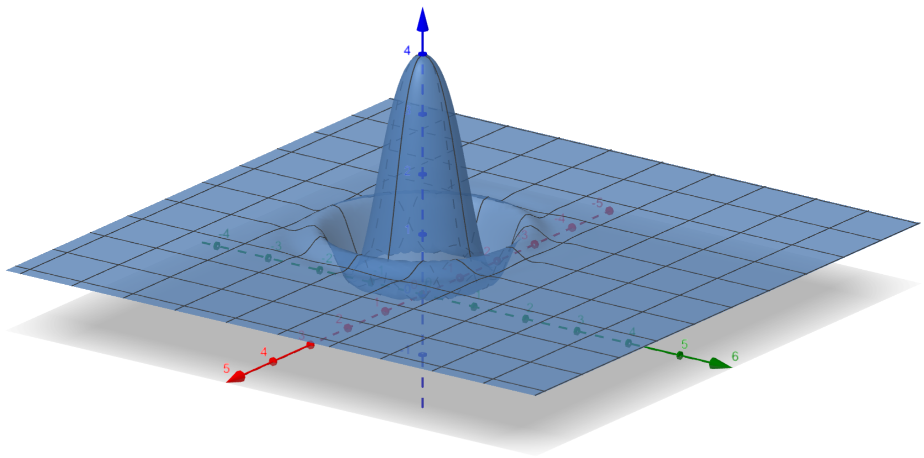
8 GeoGebra 3D

8.1 Grafikkfelt 3D

I GeoGebra kan du tegne og utforske tre-dimensjonale objekter. I tillegg til grafikkfeltet har du også *Grafikkfelt 3D*. Du åpner dette på vanlig måte. Under «Vis» på menyknappen klikker du på «Grafikkfelt 3D». Her kan du gjøre tilsvarende ting som i grafikkfeltet, men med en ekstra dimensjon. På figuren nedenfor har vi for eksempel tegnet inn grafen til funksjonen $f(x, y) = 1 + 3\cos(2x^2 + 2y^2) \cdot \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

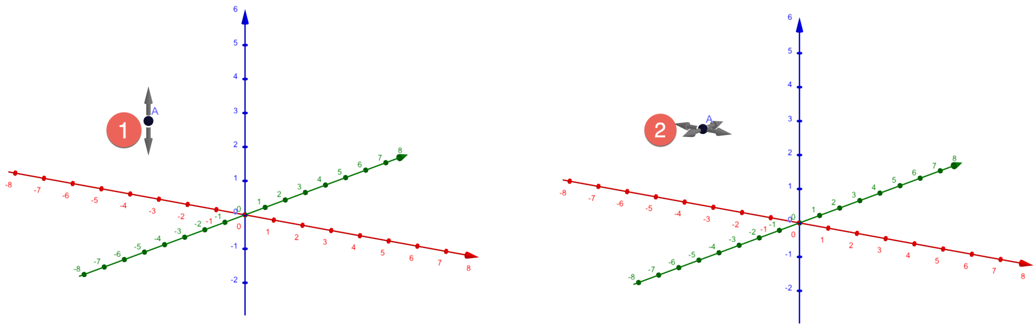


Figur 8.1: En flate gitt ved likningen $z = 1 + 3\cos(2x^2 + 2y^2) \cdot \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$

Når du er i Grafikkfelt 3D har du følgende verktøylinje:

Figur 8.2: Verktøylinjen i GeoGebra 3D

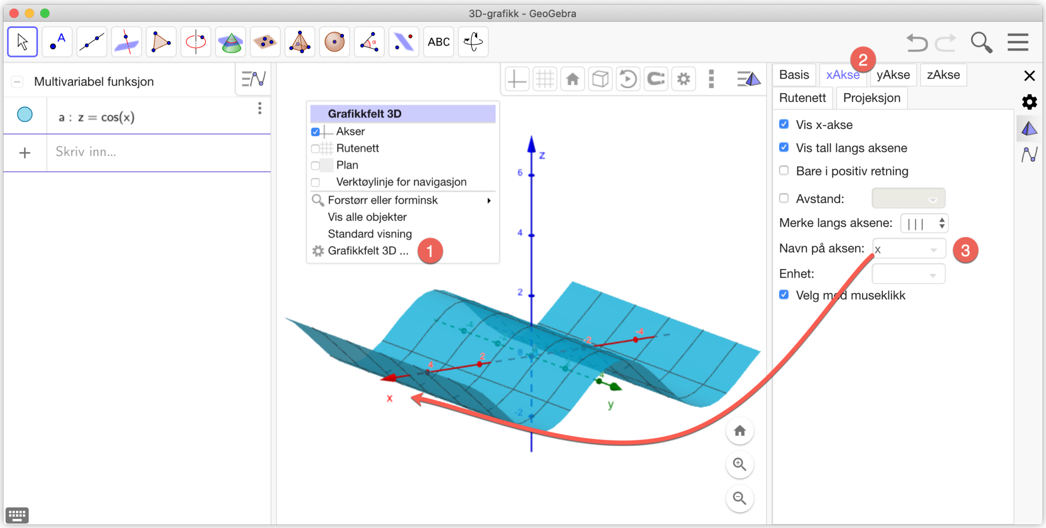
Vi kan bruke disse verktøyene til å tegne punkt, linjer, linjestykker, mangekanter, sirkler, kjegler, plan, pyramider, kuler etc. Dersom du skal tegne punkt i Grafikkfelt 3D kan du velge punktverktøyet  og klikke der du vil ha punktet. Du vil da først få tegnet opp punktet i xy-planet. Dersom du vil endre på «høyden» til punktet må du dra det opp. Dersom du klikker en gang til på punktet, så kan du flytte det parallelt med xy-planet. Klikker du enda engang kan du igjen flytte det opp eller ned parallelt med z-aksen. Se figur 8.3.



Figur 8.3: Skal du tegne inn et punkt i *Grafikkfelt 3D* klikker du først i xy-planet og deretter endrer du høyden (z-koordinaten) til punktet.

Dersom du skal tegne inn et punkt med gitte koordinater er det enklest å skrive inn punktet i algebrafeltet.

