ABC, der $AC = BC = 2AB$.

Oppgave 5.8

I en sirkel har vi tegnet en firkant $ABCD$. Hva kan du si om vinklene i firkanten?



I denne oppgaven kan du få bruk for verktøyet *Vinkel* .

De siste oppgavene viser at du kan bruke GeoGebra til å utforske matematiske sammenhenger. GeoGebra egner seg på den måten utmerket til slike oppgaver. Men vi vil poengtere her at selv om vi kan flytte på hjørner og ta for oss en uendelighet av tilfeller, så vil vi aldri kunne bevise noe med GeoGebra. Den flotteste illustrasjon av Den pytagoreiske læresetning er nettopp en illustrasjon og ikke et bevis. På den måten vil nok aldri program som GeoGebra erstatte vanlig resonnering og bevisførsel. Faktisk kan slike programmer gjøre at elevene blir mindre motivert for å gjennomføre et bevis – hva er poenget med det? De ser jo at sammenhengen «alltid gjelder»... Vi må derfor ha en reflektert holdning til dette og ikke bruke dynamisk programvare som en erstatning for argumentasjon og bevisføring.

Oppgave 5.9

Tegn en trekant ABC. Konstruer midtnormalen til to av sidene. Konstruer så den tredje midtnormalen. Hva ser du? Gjelder dette alltid? Undersøk dette ved å ta tak i et hjørne og flytt på det.

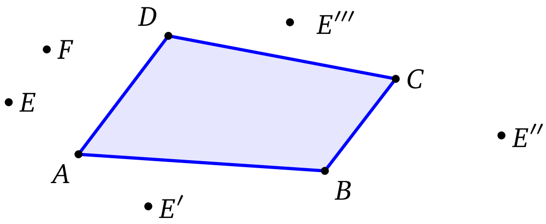
Vi ønsker å omskrive trekanten ABC med en sirkel. Nå vet vi at sentrum i sirkelen må ligge like langt fra A som fra B. Derfor må midtnormalen til AB gå gjennom sentrum av sirkelen. På samme måte må de andre tre midtnormalene gå gjennom sentrum av sirkelen. Derfor må dette sentrum være O. Bruk dette til å omskrive trekanten.

Oppgave 5.10

Tegn en likesidet trekant. Velg et punkt i det indre og mål avstanden fra dette punktet til de tre sidene. Velg et nytt punkt i det indre og mål igjen avstanden fra sidene. Hva ser du da? Formuler en hypotese. For mer om dette resultatet se Amdal (2009a) og (2009b).

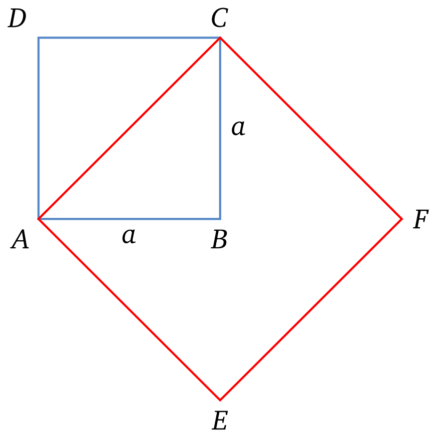
Oppgave 5.11

Tegn en firkant $ABCD$ og et punkt E utenfor firkanten. Bruk verktøyet *Speil objekt om punkt*  og speil punktet E om A slik at du får et nytt punkt E'. Speil så E' om B og få E'', som du igjen speiler om C og får E'''. Speil til slutt E''' om D og få punktet F. Eksperimenter med firkanten $ABCD$ og finn ut hva som må til for at F og E skal være sammenfallende. Se figuren nedenfor.



Oppgave 5.12

På figuren nedenfor har vi tegnet kvadratene $ABCD$ og $AEFC$. Vi setter sidene i kvadratet $ABCD$ lik a.

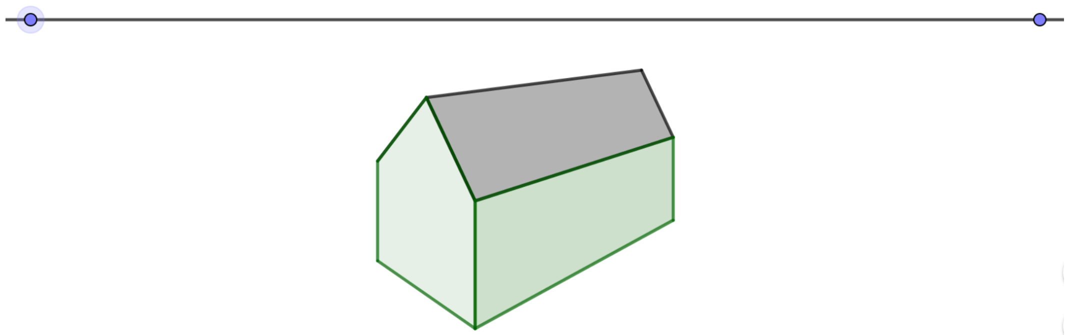


a) Vis at kvadratet $AEFC$ har dobbelt så stort areal som kvadratet $ABCD$.

b) Konstruer et kvdrat med areal lik $50\,\text{cm}^2$.

