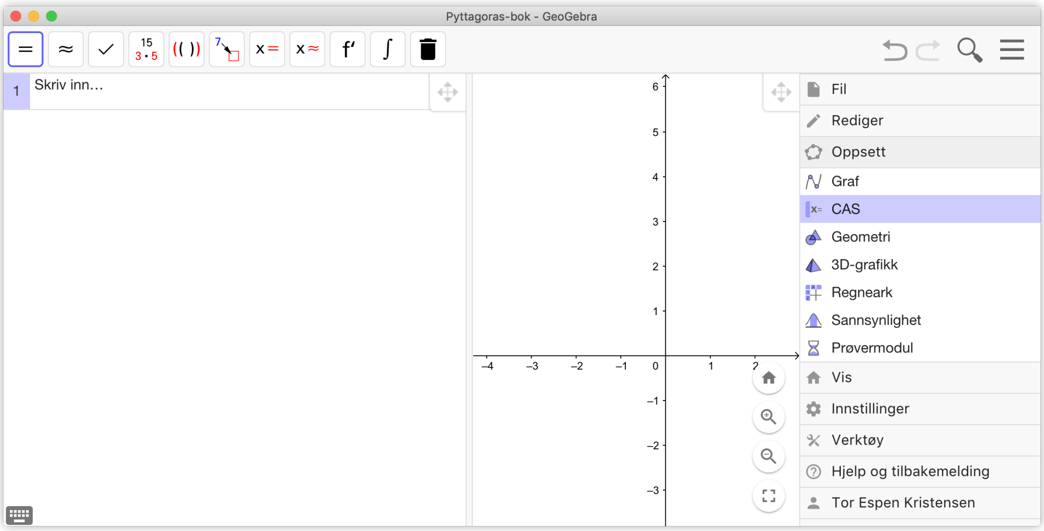
7 CAS i GeoGebra

CAS står for Computer Algebra System og er en betegnelse for programvare som kan gjøre symbolske manipuleringer. Eksempler på slike manipuleringer er å løse likninger med rotutdragning (eksakte verdier), faktorisering av polynomer, integrering og derivering, beregning av summer osv.

I GeoGebra finner du CAS ved å velge CAS som «Oppsett»:

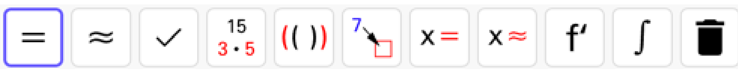


Figur 7.1: Du kan velge oppsettet «CAS» under «Oppsett» på menyknappen.

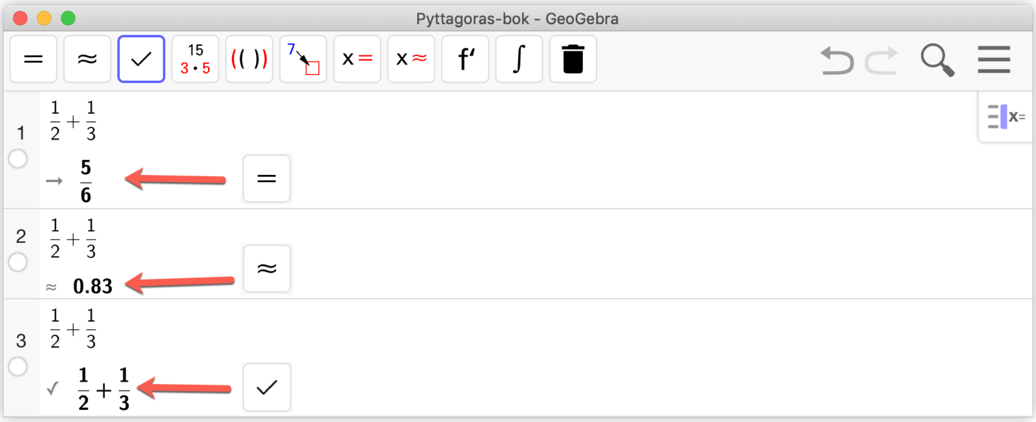
Du kan også åpne CAS ved å velge det under «Vis» i menyknappen.

7.1 Verktøylinjen i CAS

I dette delkapittelet vil vi ta for oss knapp for knapp på menylinjen:



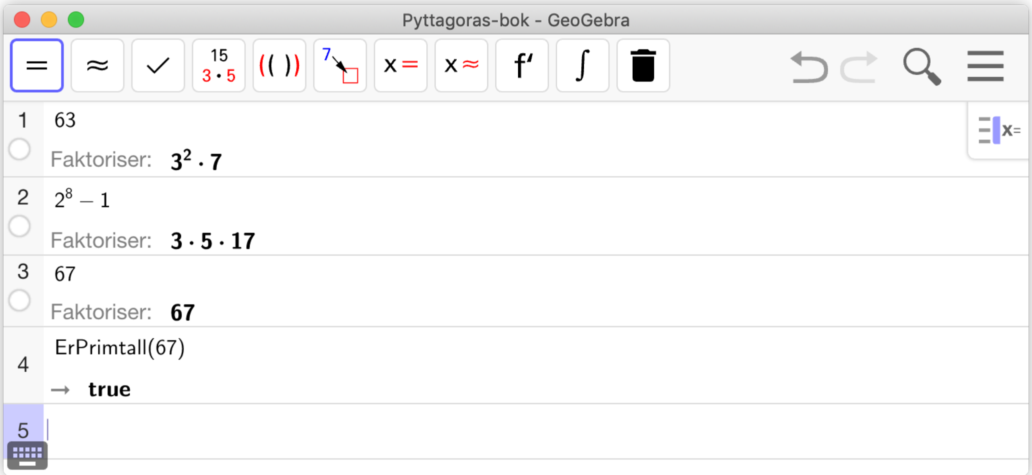
Det er ti CAS-spesifikke verktøy på verktøylinjen. Det første verktøyet er *Regn ut* $=$. Med dette vertøyet blir uttrykk evaluert og regnet ut eksakt. Skriver du for eksempel inn 1/2+1/3 og klikker så på $=$ vil du få $\frac{5}{6}$ som svar. Tilsvarende vil du få 0,8333 som svar dersom du klikker på *Numerisk* $\approx$. Klikker du på *Bruk inntasting* ✓ vil det ikke bli gjort noe med uttrykket du har skrevet inn. I eksempelet med 1/2+1/3 vil vi få $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ som svar.



Figur 7.2: Du får ulike output alt etter som hvilket verktøy som er valgt.

