

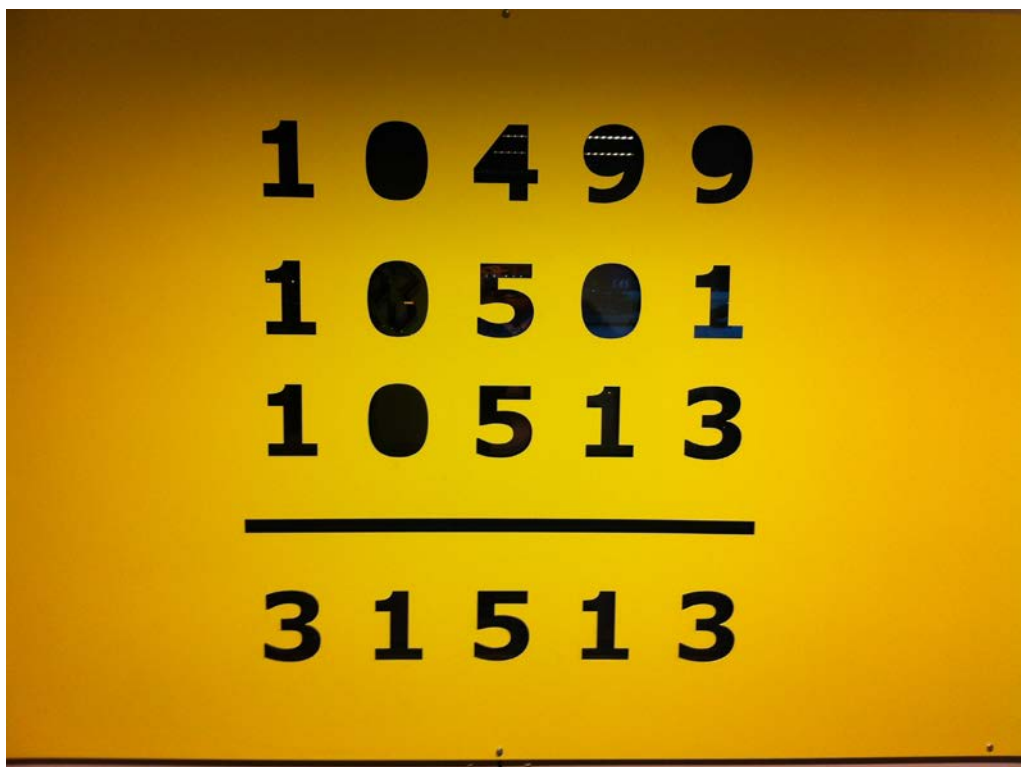
Undervisning – Planlegging, prosess og produkt

Forfatter:

Svein H. Torkildsen

Publisert dato: April 2016

© Matematikkensenteret



Planlegging, prosess og produkt

Å lære matematikk består i å lære ulike måter å tenke på, inkludert måter å generalisere matematiske ideer på, uttrykke og representere dem og begrunne at de er holdbare. Skal elevene lære seg matematisk tenking, forutsetter det at læreren ser på matematikk som et område der resonnering omkring matematiske ideer og sammenhengen mellom dem står sentralt. Å arbeide med matematikk innebærer å søke etter, identifisere og beskrive mønster, og å undersøke om hypoteser knyttet til mønstrene er holdbare (Carpenter, Franke & Levi, 2013). For at elevene skal ha mulighet til å utvikle sin matematiske tenking, må læreren velge aktiviteter som inviterer til utforskning og resonnering. Læreren må videre kunne identifisere matematiske ideer i elevenes tenking, og han må lede diskusjonen fram mot viktige matematiske ideer. Dette forutsetter en grundig planlegging og god gjennomføring av undervisningen.

Strukturen i denne artikkelen er inspirert av de fem praksisene som beskrives av Smith og Stein (2011). De fem praksisene er: 1. Forventning om hvordan elevene vil gripe an en oppgave (Anticipating), 2. Observere elevene i arbeid med oppgaven (Monitoring), 3. Velge hvilke elevarbeid som skal presenteres for klassen (Selecting), 4. Bestemme rekkefølge på presentasjonene (Sequencing), og 5. Søke etter sammenhenger (Connecting). Disse punktene er supplert med momenter knyttet til planlegging av timen, presentasjon av aktiviteten og vurdering av undervisningen.

