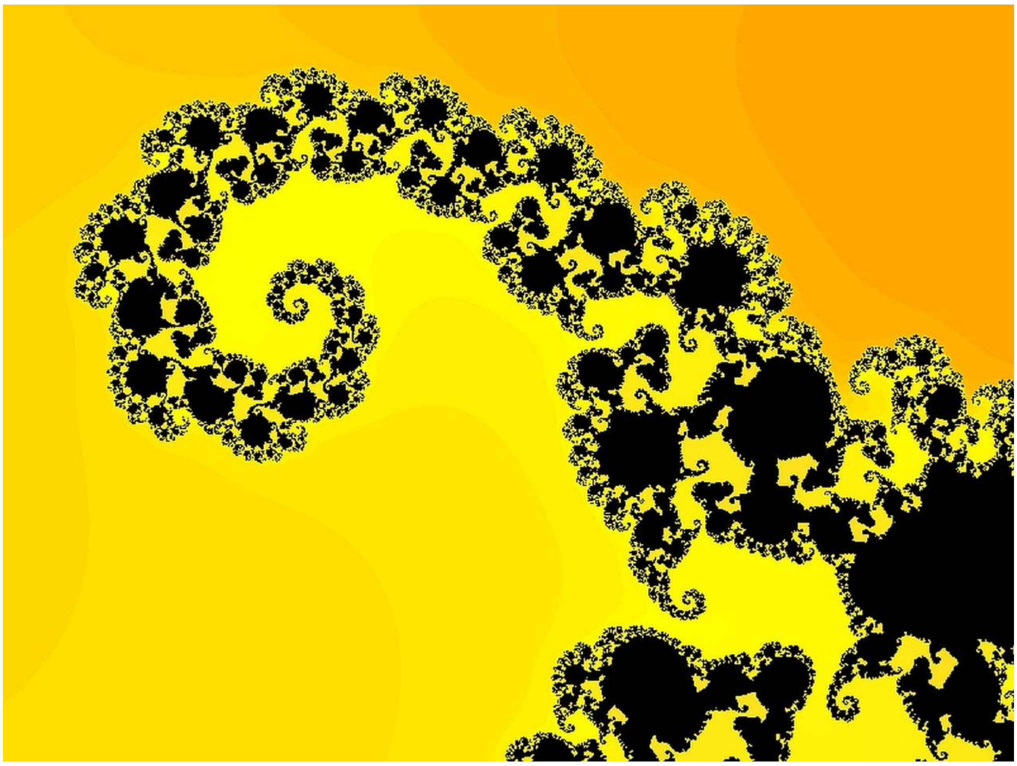
Mønster, sammenhenger og argumentasjon

Forfatter:

Svein H. Torkildsen

Publisert: september 2020

Endret: April 2022



Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen
Realfagbygget, NTNU, NO-7491 Trondheim

Innhold

Hva er matematikk? ... 1
Betydningen av mønster i matematikkundervisningen ... 2
Mønster og deres betydning i undervisningen ... 2
To typer mønster ... 4
Mønster som gjentas ... 4
Tallmønster ... 4
Å gripe det essensielle ... 4
Argumentasjon ... 5
Mønster, sammenhenger og argumentasjon i MAM-aktiviteter ... 5
Bilder ... 5
Kvikkbilder ... 5
Figurtall ... 6
Telle i kor ... 7
Oppgavestrenger ... 9
Mønster i problemløsing ... 9
Oppsummering ... 11
Kilder ... 11

Hva er matematikk?

> Den engelske matematikeren G. H. Hardy beskrev i 1940 matematikk på denne måten: The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's, must be beautiful, the ideas, like the colours or the words, must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test; there is no permanent place in the world for ugly mathematics.

Sitatet er hentet fra boka *Mathematics: The Science of Patterns* (Devlin, 1994). I boka beskriver Keith Devlin hvordan synet på matematikk har endret seg i takt med utviklingen av fagfeltet. Fram til ca år 500 f. Kr. var babylonerne og egypterne dominerende. De studerte primært aritmetikk. Matematikk var da studiet av *tall*. Grekerne overtok hegemoniet og matematikken ble med det utvidet til å dreie seg om studiet av tall og *form*. Etter hvert ble denne måten å definere matematikk på omfattende og uoversiktlig. I stedet tok man utgangspunkt i hva matematikere gjør. På slutten av det 20. århundre kom da forslaget om å definere matematikk som *the science of patterns*. En definisjon de fleste matematikere nå er enige om. Men hva slags mønster er det snakk om? Det handler om abstrakte mønster knyttet til tall, former, bevegelse osv. Mønstrene kan for eksempel være enten reelle eller tenkte, visuelle eller mentale, statiske eller dynamiske, kvalitative eller kvantitative. Drevlin gir eksempler på mønster innen ulike områder av matematikken: telling, resonnering og kommunikasjon, bevegelse og endring, former, symmetri og regelmessighet og posisjonering.