5.2 Perspektiver

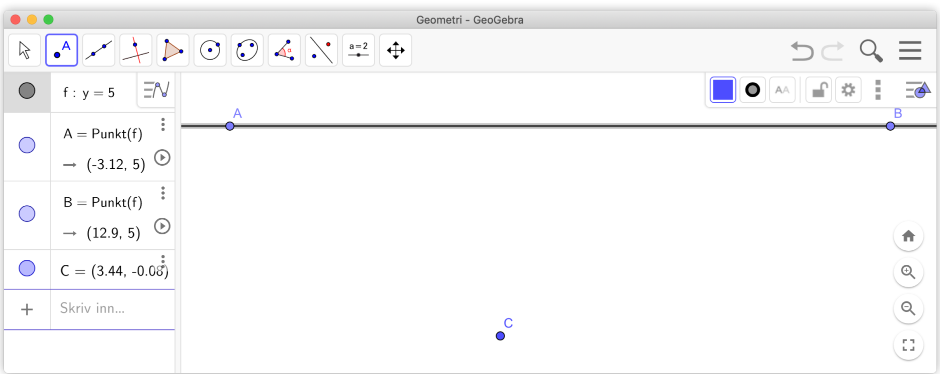
Du kan bruke GeoGebra til å tegne i perspektiv. Vi vil i dette delkapittelet vise hvordan vi går fram for å tegne et hus som ser slik ut:



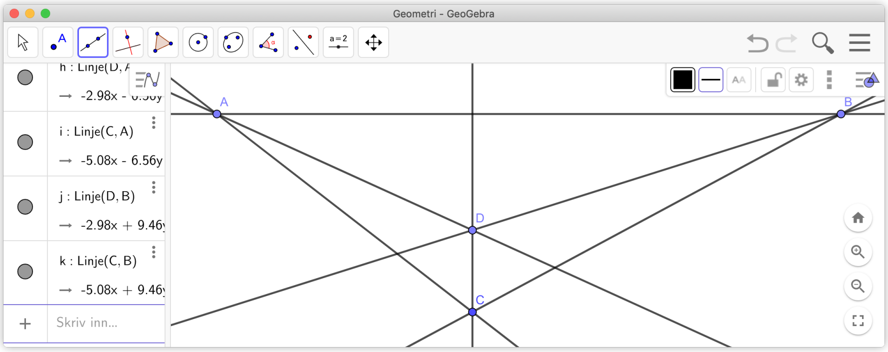
Figur 5.1: Hus med to forsvinningspunkt tegnet med GeoGebra.

Før du starter, så kan det være en god ide å skjule akser og rutenettet. Vi starter med å tegne inn en horisontal linje (horisonten). Skriv inn $y = 5$ i algebrafeltet. På den måten vet vi at vi får en 100 % horisontal linje. Velg så de to forsvinningspunkta (A og B på figuren nedenfor).

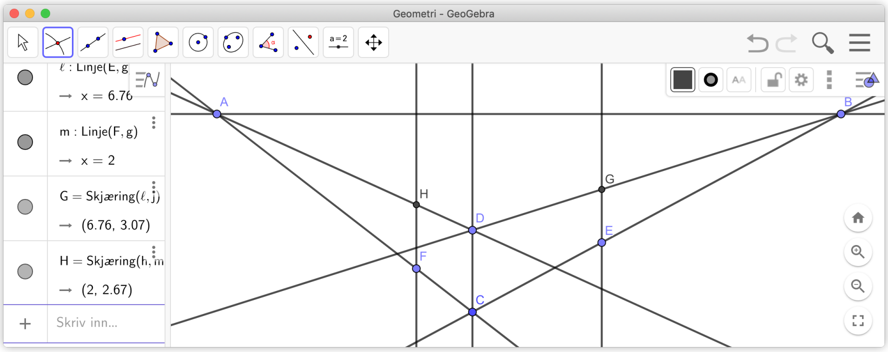
Tegn så det «nedre» hjørnet C i huset:



For å tegne hjørnet mellom de to synlige veggene tegner vi en linje normal på horisonten gjennom punktet C. Tegn et punkt D på denne linjen. Linjestykket mellom C og D er den «fremste» kanten til huset. Tegn så linjer gjennom C og de to forsvinningspunkta og tilsvarende for D som vist på figuren nedenfor:

