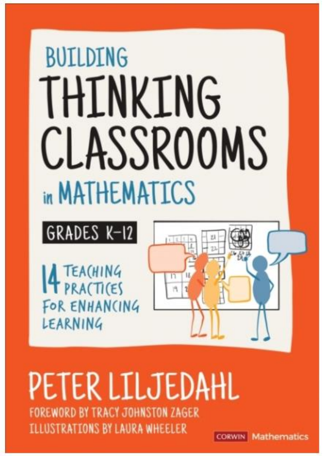
# Tenkende klasserom i videregående skole

Julian Folkman Rossnes, Ole Kristian Nordsveen og Malin Lando
Kontakt oss gjerne: malin.lando@osloskolen.no

# Peter Liljedahl




2021

- Svensk-kanadisk matematiker og professor ved Simon Fraser University, Vancouver.

- 15 år med forskning der han observerte ulike klasserom. Oppdaget at det er lite tenking i klasserommene i matematikk. Elevene hermer i stedet etter læreren:

«I do, you do» → «mimicking»

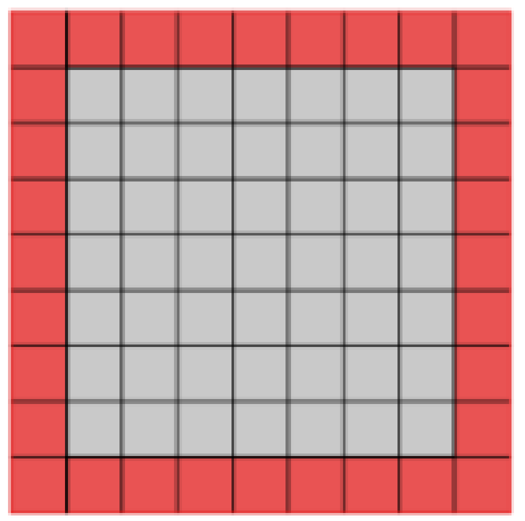
- Gjennom utprøving fant han 14 grep som førte til mer tenking blant elevene.

# Verksted:

- Utprøving av 2 oppgaver: Generell problemløsning og funksjoner
- Om oppgaver
  - Hvordan lage utforskende opplegg?
  - Hvordan endre tradisjonelle oppgaver til å bli mer utforskende?
  - Eksempler
- Teori rundt metoden med fokus på toolkit 1
- Våre erfaringer
  - Hva sier elevene?
  - Hvilke utfordringer støter vi på?
  - Hvordan har vi jobbet?
- Spørsmål og diskusjon

# Oppgave 1 - Rammeoppgaven

Figuren er et kvadrat med 81 ruter. De røde rutene ytterst kaller vi rammen i kvadratet.

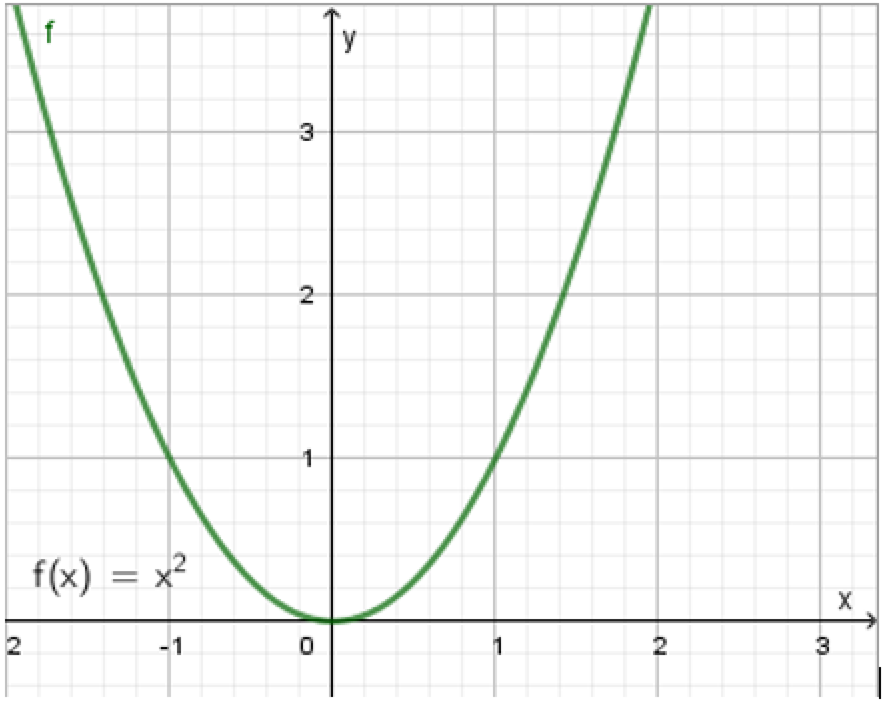


*Hentet fra mattelist.no*

Hvor mange ruter er det i rammen? Tegn en skisse av figuren og marker hvordan du har tenkt.