Betydningen av mønster i matematikkundervisningen

Boaler (2017) nevner mønster sammen med tallforståelse, algebraisk tenking og generalisering som fire store ideer matematikkundervisningen bør dreie seg om. Disse fire store ideene finner vi igjen i norske læreplaner, og utforsking av mønster er et godt utgangspunkt for å la elevene få tilgang til de tre andre store ideene. Vi kan derfor trygt si at arbeid med mønster bør ha en sentral plass i matematikkundervisningen.

Denne artikkelen fokuserer på tallforståelse[1]. Eksemplene i artikkelen er derfor utelukkende knyttet til mønster i tall. Elevenes tallforståelse kommer til uttrykk gjennom både symbolske og visuelle representasjoner av tall og regneoperasjoner. Mulligan og Mitchelmore (2009) finner en nær sammenheng mellom tallforståelse og elevenes kompetanse i å kunne oversette mellom visuelle og symbolske representasjoner av tall og regneoperasjoner. Forskningen deres viser at elever som helt fra første trinn har lært å se etter matematiske likheter og forskjeller innen og mellom mønstre har større sannsynlighet for å utvikle forståelse for strukturene i mønstrene. De har også en tendens til å se etter likheter og forskjeller i nye mønster. De har da det som skal til for å bli «mønstersniffere» som er en sentral komponent i arbeidet med algebra (Nosrati og Wæge, 2015).

Mønster og deres betydning i undervisningen

LK20 fremhever det å lete etter mønster under kjerneelementet *Utforsking og problemløsing*:

> Utforsking i matematikk handlar om at elevane leiter etter mønster, finn samanhengar og diskuterer seg fram til ei felles forståing (UDIR, 2020).

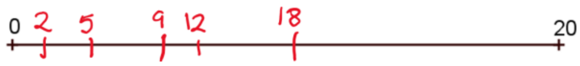
Naturlige tall oppstår ved å gjenkjenne mønstre i omgivelsene: Mønster av «enere», «toere» osv. Om barn blir presentert for flere gjenstander som på *figur 1* kan man spørre dem om hva som er likt. Spørsmålet kunne like gjerne vært: Ser du et mønster her? (Drevlin, 1994). Mønsteret her er at gruppene består av samme antall gjenstander, som selvsagt ikke nødvendigvis er identiske. Mønster i konkrete gjenstander fører til et nytt abstrakt matematisk mønster: de naturlige tallene. De er kjennetegnet ved at et tall er én mer enn det forrige. I de naturlige tallene finner vi andre mønstre, for eksempel partall, oddetall og kvadrattall. Vi finner også mønster i multiplikasjonstabellene.

Figur 1 Grupper med tre objekter

Den sterke koblingen mellom visuelle og symbolske representasjoner som den første tallforståelsen vanligvis bygger på, kan gå tapt når tallene blir større og regneoperasjoner blir bragt inn. Elever som kan telle og skrive tall, vil også kunne skrive tallene i riktig rekkefølge. En enkel test kan indikere om elevene også reflekterer over størrelsesforholdet mellom dem. Eksempel: Elever som blir bedt om å plassere tallene 2, 5, 9, 12 og 18 på ei tallinje der 0 og 20 er markert, kan plassere dem som vist på *figur 2a* og *figur 2b*.

[1] Matematikksenterets kompetanseutviklingsprogram *Mestre Ambisiøs Matematikkundervisning* (MAM) bruker aktiviteter knyttet til begrepsforståelse av tall og algebra. De fleste eksemplene i artikkelen er hentet fra utprøving av aktivitetene i MAM-programmet.

Figur 2a



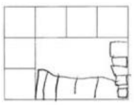
Figur 2b

Disse to måtene å plassere tallene på viser forståelse for tallenes rangordning. Men plasseringen av tallene i *figur 2a* tyder på en manglende forståelse for størrelsesforholdet mellom tallene. Plasseringen av tallene i *figur 2b* tyder på en begynnende forståelse for størrelsesforhold gjennom plasseringen av tallene 2, 5, og 9. 12 bør plasseres litt til høyre for midtpunktet og 18 mye nærmere 20 før vi kan si at plasseringen indikerer forståelse av størrelsesforhold.

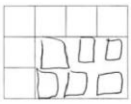
Mulligan og Mitchelmore (2009) finner en klar sammenheng mellom elevenes prestasjoner på tradisjonelle prøver og deres forståelse av visuelle representasjoner. Forståelse av visuelle representasjoner, mønster og struktur har positiv korrelasjon med utvikling av matematisk begrepsforståelse. Bevissthet om matematiske mønstre og strukturer kan bli målt og gi en god indikasjon på elevenes tallforståelse. De to forskerne har analysert elevbesvarelser på oppgaver av typen:

- Fullfør et 3 x 4 rektangulært rutenett. Se *figur 3*.
- Marker klokken 8 på ei tom urskive. Se *figur 4*.