Merk at du kan enten skrive inn uttrykket og så klikke på ett av disse verktøyene beskrevet over eller du kan aktivere verktøyet, skrive inn uttrykket og så trykke enter. Har du for eksempel aktivert *Numerisk* og skriver inn 4/7 vil du få 0,57 som svar.

Neste verktøy på verktøylinjen er *Faktoriser*. Du kan bruke dette til å faktorisere hele tall og algebraiske uttrykk.



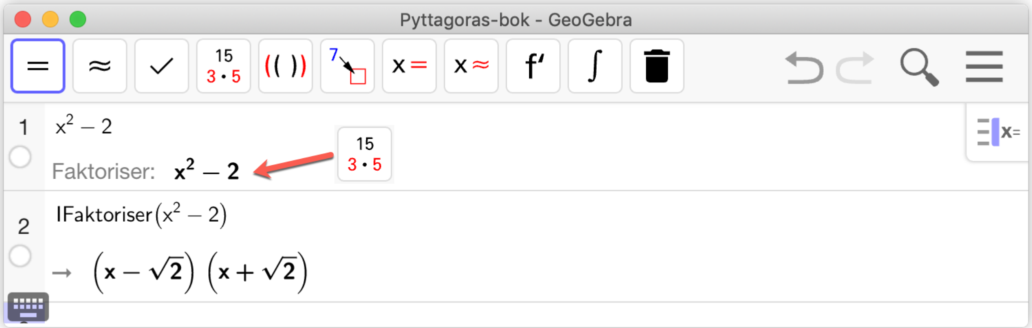
Figur 7.3: Faktorisering av hele tall i GeoGebra. Legg merke til at 67 er et primtall.

Det er verdt å ta med at verktøyet *Faktoriser* kun faktoriserer over de rasjonale tallene. Neste eksempel viser hva som ligger i dette.

Eksempel 7.1

Faktoriser polynomet $x^2 - 2$.

Løsning:
Vi vet at svaret skal være $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$. Men siden $\sqrt{2}$ ikke er et rasjonalt tall, så vil ikke verktøyet *Faktoriser* få dette slik vi ofte ønsker det, som vist i rad 1.



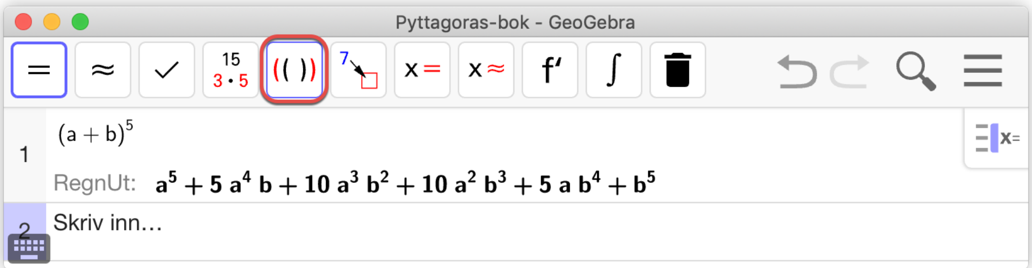
For å løse dette må vi bruke kommandoen `IFaktoriser` som vist på rad 2. «I»-en i denne kommandoen står for Irrasjonal og fortelle GeoGebra at polynomet skal faktoriseres over de reelle tallene (både rasjonale og irrasjonale tall).

Går vi ett hakk til høyre på verktøylinja finner vi verktøyet *Utvid* (( )). Vi bruker dette til å be GeoGebra om å multiplisere ut parenteser etc.

Eksempel 7.2

Multipliser ut $(a+b)^5$

Løsning:
Vi skriver inn `(a+b)^5` og klikker på (( )):



Vi ser at

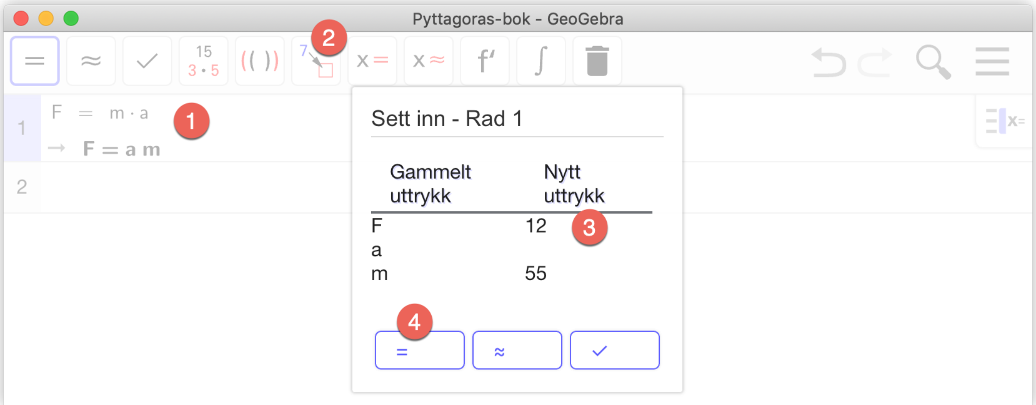
$$(a+b)^5 = a^5 + 5\,a^4\,b + 10\,a^3\,b^2 + 10\,a^2\,b^3 + 5\,a\,b^4 + b^5$$

Neste verktøy er *Sett inn*. Med dette kan du erstatte én eller flere variable med andre variable eller tall.

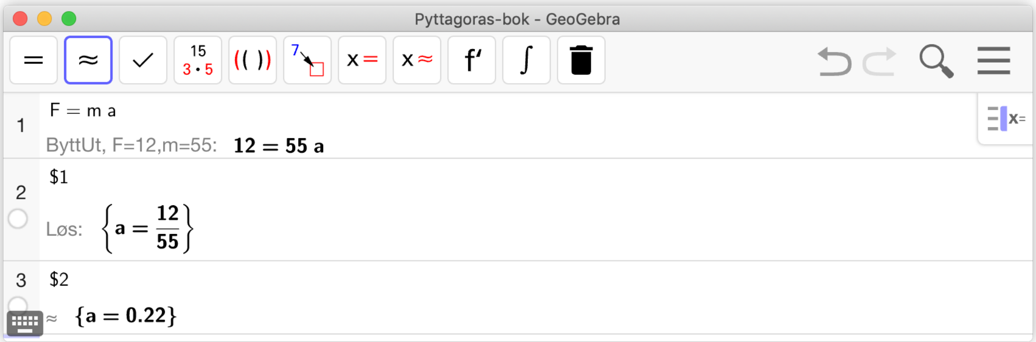
Eksempel 7.3

Skriv inn formelen $F = m \cdot a$ i CAS finn a når $F = 12$ og $m = 55$.