# OPPGAVE – Flytting av grafer

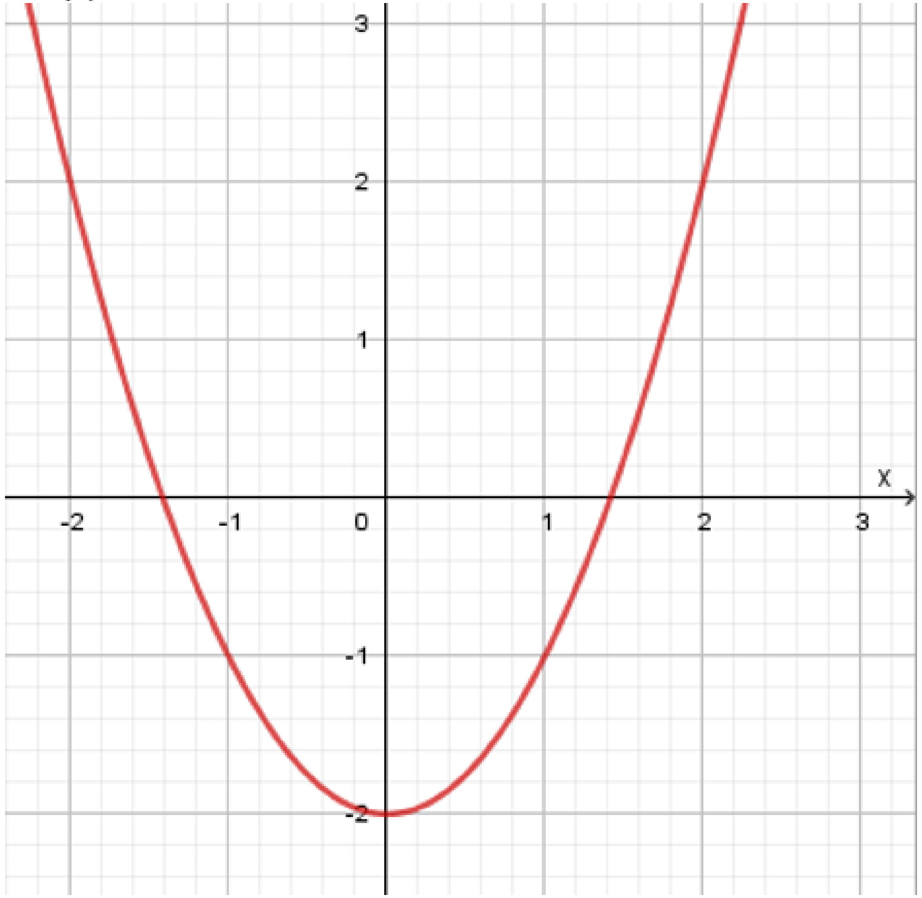
## Oppgave 1




Bildet over viser grafen til funksjonen $f(x) = x^2$.

a) En funksjon $g(x)$ ser lik ut som $f$, men har sitt bunnpunkt i $(0,1)$. Hva er funksjonsuttrykket til $g(x)$?