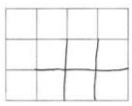
Rutenettet brukes ofte som en visuell representasjon av multiplikasjon. Typisk respons til elevene på disse to oppgavene var slik:



Figur 3a



Figur 3b



Figur 3c

Figur 4a

Figur 4b

Figur 4c

Forskerne indentifiserte fire stadier i utviklingen av strukturforståelse.

1. Før-strukturelt stadium: Representasjonene mangler spor av struktur knyttet til tall og form.
2. Fremvoksende stadium: Representasjonen viser noen relevante aspekter, men den tallmessige eller romlige strukturen er ikke representert. Se *figur 3a* og *figur 4a*.
3. Delvis strukturert stadium: Representasjonen viser de mest relevante aspektene, men den er ikke komplett. Se *figur 3b* og *figur 4b*.
4. Stadium med utviklet strukturforståelse: Representasjonen knytter sammen tall og det visuelle bildet på en korrekt måte. Se *figur 3c* og *figur 4c*.

Videre er det interessant å merke seg at elevene i undersøkelsen var så konsistente i sin respons at det var mulig å plassere dem på et av de fire stadiene. Det var også signifikant sammenheng mellom elevenes plassering på stadium og deres resultater på tester og lærernes vurdering av kunnskapsnivå.

Denne studien viser at det er viktig å legge vekt på mønster, struktur og sammenhenger mellom representasjoner i matematikkundervisningen. Elever som kan tolke, bruke og oversette mellom ulike representasjoner har bedre muligheter for å utvikle begrepsforståelse. Det er verd å merke seg at matematikere som arbeider med avansert matematikk også bygger sitt arbeid på slike sammenhenger.

To typer mønster

Studie av mønster i tall og regneoperasjoner leder oss til to typer mønster: mønster som gjentas og tallmønster. Både Mulligan og Mitchelmore (2009) og Liljedahl (2004) argumenterer for at man bør legge vekt på å utforske begge typer mønster matematikkundervisningen. Men Liljedahl peker også på at en ubevisst begrepsbruk kan gjøre skillet utydelig og føre til mangelfullt utviklet begrepsforståelse av tall og regneoperasjoner.

Mønster som gjentas

Mønster som gjentas består av elementer som blir repetert i en bestemt rekkefølge. I naturen finner vi en rekke mønster som gjentas. Jorda roterer rundt sin egen akse, og en runde definerer et døgn. Sju døgn utgjør ei uke. Hvert døgn i syklusen får sitt eget navn: mandag, tirsdag, onsdag, torsdag, fredag, lørdag og søndag. Mønsteret gjentas i det uendelige, for eksempel A, B, A, B, A, B eller 1, 2, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1. Slike mønster vil bestå av en enhet med et bestemt antall elementer som gjentas, henholdsvis to elementer (A, B) og fem elementer (1, 2, 3, 2, 1) i de to eksemplene. Et kjennetegn på denne type mønster er at de kan omdannes til et annet gjentagende mønster uten å tape viktige egenskaper (Liljedahl, 2004). A, B, A, B kan for eksempel omdannes til □, ◊, □, ◊.

Tallmønster

Tallmønstre definerer Liljedahl (2004) som mønster der tallverdien til elementet er viktig. Eksempler på tallmønster kan i tillegg til de naturlige tallene være:

3, 5, 7, 9, …   2, 4, 6, 8, ….   1, 4, 9, 16, …   1, 3, 6, 10, …   1, 8, 27, 64, …

I alle disse mønstrene er tallverdien til hvert element avhengig av tallverdien til det foregående elementet eller av tallverdien til posisjonen i tallfølgen. Slike mønster oppdager man ikke uten å sammenlikne tallverdier og lete etter underliggende sammenhenger. Tallmønster spiller en sentral rolle i arbeidet med rekker og funksjoner. Elever som tidlig lærer seg å undersøke sammenhenger mellom elementene i en serie med tall, vil ha et godt grunnlag for å identifisere både rekker og ulike typer funksjoner.