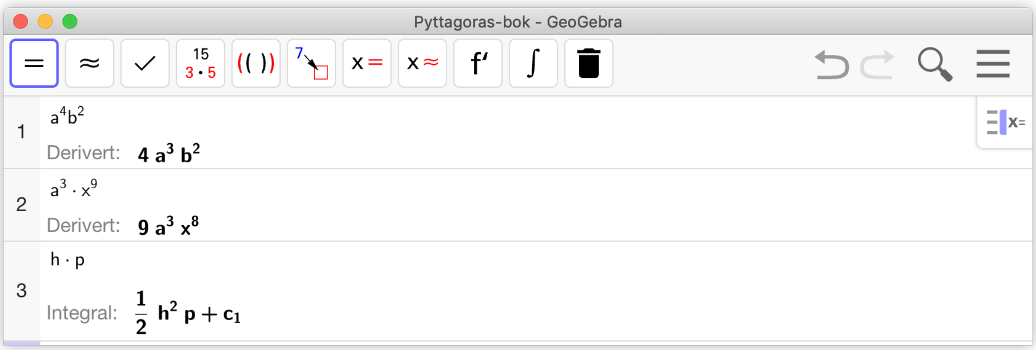
Løsning:
Vi skriver inn `F=m*a` og klikker på . Vi får da opp et vindu der vi kan skrive inn de ønskede substitusjonene:



Klikker vi på = får vi svaret $12 = 55a$. Vi løser denne likningen ved å bruke verktøyet *Løs* x=. Dette gjør du enkelt ved å stå i raden nedenfor (rad 2 på bildet over) og så bare klikke på x=. Da vil GeoGebra forstå at du ønsker å løse likningen på raden over. Vi får $a = \frac{12}{55}$. Dersom vi ønsker desimaltall trykker vi på ≈ og vi får desmialtall i raden nedenfor automatisk.



Helt til høyre på verktøylinja ligger det to verktøy: *Derivert* f′ og *Integral* ∫. For å bruke disse er det bare til å skrive inn et uttrykk og klikke på verktøyet. Uttrykket du skriver inn behøver ikke å være et uttrykk i x, men dersom du skriver inn for eksempel a^4b^2, så vil GeoGebra derivere med hensyn på a. Mer generelt, så vil GeoGebra derivere/integrere med hensyn på den første av varbiablene i lista x, y, z, a, b, $\ldots v$, w som er uttrykket inneholder.

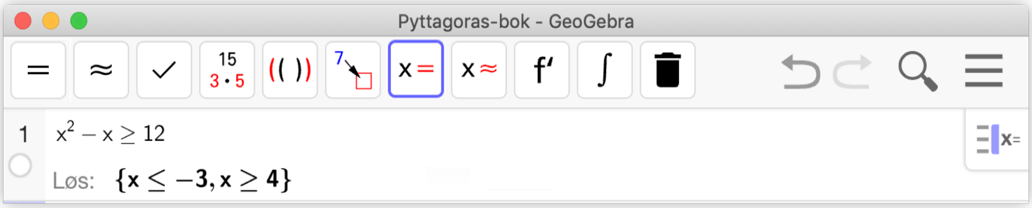


Du kan da bruke vektøyet *Løs* x= til å løse ulikheter på samme måte som løsning av likninger.

Eksempel 7.4

Løs ulikheten $x^2 - x \geq 12$

Løsning:
Skriv inn ulikheten i GeoGebra CAS og trykk på x=. Vi ser at løsningen er alle x slik at $\{x \leq -3, x \geq 4\}$. Det vil si alle $x \in \langle \leftarrow, -3] \cup [4, \rightarrow \rangle$.



Oppgave 7.1

Bruk CAS til å regne ut

a) $\dfrac{12^2}{\sqrt{9}}$ b) $\sqrt{14} - \sqrt{16 - 4\sqrt{7}}$ c) $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$

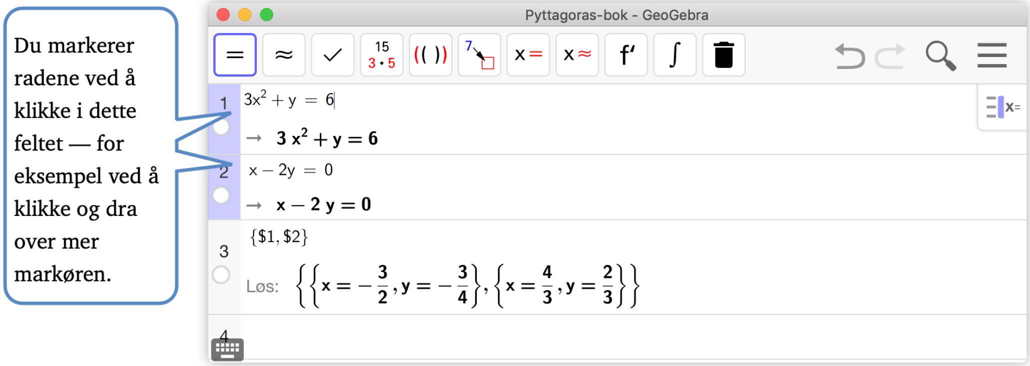
Tips! Du kan regne ut kvadratrot enten ved å bruke kommandoen `sqrt()` eller ved å bruke tastekombinasjonen Alt + r for å få $\sqrt{\ }$. Husk å bruke parenteser rundt alt du vil ta kvadratroten av. Det også nødvendig å bruke parenteser når vi skal skrive opp en brøk der det er flere ledd i teller eller nevner.