På samme måte som i det todimensjonale grafikkfeltet, så kan du sette navn på aksene. Høyreklikker du i Grafikkfelt 3D og velger Grafikkfelt 3D. . . , så kan du velge hvilke navnt du vil ha på de ulike aksene.



8.2 Verktøy til tegning og konstruksjon av tre-dimensjonale objekter

Det fins flere nyttige verktøy for å lage tre-dimensjonale objekter. Ni av disse er gruppert sammen på verktøylinjen i samme gruppe som verktøyet *Pyramide*. Tabellen nedenfor gir en oversikt over noen av verktøyene.

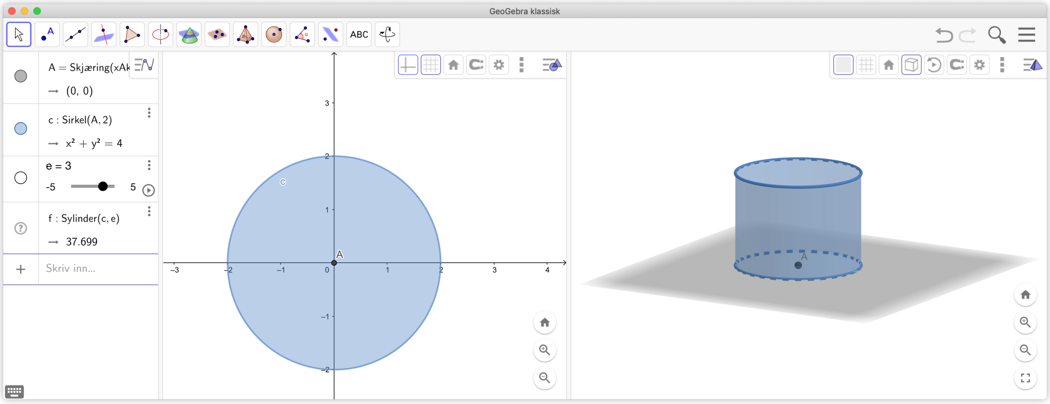
Pyramide	Velg eller lag en mangekant som skal være bunnen. Velg deretter toppunktet.
Prisme	Velg en mangekant som skal utgjøre bunnen. Velg deretter toppunktet.
Ekstruder til pyramide	Velg en mangekant/sirkel. Skriv deretter inn høyden.
Ekstruder til prisme eller sylinder	Velg en mangekant/sirkel. Skriv deretter inn høyden.
Kjegle	Velg bunnpunkt, så toppunkt og skriv inn radius.
Sylinder	Velg to punkt, skriv så inn radius.
Tetraeder	Velg to punkt eller andre tilhørende objekt.
Terning	Velg to punkt eller andre tilhørende objekt.
Brettut	Velg et polyeder.
Skjæring mellom to overflater	Velg to overflater.
VinkelrettLinje3D	Velg punkt og vinkelrett linje eller plan.
Plan gjennom tre punkt	Velg tre punkt.
Vinkelrett plan	Velg punkt og vinkelrett linje.
Parallelt plan	Velg punkt og parallelt plan
Kule med sentrum gjennom punkt	Velg sentrum og deretter punkt på kule.

Tabell 8.1: Noen nyttige verktøy til tegning av tre-dimensjonale objekter.

Eksempel 8.1

Tegn en sylinder med radius 2 og høyde 3.

Løsning:
Lag en sirkel med radius 2 i grafikkfeltet (det to-dimensjonale). Du får da også tegnet en sirkel i xy-planet i Grafikkfelt 3D. Klikk så i Grafikkfelt 3D og velg verktøyet *Ekstruder til prisme eller sylinder*. Klikk så på sirkelen i Grafikkfelt 3D. Skriv inn høyden i vinduet som popper opp og klikk på OK. Du får da tegnet opp sylinderen. Legg merke til at vi har fått laget en glider e i algebrafeltet. Dette er høyden til sylinderen. Du kan endre høyden til sylinderen ved å dra i glideren.



Figur 8.4: Tegning av en sylinder. Vi har skjult aksene og endret farge til blå.

Oppgave 8.1

Tegn en kjegle hvor grunnflaten har radius 4 og høyden er 4. Du kan bruke verktøyet *Ekstruder til pyramide* .

Oppgave 8.2

Lag et regulært tetraeder med sider 2. Du kan bruke verktøyet *Tetraeder* .

Eksempel 8.2

En kule har sentrum i $(2, 0, -1)$ og har radius $r = 3$.

a) Tegn kulen i et koordinatsystem.

b) Bestem kulens volum.

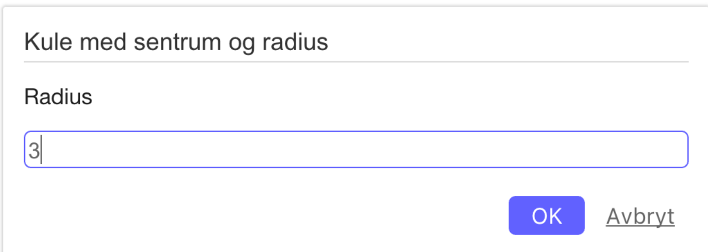
c) Avgjør om punktene $A(3, 1, -2)$ eller $B(2, 3, -1)$ ligger på kulens overflate.

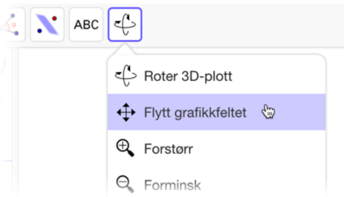
Løsning:

a) For å tegne kula kan du først skrive inn koordinatene til S i algebrafeltet. Skriv inn

