



MENINGSFULL MATEMATIKK FOR ALLE

– et samspill mellom praksis, forskning og utvikling

Matematikksenteret, NTNU, vil bidra til at matematikkopplæringen tar utgangspunkt i barn og unges tenkning og bygger på deres interesser, bakgrunn, erfaringer og kunnskap. Målet er at barn og unge skal utvikle en matematisk kompetanse som består av fem komponenter.

Matematikksenteret vil arbeide for å fremme en matematikkundervisning i skolen hvor barn og unge blir møtt med høye forventninger. Læreren leder arbeidet mot læringsmålet for timen, og legger til rette for et godt læringsmiljø.

For barnehage vil Matematikksenteret bidra til at personalet inviterer barna til matematisk utforskning gjennom varierende aktiviteter og berikende samtaler.

Vi ønsker at barn og unge får arbeide med kognitivt krevende aktiviteter som fremmer resonnering og forståelse, og de får diskutere forskjellige løsningsstrategier med hverandre. Feil anses som en naturlig del av læringsprosessen. Slik kan barn og unge erfare at matematikk er engasjerende, utfordrende og meningsfullt.

Matematikksenteret sin virksomhet skal være et samspill mellom praksis, forskning og utvikling. Senteret skal utvikle praksis- og forskningsbaserte ressurser og modeller for kompetanseutvikling som våre målgrupper kan benytte, og bli inspirert av.

For å lykkes med dette må Matematikksenteret ha tett kontakt med praksisfeltet. Matematikksenteret skal drive med forsknings- og utviklingsarbeid i tett samarbeid med praksisfeltet. Senteret skal være oppdatert på nasjonal og internasjonal forskning i matematikdidaktikk, og senterets arbeid skal være forskningsbasert.



MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

 **NTNU**

Kompetanseløftet i spesialpedagogikk og inkluderende praksis

Kompetanseløftet skal bidra til at barn og unge får den hjelpen de trenger, når de trenger den. Tiltaket er særlig rette mot ansatte i barnehage, skole og PPT, og målet er å styrke kollektiv kompetanse i barnehager og skoler ut fra lokale behov, gjennom samarbeid med universitet eller høyskole.

Kompetanseløftet i spesialpedagogikk og inkluderende praksis skal bidra til at kommuner og fylkeskommuner etter hvert har den kompetansen de trenger på «vanlige utfordringer». Matematikkvansker er definert som en vanlig utfordring, og felles kompetanseheving for skole og PPT vil være et tiltak for møte denne vanlige utfordringen.

Matematikksenteret har i samarbeid med Statped utviklet kompetanseutviklingspakken «Matematikkvansker og tilpasset opplæring».

ring». Innholdet i pakkene skal øke bevisstheten rundt arbeidsmåter og betydningen dette har for undervisningspraksis, og vil gi skole og PPT et konkret utgangspunkt for kompetanseutvikling og tettere samarbeid. Vi har erfart at samarbeidet mellom skole og PPT fungerer ulikt fra kommune til kommune. Vi ser også hvor viktig det er å få til et tett samarbeid for å styrke laget som jobber rundt barna.

Her finner du kompetansepakkene:
[www.matematikksenteret.no/kompetanseutvikling/matematikkvansker-og-tilpasset-opplæring](http://www.matematikksenteret.no/kompetanseutvikling/matematikkvansker-og-tilpasset-oppl%C3%A6ring)

Innhold i pakkene

Det er utviklet fire pakker i «Matematikkvansker og tilpasset opplæring», og i hver pakke er det tre til fire moduler.



Digitale kurs i «Matematikkvansker og tilpasset opplæring»



Vil du få flere elever til å mestre og engasjere seg i matematikk? Høsten 2021 tilbyr vi digitale kurs i «Matematikkvansker og tilpasset opplæring».

Vi ønsker at alle elever skal oppleve matematikk som meningsfullt. Å gjøre matematikken meningsfull er å møte elevene der de er, bygge videre på det elevene kan, la elevene oppdage hvordan matematikken henger sammen og erfare hva matematikk kan være i deres liv.

I kursene ser vi nærmere på hva matematikkvansker er, hvordan vurdere eleven, hvordan vi kan følge opp kartlegginger og hva som kjennetegner en inkluderende matematikkundervisning. Ett av kursene er satt av til å se nærmere på intensiv opplæring i matematikk.

Målgruppe for kursene er lærere og ansatte i PPT. Første kurs holdes 15. september.