Å gripe det essensielle

Liljedahl (2004) er opptatt av å være bevisst på skillet mellom disse to mønster-typene. Selv om begge har sin plass i matematikkundervisningen, må læreren undersøke om elevene oppfatter for eksempel tallsystemet vårt som et gjentagende mønster eller et tallmønster. Elever som ikke har fått tak på den underliggende strukturen i ti-tall-systemet, kan betrakte tallsystemet som et gjentagende mønster med ti siffer som blir repetert igjen og igjen i det uendelige. En overflatisk betraktning setter oss i stand til å skrive påfølgende naturlige tall så lenge vi orker å holde på: Vi starter med tallene 0-9. Deretter plasserer vi 1 foran 0 og gjentar mens vi holder fast ved 1, se *tabell 1*. Sifrene kan bli byttet ut med andre tegn, for eksempel bokstavene A-J og lage samme gjentagende mønster.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	…							

Tabell 1 De naturlige tallene og 0

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
BA	BB	BC	BD	BE	BF	BG	BH	BI	BJ
CA	CB	CC	CD	CE	CF	CG	CH	CI	CJ
DA	DB	…							

Tabell 2 Samme mønster med bokstavene A-J

Å kunne lage denne uendelige tallrekken er ingen garanti for at elevene forstår posisjonssystemet som ligger til grunn for at mønsteret oppstår. Det gir heller ingen garanti for at elevene kjenner egenskapene til tallene, for eksempel relativt størrelsesforhold mellom tall og ulike måter å representere tall på. Det er likevel verdifullt om elevene oppdager slike mønstre. Læreren kan følge opp elevenes innspill med å spørre om hvorfor mønsteret oppstår. Da må elevene se nøye på strukturen i mønsteret og argumentere ut fra det de observerer.

Argumentasjon

Flere av aktivitetene i MAM-programmet gir rike muligheter for å se etter og samtale om mønster. Formålet med samtalene er både å øke elevenes bevissthet om hva et mønster er i denne sammenhengen, og å utfordre dem på å begrunne hvorfor mønstrene oppstår. Man kan utforme argumentasjon for sammenhenger på mange måter. Enge og Valenta (2011) peker på forskjellen mellom *hva* og *hvorfor*. En beskrivelse av hva man gjør eller ser er ikke en argumentasjon. Argumentasjon blir det først når man begrunner hvorfor det man gjør er riktig eller hvorfor mønsteret man ser oppstår. Vi må altså videre fra overflatiske betraktninger som elever lett kan ty til: «det er bare slik det er». Carpenter, Franke og Levi (2003) peker på tre nivåer i argumentasjon:

1. Stole på autoriteter, for eksempel lærebøker, lærere eller foreldre
2. Utprøving på flere eksempler som gir samme resultat
3. Generaliserbare argumenter

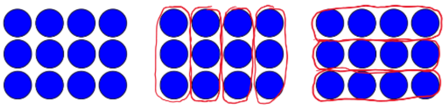
Det er bare bevis på nivå 3 som er matematisk gyldige, men utprøving på mange eksempler kan skape et ønske hos elevene om å finne svar på om sammenhengen vil gjelde for alle tall. Aktivitetene i MAM-programmet gir muligheter til å arbeide med representasjonsbevis, uttrykke sammenhenger generelt og til å utvikle forståelse for algebraisk notasjon. Aktivitetene bærer altså i seg muligheten til å arbeide med sammenhengen mellom de fire store ideene Boaler (2017) fremhever som sentrale for elevenes begrepsutvikling.

Mønster, sammenhenger og argumentasjon i MAM-aktiviteter

Bilder

Kvikkbilder

Som et eksempel på mønster og struktur i den tidlige matematikkundervisningen viser både Mulligan og Mitchelmore (2009) og Drevlin (1994) til den kommutative egenskapen ved multiplikasjon. Det er en sammenheng vi kan løfte fram gjennom et kvikkbilde (Bondø, 2017):



Figur 5

Når elever beskriver hvordan de ser bildet til venstre i *figur 5*, beskriver noen at de ser «fire kolonner med tre prikker i hver kolonne», mens andre ser «tre rader med fire prikker i hver rad». Noen kan også se «to seksere», «en nier og tre» eller andre mønster. Om læreren avslutter aktiviteten her og konkluderer med at vi kan se det samme mønsteret på mange måter, utnytter vi ikke mulighetene aktiviteten gir for å arbeide med alle de fire store ideene Boaler (2017) argumenterer for at matematikkundervisningen bør dreie seg om: tallforståelse, mønster, algebraisk tenking og generalisering. I artikkelen vil jeg vise hvordan lærere kan bruke både denne og andre aktiviteter fra MAM-programmet til å arbeide med disse fire store ideene.

Læreren velger å bygge videre på elevutsagnene «fire kolonner med tre prikker i hver kolonne» og «tre rader med fire i hver rad» og inviterer elevene til å uttrykke dem symbolsk: $4 \cdot 3$ og $3 \cdot 4$. Elevene ser det samme bildet med et bestemt antall prikker, og kan da resonnere seg fram til at $4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$.

Når bildet blir utvidet med flere rader og kolonner får vi nye mønster med samme struktur: $6 \cdot 3 = 3 \cdot 6$ og $6 \cdot 4 = 4 \cdot 6$, se *figur* 6.