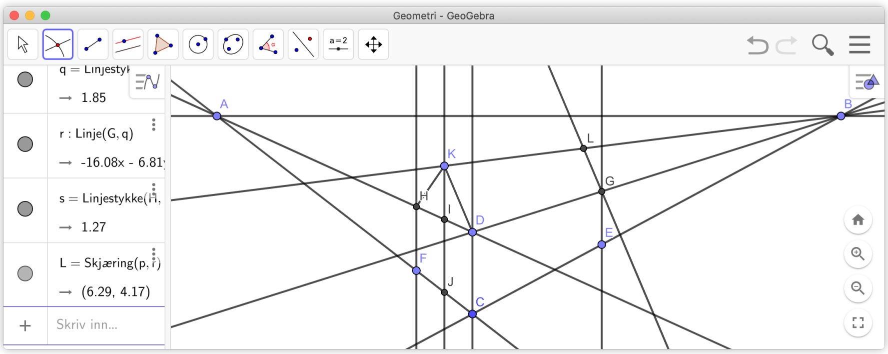


Det neste vi gjør er å tegne inn de to andre «nedre» hjørnene E og F. Deretter tegner vi linjer parallell med CD gjennom disse,og finner skjæringspunkta mellom disse og linjene fra D og forsvinningspunktene:

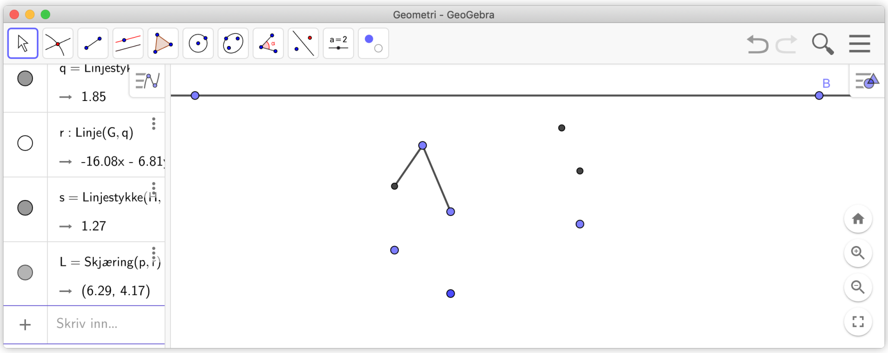


Neste problem er å bestemme hvor mønet til huset kan være. Det er selvsagt midt på den ene veggen. Vi tegner inn midtpunktene på henholdsvis CF og DH. Mønet må da ligge på linjen gjennom disse to midtpunktene. Hvor mønet ligger avhenger av hvor høyd det er på huset. Vi velger derfor en passe høyde.

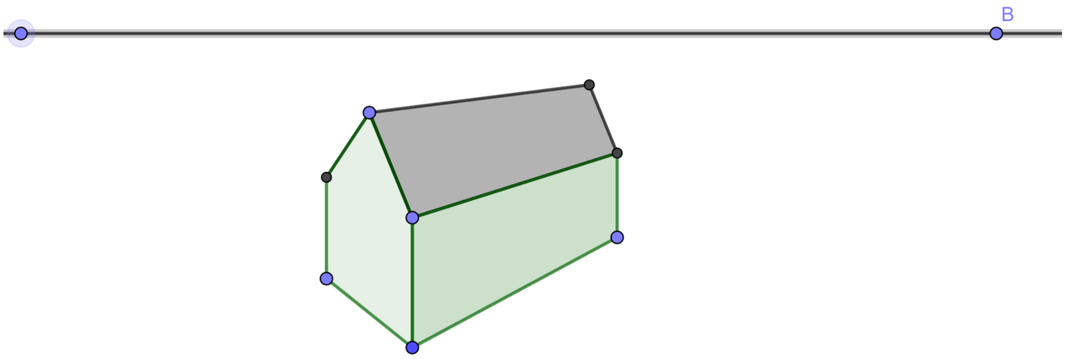
Vi kan nå tegne inn det ene mønet K og linja fra dette til det ene forsvinningspunktet. Vi mangler da kun ett punkt, og det er det andre mønet. Strengt tatt skulle vi ha tegnet inn enda ett forsvinningspunkt for å gjøre dette, men nøyer oss her med å tegne linje parallell med DK.



Vi vil nå skjule alle linjer (men ikke hjørnene i huset). Velg verktøyet *Vis eller skjul objekt* og klikk på alle linjene som du vil skjule. Disse vil da bli feite (og fremdeles synlige) mens du klikker rundt. Når du er ferdig velger du *Flytt* . Da ser figuren slik ut:



Det siste vi gjør er å tegne inn de tre synlige flatene på huset ved hjelp av verktøyet *Mangekant* . Vi får da følgende figur:



Oppgave 5.13
Lag et tilsvarende hus, men bruk tre forsvinningspunkt slik at taket blir korrekt. Tegne også inn vinduer og pipe.

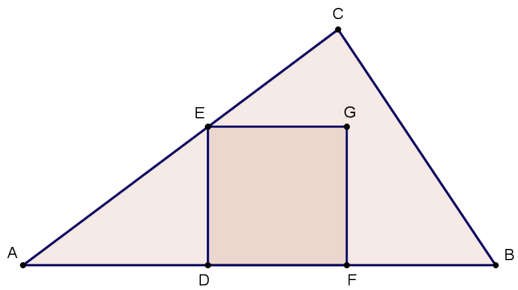
5.3 Sporing

Sporing er et effektivt verktøy når vi skal utforske sammenhenger. Følgende eksempel er hentet fra Polya (1957).