De digitale kursene består av en forelesning, praktiske oppgaver og diskusjoner i grupper. I hvert kurs vil det bli vist eksempler på innhold som du kan prøve ut ved egen arbeidsplass. Om du velger å ta flere kurs, er det en fordel om du setter av tid mellom kursene til å prøve ut noe av det vi går igjennom på kursene, på din arbeidsplass.

Mer informasjon om de digitale kursene:

www.matematikkcenteret.no/kompetanseutvikling/matematikkvansker-og-tilpasset-opplering

Brøk som flervalg – et utgangspunkt for utforskning

Kenguruoppgavene er flervalgsoppgaver med fem svaralternativer. Noen av svaralternativene er valgt ut fra feilsvar vi kan forvente, mens andre er mer eller mindre tilfeldig valgt. Oppgavene er ikke testet ut på elever noe som ofte gjøres for å finne feilsvar ut fra gitte kriterier. Likevel er det fullt mulig å utnytte ressursen som ligger i flervalgsoppgaver til å berike og utvide den matematiske idéen i oppgaven. Det er også mulig for den enkelte lærer å lansere oppgaver uten svaralternativer, eller velge egne feilsvar.

Flervalgsoppgaver har gjennom tidene hatt et noe tvilsomt omdømme fordi det kan være fristende å velge et svaralternativ uten at det ligger særlig tenking bak valget. Flervalgsoppgaver kan fort bli brukt til å gjøre relativt mange oppgaver på kort tid, uten at den som løser oppgaven trenger å engasjere seg dypere i oppgaven enn å finne ut om svaralternativet man har valgt er riktig, eller ikke. Likevel har mange flervalgsoppgaver potensiale til å fungere som utgangspunkt for matematisk tenking og resonnering. Nedenfor følger noen eksempler på hvordan en oppgave som handler om brøkdeler kan brukes i klasserommet.

I oppgaven nederst på siden (fra Kenguru-konkurransen 2021, Benjamin), skal elevene finne hvilket av de fem svaralternativene som viser et kvadrat der $\frac{1}{8}$ av kvadratet er fargelagt. Utgangspunktet er selvsagt å velge riktig svaralternativ, men oppgaven har flere rike muligheter. Etter at elevene har argumentert for sitt valg og funnet riktig svaralternativ, kan en mer utforskende tilnærming til oppgaven starte.

Oppgaven kan utvides og brukes til å arbeide mer utforskende med brøkforståelse, og i denne sammenhengen brøk som del av en hel. Det å oppfordre elevene til å stille spørsmål, ikke bare fokusere på å finne riktig svar, gir et utgangspunkt som kan motivere elevene til å finne og begrunne sine framgangsmåter.

Elevene kan ha behov for litt drahjelp hvis du ønsker at de skal nærme seg oppgaver med en utforskende tilnærming. Lærerens holdning og måter å stille spørsmål på, er avgjørende. Det er fordi det å stille gode utforskende spørsmål ikke er noe elevene kommer på av seg sjøl. Hvis lærer forbereder noen innledende spørsmål, kan disse fungere som modeller for elevene.

10. Bildene nedenfor viser kvadrater som er delt i mindre deler. Alle linjestykkene i bildene går enten fra hjørner eller fra midtpunktet til andre linjestykker.

I hvilket av bildene har vi fargelagt $\frac{1}{8}$ av kvadratet?



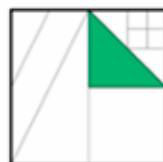
(A)



(B)



(C)



(D)



(E)

Her er tre mulige måter å utvide oppgaven på, og samtidig noen betraktninger om hvordan det kan gjøres:

Brøkverdier og representasjoner

En mulig utvidelse kan rett og slett være å bruke svaralternativene i oppgaven. Hvor stor brøkdel av kvadratet er fargelagt i hvert av de fem svaralternativene? I noen av de fargelagte delene er det kanskje lett å si noe om brøkverdien, mens andre er mer krevende. Her er det viktig at elevene blir vant til at svar eller løsningsforslag skal begrunnes med resonnement og argumentasjon. Ved å gjennomgå ulike forslag til løsninger, kan mange elever få mulighet til å ta del i hverandres begrunnelser, og ikke minst oppmuntres til å stille spørsmål til hverandre.

Den matematiske idéen i denne oppgaven kan være å se sammenhengen mellom brøktuttrykk, brøkverdier og representasjoner. Aktuelle spørsmål i en arbeidsprosess kan være:

- Kan vi sortere brøkene etter verdi bare ved å se på bildene?
- Kan vi bestemme brøkverdien til flere av svaralternativene?
- Er det noen av alternativene vi ikke kan si noe om brøkverdien til?
- Er det noen av alternativene som representerer samme brøkverdi?

