Ole Enge, Anita Valenta

Varierte representasjoner

Bla i en matematikkbok eller en lærebok for grunnskole, videregående skole eller universitet. Uansett hvilken bok du tar, er det nokså sikkert at boka inneholder mange matematiske symboler og mange ulike typer tegninger (f.eks. tallinje, tallfigurer, geometriske figurer, projeksjoner), tabeller, diagrammer, grafer og regnefortellinger.

Dette mangfoldet i matematisk språk og uttrykk refereres det også til mange steder i LK06. Under beskrivelsen av grunnleggende ferdigheter i matematikk står det at det å uttrykke seg skriftlig i matematikk innebærer at en lager tegninger, figurer, tabeller og diagram, og at en bruker det matematiske symbolspråket.

De forskjellige uttrykksformene i matematikk, som symboler, tegninger, regnefortellinger, konkreter, diagrammer og tabeller, kalles ofte representasjoner. Det å forstå og bruke ulike representasjoner er en viktig del av matematisk kompetanse (se blant annet LK06, Niss og Højgaard Jensen, 2002). Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) påpekte at et viktig tegn på begrepsforståelse i matematikk er at en kan representere et matematisk objekt (for eksempel multiplikasjon eller brøk) på flere ulike måter.

Ole Enge
Høgskolen i Sør-Trøndelag
ole.enge@gmail.com

Anita Valenta
Høgskolen i Sør-Trøndelag
anita.valenta@hist.no

Hva vil det si å representere et matematisk objekt?

La oss se på multiplikasjon med positive hele tall først, for eksempel $3 \cdot 17$. Regnestykket er her gitt i en symbolsk representasjon, og utregningen kan være rent symbolsk der man kan utnytte den distributive egenskapen til multiplikasjon:

$$3 \cdot 17 = 3 \cdot (10 + 7) = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 7 = 30 + 21 = 51.$$

Men regnestykket kan også representeres gjennom en regnefortelling: «Det var tre barn som hver fikk 17 kroner. Hvor mye fikk de til sammen?» Man kan tenke seg at først fikk hvert av barna ti kroner slik at det ble 30 kroner til sammen. Så fikk de 7 kroner hver, og totalt ble 21 kroner fordelt i den andre omgangen. Altså var det 30 pluss 21, som gir at de fikk 51 kroner til sammen.

En tredje måte å representere denne oppgaven på kan være å bruke konkreter, for eksempel unifixkuber (figur 1). Man kan ordne tre bunker i ulike farger med 17 kuber i hver bunke og telle hvor mange det er til sammen (ev. ved å lage tierbunker av kubene først).

En fjerde måte å representere regnestykket på

Figur 1

kan være å bruke en åpen tallinje som i figur 2. Her kan man for eksempel hoppe først 17, så 3 til 20, så en tier til 30, og så hoppe 4 til 34. Da har man tatt 17 to ganger. Så kan man ta 6 til 40, en tier til 50 og det er 1 igjen. Til sammen blir det 51.

Hvorfor ulike representasjoner?

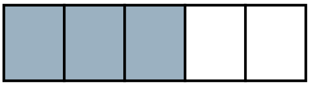
Som vi kan se i eksemplet ovenfor, kan bruk av ulike representasjoner gi elevene mulighet til ulike løsningsmetoder. De kan for eksempel bruke den distributive egenskapen i symbolsk representasjon eller stegtelling på en åpen tallinje der de bruker tiere i løsningsstrategien. Et viktig aspekt for matematikklæring er å undersøke likheter og forskjeller mellom metodene, hva som er fordeler og ulemper, og hvordan representasjonene henger sammen. I den symbolske representasjonen brukes det en distributiv egenskap, og den samme egenskapen brukes faktisk også i regnefortellingen. I regnefortellingen kan man se og forstå hvorfor multiplikasjon har den distributive egenskapen, at man kan dele 17 opp i 10 og 7, og deretter multiplisere begge leddene med 3. Hvis vi tenker på $3 \cdot 17$ som en regnefortelling om tre barn som får 17 kroner hver, ser vi at de først kan få 10 og så 7 kroner. Begge gangene må vi multiplisere med 3 for å finne ut hvor mye de fikk til sammen. Om de får 17 kroner hver med én gang, eller om de får 10 først og så 7, endrer ikke totalsummen. Videre kan en også se at det ikke er noe spesielt med 3 og 17, slik at dette vil være en mulig strategi i multiplikasjon generelt (se også Enge og Valenta, 2011).