Eksempel 7.5

Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} 3x^2 + y &= 6 \\ x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

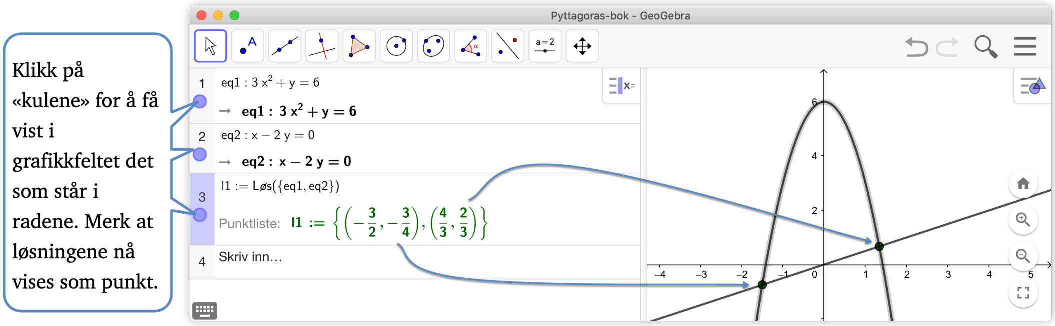
Løsning:
Vi løser likningssystemet ved å skrive inn likningene over i hver sin rad i GeoGebra. Når det er gjort markerer vi radene og trykker på *Løs* x=, som vist på figuren nedenfor.



Figur 7.4: Løsing av likningssystem. Du må markerer radene med likningene i og klikker på verktøyknappen *Løs*

Vi ser at systemet har to løsninger, som vist på rad 3.

Ønsker du en geometrisk tolkning av løsningene er det fint å klikke på sirklene under nummeret på radene:



Oppgave 7.2

a) Multipliser ut $(a+b+c)^3$.

b) Finn de eksakte røttene til likningen $x^3+8x^2-2x-16=0$

c) Deriver funksjonen $f(x)=x^4\ln(x)$.

d) Finn integralet $\displaystyle\int x^4\cdot\sin(2x)\,\mathrm{d}x$

Oppgave 7.3

Løs ulikhetene

a) $x^2-4<0$

b) $3^x>4$

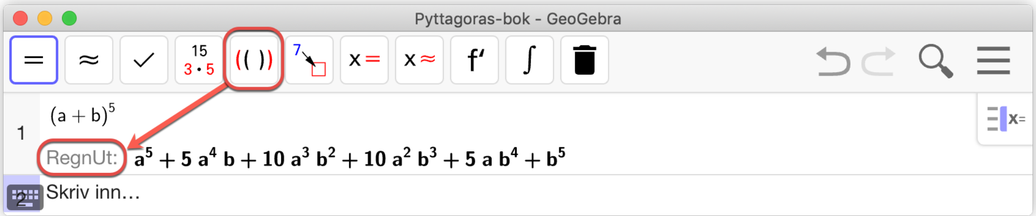
c) $\dfrac{x-2}{x^2-1}>2$

Oppgave 7.4
Løs likningssystemet

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= 10 \\
x - y &= 2
\end{aligned}
$$

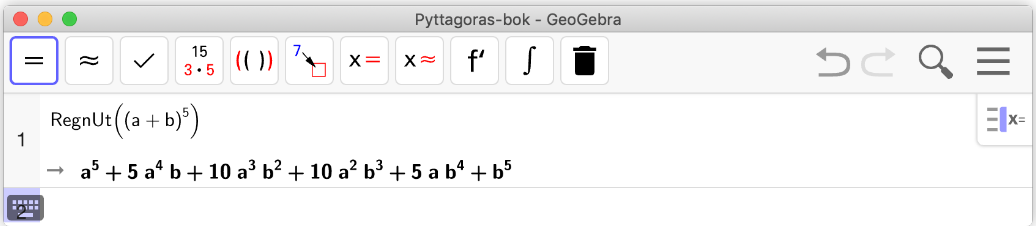
7.2 CAS-kommandoer

Vi har så langt sett hvordan vi kan bruke CAS-verktøyene til å utføre ulike operasjoner på uttrykk. Dersom vi kikker godt etter, ser vi at til de fleste verktøyene har en tilhørende kommando. Når vi utvidet $(a+b)^5$ ved å bruke *Utvid* ser vi at dette verktøyet kjører kommandoen `RegnUt`.



Figur 7.5: Verktøyet *Utvid* kjører kommandoen `RegnUt`

I stedet for å bruke verktøyet *Utvid* kunne vi med andre ord kjørt kommandoen `RegnUt` direkte:



Figur 7.6: Du kan utvide parenteser ved å direkte bruke kommandoen `RegnUt`

Det fins godt over 100 slike kommandoer i GeoGebra og du finner dem alle på nettsiden `http://wiki.geogebra.org/nb/CAS_Spesielle_kommandoer`.

Eksempel 7.6

Faktoriser polynomet $2x^3 + 3x^2 - 32x + 15$.

Løsning:
Vi skriver inn `IFaktoriser(2x^3+3x^2-32x+15)` og trykker enter. Vi får at

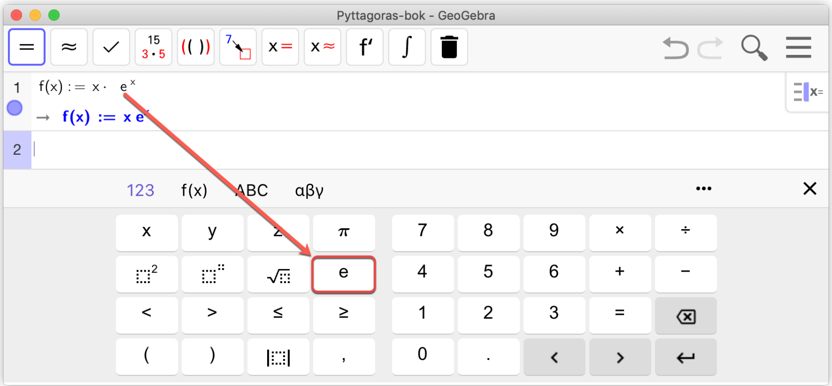
$$2x^3 + 3x^2 - 32x + 15 = (2x-1)(x+5)(x-3)$$

Eksempel 7.7

Finn eventuelle topp- eller bunnpunkter til grafen til $f(x) = xe^x$.