Referansebrøken $\frac{1}{2}$ på ulike måter

Brøkverdien $\frac{1}{2}$ er en sentral referansebrøk som det er viktig å ha en rik og god forståelse av. Dette er en brøkverdi som mange barn kjenner godt fra det virkelige liv, og begrepene halv og halvparten er kjent for yngre barn. I denne oppgaven kan vi utnytte og utfordre denne kjennskapen og kanskje klare å knytte kunnskapen fra hverdagslivet til brøk, slik det blir brukt i skolesammenheng.

Til hjelp kan det være greit å kopiere kvadratet uten farger, slik at en også har mulighet til å prøve seg fram med ulike varianter. Alternativt

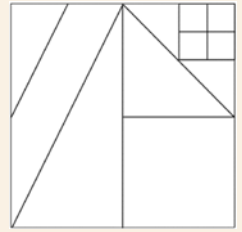
kan en tegne inn flere hjelpelinjer i kvadratene eller fjerne linjer slik at det er lettere å se brøkdeler representert som deler av hele kvadratet.

I en matematisk samtale, gjerne i hel klasse, kan elever få forklare sine valg og hvordan fargeleggingen representerer brøkverdien $\frac{1}{2}$.

Forklar hvordan du har fargelagt $\frac{1}{2}$. Argumenter for hvorfor dette er riktig.

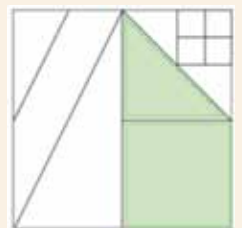
Kan du greie å fargelegge $\frac{1}{2}$ på ulike måter? Forklar for hverandre.

Verdien $\frac{1}{2}$ kan representeres på ulike måter. Figuren innbyr til flere måter å fargelegge en halv på. En halv kan se forskjellig ut. Det fargelagte feltet trenger heller ikke å henge sammen for at det skal kunne representere halvparten av hele kvadratet.



Brøker og brøktuttrykk, bruk figuren til å lage ulike brøker

Her oppfordres elevene til å finne brøkkombinasjoner. Elevene utfordres til å utforske brøker med ulike nevnerer for å finne sine brøktuttrykk. De kan også samarbeide om å finne brøktuttrykk til hverandres fargelegginger.



- Hvilke brøktuttrykk lar seg representere?
- Er det noen av brøktuttrykkene som representerer samme brøkverdi?
- Er det brøktuttrykk som er umulig å representere i dette bildet? Hvorfor?
- Kan du lage andre figurer der de samme brøktuttrykkene lar seg representere?

Det å være på jakt etter utvidelsesmuligheter i oppgaver er motiverende, og er med på å gi læreren og elevene en mer utforskende holdning til selve faget. Forskning viser at lærerens holdning til utforskende arbeid er avgjørende for elevenes holdninger til faget. Som lærer handler det om å verdsette gode spørsmål på linje med riktige svar og gode begrunnelser. Det du gjør som lærer har gjerne større påvirkningskraft på elevene enn det du sier.

Nedenfor ser du flere kenguruoppgaver som også omhandler brøk og brøkuttrykk. Oppgavene kan brukes på samme måte som eksem-

plene ovenfor viser. Svaralternativene i B14 - 2019 følger et mønster. Det kan være lett å tro at hver figur har like stort svart areal som hvitt areal, siden det er nokså lett å se i svaralternativ A. Oppgave C4 - 2020 ligner på oppgaven som er brukt som eksempel, men her spørres det etter brøkdelen som er fargelagt. I denne oppgaven er forståelsen av referansebrøken $\frac{1}{2}$ sentral. I oppgave E4 - 2020 skal elevene finne det største arealet, og den er et godt eksempel på at det kan være enklere og mer effektivt å telle opp det området som ikke er fargelagt.

14. Fem like kvadrater er delt i mindre kvadrater.

Hvilket av de fem kvadratene har størst svart areal?

(A) (B) (C) (D) (E)

Benjamin 2019, Oppgave 14.

4. Et stort kvadrat er delt i mindre kvadrater.
I ett av kvadratene er også en diagonal tegnet.

Hvor stor brøkdel av hele det store kvadratet er fargelagt?

(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

Cadet 2020, Oppgave 4.

4. Hvilket av bildene har det største fargelagte området?

(A) (B) (C) (D) (E)

Ecolier 2020, Oppgave 4.