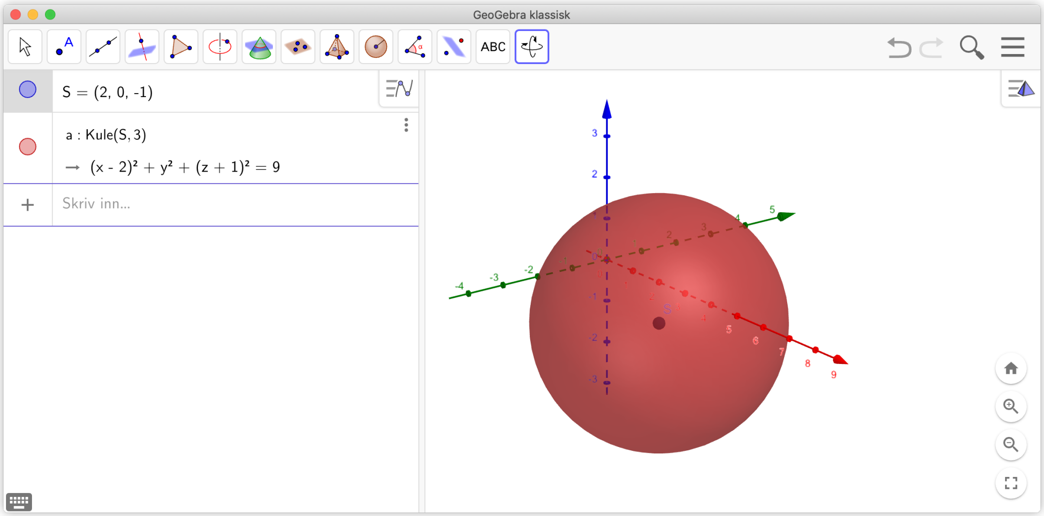
```
S=(2, 0, -1)
```

Velg deretter verktøyet *Kule med sentrum og radius* og klikk på punktet S. Du får da opp et vindu hvor du skriver inn kulens radius:





Klikk på OK og kulen blir tegnet opp. Dersom du vil endre litt på plasseringen av koordinatsystem, kan du gjøre dette ved å velge passende verktøy på verktøylinjen. Alternativt kan du holde Shift-knappen inne mens du holder venstsre museknapp inne og drar rundt xy-planet. Ctrl + venstre museknapp (eller høyreklikk) vil rotere rundt z-aksen. På figur 8.5 har ser du en tegning av kulen. Legg merke til at vi også har fått kulens likning med på kjøpet.



Figur 8.5: Kule med sentrum i $S(2, 0, -1)$ og radius 2.

b) Du kan bruke verktøyet *Volum* til å bestemme kulens volum. Dette finner du i samme kategori som vinkelmålingsverktøyet . Velger du dette og deretter klikker på kulen, vil du se at volumet er ca 113,10. Men i dette tilfellet er det kanskje bedre å bruke formelen for volumet av en kule:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi$$

c) Du kan avgjøre om punktene A og B ligger på kulens overflate ved å finne avstanden fra punktene til S. Skriv først inn punktene i algebrafeltet:

```
A=(3, 1, -2)
B=(2, 3, -1)
```

Du kan nå enten måle avstanden ved å bruke verktøyet *Avstand eller lengde* og så klikke på A og deretter på S. Du får da at avstanden er ca 1,73. Dette er mindre en radiusen, så derfor ligger ikke A på kulens overflate.

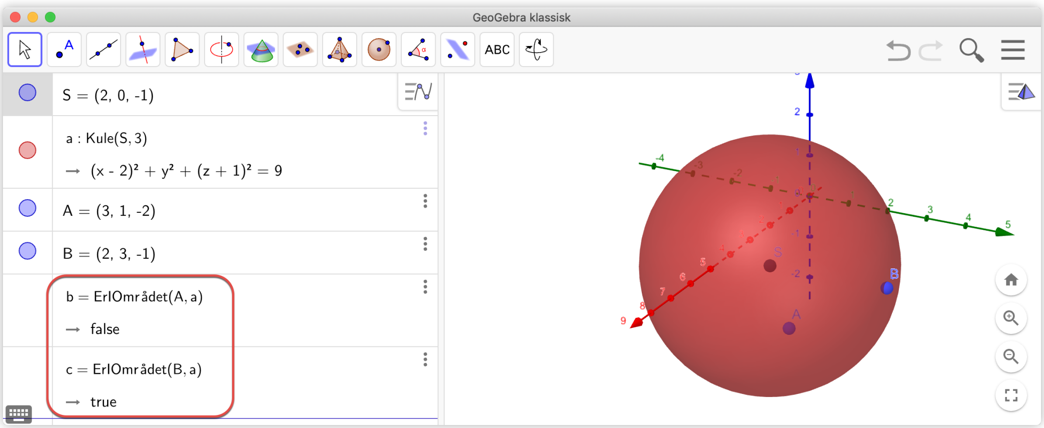
Du kunne også gitt kommandoen `AS=Avstand[A, S]` og fått at $AS = 1{,}73$

Tilsvarende finner du at avstanden fra B til S er 3, som er det samme som radiusen. Vi kan derfor konkludere med at B ligger på kulens overflate.

Nå kunne det tenkes at vi blir litt lurt her. Det kunne være at avstanden mellom B og S er for eksempel 3,0001 og ikke eksakt lik 3. For å være helt sikker, kan vi bruke kommandoen

```
ErIOmrådet(<punkt>, <område>)
```

i algebrafeltet eller i CAS. I dette tilfellet får vi at `ErIOmrådet((3,1,-2), a)` gir false mens `ErIOmrådet((2,3,-1), a)` gir true.



Figur 8.6: Punktet A ligger ikke på kuleflaten, mens punktet B ligger på kuleflaten. Merk at kuleflaten har fått navnet a.

8.3 Flater

Eksempel 8.3

Et plan p går gjennom punktene $A(1,-1,1)$, $B(4,2,2)$ og $C(-2,3,4)$.

a) Bestem likningen til planet.

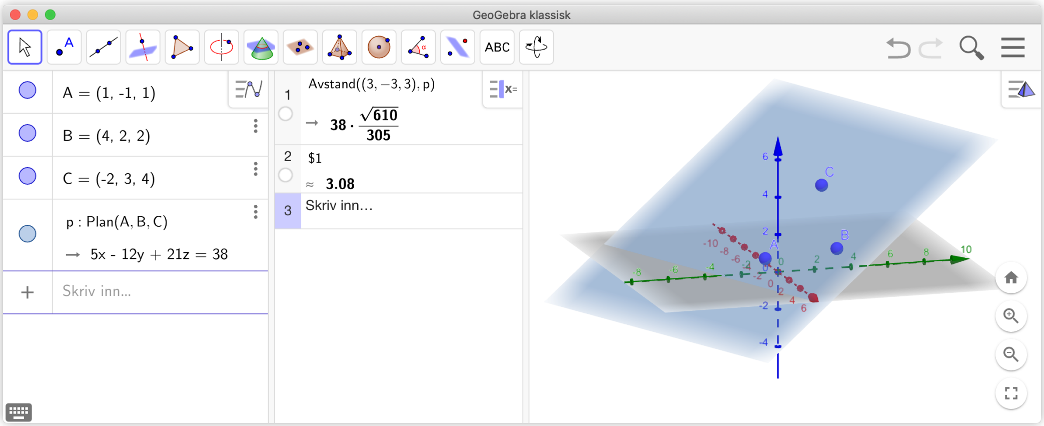
b) Bestem avstanden mellom planet og punktet $Q(3,-3,3)$.