Planlegging

En grundig forberedt time gir økt mulighet for læringsutbytte hos elevene. Planleggingen innebærer fire prosesser: velge faglige mål for timen, velge aktivitet, tenke gjennom hvilke innspill elevene kan komme med og legge en strategi for hvordan ulike innspill kan møtes.

Mål

Vi kan skille mellom «brede matematiske mål» som gjelder for arbeidet med et matematisk tema, og «spesifikke matematiske mål» som gjelder for hele eller deler av ei spesiell undervisningsøkt (NCTM, 2014).

Følgende er et eksempel på bredt matematisk mål: «Elevene skal kunne velge passende strategier for multiplikasjon av flersifrede tall». Dette er et eksempel på et spesifikt matematisk mål: «Se tallet 20 på ulike måter ved hjelp av visuelle og symbolske representasjoner. Diskutere distributiv egenskap ved multiplikasjon.»

Å presentere strategier for hverandre kan være en god måte å starte utviklingen av matematiske samtaler i klassen på. «Å lære å presentere strategier» er et eksempel på et bredt matematisk mål. Mr. Soeur registrerte at elevene i hans tredjeklasse brukte flere ulike strategier for subtraksjon. Han bestemte seg for å sette fokus på når det er en god strategi å «telle opp» og når det er best å «telle ned». Han satte dette spesielle målet for timen: «Tenke sammen om hvilken strategi vi bør velge når vi subtraherer. Spesielt, telle bakover når tallene er langt fra hverandre. Telle oppover når de er nære hverandre.» (Kazemi & Hintz, 2014).

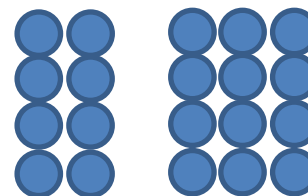
Et klart definert faglig mål vil styre valgene læreren gjør i sin forberedelse, tilpassingene i løpet av undervisningsøkta og refleksjonene læreren gjør seg i etterkant.

Selv om læreren alltid bør ha et klart matematisk mål for undervisningsøkta, er det likevel ikke alltid nødvendig å la elevene bli kjent med målet i begynnelsen av timen. Det er imidlertid viktig at elevene forstår hensikten med den matematikken det blir arbeidet med, og hvordan aktivitetene bidrar til at de lærer matematikk (NCTM, 2014).

Valg av aktivitet

Når målet for timen er satt, finner læreren en aktivitet som kan lede elevenes arbeid mot målet. Hvis den distributive egenskapen er målet for timen, kan et kvikkbilde være en egnet aktivitet. I filmen «Kvikkbilde $2 \cdot 4 + 3 \cdot 4$ » har læreren Jørn Ove den distributive egenskapen ved multiplikasjon som mål for timen.¹ Han valgte kvikkbildet på figur 1 som utgangspunkt for å drøfte denne egenskapen.

Bildene bør være enkle. Mer komplekse bilder fører ofte til at elevene ser så mye forskjellig i bildet at det blir vanskelig å holde



Figur 1

¹ <http://www.matematikksenteret.no/content/4935/Kvikkbilder>

retningen mot målet for timen. I artikkelen «Kvikkbilder» (Bondø, 2016) kan du lese mer om hvilke kvaliteter bildet bør ha for å framheve målet med aktiviteten. En oppgavestreng kan også være et hensiktsmessig utgangspunkt i arbeid med den distributive egenskapen. Filmen «Bruk av snille tall» er et eksempel på det.²

Det sentrale i valg av aktivitet er at den skal utfordre elevene på å resonnerer omkring viktige matematiske ideer. Videre bør aktiviteten være utformet slik at det er mulig å nærme seg en løsning på ulike måter og gjennom ulike representasjoner. Det er utfordrende å holde trykket oppe når elevene arbeider med kognitivt krevende oppgaver. Denne utfordringen omtales nærmere i artikkelen «Kommunikasjon» som er et utdrag av masteroppgaven til Anne Lise Øvstebø Vesterdal (2011). Når elevene strever med å komme videre, bør læreren ha en plan som kan gi framdrift i arbeidet uten å senke de kognitive kravene.

Forventning og undervisningsnotat

En viktig del av lærerens forberedelser er å forestille seg mulige svar fra elevene. Det kan være en fordel å notere vanlige misoppfatninger og å ha en plan for hvordan disse kan utfordres. Andre ganger vil det være aktuelt å forestille seg ulike strategier elevene kan tenkes å bruke når de skal løse et problem eller utføre beregninger.