Alle matematiske begreper og objekter er abstrakte (selv om noen kanskje kan oppleves som mer reelle enn andre). Multiplikasjon er ikke bare symbolet «·» og de symbolske utregningene, det er heller ikke bare en regnefortelling om like store grupper, og det er ikke bare en tegning av like store hopp på tallinjen. Multiplikasjon er et abstrakt matematisk begrep som blir mer og mer abstrakt gjennom skoleårene. Duval (2006) påpeker at abstrakte objekter kun er tilgjengelige *via* sine representasjoner. Ingen av representasjonene *er* objektet, men de gir oss alle noe innsikt i objektet. Ulike representasjoner gir oss gjerne mulighet til å forstå ulike aspekter ved objektet, og de har også forskjellige potensialer for både matematisk arbeid og matematikklæring. Et typisk eksempel er funksjonsbegrepet, der en kan representere en funksjon ved en graf, ved et algebraisk uttrykk eller som en tabell. De tre representasjonene åpner for ulike aspekter ved forståelsen av en funksjon, om hvordan den ene størrelse varierer i forhold til den andre, men ingen av representasjonene er selve funksjonen.

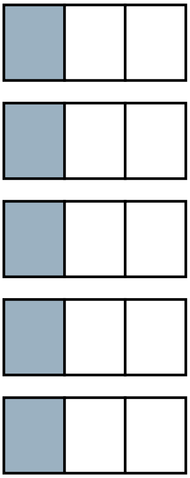
Et annet eksempel er begrepet brøk. Brøk er rasjonale tall definert som a/b hvor a og b er hele tall, der b er ulik 0. Dette er en symbolsk representasjon som er nyttig å bruke for mange aspekter i matematikk. Samtidig er det mange ulike bruksområder for brøk i hverdagssituasjoner og andre representasjoner av brøk som kan være nyttige både for utvikling av brøkfor-

Figur 2

ståelse og for arbeidet med brøk. Det fins ikke én representasjon som fanger alle aspekter ved brøk. For eksempel vil 3/5 kunne representeres som del av et hele:



Men det vil ikke gi mening å representere 5/3 som del av en hel. Da gir det mer mening å tenke på 5/3 som en kvotient, det vil si som resultatet av en divisjon slik definisjonen tilsier, 5 : 3 i dette tilfelle. Skal man bruke en regnefortelling her, kan den ikke være om del–hel, men heller om tre barn som skal dele fem sjokolader likt. Da får hvert barn 5/3 sjokolade, og hele delingen kan representeres i en tegning:



Symbolsk representasjon som i vårt multiplikasjonseksempel åpner for utvikling av effektive regnestrategier gjennom utnyttelsen av den distributive egenskapen, mens regnefortellinger åpner for utvikling av forståelse for den distributive egenskapen i multiplikasjon. Representasjonen med konkreter gir et visuelt bilde der man kan bruke omgruppering og telling, illustrere den distributive egenskapen samt også styrke forståelsen av «unitizing» (det å se en gruppe objekter som ett objekt, for eksempel 10 kuber samlet som én tiergruppe). Tallinjen bærer med seg et annet potensiale igjen – utvidelsen av tall og multiplikasjon til andre typer tall, for eksempel desimaltall. På den tomme tallinjen er det heller ikke noe spesielt med tiere (som i unifixkubene eller tierstaver). Det åpner for betraktning av andre relasjoner mellom tall, for eksempel relasjonen mellom tregangen og seksgangen og for tall mellom 5 og 6. Strategien som er blitt brukt på tallinjen, viser også at gjentatt addisjon er en måte å tenke multiplikasjon med positive hele tall på, og at man ikke alltid trenger å dele opp i tiere og enere.

Det er i samspillet mellom ulike representasjonene og gjennom utnyttelsen av det potensialet de har, at vi får mulighet til å lære matematikk. Flere studier (f.eks. Brizuela og Earnest, 2008) peker på at evnen til å bruke ulike typer representasjoner og evnen til å veksle mellom dem etter behov har stor betydning for utvikling av både begrepsforståelse i matematikk og problemløsningskompetanse. Det å kun bruke én representasjon for et objekt kan lede elevene til å tro at representasjonen *er* objektet. Ensidig vekt på øving av symbolsk manipulasjon i en multiplikasjonsalgoritme kan lede elevene til å forbinde multiplikasjon kun med denne manipulasjonen. Slik ensidighet kan føre til at elevene ikke gjenkjenner multiplikative situasjoner fra virkeligheten. Hvis de ikke husker algoritmen, har de ikke andre representasjoner å ta i bruk som kan hjelpe dem å regne.