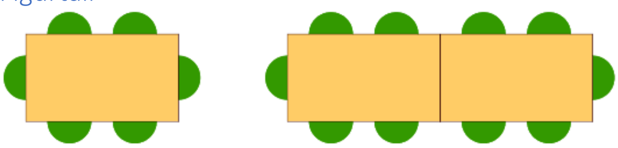
Figur 6

Dette handler om argumentasjon av typen «utprøving på flere eksempler». Læreren kan utfordre elevene ved å spørre: Kan vi bytte om på faktorene uansett hvilke tall vi multipliserer? Det igjen kan reise spørsmål om hva vi gjør når vi lager regnestykkene: vi teller «bortover» og vi teller «oppover» / «nedover».

Uansett hvor stort bildet blir kan vi bruke samme strategi for å finne antall prikker. Elevene kan for eksempel foreslå denne fremgangsmåten[2]: «antall prikker bortover gange antall prikker oppover» eller «antall prikker oppover gange antall prikker bortover». Disse to måtene å se det samme antall prikker på kan vi uttrykke retorisk som «antall bortover · antall oppover = antall oppover · antall bortover». Denne argumentasjonen tar utgangspunkt i en visuell representasjon av multiplikasjonen. Vi kan forestille oss at representasjonen blir utvidet i det uendelige. De to måtene å finne antall prikker på vil fortsatt være gyldig, og vi kan plassere argumentasjonen i kategorien representasjonsbevis. Erstatter vi den retoriske benevningen av variablene med bokstaver, får vi en generell symbolsk beskrivelse av den kommutative egenskapen ved multiplikasjon: $a \cdot b = b \cdot a$.

Eksemplet viser at vi med utgangspunkt i dette enkle mønsteret kan engasjere elevene i alle de fire store ideene Boaler anbefaler. Begrepsmessig forståelse av den kommutative lov for multiplikasjon etableres gjennom et bilde med prikker som er organisert i et bestemt mønster. Den algebraiske tenkingen viser seg ved å sette fokus på system og sammenheng, likhet og forskjell mellom bilder i ulik størrelse. Generaliseringen består i å sammenlikne to strategier for å finne antall prikker uansett størrelse på figuren og uttrykke den både retorisk og med symboler.

Figurtall



Figur 7

Figurtall gir også rike muligheter til å arbeide med samtaler knyttet til mønster, sammenhenger og generalisering. Tegningene i *figur 7* representerer småbord som kan settes sammen til større bord. Det er plass til seks personer rundt ett bord. Bordene kan også settes sammen til langbord som vist på figuren. Utforskingen her dreier seg om hvor mange det blir plass til om vi føyer til flere bord.

[2] Fra en utprøving med elever i en realfagskommune

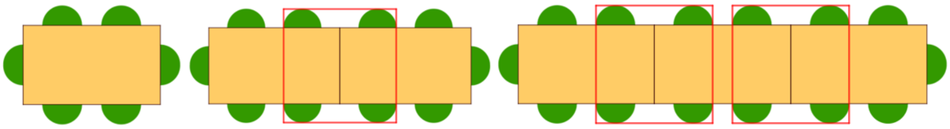
Elevene kan lete etter et mønster som de kan bruke for å finne hvor mange det blir plass til rundt et langbord som består av et bestemt antall småbord. Mønsteret kan beskrives i en tabell:

Antall bord	1	2	3	4	5	6
Antall personer	6	10	14	18	22	26

Tabell 3

Antall personer det er plass til øker med fire for hvert bord man føyer til. Samtalen etter en slik utforsking kan dreie seg om hvorfor antallet øker med fire og om det er en sammenheng mellom antall bord og antall personer. Det er flere måter både å se og å uttrykke sammenhengen på. Med utgangspunkt i *tabell 3* kan man for eksempel se at antall personer er to mer enn tallene i firegangen. Det kan uttrykkes som «antall bord gange fire pluss to». Den symbolske representasjonen kan være $p = 4 \cdot b + 2$ der p står for antall personer og b står for antall bord.

Ved å betrakte *figur* 7 kan man se at «det er seks på det første bordet, og så blir det fire ekstra for hvert bord som blir satt til». En visuell representasjon kan være som i *figur 8*:



Figur 8

Symbolsk kan sammenhengen representeres slik: $p = 6 + 4 \cdot (b - 1)$ der p står for antall personer og b står for antall bord.

Argumentasjonen følger samme mønster som eksemplet med kvikkbildet. I kvikkbildet var det faglige temaet knyttet til en egenskap ved multiplikasjon. Samtaler om figurene med oppsett av bord kan bidra til at elevene utvikler forståelse av funksjonsbegrepet der sammenhengen mellom variable størrelser er essensiell. I dette eksemplet er antall personer avhengig av antall bord.