Eksempel

Mr. Crane lot sin 4. klasse arbeide med dette problemet: En fjerdeklasse trenger hver dag 5 blad for å mate sine 2 larver. Hvor mange blad ville de trenge hver dag for å mate 12 larver?

Han forutså at elevene kunne benytte disse strategiene:

- Veien om 1: $5 \text{ blad} : 2 = 2,5 \text{ blad}$, og så $12 \cdot 2,5 \text{ blad}$.
- Faktor: 6 ganger så mange larver, $6 \cdot 5 \text{ blad}$.
- Skalere opp: 2->5, 4->10, 6->15, 8->20, 10->25, 12->30.
- Additiv tenking: 10 larver mer. 10 blad mer.
- Annet?

Grundig arbeid med et plandokument for timen sikrer at læreren er best mulig forberedt til gjennomføringen. Plandokumentet bør inneholde faglig mål for undervisningsøkta, beskrivelse av aktiviteten, skisse av mulige elevsvar og hvordan elevsvarene kan integreres i

² <http://www.matematikkenteret.no/content/4936/Oppgavestrenger>

diskusjonen om det faglige innholdet som leder mot målet for timen. I tillegg kan plandokumentet inneholde et kortere undervisningsnotat som læreren kan bruke som støtte i undervisningen for å holde retning og framdrift. Utformingen av plandokument og undervisningsnotat kan gjøres på mange måter og kan variere med valgt aktivitet. Utgangspunktet kan være følgende planleggingsmal som framhever punkter læreren bør tenke gjennom:

1. Velg og forbered en aktivitet ut fra et faglig mål.
2. Tenk gjennom introduksjonen.
3. Hvilke elevsvar kan komme?
4. Hvilke elevsvar vil du bygge videre på?
5. Tenk gjennom hvordan du vil oppsummere.

Det kan også være lurt å utforme et kort undervisningsnotat til timen. Eksemplet under viser et utdrag av undervisningsnotatet for Kvikkbildet $2 \cdot 4 + 3 \cdot 4$.³ Det inneholder foruten selve kvikkbildet og en kort oversikt på samtaletrekkene, også en tabell med to kolonner: «Progresjon for gjennomføring» og «Planlagt retning for diskusjon».

Progresjon for gjennomføring	Planlagt retning for diskusjon
Vis bildet i tre sekunder. TENKETID Vis bildet en gang til, i tre sekunder. TENKETID Vurder om du vil bruke SNU-OG-SNAKK	Det vil ikke være tid nok til å telle. Oppfordre elevene til å se en struktur i bildet. Se etter kjente mønster eller andre egenskaper ved bildet
Samtale om de mentale bildene elevene har laget seg: Hvordan så du prikkene eller bildet? Hvordan tenkte du for å finne antall prikker? Ha figuren oppe, og marker på figuren. Utfordre elevene på hvordan vi kan skrive symbolsk det for eksempel Mari har tenkt. SAMTALETREKK	Dersom elevene svarer $5 \cdot 4$, få elevene til å forklare hvordan de så at det var kolonner, om de telte eller så det som $2 + 3$. Få fram ulike måter å se antallet på, og koble bildet, den muntlige beskrivelsen og det symbolske uttrykket sammen. Marker i figuren, grupper prikkene etter elevens forklaringer. Utfordre elevene på symbolsk notasjon som beskriver tankegang i form av ett uttrykk.
...	...

Til andre typer aktivitet vil det være behov for andre momenter i undervisningsnotatet.

Prosess

Med utgangspunkt i planleggingsdokumentet leder læreren klassen fram mot målet for timen. Under gjennomføring av enkelte aktiviteter, for eksempel spill og problemløsning, kan

³ <http://www.matematikkenteret.no/content/4830/Kvikkbilder#2x4+3x4>

det være en fordel å stoppe opp og samle elevenes oppmerksomhet om en matematisk sammenheng eller en notasjon elevene ikke er kjent med, og som de kan utnytte videre i arbeidet. Læreren velger også om målet for timen skal presenteres før elevene starter arbeidet med oppgaven eller om det er bedre å gjøre det i løpet av undervisningsøkta. Hvis målet er at elevene skal se etter mønster og sammenhenger i en oppgavestreng, bør ikke selve målformuleringen frata elevene muligheten til å se nettopp det.