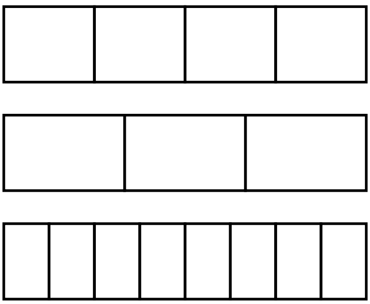
Å lære å bruke flere representasjoner

Det å arbeide med flere representasjoner av et matematisk objekt er en viktig del av det å utvikle begrepsforståelse. Ulike representasjoner brukes veldig ofte i matematikkundervisning, men konkreter, tegninger og regnefortellinger kan fort bli noe en bare gjør uten å tenke over det og uten å oppleve at man forstår noe bedre. Et vanlig eksempel er regnefortellinger som avsluttes med et spørsmål, og som bare brukes til å øve på regning og ikke til å forstå regneoperasjonene bedre. Ofte vil elevene lete etter tall i slike regnefortellinger. De ser etter signalord som «til sammen» eller «færre» for å finne ut hvilken operasjon som skal gjennomføres. Et annet vanlig eksempel er at elevene bruker tallinjen bare fordi læreren har sagt at den skal brukes: Først regner de ut et regnestykke på en annen måte, og så tegner de det inn på tallinjen. Bruk av tallinjen er dermed redusert til et meningsløst ritual, den brukes ikke som en annen representasjon for å styrke begrepsforståelsen.

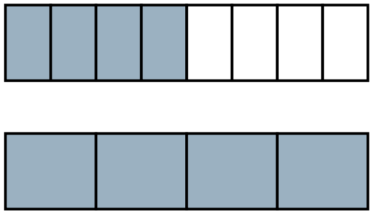
Her skal vi diskutere en del momenter en som lærer bør være bevisst på i arbeid med ulike representasjoner. Vi ser på brøkundervisning som et eksempel.

Lamon (2006) forsket på undervisning av brøk og rasjonale tall, og hun påpeker at det er veldig viktig at elevene møter ulike representasjoner av disse begrepene. Den abstrakte definisjonen og den symbolske notasjonen for brøk må knyttes til flere ulike representasjoner. Ifølge Lamon kan en med fordel vente med å introdusere algoritmer for brøkregning og heller bruke tid på å utvikle forståelse for brøkbegrepet og proporsjonal resonnering.

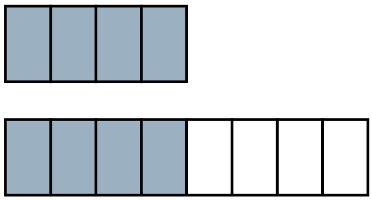
I brøkundervisningen er det ofte vanlig å tilby ferdige representasjoner til elevene, slik som ferdig inndelte brøkbrikker, brøksirkler eller rektangler:



Slike representasjoner kan være gode å ha for å belyse noen deler av brøkbegrepet, men noen ganger kan de føre til at viktige deler av begrepet skjules, og at viktige spørsmål ikke stilles. Skal man bruke slike brøkrektangler til å sammenligne brøkene 4/8 og 4/4, så er *enheten* (det som er en hel) implisitt gitt (se Ball, 1993). Enheten defineres ikke eksplisitt ved å si «dette er en hel» først, men er indirekte definert gjennom spørsmålet og konkretene. Det betyr at elevene ikke trenger å definere en felles enhet for å kunne svare. Brøkrektanglene tvinger så å si elevene til å svare korrekt uten at de nødvendigvis utvikler en dypere forståelse for brøk eller for betydningen av enheten. Sammenligning av brøk med ulike enheter gir ingen mening, men dette fremmes ikke av den gitte representasjonen. I figurene under er det «tydelig» at 4/4 er større enn 4/8:



Ball (1993) gjorde en studie på elever som ikke hadde tilgang til slikt brøkmateriale, og som selv måtte lage representasjoner. En niårig gutt laget denne representasjonen:



Eleven bruker to ulike enheter og beholder delene (1/4 og1/8) som like. Læreren brukte hans forslag til en diskusjon i klassen om hvorvidt størrelsen på rektanglene måtte være lik for at en skulle kunne sammenligne brøker. Elevene fikk dermed mulighet til å diskutere dette viktige aspektet.