Telle i kor

Denne typen aktivitet er spesielt designet for at elevene skal lete etter, beskrive og begrunne mønster. Tellingene i *tabell 3* og *4* viser eksempler både på mønster som gjentas og tallmønster (Svorkmo, 2016).

4	24	44	64	84	104
8	28	48	68	88	108
12	32	52	72	92	112
16	36	56	76	96	116
20	40	60	80	100	120

Tabell 3 Telle med 4 fra 4

5	9	13	17	21
25	29	33	37	41
45	49	53	57	61
65	69	73	77	81
85	89	93	97	101
105	109	113	117	121

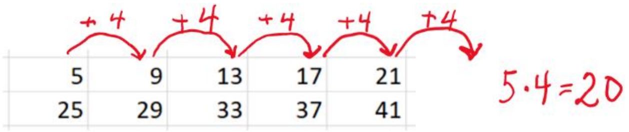
Tabell 4 Telle med 4 fra 5

I *tabell 3* er tallene skrevet kolonne for kolonne med fem tall i hver kolonne. I *tabell 4* er tallene skrevet rad for rad med fem tall i hver rad. I begge tellingene blir sifferet på enerplassen det samme i henholdsvis hver rad og hver kolonne. Dette er typiske eksempler på et gjentagende mønster. Elevene kan registrere slike mønster raskt, men observasjonen i seg selv er ikke indikasjon på matematisk tenking.

Elevene kan også oppdage økningen med 20 fra kolonne til kolonne i *tabell 3* og fra rad til rad i *tabell 4*. Disse elevene sammenlikner to tallstørrelser og registrerer dermed et tallmønster. Oppdagelsen av begge disse mønstrene gir læreren anledning til å spørre elevene om hvorfor det blir slik. Da utfordres elevene på å reflektere over tellingen og hvordan tabellen er konfigurert i kolonner og rader. Da må elevene både resonnere og argumentere. Elever har under utprøving av aktiviteten *Telle med fire fra fem* i MAM-prosjektet argumentert på denne måten:

Vilmer: Å jo, det er jo fordi vi plusser på fire hver gang. Og så er det fem på rekka.
David: Fire gange fem, det blir jo tjue.
Vilmer: Ja. Da er egentlig det grunnen da.
David: Ja. Men hvordan skal vi forklare det?

Under oppsummeringen blir det elevene forklarer visualisert med piler og regnetegn:

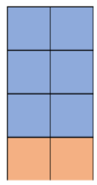


Figur 9

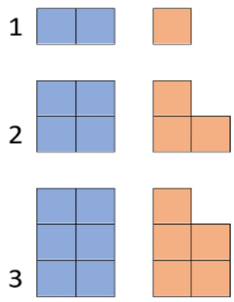
Denne begrunnelsen er også en begrunnelse for de gjentagende mønstrene med samme siffer på enerplass. Elevenes argument blir et gyldig bevis fordi det baserer seg på strukturen med fem kolonner som tellingen er skrevet inn i.

Tellingen med 4 fra 4 består kun av partall. Tellingen med 4 fra 5 består kun av oddetall. Det kan også være utgangspunkt for refleksjoner og begrunnelser knyttet til henholdsvis sum av to partall og sum av et partall og et oddetall. Ethvert partall kan bli representert som to og to kvadrater satt sammen som på *figur 10*. Setter vi disse figurene sammen som på *figur 11*, har vi summen representert som et antall der to og to kvadrater er satt sammen. «Høyden» på partallene endrer ikke strukturen. Dette blir derfor et representasjonsbevis for at summen av to partall alltid er et partall.


Figur 10 To partall


Figur 11 Sum av to partall

Med utgangspunkt i representasjonen av de tre første partallene i *figur 12* kan vi lage et generelt uttrykk for partall: $2 \cdot a$ der a er nummeret til partallet. Figuren viser også at oddetallene er én mindre enn tilsvarende partall, og de kan vi da skrive generelt som $2 \cdot b - 1$ der b er nummeret til oddetallet. Velger vi nå to tilfeldige naturlige tall a og b blir summen $(2 \cdot a) + (2 \cdot b - 1)$. Det kan vi skrive som $2 \cdot (a + b) - 1$ som representerer oddetall nummer $(a + b)$. Dette er et algebraisk bevis som bygger på egenskapene til par- og oddetall og til regneoperasjoner.



Figur 12 Partall og oddetall

De to tellingene, 4 fra 4 og 4 fra 5, er konstruert slik at det blir et gjentagende mønster når tellingen passerer henholdsvis 100 og 101. Det mønsteret vil være litt mer krevende å oppdage, men faller i samme kategori som mønstrene på enerplassen. Oppdagelsen kan være et godt utgangspunkt for å stille spørsmål om bestemte tall vil komme i tabellen om man teller langt nok. Vil tallene 256, 377 eller 986 komme om vi teller langt nok med 4 fra 4? Hvorfor/hvorfor ikke?