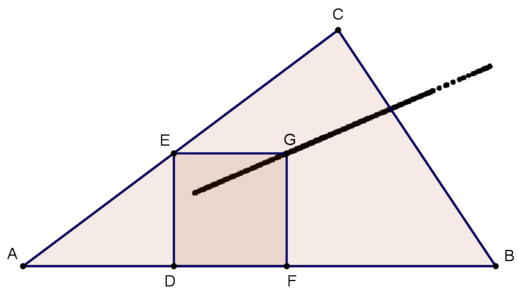
Eksempel 5.2

Gitt en trekant ABC. Konstruer et kvadrat som har hjørnene på sidekantene til trekanten.

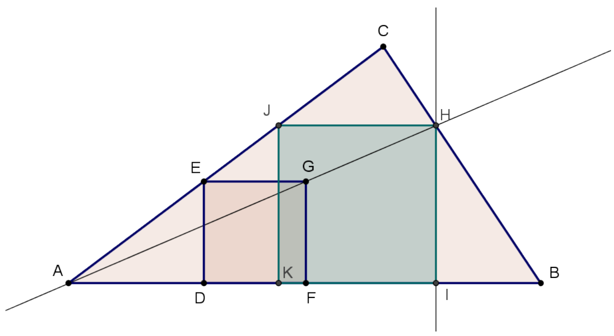
Løsning:
Vi tegner en trekant i GeoGebra ved å bruke verktøyet *Mangekant* . Vi vet ikke hvor på sidekanten AB det ene punktet skal ligge, men velger et punkt D og konstruerer et kvadrat med verktøyet *Regulær mangelant* . Siden en trekant kun har tre sider og et kvadrat har fire, så må to av hjørnene til kvadratet ligge på en av sidene i trekanten. Vi velger dette til å være AB. Vi får da en konstruksjon som vist på figuren nedenfor.



Punktet G skal ligget på BC. Det vil si at D er plassert feil. Men her gjør vi et lite triks. Vi slår på sporing på G (høyreklikk og velg «Vis spor»). Når du nå flytter på D, vil punktet G sette av et spor. Dette gjør at vi oppdager en sammenheng som vi muligens ellers ikke ville ha sett, nemlig at G ligger på en rett linje.



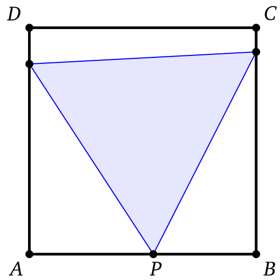
Hvordan løser vi så oppgaven? Vi tegner nå en linje gjennom AG og finner skjæringspunktet H mellom denne og BC. Så feller vi ned en normal fra H ned på AB og får et punkt I. Dette er to av hjørnene i det søkte kvadratet. Vi konstruerer så kvadratet. Neste utfordring blir nå å forklare/argumentere for hvorfor denne konstruksjonen virker. Hvorfor kan vi vite at punktet J på figuren nedenfor faktisk ligger på linjestykket AC?



Nå kan vi ta tak i et av hjørnene i trekanten ABC og flytte det. Kvadratet vil alltid ligge på sidekantene til trekanten. Merk at konstruksjonen virker kun dersom $DE < DB$. Hvorfor det?

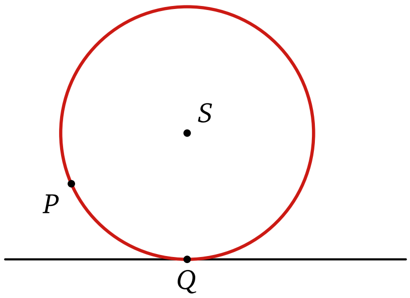
Oppgave 5.14
Gitt et kvadrat $ABCD$. Konstruer en likesida trekant som har det ene hjørnet nær midten av linjestykket AB og de to andre hjørnene på sidene AD og BC.

Hvor langt fra midten kan punktet P ligge?



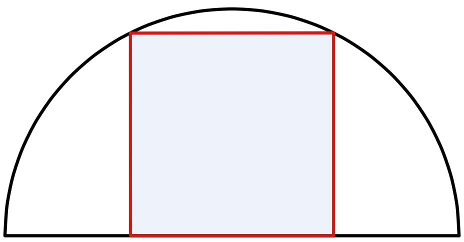
5.3.1 Flere oppgaver

Oppgave 5.15
Gitt en linje ℓ og et punkt P utenfor ℓ. La Q være et punkt på ℓ. Konstruer en sirkel med sentrum S som går gjennom P og som tangerer ℓ i Q.