Vi har selv opplevd en lignende situasjon i en femteklasse der betydningen av enheten ble aktuell. Elevene arbeider med addisjon av brøk, og en elev skriver i boka $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$. Læreren ser dette, og følgende samtale utspiller seg:

Lærer: Hvis du prøver å forklare meg hva en fjerdedel er?

Elev: En fjerdedel er … det er fire biter og så er én fargelagt (tegner en sirkel og skraverer).

Lærer: Mmm. Hvis du nå skal forklare meg hva en fjerdedel pluss en fjerdedel er?

Elev: Det er … du får åttendedeler.

Lærer: Mmm. Kan du vise meg med en tegning?

Elev: Ja. Da skal vi plusse der (tegner en sirkel til, skraverer en fjerdedel og skriver plusstegnet mellom sirklene). Er lik. Og så kan du ta en firkant, for eksempel. En, to, tre, fire, fem, seks, sju. Åtte! (Deler firkanten i åtte deler.) Og så fargelegger du to av dem … slik de der er fargelagt (peker på sirklene).

Vi ser at det også her savnes en diskusjon og bevissthet om hva som er enheten. I det eleven går fra en symbolsk representasjon til en tegning, blir det uklart om enheten er representert ved *én* sirkel eller ved *to* sirkler. Slike overganger mellom representasjoner er generelt et kritisk moment i matematikklæring og er noe en lærer må være oppmerksom på. For mange elever kan det være vanskelig å se sammenhengen mellom ulike representasjoner av det samme matematiske objektet. Resultatet kan være at de betrakter representasjonene som ulike objekter.

Det er ikke slik at representasjonene eller konkretene kommer med noe magisk matematisk innhold som lett «sees» av elevene, og der alt bare faller på plass. Det å velge passende representasjoner, enten det er konkreter, regnefortellinger eller tegninger, er krevende. Men det som er enda viktigere, er å være oppmerksom på hvordan elevene bruker dem, og hvordan de ulike representasjonene brukes til å drøfte ulike aspekter ved begrepet, sammenligne ulike representasjoner og drøfte fordeler og ulemper i ulike matematiske problemer. Hvis man ikke diskuterer tolkninger og den matematiske bruken av representasjoner, kan det føre til at viktige matematiske aspekter bli gjemt, som i de ferdig inndelte brøkstavene, eller at deres potensiale ikke blir brukt.

I tillegg til slike diskusjoner kan man også gjerne veksle mellom start- og målrepresentasjon. Duval (2006) påpekte at det er veldig vanlig å starte med funksjonsuttrykk (symbolsk representasjon) og be elevene skissere grafen, men det er også mye læring i det å starte med en graf og be elevene lage funksjonsuttrykk. Tilsvarende kan det være mye læring i å be elevene lage regnefortellinger til en gitt symbolsk utregning, og ikke alltid gå i motsatt retning. Videre viser eksemplet med brøk at variasjon i bruk av ulike typer representasjoner er viktig for å få frem ulike aspekter ved et begrep. Brøk er ikke bare pizza som deles likt mellom noen personer.

Variert undervisning er et viktig element for elevenes læring i alle fag. Variasjon i bruk av representasjoner og bevisst bruk av disse til å styrke begrepsforståelsen kan betraktes som utdypning av hva variert matematikkundervisning kan være.

Referanser

Ball, D. L. (1993). Halves, pieces, and twoths: Constructing and using representational contexts in teaching fractions. I T. Carpenter, E. Fennema, R. Putnam, & R. A. Hattrup (red.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (s. 189–219). Hillsdale, NJ: Prentice Hall.

Brizuela, B. M. & Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understandings: The case of the “best deal” problem. I J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (red.), *Algebra in early grades* (s. 273–301). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1/2), 103–131.

(fortsettes side 46)

(fortsatt fra side 12)

Enge, O. & Valenta, A. (2011). Argumentasjon og regnestrategier. *Tangenten, 22*(4), 27–32.

Lamon, S. J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding*. New York: Routledge 3. utg.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up*. Washington, DC: National Academy Press.

Niss, M. & Højgaard Jensen, T. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserier nr. 18.* København: Undervisningsministeriet.