Løsning:

a) Skriv inn punktene i algebrafeltet og velg verktøyet *Plan gjennom tre punkt* . Klikk på de tre punktene. Da får du tegnet planet p og du kan lese av likningen for planet i algebrafeltet. Planet har likning

$$5x - 12y + 21z = 38$$

b) For å bestemme avstanden mellom p og planet åpner du CAS-vinduet og skriver inn kommandoen `Avstand((3,-3,3), p)` som vist på figuren nedenfor. Da finner du at avstanden er $\frac{38}{305}\sqrt{610} \approx 3{,}08$.



Figur 8.7: Et plan gjennom tre punkt og avstanden fra planet til punktet (3, -3, 3)

Eksempel 8.4

Et plan har likningen $2x - y + z = 3$ og en kule $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 5 = 4$

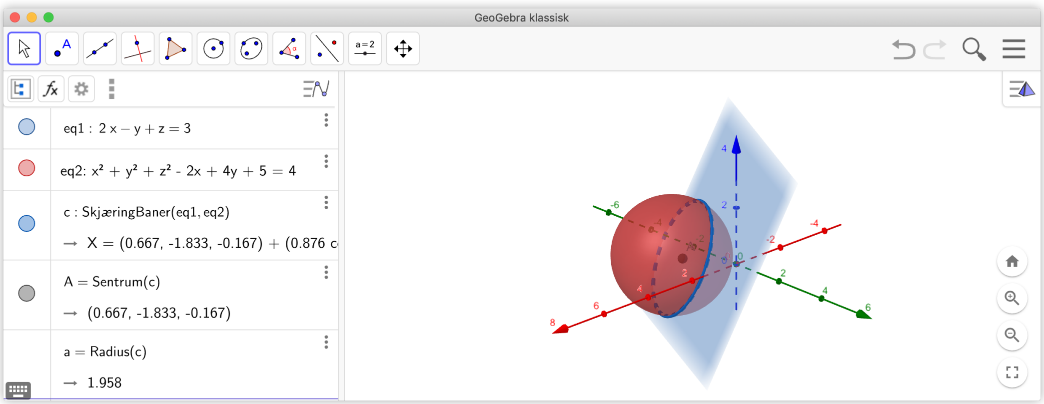
a) Tegn planet og kulen i et koordinatsystem.

b) Kulen skjærer planet i en sirkel. Bestem radiusen til denne sirkelen.

Løsning:

a) Du får tegnet inn de to flatene ved å skrive dem inn i algebrafeltet. Se figuren nedenfor.

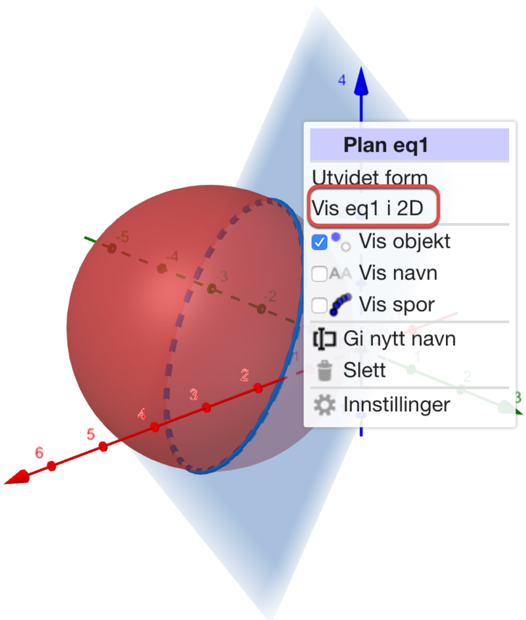
b) Velg verktøyet *Skjæring mellom to overflater* og klikk på kulen og på flaten. Du får da opp et kjeglesnitt c. Vi ser at dette sirkelen har sentrum i $S(0{,}667, -1{,}833, -0{,}167)$ ut fra parameterframstillingen. Vi kan også finne dette ved å bruke kommandoen `Sentrum(c)`. Vi finner radius til sirkelen ved å bruke kommandoen `Radius(c)`. Vi ser at radiusen er ca 1,958.



Figur 8.8: Du kan finne radius og sentrum til en sirkelen som er skjæringskurven mellom kulen og planet

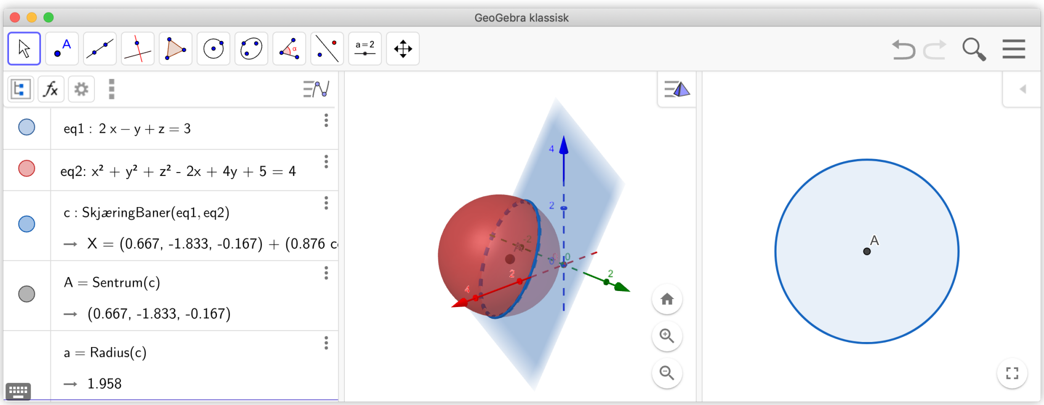
8.4 Vise plan i 2D

Du får en fin visualisering skjæringskurven mellom planet og kulen i eksempel 8.4 ved å høyreklikke på planet og velge «Vis eq1 i 2D»:



Figur 8.9: Du kan få et eget grafikkfelt som viser det som ligger i planet eq1.