Utforsk matematikk med dynamisk geometri

Den nye læreplanen LK20 vektlegger utforsking i større grad enn tidligere læreplaner. Utforsking inngår i kjerneelementet Utforsking og problemløsning som skal prege all undervisning i matematikk. I tillegg er det et av de mest brukte begrepene i kompetansemålene. Det står for eksempel at elevene skal:

- «utforske, teikne og beskrive geometriske figurar ...» (2. trinn)
- «utforske, beskrive og samanlikne eigenskapar ved to- og tredimensjonale figurar ved å bruke vinklar, kantar og hjørne» (4. trinn)
- «utforske og beskrive symmetri i mønster og utføre kongruensavbildingar ...» (6. trinn)
- «Utforske eigenskapane ved ulike polygonar og forklare omgrepa formlikskap og kongruens» (9. trinn)

Utforsking er også en del av *Digitale ferdigheter* hvor det står at elevene skal «bruke og velje formålstenlege digitale verktøy som hjelpemiddel for å utforske, løyse og presentere matematiske problem». Læreplanen legger derfor godt til rette for å bruke de dynamiske egenskapene til GeoGebra til utforsking. I denne artikkelen har vi valgt å fokusere på geometri.

Hva vil det si å utforske med GeoGebra?

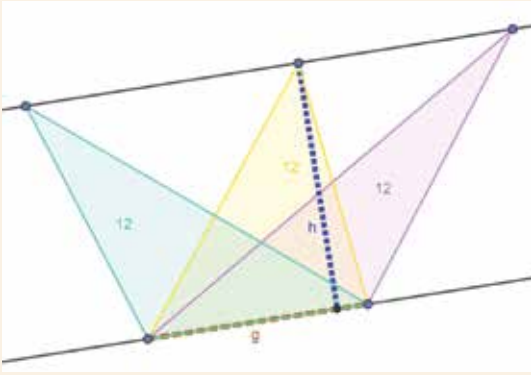
I GeoGebra kan elevene lage figurer basert på matematiske egenskaper. Hvis elevene kan endre på egenskapene, har de et godt utgangspunkt for å utforske matematikk. Elevene kan

for eksempel lage en trekant med sidene a , b og c , og bruke figuren for å utforske hva som må til for at de kan tegne en trekant. Vi kaller en slik figur dynamisk, i motsetning til en statisk trekant som for eksempel har sidene 4, 6, 9.

Første gang vil elevene bruke en del tid på å lage figuren de trenger. De må bruke flere verktøy, huske å avslutte figuren med Mangekant og aktivere Flytt før de kan bevege figuren. Gjennom bevegelse kan de utforske de matematiske sammenhengene i figuren. Det kan være fristende å lage appleter slik at elevene kan starte å utforske med en gang. Brunström (2015) har imidlertid vist at elever som begynner med blanke ark i GeoGebra, lager hypoteser raskere og er mer utholdende i utforsningsprosessen. Elevene vil også ha stor nytte av varierte erfaringer med GeoGebra i hele skoleløpet, og på eksamen.

Digitale kurs i utforsking med GeoGebra

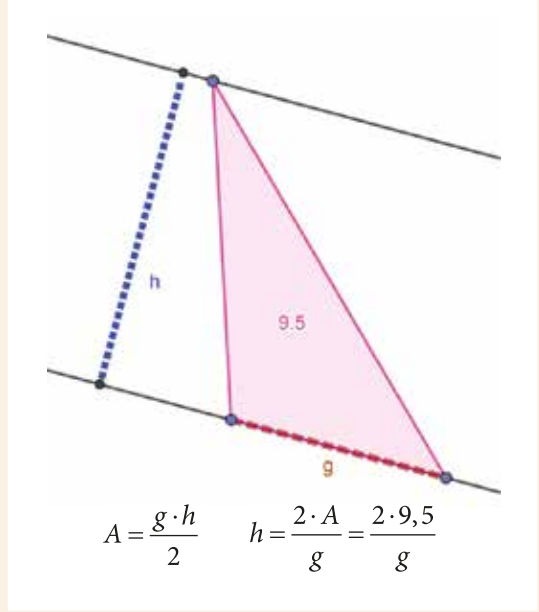
Med dette som utgangspunkt gjennomførte vi en digital GeoGebra-kursrekke for lærere våren 2021. Temaet var dynamisk geometri. Alle kursdagene startet med blanke ark. Lærerne arbeidet med utforskende aktiviteter samtidig som de lærte om verktøyene i GeoGebra. Vi passet på å bruke aktiviteter som var egnet for alle trinn. Elever på barnetrinn kan for eksempel utforske arealet til en trekant med kjent grunnlinje og det tredje hjørnet på en parallell linje (til grunnlinjen), mens elevene på ungdomstrinnet kan kombinere kunnskapen med algebra for å lage trekanter som alltid har et gitt areal.



Figur 1: Trekanter med samme areal.