Aktiviteten gir også muligheter for generalisering. Mønstrene er i seg selv tallmønstre og vi kan utfordre elevene på å finne en generell regel for hvilket tall som vil stå i ei bestemt rute i tabellen ved å stille spørsmål som:

- Hvilket tall vil stå i rute nummer 76?

- Hvilket tall vil stå i tredje kolonne i rad 8?
- Om vi tar utgangspunkt i ei rute med tall i, hvordan kan vi da finne hvilket tall som skal stå i ei tilfeldig valgt tom rute lenger ute i tabellen?

Oppgavestrenger

En oppgavestreng består av 4-6 relaterte regnestykker som er designet for å engasjere elever i en diskusjon om en gitt regnestrategi (Valenta, 2016).

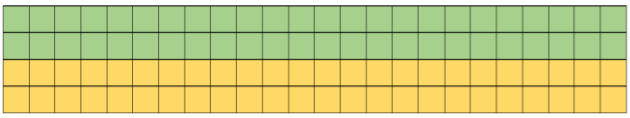
$2 \cdot 24$
$2 \cdot 48$
$4 \cdot 24$
$8 \cdot 12$
$16 \cdot 6$

Figur 13

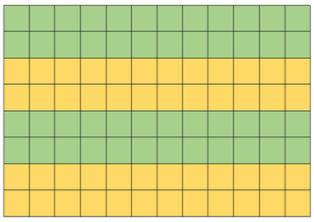
Figur 13 er knyttet til multiplikasjonsstrategien *Halvere og doble*. I dette oppsettet er mønsteret knyttet til sammenhengen mellom faktorene. Det første regnestykket fungerer som en enkel igangsetter. Produktet dobles når den ene faktoren dobles. De fire siste regnestykkene gir samme produkt. Mønsteret er her en dobling eller halvering av den ene faktoren samtidig som den andre blir henholdsvis halvert eller doblet.

Med støtte i visuelle representasjoner kan man argumentere for at strategien er gyldig. Oppgavene $4 \cdot 24$ og $8 \cdot 12$ i figur 12 kan bli representert på denne måten:

$4 \cdot 24$



$8 \cdot 12$



Figur 14 Multiplikasjon halvering og dobling

Rektanglet med $4 \cdot 24$ ruter blir delt på midten og satt sammen til et nytt rektangel. Bredden er halvert og høyden doblet. Antall ruter er det samme.

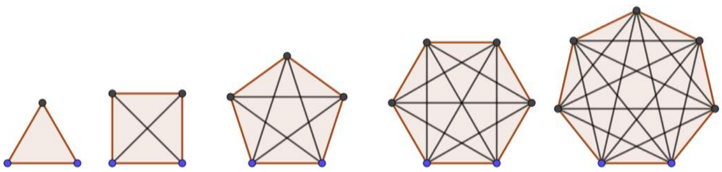
Mønster i problemløsing

Lage en systematisk tabell og *Se etter et mønster* er to sentrale strategier for problemløsing (Torkildsen, 2017). Effektiv bruk av disse strategiene forutsetter at man kan lage tabeller og vet hva man skal se etter når man leter etter mønster i datamengden. Aktivitetene fra MAM-ressursene i eksemplene over bidrar til at elevene blir oppmerksomme på hva mønster i tall kan være, og det kan gjøre elevene bedre rustet til å løse problem der veien til løsningen ligger i et mønster.

Eksempel

Hvor mange diagonaler er det i regulære mangekanter?

En måte å starte problemløsingen på kan være å tegne mangekanter, tegne og telle diagonalene.



Figur 15 Diagonaler i regulære mangekanter

Resultatet settes i en tabell.

Antall kanter	3	4	5	6	7	8	9
Antall diagonaler	0	2	5	9	14		

Tabell 5 Antall diagonaler i mangekanter

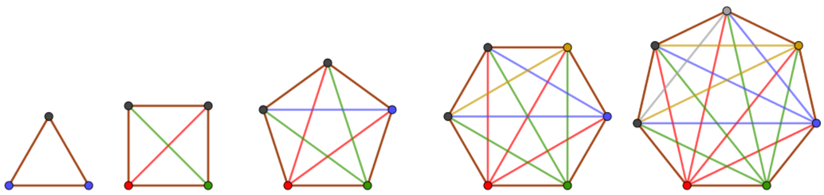
Elever som er blitt «mønstersniffere» vil på et tidspunkt undersøke om det er et mønster i tabellen. Finnes det et mønster, slipper man å tegne for å finne antall diagonaler. Økningen i antall diagonaler følger dette mønsteret: 2-3-4-5. De neste økningene vil ut fra dette mønsteret være 6 og 7. Antall diagonaler i 8-kanten blir 20 og i 9-kanten 27. Settes dette mønsteret inn i et regneark kan man lage tabellen så stor man ønsker:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Antall kanter	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
2	Antall diagonaler	0	2	5	9	14	20	27	35	44	54	
3												
4												

Formel i celle E2: =D2+C1 Kopieres bortover.