Du får da opp et eget grafikkfelt som viser alle objektene som ligger i dette planet.

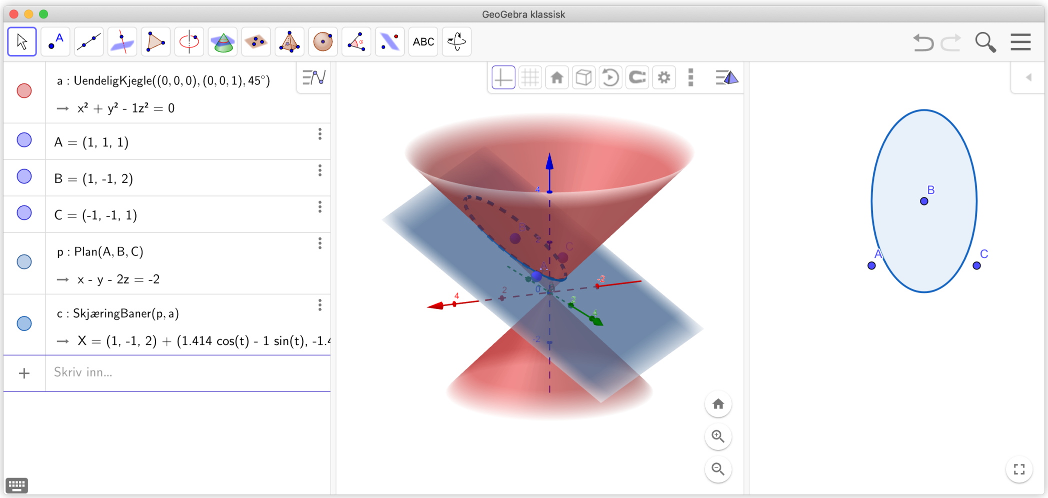


Eksempel 8.5

Å vise et plan i 2D kan være nyttig når vi skal studere kjeglesnitt. Vi kan få tegnet opp en kjegle ved å skrive inn i algebrafeltet:

```
a=UendeligKjegle((0,0,0), (0, 0, 1), 45°]
```

Vi tegner så inn tre punkt og finner planet gjennom disse. Vi kan for eksempel se på planet gjennom $A(1,1,1)$, $B(1,-1,2)$ og $C(-1,-1,1)$. Vi skriver inn disse punktene i algebrafeltet og gir kommandoen `p=Plan(A, B,C)`. Vi får da et plan som snitter kjeglen i en kurve. Bruke vi s verktøyet *Skjæring mellom to overflater* kan vi finne skjæringskurven mellom kjeglen og planet. Høyrklikker vi nå på planet og velger «Vis p i 2D» får vi opp «Grafikkfelt for plan p» som viser de tre punktene og snittet mellom de to overflatene. Vi ser at det er en ellipse i dette tilfellet. Se figur 8.10.



Figur 8.10: Et kjeglesnitt.

Oppgave 8.3

Gjør tilsvarende som over, men med punktene

a) $A(0,-4,0)$, $B(6,8,0)$ og $C(4,4,4)$.

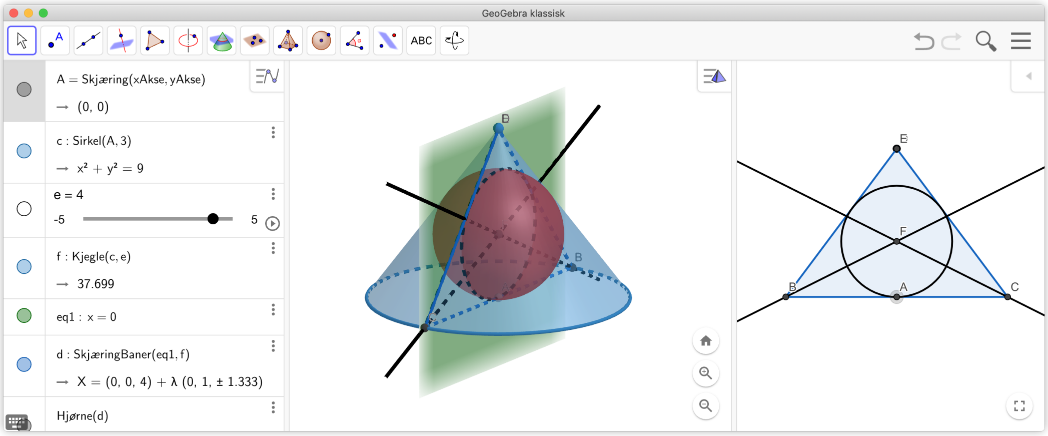
b) $A(4,0,0)$, $B(2,3,2)$ og $C(-2,0,6)$.

Eksempel 8.6

Gitt en kjegle med radius 3 og høyde 4. Tegn en innskrevet kule som tangerer bunnen og sideflaten i kjeglen.

Løsning:

Tegn først opp kjeglen ved å tegne en sirkel med radius 3 og sentrum i $(0,0)$ i xy-planet. Tegn derretter kjeglen ved å bruke verktøyet *Ekstruder til pyramide* . Skriv så inn $x = 0$ i algebrafeltet for å få tegnet inn yz-planet. Kulen vil snitte dette planet i en sirkel. Denne må være den innskrevne sirkelen til trekanten som er snittet mellom planet og kjeglen. Finn først skjæringen mellom planet og kjeglen. Dette blir da en likebeinet trekant. Vi konstruerer sentrum S til denne sirkelen i Grafikkfelt for plan eq1. Dette gjør vi ved å finne halveringslinjene til vinklene som sidekantene danner. Disse må skjære hverandre i sentrum til den innskrevne sirkelen. Til slutt tegner vi kulen ved å bruke verktøyet *Kule med sentrum gjennom punkt* . Se figur 8.11.