Eksempel

$$2 \cdot 120$$

$$4 \cdot 120$$

$$8 \cdot 120$$

$$10 \cdot 120$$

Matematikklæreren Stig presenterte oppgavestrengen i ruta for elevene. Elevene måtte selv se sammenhengen mellom faktorene 2, 4 og 8 og trekke konklusjoner om produktene ut fra det. I løpet av timen løftet læreren denne sammenhengen fram, og dette målet ble da klargjort for elevene. Et annet mål læreren hadde, var multiplikasjon med 10. Her ble to strategier benyttet: Noen elever summerte produktene til $2 \cdot 120$ og $8 \cdot 120$, mens andre «føyde til en null» på 120. Dette siste innspillet kan danne utgangspunkt for et nytt opplegg der en begrunner denne strategien. I det nye opplegget kan det være naturlig at målet for timen klargjøres for elevene på forhånd, og målene kan for eksempel være: Å begrunne at tallet blir ti ganger større når vi føyer til en null. Å undersøke om dette alltid gjelder.

Presentere aktiviteten og inspirere elevene

Når læreren har forsikret seg om at elevene har forstått hva oppgaven handler om, for eksempel konteksten oppgaven er knyttet til, eller hva de skal se etter eller undersøke, kan elevene oppfordres til å bruke ulike tilnærminger for å finne løsningen på oppgaven.

Eksempel

Læreren Thomas presenterer problemløsningsoppgaven "Fordeling av Sjokoladecake" for elevene på 6. trinn på denne måten: «Vi skal holde på med en oppgave som handler om at man skal dele rettfærdig i mellom seg. Noen har vært på skolekjøkkenet og bakt kake. (Pause). Og det er tre gutter som har ei sjokoladecake, som de skal dele likt i mellom seg. Og så er det åtte jenter som har bakt tre sjokoladekaker som de skal dele likt i mellom seg. Så oppgaven; hvis de deler sjokoladekaka likt i mellom seg, hvem er det da som får mest? Guttene eller jentene? Da får dere et ark som dere kan jobbe på, der skriver dere ned, og tegner, det dere tror, og prøve å beskrive så godt dere kan på arket. Og så, på slutten av timen skal vi presentere det hver gruppe har funnet ut». (Fra transkripsjon til filmen «Fordeling av sjokoladecake»).⁴

⁴ <http://www.matematikkenteret.no/content/4937/Problemlosing>

Når elevene arbeider med oppgavene, blir det lærerens oppgave å holde elevene på sporet, inspirere og utfordre dem uten å redusere de kognitive kravene.

Eksempel

Læreren Morten presenterte en oppgavestreng for elevene på 7. trinn. Elevene skulle bestemme hvor desimalkommaet må stå i divisjonen $249 : 7 = 35571$. Elevene ble raskt enige om at kommaet må stå mellom de to femmerne. Neste utfordring ble å plassere desimalkommaet i divisjonen $2490 : 70 = 35571$. Her kom det to forslag: fortsatt mellom femmerne og mellom fem og sju. I stedet for å lede elevene mot riktig svar, opprettholdt Morten det kognitive kravet ved å be elevene drøfte de to forslagene: Snakk sammen to og to. Etter ca. 40 sekunders diskusjon spør Morten: «Her har vi to forslag, og jeg vil gjerne høre hva dere tenker her nå.»

Elevene kan komme med interessante innspill som det kan være nyttig å følge opp. Hvis innspillet bidrar til å nå målet for timen, kan det være naturlig å følge opp innspillet umiddelbart. Hvis innspillet fører til at undervisningen dreies bort fra målet, kan læreren i stedet notere seg elevens innspill og ta det opp igjen ved en seinere anledning. Elevene skal få anerkjennelse for innspillet de kommer med, og når innspillet blir tatt opp ved en seinere anledning, ser elevene at tankene og ideene de har blir tatt på alvor.

Observere

Mens elevene arbeider med oppgavene, bruker læreren tiden til å observere elevene. I denne fasen er det viktig at læreren utfordrer elevene på å klargjøre ideene sine slik at de blir tilgjengelige for andre. Oppfordring til å velge representasjoner som støtter opp om elevenes forklaringer, står sentralt i denne fasen.