Figur 16 Tabellen i et regneark

Ofte fins det «mønster i mønsteret», og det kan gi enda dypere innsikt i problemet.



Figur 17 Systematisk registrering av diagonalene

En systematisk registrering av maksimalt antall diagonaler man kan lage om man starter med et hjørne og følger opp med et nabohjørne gir «mønster i mønsteret». På *figur 17* starter markeringen av diagonalene på det røde hjørnet, deretter det grønne, blå, brune og grå hjørnet etter hvert som antall muligheter utvides. Resultatet kan noteres i en ny tabell:

Antall kanter	**Røde**	**grønne**	**blå**	**brune**	**grå**	**Antall diagonaler**
3	0					0
4	1	1				2
5	2	2	1			5
6	3	3	2	1		9
7	4	4	3	2	1	14

Tabell 6 Systematisk gruppering av diagonaler

Trekanttallene finnes i mange sammenhenger. Om vi ser på antall diagonaler av hver farge fra høyre mot venstre, ser vi trekanttall nr. 4 (T_4) i 7-kanten: 1 + 2 + 3 + 4 = 10. I tillegg er det en 4-er og det er tre mindre enn antall kanter som er sju. Tilsvarende får vi på de andre mangekantene:

6-kanten: $T_3 = 1 + 2 + 3 = 6 \rightarrow 6 + 3 = 9$

5-kanten: $T_2 = 1 + 2 = 3 \rightarrow 3 + 2 = 5$

Elever som er kjent med den generelle regelen for å finne et hvilket som helst trekanttall, kan ut fra dette mønsteret lage en generell regel for antall diagonaler i mangekanter.

Artikkelen *Å undervise matematisk problemløsing* (Torkildsen, 2017) gir eksempler på andre typer tabeller og mønstre som blir brukt både for å finne antall løsninger og til å begrunne løsningene.

Oppsummering

Oppgaver som gir elevene mulighet for å oppdage, beskrive og argumentere for sammenhenger i og mellom mønster bør ha en sentral plass i matematikkundervisningen. Kompetansen elevene utvikler gjennom arbeid med mønster får elevene bruk for både i utforsking, problemløsing, algoritmisk tenking og programmering.

Kilder

Boaler, J. et al. (2017). *What is Mathematical Beauty? Teaching trough Big Ideas and Connections*. Lastet 30. mars 2020 fra https://www.youcubed.org

Bondø, A. (2017). «Kvikkbilder i arbeid med tallforståelse», www.matematikksenteret.no/kompetanseutvikling/mam/artikler-og-fagtekster

Carpenter, T. P., Franke, M. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically – Integrating arithmetic & algebra in elementary school*. Portsmouth: N. H., Heinemann

Devlin, K. (1994). *Mathematics*: *The Sience of Patterns*. Scientific American Library. NY. *https://archive.org/details/B-001-001-218/page/n13/mode/2up*

Enge, O. og Valenta, A. (2011). *Argumentasjon og regnestrategier*. Tangenten 4/2011

Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: The distinction is blurred. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 26*(3), 24-42. [ResearchGate, Academia]

Mulligan, J. og Mitchelmore, M. (2009). *Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical* Development. Mathematics Education Research Journal, 2009, Vol. 21, No. 2, 33-49

Nosrati, M. og Wæge, K. (2015). *Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk*. Lastet 2. juni 2020 fra *https://www.matematikksenteret.no/kompetanseutvikling/mam/artikler-og-fagtekster*

Svorkmo, M. (2016). «Telle i kor». Lastet 2. Juni 2020 fra *https://www.matematikksenteret.no/kompetanseutvikling/mam/artikler-og-fagtekster*

Torkildsen, S. H. (2017). *Å undervise matematisk problemløsing*. Lastet 2. juni 2020 fra *https://www.matematikksenteret.no/kompetanseutvikling/mam/artikler-og-fagtekster*

UDIR (2020). *Læreplan i matematikk 1.-10. trinn (MAT01-15)*. Lastet 30 april 2020 fra https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Valenta, A. (2016). «Oppgavestrenger i arbeid med tallforståelse». Lastet 2. juni 2020 fra *https://www.matematikksenteret.no/kompetanseutvikling/mam/artikler-og-fagtekster*