Figur 8.11: En innskrevet kule i en kjegle. Kulen tangerer bunnen i kjeglen.

8.5 Omdreiingslegemer

Vi kan også illustrere omreiingslegemer i GeoGebra 3D.

Eksempel 8.7

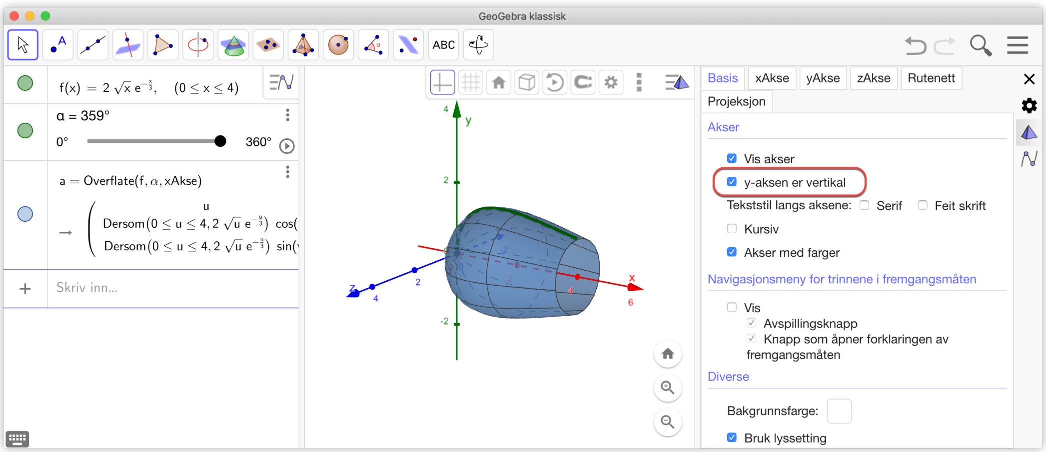
Tegn grafen til funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 2\sqrt{x}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}, \qquad x \in [0,4]$$

ved å skrive inn i algebrafeltet `f(x)=√x*e^(-x/3), 0<=x<=4`. Lag en glider α. Velg Vinkel med grader mellom 0° og 360° og animasjonstrinn lik 1°. Skriv inn kommandoene

`Overflate(f,α).`

Du vil da få illustrert hva som skjer når du roterer grafen rundt x-aksen. For å få det riktig så pent vil vi anbefale å la y-aksen være vertikal. Dette får du til ved å høyreklikke i Grafikkfelt 3D, velge «Innstillinger» og så hake av for y-akse er vertikal. Se figur 8.12.



Figur 8.12: En pen illustrasjon av et omdreiingslegeme. Hak av for y-akse er vertikal under «Innstillinger» til Grafikkfelt 3D. Merk at vi også har satt navn på aksene. Dette gjøres på samme måte som i det vanlige grafikkfeltet.

Selve volumet må du regne ut ved for eksempel å bruke CAS:

1 $V := \pi \cdot \mathrm{Integral}(f^2, 0, 4)$

$\rightarrow$ $\mathbf{V := 21.071}$

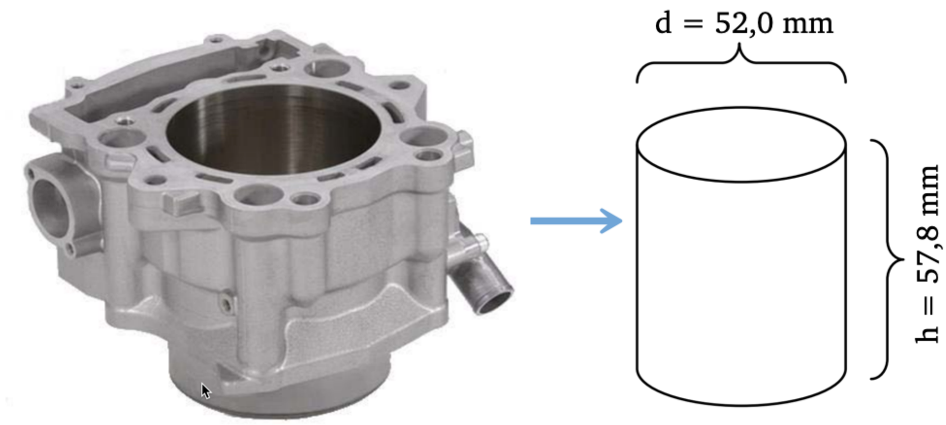
2 $\pi \int_0^4 \left(2\sqrt{x}\, e^{-\frac{x}{3}}\right)^2 dx$

$\rightarrow$ $\pi \left(-33 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{e^8}} + 9\right)$

Figur 8.13: Volum regnet ut i CAS. Siden funksjonen er definert med begrenset definisjonsmengde, får vi ikke eksakt verdi i rad 1. Dersom vi ønsker eksakt verdi må vi bruke en funksjon som ikke har en slik begrensning, som vist på rad 2.

8.6 Oppgaver

Oppgave 8.4 — Bassert på eksamen 10. årstrinn V11.
En lett motorsykkel har en motorsylinder med innvendig volum på maksimalt 125,0 cm^3.

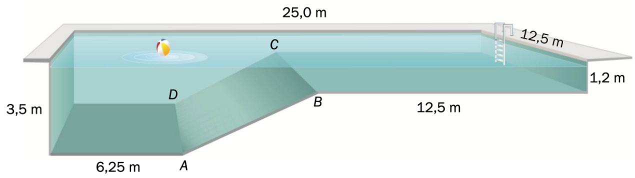


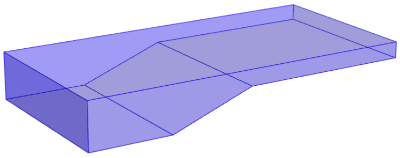
a) Lag en tegning av sylingeren i GeoGebra 3D. Hva er volumet av sylinderen?

Etter en skade i motoren trenger sylinderen reparasjon. Verkstedet ønsker å utvide diameteren, men volumet av motorsylinderen skal fortsatt være maksimalt 125,0 cm^3.

b) Bruke GeoGebra 3D til å illustrere hvordan volumet endres når diameteren endres. Hva er den maksimale diameteren sylinderen kan få?