Vi fikk gode tilbakemeldinger både på GeoGebra-opplæringen og valg av aktiviteter. Flere deltakere har brukt aktivitetene i klasserommet. En av lærerne hadde for eksempel aldri opplevd så stort engasjement for mangekanter som etter å ha testet en av aktivitetene sammen med elevene sine.

På grunn av gode tilbakemeldinger samt ventelister på forrige kursrekke, har vi bestemt oss for å gjennomføre samme kursrekke en gang til med oppstart i midten av september. Kursene starter kl. 14.30 og varer i ca. to timer.



Figur 2: Trekant med gitt areal.

Mer informasjon: www.matematikkcenteret.no/nyheter/vi-tilbyr-flere-digitale-kurs-i-geogebra

Referanse

Brunström, M. (2015). *Matematiska resonemang i en lärandemiljö med dynamiske matematikprogram*. Karlstad University Studies.

Tid for konferanser!

Høsten er konferansetid for Matematikksenteret.



Arrangeres på Scandic Lerkendal, Trondheim, 30. november og 1. desember 2021.

Novemberkonferansen er en populær arena for lærere i Norge, og de 500 plassene blir revet bort så og si med en gang. I år er tema "Hvilken betydning har de nye læreplanene for vår undervisningspraksis i matematikk?" I løpet av de to dagene konferansen pågår kan deltagerne velge mellom 44 verksteder med teoretisk og/eller praktisk innhold, og flere plenumsforedrag.

Plenumsforedragsholdere er:

Reidar Mosvold,

Jo Røislien

Amanda Jansen

Nils Kristian Rossing

Program: www.matematikksenteret.no/konferanser-og-nettverk/novemberkonferansen-2021

«Matematikk i barnehagen»

Arrangeres på Scandic Lerkendal, Trondheim, 2. desember 2021.

Konferansen «Matematikk i barnehagen» skal gi ansatte i barnehagen faglig påfyll, samt inspirere til glede og entusiasme for matematikk i barnehagen.

Bidragstere er forskere og ansatte i barnehager som deler nyere forskning, kunnskap, akti-

viteter, ideer og erfaringer rundt tema. Konferansen består av plenumsforedrag og verksted. Verkstedene er aktivitets- og/eller diskusjonsbaserte.

Program: www.matematikksenteret.no/konferanser-og-nettverk/matematikk-i-barnehagen-2021

Sammen om oppdraget!

Arrangeres på Clarion Hotel & Congress Oslo Airport, 16.–17. november 2021.

«Sammen om oppdraget» er en årlig nettverkssamling for fagmiljøer som arbeider med matematikkvansker. Målet er å utnytte og utvikle kompetansen som finnes i de ulike miljøene. Tema i 2021 er «Kompetanseløft!»

Nettverkssamlingen består av plenumsfordrag, parallelle sesjoner, verksted og gruppearbeid som løfter fram ulike tema om det tverr-

faglige samarbeidet mellom aktørene i arbeidet med Kompetanseløftet.

Målgruppe for nettverkssamlingen er: PPT, utviklingsansvarlig kommune/fylkeskommune, Statped, universiteter og høyskoler.

Program: www.matematikkcenteret.no/konferanser-og-nettverk/nettverkssamling-om-matematikkvansker-16-17november



Har du elever som vil delta i Abelkonkurransen? Abelkonkurransen er en konkurranse i matematisk problemløsning for elever i videregående skole. Første runde er 11. november 2021.

Abelkonkurransen har blitt arrangert i Norge siden 1993, og flere tusen elever i videregående har vært med. Konkurransen består av problemløsningsoppgaver på et variert nivå.

Abelkonkurransen består av to innledende runder som gjennomføres digitalt ute på skolene, og en finale som holdes ved NTNU i Trondheim. Elever som gjør det godt i Abelkonkurransen kan bli invitert til én eller flere internasjonale konkurranser i matematikk.

Slik foregår Abelkonkurransen

Den første og andre runden i Abelkonkurransen foregår digitalt på skolene. I den første runden får deltagerne 20 oppgaver, hver med fem svaralternativer. Oppgavene skal besvares i løpet av 100 minutter. De 10 prosentene som gjør det best, går videre til andre runde. Her får elevene 10 oppgaver, som også skal besvares i løpet av 100 minutter.

Resultatene fra de innledende rundene summeres, og de beste 20, og ofte noen til, blir invitert til finalen som foregår ved NTNU i Trondheim. Her får deltagerne fire timer på å løse fire oppgaver.

Mer informasjon om registrering av skolekontakt og Abelkonkurransen: www.abelkonkurransen.no