Eksempel

Klassen til Thomas var delt i grupper på 3-4 mens de arbeidet med problemet "Sjokoladecake". I løpet av den perioden elevene arbeidet med problemet, gikk Thomas rundt og snakket med alle gruppene. Noen typiske utfordringer Thomas kom med: «Hvordan kan dere argumentere på arket deres for at guttene/jentene får mest?», «Prøv å lage ei tegning der dere får til å forklare hvorfor det er jentene som får mest» og «OK, hvordan kan du overbevise de andre på gruppa di om det?». Under samtalen med gruppene registrerte Thomas at elevene brukte ulike argumenter for at jentene fikk mest kake. Ei gruppe resonnererte på følgende måte: "Guttene har bare en kake og er bare tre stykker, mens vi gjør det samme med jentene, og bare deler de opp. Nå har vi jo mista en kake og

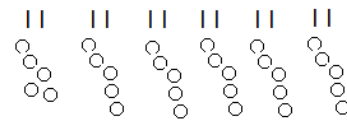
tre gutter, nei jenter. Så mister vi en kake og tre jenter til, og på den siste så er det bare to jenter! Og det vil si at jentene får mer enn guttene. Det blir igjen en kakebit". Ei anna gruppe brukte samme strategi, og de kom fram til at hver jente fikk $\frac{1}{24}$ kake mer enn hver gutt. Ei tredje gruppe tenkte slik: "Jentene får mest. De ville fått like mye om de var 9". (Det ble ikke eksplisitt uttrykt at det blir mer på hver når 8 deler enn når 9 deler). Ei fjerde gruppe mente at guttene og jentene fikk like mye.

I denne perioden kan det være nyttig for læreren å gjøre seg korte notater om elevenes bruk av representasjoner og strategier. Dersom læreren har laget en oversikt med mulige strategier under planleggingen, kan notater om elevenes arbeid gjøres enkelt i et skjema. Det vil gi god oversikt over elevenes arbeid.

Eksempel

Mr. Crane observerte at det var minst åtte ulike strategier i bruk da klassen arbeidet med oppgaven om larver og blad.

Martin hadde laget ei tegning tilsvarende denne figuren:



Jamal laget tabell:

Blad	5	10	15	20	25	30
Larver	2	4	6	8	10	12

Janine tegnet 12 streker for å representere de 12 larvene og skrev denne teksten: Hvis hver larve spiste $2\frac{1}{2}$ blad hver dag da kan du bare gange $2\frac{1}{2} \times 12 = 30$.

Jason skrev denne fortellingen: Hvis 2 larver trenger 5 blad, teller du bare med 2-ere til du kommer til halv-delen av 12. Det er 6. Så kan du gange: $5 \cdot 6$ og det blir 30.

På forhånd hadde Mr. Crane sett for seg ulike strategier elevene ville bruke, og han hadde satt dem inn i et skjema der han kunne gjøre notater.

Strategi	Hvem og hva	Rekkefølge
Veien om 1: 5 blad : 2 = 2,5 blad og $12 \cdot 2,5$ blad	Janine: multipliserte $12 \times 2,5$. 12. Streker representerte larver. Kyra: adderer 2,5 12 ganger. Tegner blad og larver.	3 Janine
Faktor: 6 ganger så mange larver, $6 \cdot 5$ blad	Jason: fortelling.	4 Jason
Skalere opp: 2->5, 4->10, 6->15, 8->20, 10->25, 12->30	Jamal: tabell med blad og larver, øker med 2 og 5	2 Jamal
Additiv tenking: 10 larver mer. 10 blad mer	Missy and Kate	
Annet: Skalere opp ved å lage grupper på 2 og 5	Martin (tegning) Melissa (tabell)	1 Martin

Den siste linja – «Annet» – gir rom for å notere strategier læreren ikke har tenkt ut på forhånd. Etter observasjonene så skjemaet til Mr. Crane ut som vist over, med unntak av notatene på rekkefølge.

Eksemplet er oversatt fra Smith & Stein (2011) side 9.

I noen sammenhenger kan det være gunstig å stanse elevene i diskusjonene og la dem dele noen av sine erfaringer og ideer med hele klassen. I spillet «Lag det tallet» har spillerne fem kort hver. Målet er å bruke flest mulig kort til å lage et regnestykke. Svaret på regnestykket skal være et tall som er valgt på forhånd. Dette spillet gir muligheter for å arbeide målrettet med blant annet prioritering av regnearter og bruk av parenteser. Hvis mange av elevene utelukkende bruker addisjon og subtraksjon, kan det være en god idé å la dem få innspill som gir dem flere muligheter.