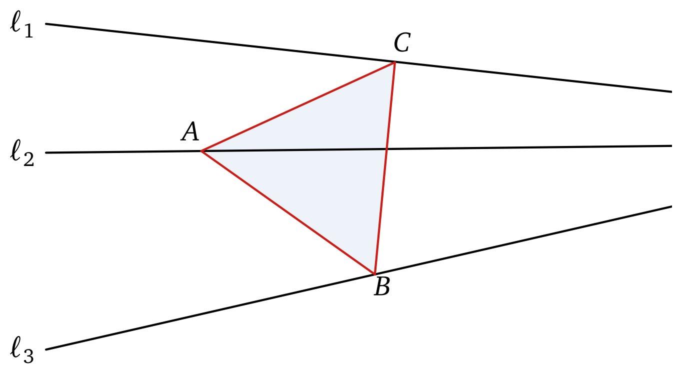
Flytt på Q langs linjen og se hva som skjer med S.

Oppgave 5.16
Konstruer en halvsirkel. Konstuer så det innskrevne kvadratet i halvsirkelen, som vist på figuren.



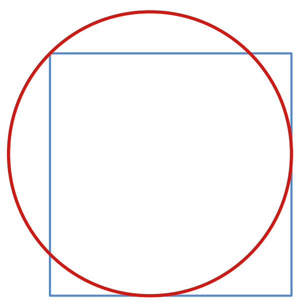
Oppgave 5.17

Gitt tre linjer ℓ_1, ℓ_2 og ℓ_3 og et punkt A på den midterste linjen ℓ_2. Konstruer en likesidet trekant ABC, der A er et av hjørnene og der de to andre hjørnene ligger på henholdsvis ℓ_1 og ℓ_2.



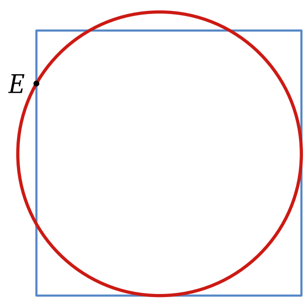
Oppgave 5.18

Gitt et kvadrat. Konstruer en sirkel som går gjennom et hjørne og tangerer to andre sider, som vist på figuren.



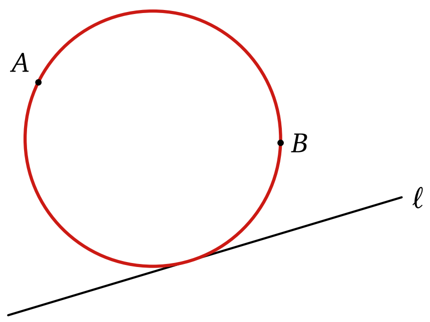
Oppgave 5.19

Gitt et kvadrat og et punkt E på den ene siden. Konstruer en sirkel om går gjennom E og som tangerer kvadratet i to punkt, som vist på figuren.



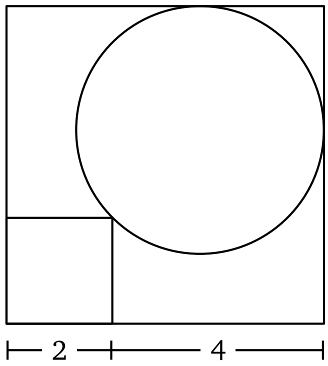
Oppgave 5.20

Gitt en linje ℓ og to punkt A og B som ikke ligger på linjen. Konstruer en sirkel som går gjennom A og B og som tangerer ℓ.



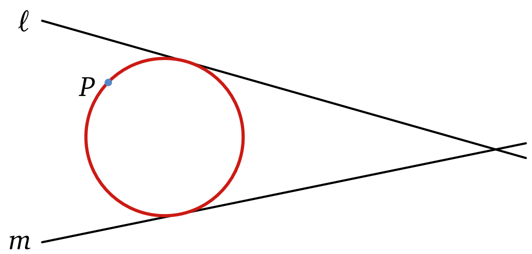
Oppgave 5.21

a) Konstruer kvadratene og sirkelen som vist på figuren nedenfor.



b) Regn ut den eksakte verdi for sirkelens radius.

Oppgave 5.22
Gitt to linjer ℓ og m og et punkt P som ligger mellom linjene. Konstruer en sirkel som tangerer ℓ og m og som går gjennom P. Se figuren.



5.4 Parameterframstillinger

Det er selvsagt ikke bare grafer til funksjoner som er mulig å tegne i GeoGebra. Du kan for eksempel også tegne kurver som har en parameterframstilling. I følge LK06 skal elevene «kunne bruke vektorfunksjoner med parameterframstilling for en kurve i planet, tegne kurven og derivere vektorfunksjonen for å finne fart og akselerasjon.» (LK06, kompetansemål for R1). Vi vil her vise noen eksempler på hvordan dette gjøres i GeoGebra.