Oppgave 8.5 — 10. trinn V14.
Lag en 3D-modell i GeoGebra av svømmebassenget:





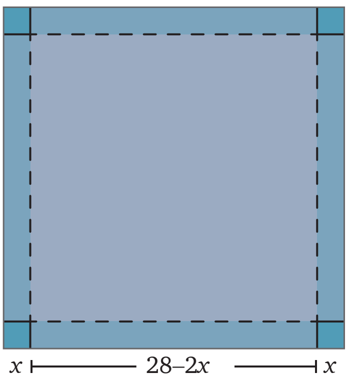
Oppgave 8.6
En åpen boks er laget ved å klippe bort hjørner med side x i et kvadrat med side 28 cm som vist på figuren nedenfor.

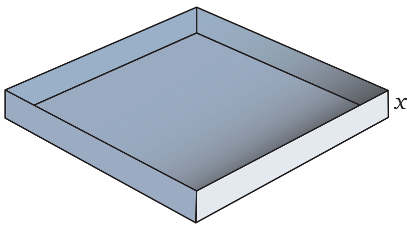
a) Hvor langt inn må vi klippe for at volumet skal bli 1 dm^3?

b) Lag en modell av esken i GeoGebra 3D som du kan bruke til å vise hvordan volumet endres når x endres.

c) Hva er det største volumet vi kan lage?

Tips: se om du kan lage noe som vist her: `https://ggbm.at/vtnhb3yz`

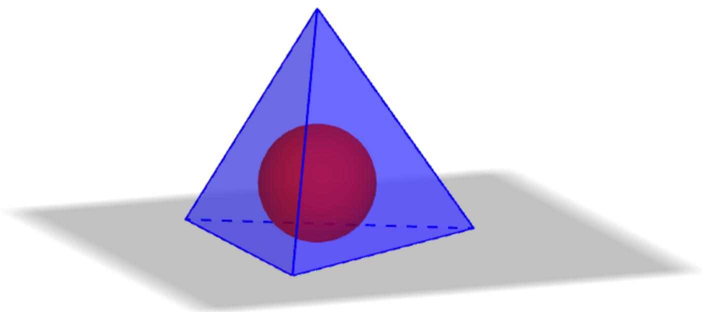




Oppgave 8.7

a) Tegn et regulært tetraeder med sider lik 3.

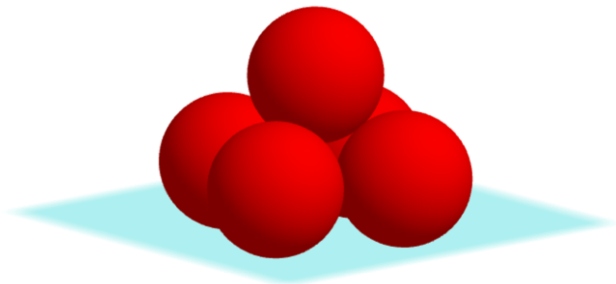
b) Konstruer den innskrevne kulen i tetraederet.



Oppgave 8.8

a) Konstruer fire kuleflater med lik radius og som tangerer hverandre.

b) Konstruer fem kulefalter slik at fire av kulene ligger parallelt, som vist på figuren.



Oppgave 8.9

En juicekartong skal romme 1 liter juice. Hvordan bør kartongen utformes dersom kartongens overflate skal være minst mulig?

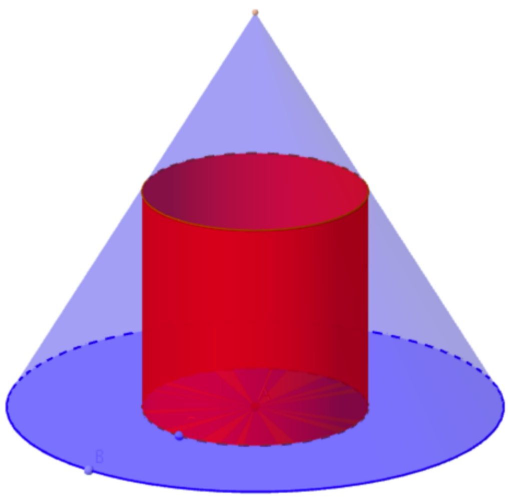
Oppgave 8.10

I en kjegle har bunnen radius lik R og høyden er H. En sylinder med radius r og høyde h er innskrevet i kjeglen.

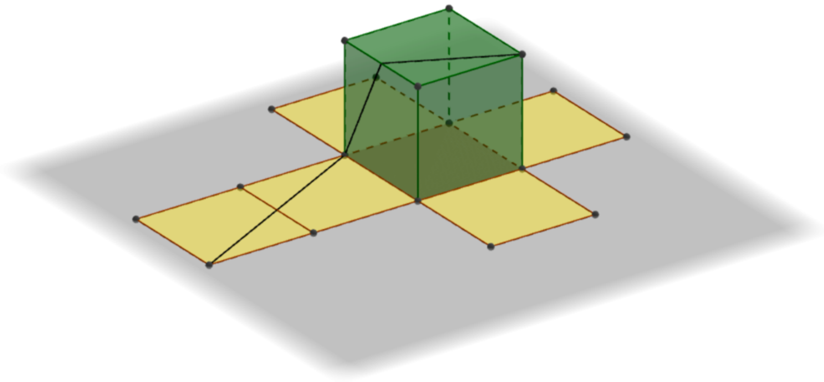
Hvor stor må r være i forhold til R for at volumet av sylinderen skal være størst mulig?

Løs først problemet med konkrete tall. Lag et arbeidsark som du kan bruke til å utforske problemet.

Løs oppgaven symbolsk i GeoGebra CAS.



Oppgave 8.11
En terning har sider med lengde 4. Hva er den korteste avstanden fra et hjørne til hjørnet på motsatt side av terningen? Illustrer løsningen ved å tegne terningen i GeoGebra og bruk verktøyet *BrettUt*



Oppgave 8.12
Lag en animasjon som illustrerer volumet til vanntanken i oppgave 4, del 2 på eksamen for S1 Høsten 2014.

Se `http://ggbtu.be/m3169163`

Oppgave 8.13
Punktene $A(1,1,2)$, $B(0,-2,3)$, $C(4,4,5)$ og $P(7,-2,3)$ er gitt.

a) Bestem likningen for planet som går gjennom A, B og C.

b) Bestem avstanden fra P til planet.