Eksempel

Læreren Olaug observerte at mange grupper utelukkende brukte addisjon og subtraksjon i regnestykkene. Hun bryter av spillet i gruppene der to og to elever spiller mot hverandre, samler elevene og sier: «Da har dere spilt ei stund, er det noen som har noen lure tips til hvordan man får brukt mest mulig kort? Er det noen som har eksempel på et tall der de greide å bruke veldig mange?»⁵

I samtalen som fulgte fikk hun fram eksempler på bruk av multiplikasjon og divisjon og hvordan de kan bruke parenteser når vi har alle fire regneartene i samme regnestykke.

Velge

Noen ganger kan det være aktuelt å la alle elevgruppene presentere sine løsninger. Det kan være interessant hvis målet er å få fram at det er mange ulike måter å løse et problem på. I slike tilfeller vil det være nyttig å sammenlikne metodene med tanke på hvor effektive de er. Andre ganger vil noen måter å se et problem på lede oppmerksomheten bort fra målet for timen. Da bør læreren anerkjenne elevens innspill uten videre diskusjon.

Eksempler

Da klassen til Jørn Ove undersøkte kvikkbildet $2 \cdot 4 + 3 \cdot 4$, var målet for timen den distributive lov. Første innspill var fra Gina: "Det var $8 + 8 + 4$, så tenkte jeg $8 + 8$ er 16 og så plusset jeg på 4". Gina får forklare hvordan hun så grupper på åtte, og Jørn Ove noterer på

⁵ <http://www.matematikkensenteret.no/content/4938/Innholdsside>

tavla slik at alle kan følge Ginas system. Maria forklarer hva hun tenkte: "Jeg tok 2 ganger 4, pluss 3 ganger 4". Jørn noterer hva Maria sier med tall og operasjonstegn: $2 \cdot 4 + 3 \cdot 4$, og Ruben bidrar med tolkingen av uttrykket ut fra bildet. Jenny kom så med en forklaring som liknet på Gina sin. Marie utdyper måten hun så det samme som Maria på, før Erle kommer med sitt: "Jeg tenkte 5 ganger 4". Det så hun slik: "Jeg telte de nederste først og så var det 4". Jørn Ove hadde nå fire måter å se antallet på. To av måtene ledet direkte mot målet for timen, og disse ble da naturlig nok brukt i oppsummeringen. De to andre ble ikke framhevet utover at læreren bekreftet dette som en korrekt måte å se antallet på.

Mr. Crane valgte bort den additive metoden som Missy og Kate hadde benyttet, og som ikke er holdbar som metode. I oppsummeringen trakk han fram en representant for hver av de fire andre strategiene.

Thomas valgte å la gruppa som mente guttene og jentene fikk like mye sjokoladecake, få presentere sitt resultat på lik fot med de som hadde korrekt løsning. Det kan ligge mye god læring i å argumentere for at et svar ikke er korrekt, og i klassen til Thomas tillot klassekulturen læreren å foreta slike valg.

Rekkefølge

Etter at læreren har valgt ut elevene som skal presentere sine løsninger, er det klart for å tenke gjennom hvilken rekkefølge presentasjonene skal komme i. En vel gjennomtenkt rekkefølge øker sjansen for at det faglige målet for timen blir framhevet. Hvis mange elever har brukt samme strategi, anbefaler Smith & Stein (2011) at elevene presenterer denne strategien før de presenterer strategier som kun noen få elever har benyttet. Dette valget øker muligheten for at så mange som mulig av elevene deltar i starten av diskusjonen.

I klassen til Mr. Crane hadde elevene et variert utvalg av strategier å by på. Et forslag til rekkefølge på presentasjonene er vist i høyre kolonne i tabellen over. 1: Martin hadde skalert opp ved hjelp av en tegning. 2: Jamal brukte samme strategi, men han skrev antallet i en tabell i stedet for å tegne. 3: Janine gikk «veien om en» og forklarte tankegangen sin med en kombinasjon av tegning og tekst. 4: Jason fant skaleringsfaktoren 6 (2 går 6 ganger i 12) og multipliserte de 5 bladene med 6.