Eksempel 5.3

En linje l er gitt ved følgende parameterframstilling:

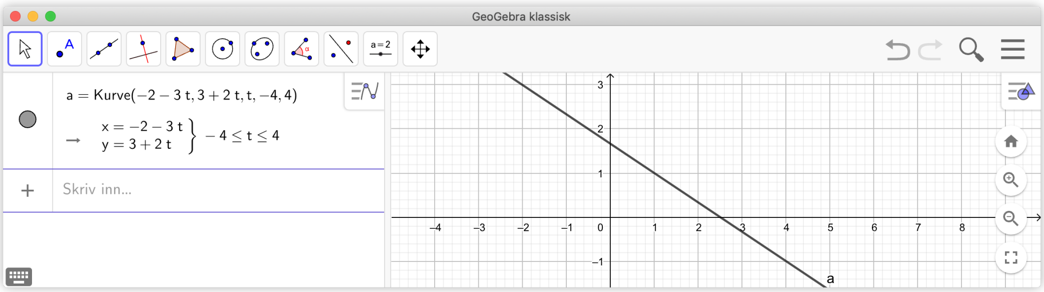
$$x = -2 - 3t \ \wedge \ y = 3 + 2t$$

Tegn linjen i et koordinatsystem.

I GeoGebra kan vi tegne kurver gitt på parameterform ved å bruke kommandoen

```
Kurve(<Uttrykk>,<Uttrykk>,<Parametervariabel>,<Start>,<Slutt>)
```

I dette eksempelet skriver vi kommandoen `Kurve(-2-3t, 3+2t, t,-4,4).` og trykker enter. Vi får da tegnet linjen:



Figur 5.2: Du plotter kurver ved å bruke kommandoen `Kurve( )`

Nå er det kanskje ikke så spennende å tegne inn linjer på denne måten, så derfor må vi prøve oss på litt mer avanserte kurver. Neste eksempel viser en kurve med en kusp[1].

Eksempel 5.4

Tegn kurven med parameterframstilling gitt ved

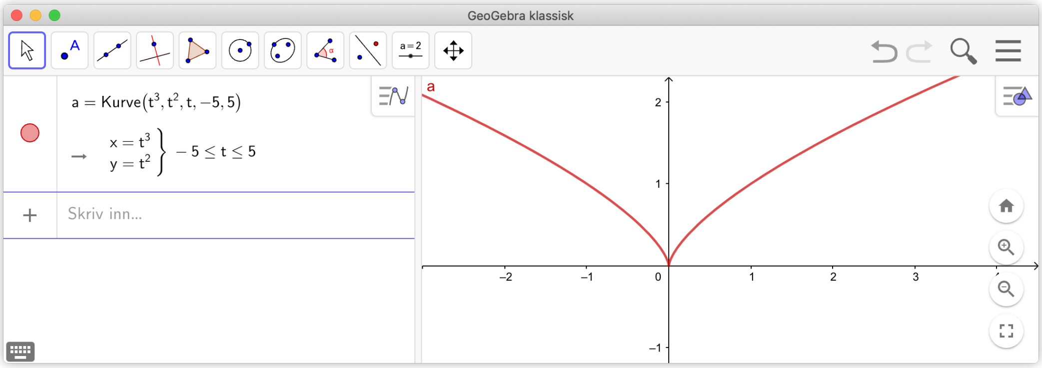
$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$$

I dette tilfellet gir vi kommandoen

```
Kurve[t^3, t^2, t, -5, 5]
```

og får følgende kurve:

[1]En kusp er en «spiss» på kurven. Det vil si en singularitet der kurven ikke krysser seg selv.



Figur 5.3: En kusp. Kan du finne likningen for denne kurven?

Tips! Du kan skrive eksponenter i GeoGebra ved å bruke tastekombinasjoner som Alt + 2. Tilsvarende for høyere potenser: Alt + 3 gir eksponent 3 og Alt + 11 gir eksponent 11.

Eksempel 5.5

Tegn kurven med parameterframstilling gitt ved

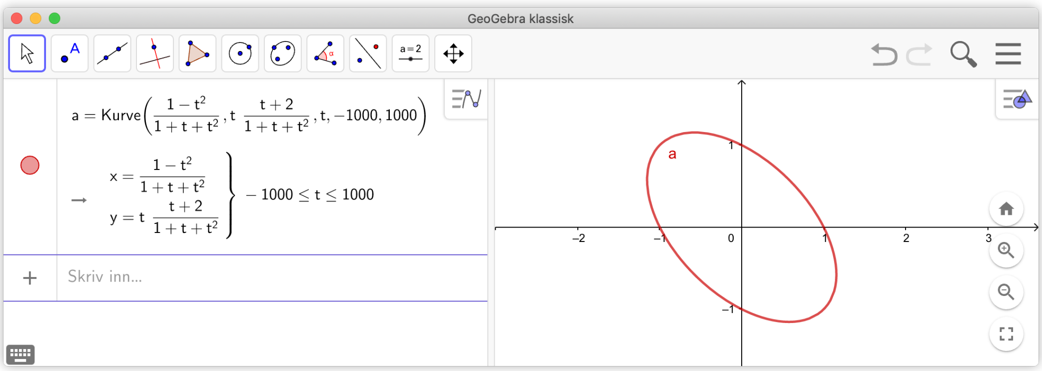
$$x = \frac{1-t^2}{1+t+t^2} \quad \wedge \quad y = \frac{t(t+2)}{1+t+t^2}$$

Her får vi et problem med å velge hvilke grenseverdier vi skal sette inn for parameteren t. For å få hele kurva må parameteren går fra $-\infty$ til ∞. Men dette kan vi ikke sette inn når vi skal tegne kurva.