Løsning:
Vi kan definere en funksjon i CAS ved å skrive inn `f(x):=x*e^x`

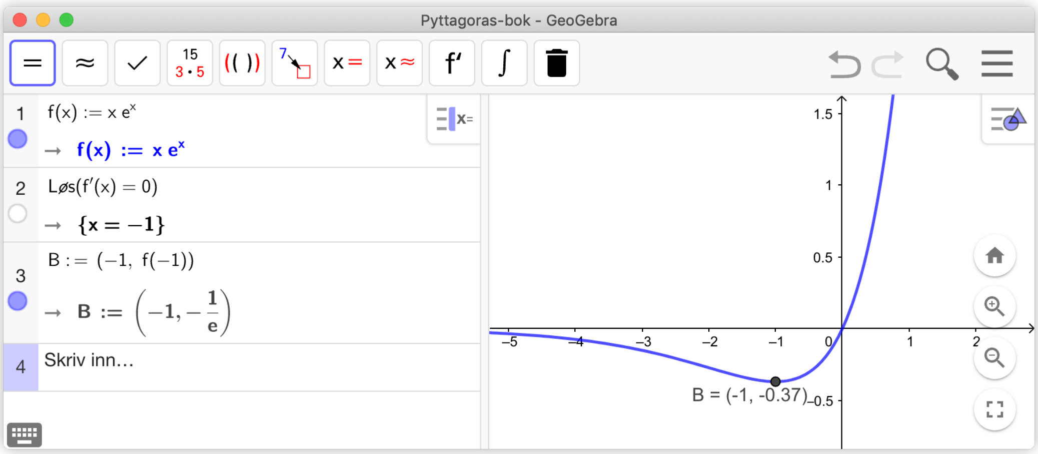
Husk bare at du ikke bruker en vanlig «e» når du skal skrive inn dette uttrykket, men at du trykker Alt + e eller henter e fra det virtuelle tastaturet (se figur 7.7).



Figur 7.7: Euler-tallet er en egen «e» i GeoGebra. Du kan enten hente det i det virtuelle tastaturet eller bruke tastekombinasjonen Alt + e

Når vi definerer en funksjon i CAS, bruker vi kolon foran likhetstegnet (`:=`).

Når funksjonen er definert kan vi skrive inn `Løs(f'(x)=0)` og får $x = -1$ som svar. Det neste vi vil gjøre er å finne punktet på grafen. Siden vi allerede har definert $f(x)$ kan vi nå definere bunnpunktet ved å skrive `B=(-1, f(-1))` i CAS og få at bunnpunktet er $(-1, -1/e)$.



Figur 7.8: Vi har funnet eksakte verdier med CAS.

Merk at vi ikke kan bruke kommandoen `Ekstremalpunkt` i dette tilfellet om vi ønsker eksakte verdier. Kommandoen `Ekstremalpunkt` kan enten brukes direkte på polynomer eller på funksjoner generelt. I sist nevnte tilfellet må vi oppgi en «start» og «slutt». Det vil si at vi må oppgi hvor vi ønsker å finne ekstremalpunktet (mellom «start» og «slutt»). Da vil GeoGebra bruke numeriske metoder og vi får ikke et eksakt svar.

Oppgave 7.5
Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} 2y - x^2 + 2x &= a \\ y - 2x &= 3 \end{aligned}$$

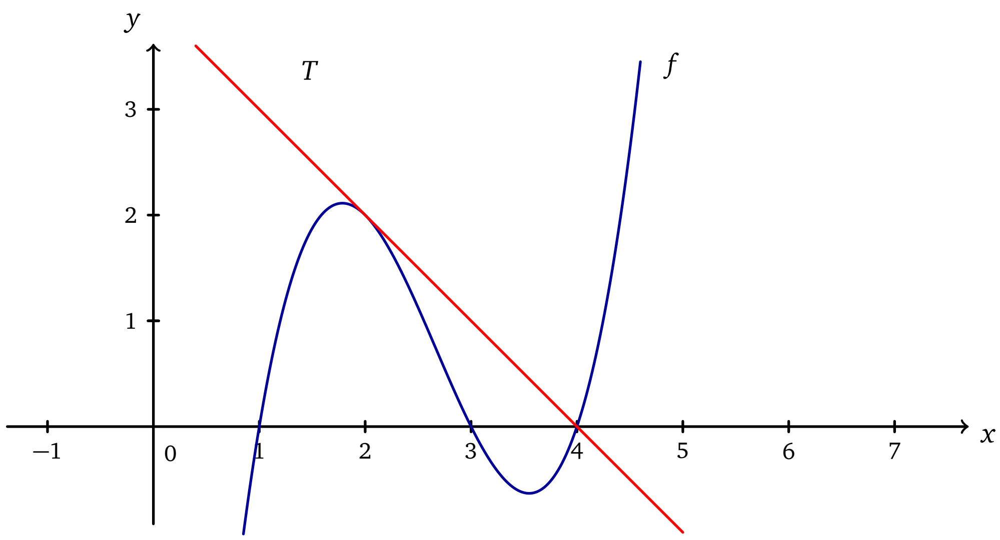
For hvilke verdier har systemet

– én løsning
– to løsninger
– ingen løsninger

Eksempel 7.8

La f være en tredjegradsfunksjon som har tre nullpunkt a, b og c. La T være tangenten til f i $d = \dfrac{a+b}{2}$. Hva kan du si om denne tangenten?

Løsning:
Før vi går i gang med selve løsningen i CAS kan det være en ide å utforske problemet litt. Vi kan for eksempel se på funksjonen $f(x) = (x-1)(x-3)(x-4)$. I dette tilfellet blir $d = 2$ og vi kan tegne og finne tangenten ved å skrive inn kommandoen `Tangent(2,f)` i algebrafeltet.



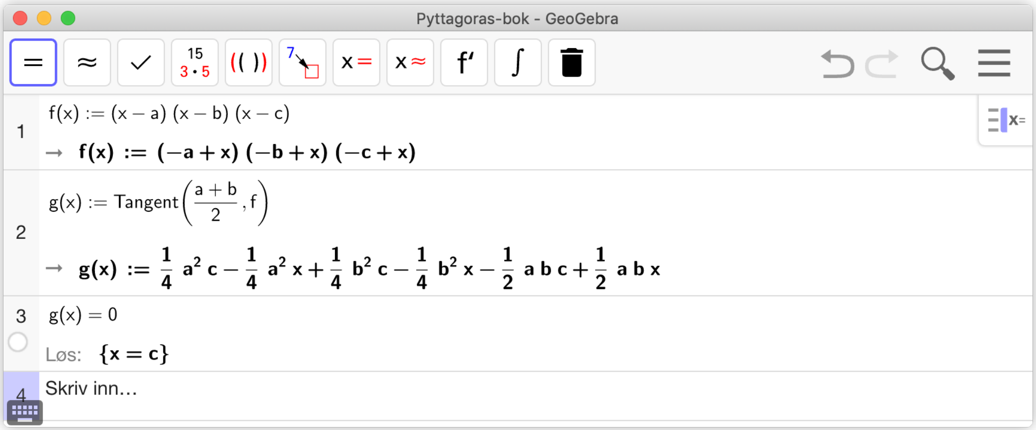
Ut fra denne figuren får vi en mistanke om at tangenten vil gå gjennom det tredje nullpunktet. Vi ønsker derfor å bevise dette ved å bruke et CAS!