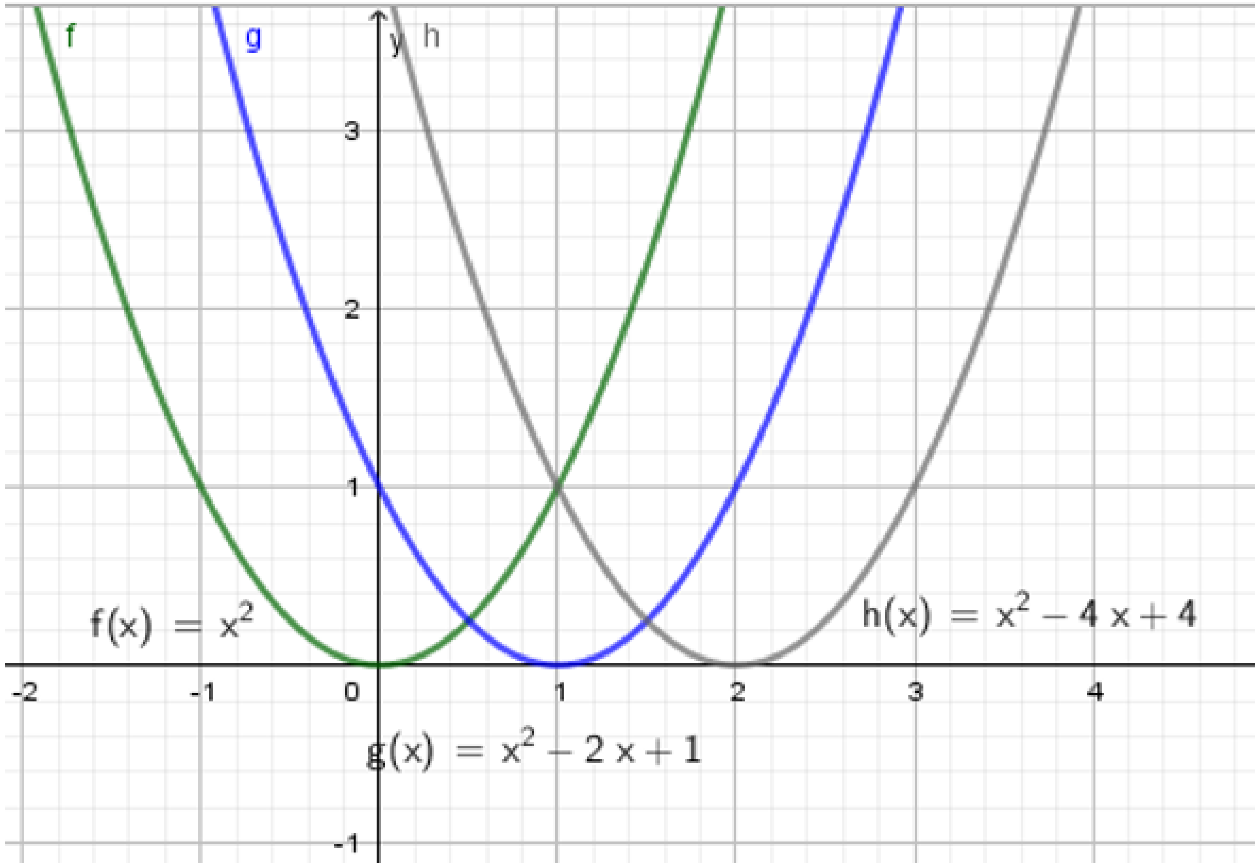
b) En tredje funksjon, $h(x)$, har grafen som vises på bildet under. Bruk dette til å finne funksjonsuttrykket til $h(x)$:




c) Oppsummer hva oppgavene over forteller.