Vi bruker i stedet verdier fra for eksempel -1000 til 1000:

```
Kurve((1-t^2)/(1+t+t^2), t*(t+2)/(1+t+t^2), t, -1000,1000)
```

Vi får da følgende kurve:



Figur 5.4: Hvilken kurve er dette?

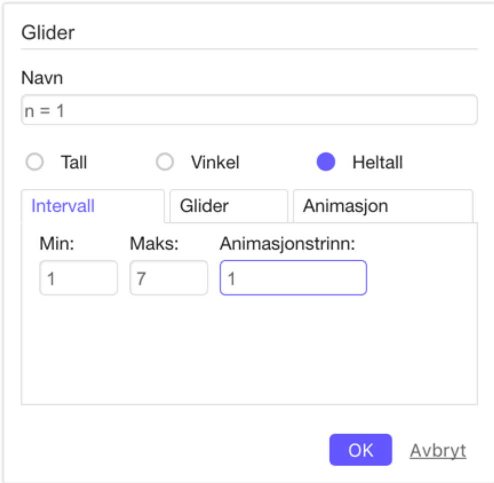
Oppgave 5.23

Plott følgende kurve: $x = \cos(5t) \wedge y = \sin(3t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Oppgave 5.24

I denne oppgaven skal vi utforske en hel familie av kurver.

a) Lag en glider k som kan variere fra 0 til 7. For å gjøre dette kan du velge verktøyet *Glider* og klikke der du vil ha glideren i grafikkfeltet. Du får da opp en meny hvor du kan velge Min, Maks og Animasjonstrinn:

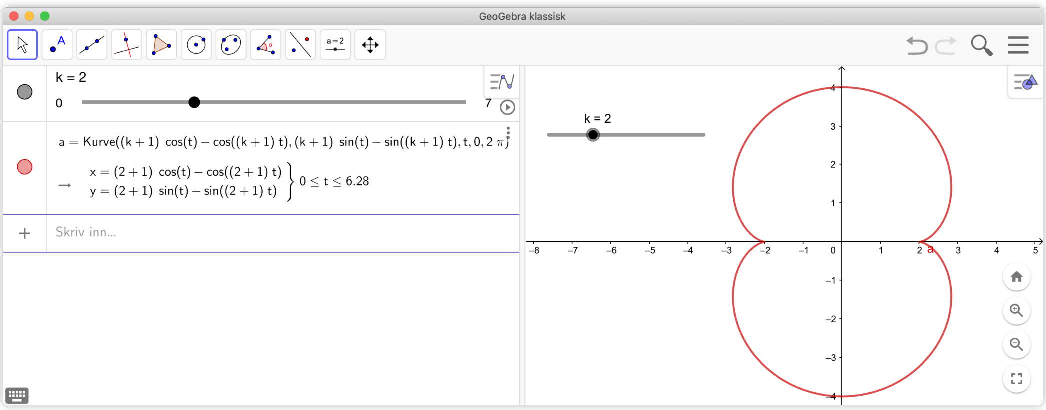


Velg da heltall og Min = 1, Maks = 7. Animasjonstrinnet blir satt til 1 når du velger Heltall.

b) Plott kurven gitt ved

$$x = (k+1)\cos t - \cos((k+1)t) \;\wedge\; y = (k+1)\sin t - \sin((k+1)t)$$

La t variere fra 0 til 300. Når $k = 2$ får vi kurven vist på figur 5.5.



Figur 5.5: To kusper. . .

c) Varier nå k. Hvor mange kusper får vi når $k = 1$? Hva med $k = 2$? Hva om $k = 6$?

Oppgave 5.25
Tegn følgende to kurver i samme koordinatsystem. La parameteren t gå fra 0 til 50.

$$x = \sqrt{t} \cdot \cos t \quad \wedge \quad y = \sqrt{t} \cdot \sin t$$
$$x = -\sqrt{t} \cdot \cos t \quad \wedge \quad y = -\sqrt{t} \cdot \sin t$$

Oppgave 5.26 — Fermats spiral.
Plott følgende kurve

$$x = r\cos(r^2) \wedge y = r\sin(r^2)$$

velg r mellom -7 og 7.

Eksempel 5.6

Posisjonsvektoren til ein partikkel er gitt ved

$$\vec{r}(t) = [t^3 + 3, t + 1]$$

a) Tegn grafen til $\vec{r}$ når $t \in [-2, 2]$.

b) Bestem fartsvektoren $\vec{v}(t)$ og akselerasjonsvektoren $\vec{a}(t)$. Marker $\vec{v}(1)$ og $\vec{a}(1)$ på kurven til $\vec{r}$.