Det første vi gjør er å definere funksjonen ved å skrive inn

```
f(x):=(x-a)(x-b)(x-c)
```

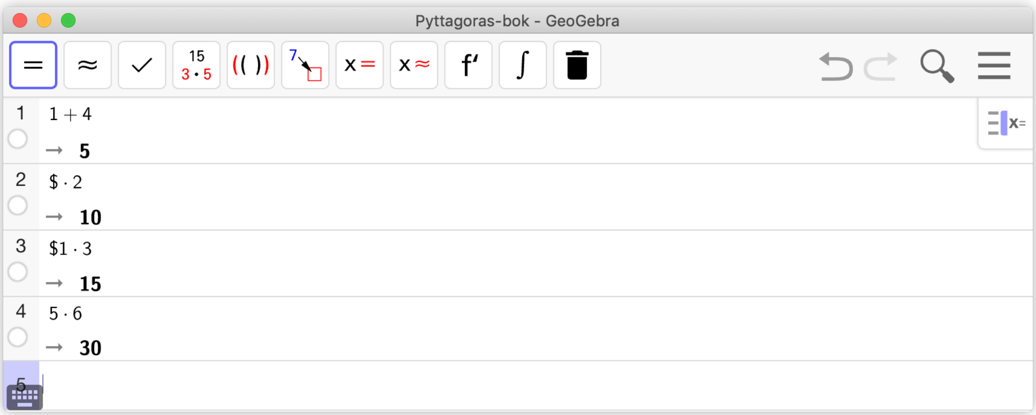
Vi kan finne tangenten i $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ ved å bruke ettpunktsformelen. Men det enkleste er nok å bruke kommandoen `Tangent(<x-verdi>,<funksjon>)`.

Vi ser at tangenten g har $x = c$ som nullpunkt, akkurat som forventet!



Merk at vi har definert tangenten som en funksjon g i rad 2. Dette er et lurt triks, siden vi ellers ville fått tangenten som en linje. Det ville da være vanskeligere å behandle denne videre. Nå kunne vi for eksempel enkelt løse liknignen $g(x) = 0$. Vi kunne også bare ha regnet ut $g(c)$ og sett av ti fikk 0 som svar.

Du kan referere til forrige output ved å skrive enten \$ (for dynamisk output) eller # (for statisk output). Tilsvarende kan du referere til output på rad n ved å skrive \$n (for dynamisk output) og #n (for statisk output). Forskjellen på disse to er at dersom du går inn og endrer på en verdi slik at output på rad n endres, så vil du også få endring i raden du skrev \$n i mens du vil beholde den gamle verdien fra rad n dersom du skrev #n. På figuren nedenfor har vi skrevet inn #1*6 i rad 4. GeoGebra bytter automatisk ut #1 med tallet 5.



7.3 Differensiallikninger

7.3.1 Ordinære differensiallikninger

Kommandoene under fungerer for de fleste likningene vi møter i Matematikk R2:

```
LøsOde(<likning>)
LøsOde(<likning>,<Punktpå grafen til f>)
LøsOde(<likning>,<Punktpå grafen til f>,<Punkt på grafen til f'>)
```

Den første gir den generelle løsningen til en ordinær differensiallikning og de to andre gir løsning på initialproblemer. Du kan skrive inn `y'` og `y''` for henholdsvis første- og andrederiverte til y. GeoGebra kan ikke løse differensiallikninger av høyere orden enn 2.

Eksempel 7.9

Løs differensiallikningene $y' - y = x$.

Løsning:
Vi skriver inn kommandoen `LøsODE(y'-y=x)` og får at $y = -x + Ce^x - 1$:

1 LøsODE($y' - y = x$)
→ $y = c_1 \, e^x - x - 1$

Eksempel 7.10

Løs initialproblemet

$$y'' - 6y' + 5y = x, \quad y(0) = 1 \text{ og } y'(0) = 2$$

Løsning:
Her ser vi at punktet $(0, 1)$ ligger på grafen til funksjonen mens $(0, 2)$ ligger på grafen til den deriverte. Vi skriver derfor inn:

1 LøsODE($y'' - 6y' + 5y = x$, $(0,1)$, $(0,2)$)
→ $y = \frac{1}{5} x + \frac{13}{50} e^{5x} + \frac{1}{2} e^x + \frac{6}{25}$

2 $1
≈ $y = 0.2 x + 0.26 e^{5x} + 0.5 e^x + 0.24$

Vi ser at $y = \frac{1}{5} x + \frac{13}{50} e^{5x} + \frac{1}{2} e^x + \frac{6}{25}$.

I rad 2 har vi fått svaret med desimaltall ved å trykke på ≈ .

Oppgave 7.6
Løs differensiallikningene

a) $y' + y = 0$ b) $y'' + y = e^x$ c) $y'' - y' + y = 5$

Oppgave 7.7
Løs initialproblemet

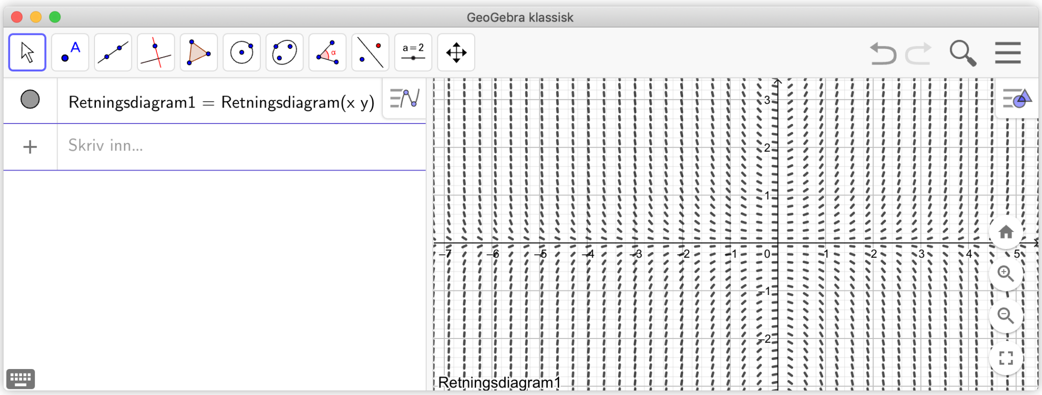
$$y'' + y = 2 \qquad y(\pi) = 1,\; y'(0) = 2$$