Denne rekkefølgen går fra den minst avanserte representasjonen (en tegning) og strategien (skalere opp ved å samle mengder) til den mest avanserte strategien (bruk av skaleringsfaktor). Hensikten med dette valget av rekkefølge er å gi flest mulig elever tilgang til den sentrale matematiske ideen skaleringsfaktor. Dette utvalget gir også mulighet for å

sammenlikne de to ulike representasjonene av strategien «skalere opp». Det gir elevene mulighet for å utvikle en dypere forståelse for denne strategien.

Problemet med å dele sjokoladecake gir også mulighet for å velge en rekkefølge som bygger opp mot den mest sofistikerte strategien der elevene kunne si nøyaktig hvor mye mer kake jentene fikk sammenliknet med guttene. Thomas valgte å starte med elevene som mente guttene fikk mest kake. Da passer det fint å følge opp med gruppa som argumenterte med at jentene får mest - de ville fått like mye om de var 9. Så kunne en fortsette med argumentet som gikk på at hvis først tre og tre jenter fikk ei kake hver, ville det bli ei kake på de to siste jentene. Hvis de da fikk like mye som de andre jentene, ville det bli et kakestykke igjen, og den siste gruppa kunne forklare hvordan de fant ut at jentene da får $\frac{1}{8}$ av et kakestykke mer enn guttene, og at det utgjør $\frac{1}{24}$ av ei kake.

Produkt

Med produkt forstås i denne sammenheng den erfaringen og kunnskapen elevene sitter igjen med etter endt undervisning. Matematisk kompetanse kan ikke karakteriseres på en så enkel måte som fraværende eller tilstedeværende. Alle viktige matematiske ideer kan bli forstått på mange nivå og på mange måter. Kompetanse utvikles dessuten over tid. For hvert år elevene går på skole, må elevene bli mer kompetente i behandling av både gammelt og nytt innhold. En elev i tredje klasse bør forstå addisjon med hele tall bedre enn da eleven gikk i første klasse. Men på hvert trinn bør elevene være i stand til å uttrykke matematisk kompetanse på en eller annen måte (Kilpatric & Swafford, 2002, side 21). For å styrke utviklingen av elevenes matematiske kompetanse, bør undervisningsøkta avsluttes med en oppsummering som retter elevenes oppmerksomhet mot det faglige målet for økta. Denne fasen kaller vi ofte oppsummering. Vi trekker konklusjoner, reflekterer og blir bevisst egen læring, og det gjelder både elever og lærer.

Søke etter sammenhenger

Læreren kan få mer ut av oppsummeringen enn at elevene presenterer sine strategier for hverandre. At elevene får vise arbeidet og fortelle om det til resten av klassen, er ingen garanti for at de utvikler en dypere forståelse. Resultatet kan likeså godt bli at de ikke har utviklet ny innsikt. Læreren kan hjelpe elevene til å sammenlikne ulike løsninger, utfordre

dem på å vurdere konsekvensene av de ulike tilnærmingene, og han kan lede oppmerksomheten mot matematiske nøkkelbegrep. I stedet for å la oppsummeringen bestå av flere separate presentasjoner, kan læreren la presentasjonene bygge på hverandre slik at elevene kan utvikle kraftfulle matematiske ideer (Smith & Stein, 2011).

Oppgaven elevene får, bør som nevnt gi mulighet for å arbeide med ulike representasjoner. Bruk av ulike representasjoner og oversetting mellom dem er både en del av og en vei til relasjonell forståelse (Skemp, 1987). I oppsummeringen bør læreren rette elevenes oppmerksomhet mot de ulike representasjonene og utfordre elevene på å oversette mellom dem. Elevene bør allerede fra de tidligste skoleårene utfordres til å beskrive og begrunne sin matematiske forståelse og resonnering ved hjelp av tegninger, diagrammer og andre representasjoner (NCTM, 2014).

Eksempler

I klassen til Mr. Crane kan det være nyttig å sammenlikne strategiene til Jamal og Janine.

Jamal hadde laget en tabell for å finne antall blad til 12 larver:

Blad	5	10	15	20	25	30	
Larver	2	4	6	8	10	12	

Janine fant ut at hver larve trengte 2,5 blader.

Et spørsmål om sammenhengen mellom strategiene til Jamal og Janine kan fremme resonnering.