De fire punktene danner en pyramide.

c) Bestem volumet av pyramiden.

Oppgave 8.14
Tegn følgende overflater i GeoGebra

a) $\begin{cases} x = (3+\cos u)\cos v \\ y = (3+\cos u)\sin v \\ z = \sin u \end{cases}$, der $u, v \in [0, 2\pi]$

b) $\begin{cases} x = (3+v\cos 0{,}5u)\cos u \\ y = (3+v\cos 0{,}5u)\sin u \\ z = v\sin 0{,}5u \end{cases}$, der $u \in [0, 2\pi]$ og $v \in [-1, 1]$

Tips: Bruk kommandoen `Overflate`.

Oppgave 8.15
To plan α og β er gitt ved

$$\alpha : x + 2y + z = 3 \quad \text{og} \quad \beta : 2x + z = 3$$

a) Vis at $A(1, -1, 4)$ ligger i α.

b) Konstruer en kuleflate som tangerer α i A og β i et punkt B. Hva er koordinatene til B? Er B entydig bestemt?

Oppgave 8.16
Et plan har likningen $x + 2y + 3z = 3$ og en kule $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y = 20$

a) Tegn planet og kulen i et koordinatsystem.

b) Kulen skjærer planet i en sirkel. Bestem radiusen til denne sirkelen.

Oppgave 8.17
To kuleflater K_1 og K_2 er gitt ved

$$K_1 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 16$$
$$K_2 : x^2 + y^2 + 2y + z^2 + 4z = 20$$

a) Bestem sentrum og radius til de to kuleflatene.

b) Vis at kuleflatene skjærer hverandre langs en sirkel.

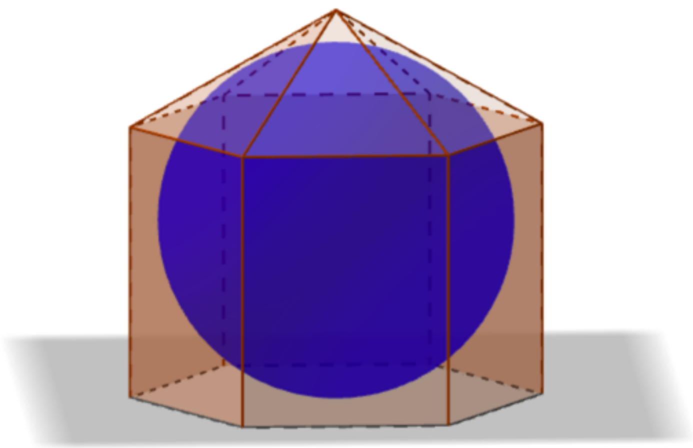
c) Bestem sentrum og radius til denne sirkelen.

Oppgave 8.18

a) Tegn et seks-sidet prisme med sidelengder lik 3 og høyde lik 4.

b) Konstruer en kule som tangerer sidene og bunnen i prismet.

c) Konstruer en pyramide med grunnflate lik toppen av prismet og med høyde slik at pyramiden tangerer kulen.

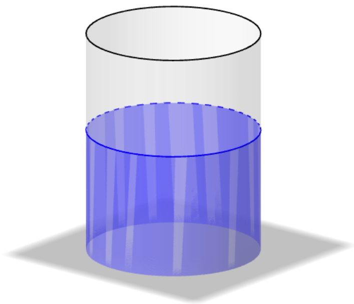


Oppgave 8.19

Tegn en pyramide med kvadratisk grunnflate med side 2 og med høyde 4. Konstruer en innskrevet kule i pyramiden.

Oppgave 8.20

Lag en sylinder med radius 2 og høyde 5. Lag en glider a som kan variere mellom 0 og 5 og lag en sylinder med samme grunnflate som den første, men med høyde a. Velg passende farger slik at det ser ut som et glass fylt med vann.



Oppgave 8.21 — Eksamen REA3024 Matematikk R2 Våren 2012 – Udir.

I et koordinatsystem er det gitt et punkt $P(5,-1,4)$ og et plan

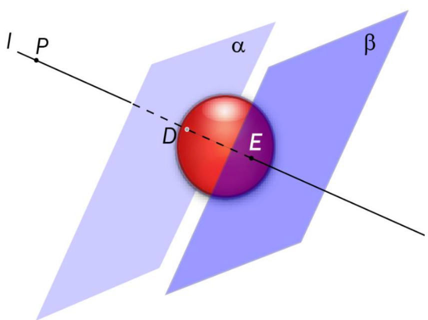
$$\alpha:\ 2x-2y+z+2=0$$

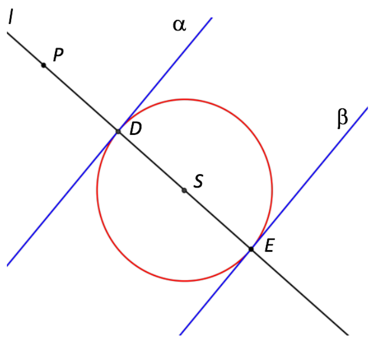
Punktene $A(0,0,4)$, $B(2,0,0)$ og $C(1,1,4)$ ligger i et plan β.

a) Bestem likningen for β, og forklar at $\alpha \parallel \beta$.

b) Regn ut avstanden mellom planene α og β.

Planene α og β er begge tangentplan til en kule. Sentrum S i kula og de to tangeringspunktene D og E ligger på en rett linje l gjennom P. Se figuren nedenfor.





c) Sett opp en parameterframstilling for l.

d) Bestem koordinatene til D og E.

e) Bestem likningen til kula.

Oppgave 8.22 — Eksamen REA3024 Matematikk R2 Høsten 2014 – Udir.
Et plan α er gitt ved likningen

$$2x + y - 2z + 3 = 0$$

a) Bestem likningen for den kuleflaten som har sentrum i punktet $S(11, 2, -6)$ og som har α som tangeringsplan.

b) Bestem koordinatene til tangeringspunktet mellom kuleflaten og planet α.

Et plan β er gitt ved

$$2x + y - 2x = 0$$

Dette planet skjærer kuleflaten langs en sirkel.

c) Bestem radien i denne sirkelen.