7.3.2 Retningsdiagram

Du kan også lage retningsdiagram i GeoGebra. Kommandoen vi da bruker er

```
Retningsdiagram[<f(x,y)>].
```

Denne vil tegne opp et retningsdiagram til differnsiallikningen $y' = f(x, y)$. Merk at dette ikke er en CAS-spesifikk kommando, så denne må du skrive inn i algebrafeltet. `Retningsdiagram(x*y)` vil gi retningsdiagrammet til differensiallikningen $y' = xy$:



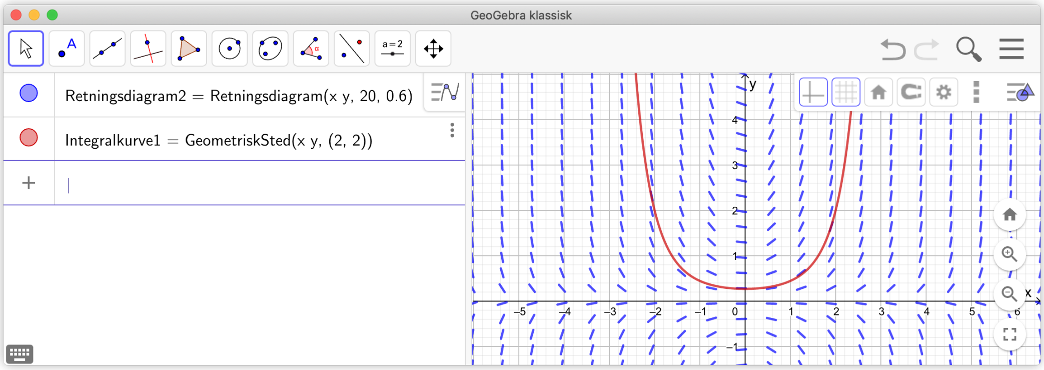
Figur 7.9: Retningsdiagram til differensiallikningen $y' = xy$

Dersom du synes linjestykkene i diagrammet ligger for tett eller har feil lengde (for lange?) kan du endre dette ved å oppgi hvor mange linjer i x- og y-retning som skal tegnet og hvor lange linjestykkene skal være. Kommandoen `Retningsdiagram(x*y, 20, 0.6)` gir kanskje et penere diagram?

Vi kan også tegne inn integralkurver til slike diagrammer. Dersom vi ønsker å tegne inn den integralkurven som går gjennom punktet $(2, 2)$ kan vi bruke kommandoen

```
GeometriskSted(x*y,(2,2))
```

Se figur 7.10.



Figur 7.10: Retningsdiagram til differensiallikningen $y' = xy$ sammen med integralkurven som går gjennom $(2, 2)$.

7.4 Oppgaver

Oppgave 7.8

Bruk CAS til å forenkle uttrykkene:

a) $\dfrac{x^{12}-1}{x^4-x^2+1}$

b) $\sqrt{(x+1)^3} - x\sqrt{x+1}$

Oppgave 7.9

Finn de eksakte løsningene til likningene

a) $x^3 + x - 2 = 0$

b) $x^3 + 15x = 2$

Oppgave 7.10

Løs likningene

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$

b) $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1 = 6$

Oppgave 7.11

Løs likningssystemet

$$x + y + 3\sqrt{x+y} = 18$$
$$x - y - 2\sqrt{x-y} = 15$$

Oppgave 7.12

Bruk CAS til å faktorisere polynomene:

a) $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + x^2 + 14x - 10$

b) $Q(x) = x^{12} - 1$

De neste tre oppgavene er hentet fra utdanningsdirektoratets forslag til ny eksamensordning for videregående skole.

Oppgave 7.13 — 1T.

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = \frac{2}{x(x-1)} - \frac{3x}{x} + \frac{1}{x^2 - x}$$

Skriv funksjonsuttrykket så enkelt som mulig, og bestem eventuelle vertikale og horisontale asymptoter for grafen til f.

Oppgave 7.14 — S2.
I denne oppgaven skal du finne mønstre og sammenhenger.

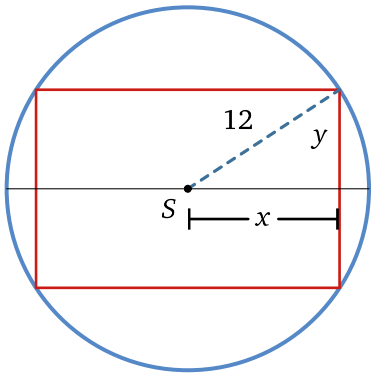
a) Det minste tallet som kan skrives som summen av to kubikktall på to måter er 1729:

$$1729 = 1^3 + n^3$$
$$1729 = m^3 + (m+1)^3$$

Bestem n og m.

b) Det eneste kubikktallet som skrives som summen av tre påfølgende kubikktall, er 6^3.
Bestem de tre kubikktallene ved å løse en likning.

Oppgave 7.15 — R1.
Et rektangel er innskrevet i en sirkel med sentrum i S og med radius 12.



a) Forklar at arealet av rektangelet er gitt ved

$$A(x) = 4x\sqrt{144 - x^2}, \quad x \in \langle 0, 12 \rangle$$

b) Bestem det største arealet rektangelet har.
Kommenter formen på rektangelet.

Oppgave 7.16
La f være en andregradsfunksjon og A og B to punkt på grafen til f. Hvor må et punkt P ligge for at tangenten til grafen i P har samme stigningstall som linjen gjennom A og B?

Oppgave 7.17
Grafen til funksjonen f gitt ved

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 21x - 11$$

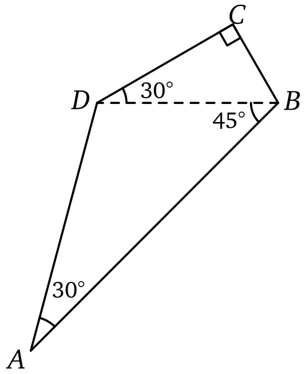
har tre tangenter som går gjennom $(0,0)$. Bestem likningene til disse tangentene. Bestem også koordinatene til tangeringspunktene.