G1	G2	G3	Argumentasjonen elevene til Thomas brukte for å resonner seg fram til at jentene fikk $\frac{1}{24}$ av ei kake mer enn guttene, kan begrunnes ved hjelp av en tegning. De tre guttene fikk en tredel hver av kaka. Elevene tenkte seg at de åtte jentene til å begynne med fikk like mye som guttene. Da var det ett kakestykke igjen som jentene kunne dele. Tredelen av den siste kaka blir delt i åtte slik at hver jente får $\frac{1}{8}$ av et kakestykke. Det blir 24 slike små kakestykker i ei kake. Jentene får da $\frac{1}{24}$ av ei kake mer enn guttene. Her arbeider elevene for første gang med multiplikasjon av brøk.
J1	J2	J3	
J4	J5	J6	
J7	J8		

Vurdering

Det primære formålet med vurdering er å danne seg et bilde av hvor godt elevene får med seg det matematiske målet for timen og forbedre både lærerens undervisning og elevenes læring. Vurderingen blir da en kontinuerlig prosess som er innbakt i undervisningen for å

støtte elevenes læring og justere undervisningen etter elevenes respons. Ønsker læreren et godt bilde av elevenes matematiske forståelse, må ulike vurderingsstrategier og oppgaver tas i bruk. For å få kunnskap om hvilken begrepsforståelse elevene har, kan vi be elevene forklare begrepene til andre. De må kunne representere begrepene på flere måter, anvende kunnskapen til å løse både enkle og sammensatte problem, og de må kunne sette begrepene inn i en praktisk sammenheng (NCTM, 2014).

Mens Thomas snakket med gruppene som arbeidet med kakeoppgaven, fikk han god innsikt i elevenes forståelse av brøk. Flere av elevene var ikke bevisst hva en brøkdel skulle sees i forhold til. De gjorde ingen forskjell på en del av ei hel kake og en del av et kakestykke. Noen elever betraktet et kakestykke som ei hel kake, enten kakestykket var en tredel eller en firedel av ei kake. Jentene fikk da et halvt kakestykke mer enn guttene, selv om den halvdelen var ei kvart kake, mens guttenes kakestykke var en tredel av ei kake. Dette utfordret Thomas gruppene på mens de arbeidet med oppgaven, og han lot det også bli et poeng under oppsummeringen.

Som vi har sett i flere av eksemplene over, bruker elevene varierte strategier i arbeidet med en og samme oppgave. Svingen (2016) diskuterer hvordan elevene gjerne følger et visst mønster i utviklingen av sin strategiske tenking. Utviklingen går fra direkte modellering via tellestrategier til fleksibel bruk av et utvalg strategier. For å teste hvor mange av elevene til Mr. Crane som hadde tatt poenget med å «gå veien om en», slik Jamal gjorde, kunne han gitt elevene en tilsvarende oppgave på slutten av timen og samlet inn løsningene. Samtidig ville han fått kontrollert om Missy og Kate fortsatt holdt på den additive tenkingen. Resultatet av denne kontrollen ville være et godt utgangspunkt for planlegging av neste undervisningsøkt.

Referanser

Bondø, A. (2016). *Kvikkbilder i arbeid med tallforståelse*. Matematikksenteret. Hentet fra <http://www.matematikksenteret.no/content/4791/Artikler>

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2013). *Thinking Mathematically. Integrating Arithmetic & Algebra in Elementary School*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Kazemi, E. & Hintz, A. (2014). *Intentional Talk. How to structure and lead productive mathematical discussions*. Portland, Oregon: Stenhouse Publishers.

Kilpatrick, J. & Swafford J. ed. (2002). *Helping Children Learn Mathematics*. Washington DC, National Academy Press.

NCTM (2014). *Principles to Actions. Ensuring Mathematical Success for All*.

Skemp, R. R. (1987). *Psychology of Learning Mathematics. Expanded American Edition*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Smith, M. S. & Stein, M. K. (2011). *5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions*. Reston, VA: NCTM

Svingen, O. E. L. (2016). *Barns strategier i arbeid med tall*. Matematikksenteret. Hentet fra <http://www.matematikksenteret.no/content/4791/Artikler>

Vesterdal, A. L. Ø. (2011). *Kommunikasjon mellom lærer og elever i et undersøkende og et tradisjonelt matematikklasserom*. Trondheim, NTNU.