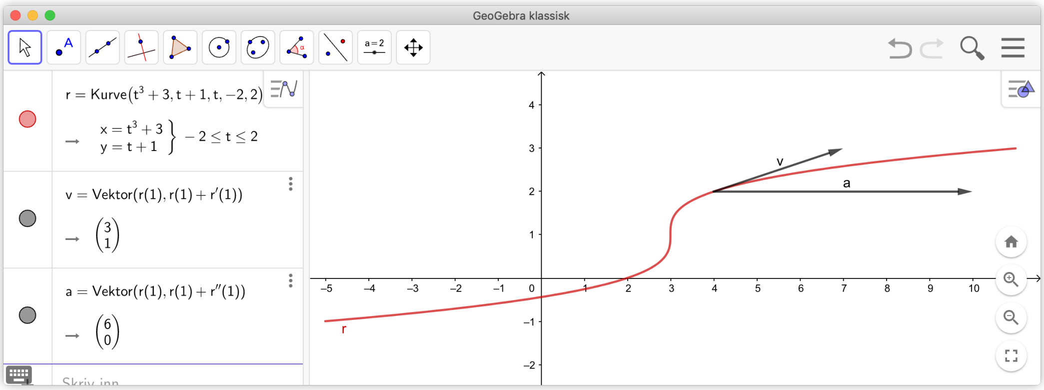
c) Finn ved regning det punktet på kurven der $\vec{v}(t)$ er parallell med y-aksen.

Løsning:

a) Vi plotter grafen ved å bruke kommandoen

```
r=Kurve(t^3+3, t+1, t, -2, 2)
```

Vi får da kurven som vist på figur 5.6.



Figur 5.6: Grafen til $\vec{r}(t)$ sammen med fartsvektor og akselerasjonsvektor i posisjonen $\vec{r}(1)$.

b) Vi kan finne fartsvektoren og akselerasjonsvektoren ved å derivere $\vec{r}$. Dette gjør vi i GeoGebra ved å bruke kommandoene

```
Derivert(r)  og  Derivert(r, 2)
```

I figur 5.6 ser du svaret i algebrafeltet. Vi markerer inn $\vec{v}(1)$ ved å skrive inn kommandoen

```
v = Vektor[r(1), r(1)+r'(1)]
```

Vi får da en vektor som starter i $\vec{r}(1)$ og går til $\vec{r}(1)+\vec{v}(1)$. Merk at det ikke er naturlig å markere inn fartsvektoren i origo.

På samme måte får vi tegnet inn akselerasjonsvektoren ved å skrive inn kommandoen

```
a = Vektor[r(1), r(1)+r''(1)]
```

c) Denne deloppgaven kan ikke løses med GeoGebra. Her gjelder det bare å finne hvilken t som gir x-koordinaten til $\vec{v}(t)$ lik 0. Dette er når $t = 0$.

5.5 Andre kurver

I GeoGebra er det mulig å plotte andre kurver enn de som har en parameterframstilling.

I eksempel 5.4 tegnet vi kurven med parameterframstilling $x = t^3$ og $y = t^2$. Vi ser at denne kurven oppfyller likningen $x^2 - y^3 = 0$. Vi trenger ikke å finne parameterframstillingen for å tegne kurven. I GeoGebra kan vi skrive likningen for kurven direkte inn i algebrafeltet og få tegnet kurven.

For å plotte kuspen skriver vi med andre ord inn

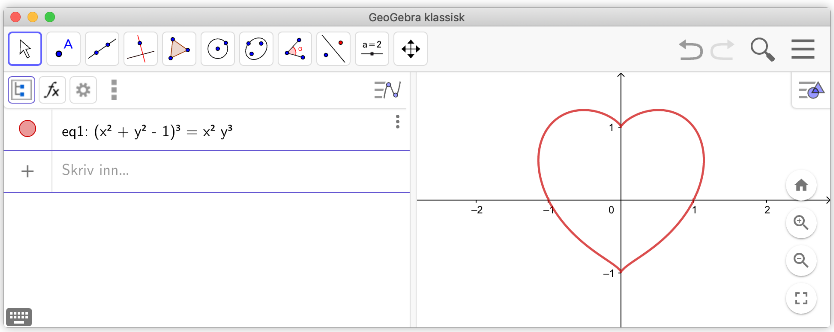
```
x^3=y^2
```

Eksempel 5.7

Tegn kurven som er gitt ved likningen

$$(x^2 + y^2 - 1)^3 = x^2 y^3$$

Skriver du inn likningen får du følgende pene kurve:



Oppgave 5.27

Tegn følgende kurver:

a) $(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$

b) $(x^2 + y^2 - 1)^3 - x^2 y^3 = 0$

Bibliografi

Amdal, A. (2009a). Vincenzo vivianis setning. *Tangenten*, (3).

Amdal, A. (2009b). Vincenzo vivianis setning – del 2. *Tangenten*, (4).

Gjøvik, Ø. and Sanne, A. (2009). Skriving i matematikkfaget. *Tangenten*, (4). Artikkelen kan lastes ned fra http://www.caspar.no/tangenten/2009/Gjovik-Sanne-409.pdf.

Polya, G. (1957). *How to solve it*. Princeton University Press, second edition.

Utdanningsdirektoratet (2017). Eksamensoppgaver for grunnskole og videregående skole. `http://www.udir.no/`.