Oppgave 7.18

Finn likningen til vendetangenten til funksjonen $f(x) = x^3 - ax + b$.

Oppgave 7.19

Gitt en firkant $ABCD$ som vist på figuren til høyre. Lengden på diagonalen BD er 8. Bruk CAS til å bestemme eksakt lengdene av sidene i firkanten.



Oppgave 7.20

Gitt en tredjegradsfunksjon f. En linje ℓ går gjennom vendepunktet V og skjærer grafen til f i to andre punkt A og B. Et punktet P ligger på grafen til f slik at x-koordinaten til P er lik x-koordinaten til midpunktet mellom A og V.

Hva kan du si om tangenten til grafen til f i P?

Oppgave 7.21

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

a) Tegn grafen til f. Finn koordinatene til toppunktet og bunnpunktet.

b) Finn stigningstallet til linja l gjennom toppunktet og bunnpunktet.

La m være gjennomsnittet av x-koordinatene til toppunktet og bunnpunktet.

c) Finn stigningstallet til tangenten til grafen til f i punktet $(m, f(m))$. Vis at forholdet mellom stigningstallene til linjene l og t er $\frac{2}{3}$.

d) Kan du vise dette generelt?

Oppgave 7.22

Fermatprimtall er primtall på formen $F_n = 2^{2^n} + 1$.

a) Vis at F_n er primtall når n er 1, 2, 3 og 4.

b) Vis at F_n ikke er primtall når n er 5, 6, 7, 8, 9 og 10.

I denne oppgaven kan du bruke kommandoen `ErPrimtall(<tall>)`.

Oppgave 7.23

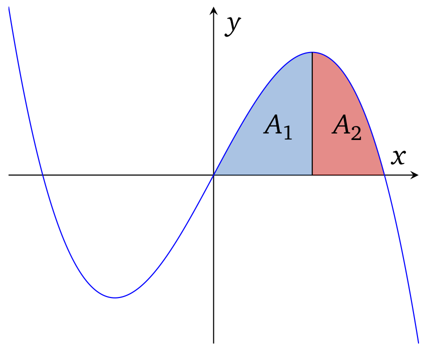
I denne oppgaven skal vi studere polynomet $P(x) = x^2 - x + 41$.

a) Undersøk om $P(n)$ er primtall for $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$.

b) Finn minste naturlige tall n slik at $P(n)$ ikke er et primtall.

Oppgave 7.24

Grafen til en tredjegradsfunksjon f er symmetrisk om origo. Sammen med x-aksen danner grafen et område A til høyre for y-aksen. Linjen gjennom det ene ekstremalpunktet deler A i to områder A_1 og A_2.



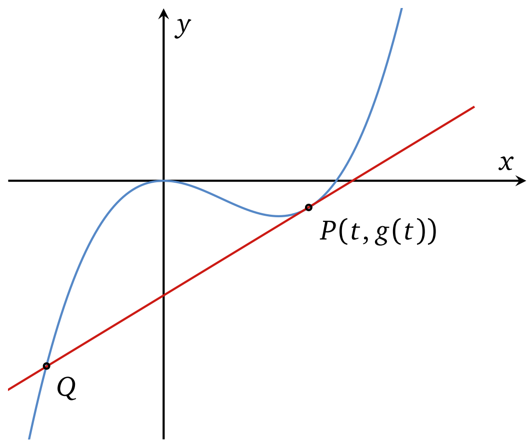
Hva er forholdet mellom de to arealene?

Oppgave 7.25 — R1 Våren 2015.

Funksjonen g er gitt ved

$$g(x) = ax^3 - x^2, \quad D_g = \mathbb{R}$$

Grafen til g har en tangent i punktet $P(t, g(t))$. Tangenten skjærer grafen til g i et annet punkt Q. Se skissen nedenfor.



a) Vis at tangenten har likningen

$$y = (3at^2 - 2t)x + t^2 - 2at^3$$

b) Bruk CAS til å bestemme koordinatene til Q, uttrykt ved a og t.

Oppgave 7.26

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-5)$$

Grafen til f har en tangent som tangerer grafen i to punkt på grafen.

Bestem likningen til denne tangenten.

Oppgave 7.27

Grafen til en tredjegradsfunksjon f ligger symmetrisk om origo og har tre nullpunkt $x = -a$, $x = 0$ og $x = a$. Et parallellogram P har hjørner i $(-a, 0)$, $(a, 0)$ og i topp- og bunnpunktet til grafen.

Hva er forholdet mellom arealet av dette parallellogrammet og arealet til de to områdene som er avgrenset av grafen til f og x-aksen?

Oppgave 7.28
Funksjonene f_a er gitt ved

$$f_a(x) = a^2 \cdot x^3 - a \cdot x^2 + 1, \quad \text{der } a \in \mathbb{R}$$

Vis at vendepunktene V_a alle ligger på en rett linje.
Bestem likningen for denne linjen.

Oppgave 7.29
Faktoriser $x^n - 1$ for $n = 1, 2, \ldots, 10$. Hva kan du si om koeffisientene til faktorene? Gjelder dette generelt?

Herons formel

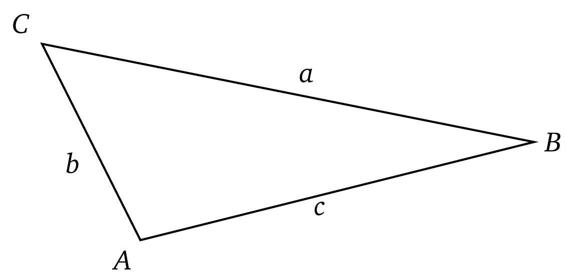
Dersom en trekant har sider a, b og c, så er arealet til trekanten gitt ved

$$\text{Areal} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \text{der} \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

Oppgave 7.30
Lagre Herons formel som en funksjon `heron(a, b, c)`

Regn ut arealet til en trekant med sider 1, 3 og 3.

For hvilke verdier av x fins det en trekant med sider x, $x+1$ og $x+2$



Oppgave 7.31
Vi skal i denne oppgaven bevise Herons formel.

a) Bruk cosinussetningen til å skrive $\cos^2 A$ uttrykt ved a, b og c.

b) Vis at

$$\sin^2 A = 1 - \left(\frac{b^2 - c^2 - a^2}{2bc}\right)^2$$

c) Bruk CAS til å bestem et uttrykk for Areal^2 uttrykt ved a, b og c.

d) Bruk CAS ti å vise at Herons formel gir samme areal som i c).