# OPPGAVE – Flytting av grafer

## Oppgave 2



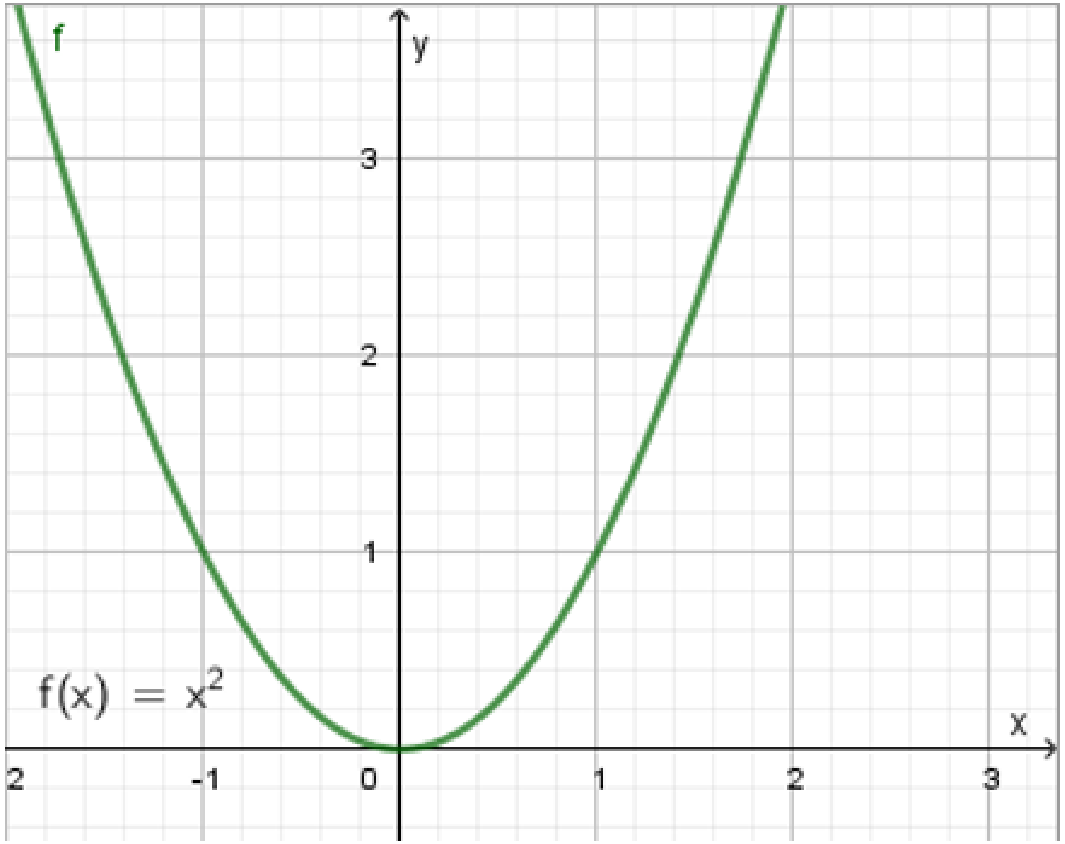

a) Funksjonen $i(x)$ har en graf som ser ut som grafen til de tre funksjonsgrafene vist på bildet over. $i(x)$ har bunnpunkt i (3,0). Hva er funksjonsuttrykket til $i(x)$?

b) Funksjonen $j(x)$ har en graf som ser ut som grafen til de tre funksjonsgrafene vist på bildet over. $j(x)$ har bunnpunkt i $(-4{,}0)$. Hva er funksjonsuttrykket til $j(x)$?

c) Oppsummer hva oppgavene over forteller.

# OPPGAVE – Flytting av grafer

## Oppgave 3




Bildet over viser grafen til funksjonen $f(x) = x^2$.

Hvordan må vi forandre på funksjonsuttrykket til $f(x)$ for at bunnpunktet i stedet skal ligge i $(-2, 4)$?

# Begrunnelse for valg av oppgave

**Tilknytning til tidligere læring og forkunnskaper:**

- Kvadratsetningene
- Faktorisering
- Bygge ut til fullstendig kvadrat
- Største og minste verdi
- Løse andregradsligninger

→

**Forbindelse til videre læring:**

- Parabel
- Symmetrilinje
- Topp- og bunnpunkter
- Nullpunkter for polynomfunksjoner og polynomdivisjon

Aktuelle kompetansemål:

- utforske sammenhenger mellom andregradsligninger og andregradsulikheter, andregradsfunksjoner og kvadratsetningene og bruke sammenhengene i problemløsing
- forklare forskjellen mellom en identitet, en ligning, et algebraisk uttrykk og en funksjon

# Hvordan lage utforskende opplegg til tenkende klasserom?

- Baklengs planlegging:
  - Hva vil vi at elevene skal kunne?
  - Hva av dette er det overkommelig at de oppdager på egenhånd?
  - Hvordan kan oppgaven se ut for at elevene skal oppdage det?

- Elevene skal ikke kjenne til prosessen, men de må ha verktøyene som kreves for prosessen.

- Liljedahl: Engasjerende, «prøve og feile», skape kreativitet, lavt gulv og høyt tak, åpen og rik.

# 4 tips til hvordan man kan endre tradisjonelle oppgaver til å bli mer utforskende:

**Tips 1: Varier eller bytt representasjon**

Tradisjonelt:

Løs likningen ved regning $3x + 4 = 16 - x$

Tenkende klasserom:

Start gjerne med å løse ligningen ved regning, men utvid med:

- Kan du løse denne grafisk?
- Kan du løse den ved å lage verditabeller?

# 4 tips til hvordan man kan endre tradisjonelle oppgaver til å bli mer utforskende:

**Tips 2: Snu eller vri på oppgaven**

Tradisjonelt:

Løs ulikheten $x^2 - 3x < 4$

Tenkende klasserom:

Alternativ 1: Kan dere endre høyresiden slik at ulikheten aldri er oppfylt?

Alternativ 2: Kan dere finne en ulikhet som har løsningsmengde $x \in [0,3]$?

# 4 tips til hvordan man kan endre tradisjonelle oppgaver til å bli mer utforskende:

## Tips 3: Bruk dialog for å gi hint og iscenesette diskusjoner

Trym og Eira arbeider med oppgaven nedenfor.

> Funksjonen $f$ er gitt ved
>
> $$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$
>
> Bestem koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til $f$.

Jeg ser med én gang at grafen må ha et topp- eller bunnpunkt som ligger på $y$ - aksen.

Hvordan ser du det?

Funksjonsuttrykket har ikke et førstegradsledd. Da må det være slik.

Hvorfor det? Vil det alltid være slik?

Ja, i alle fall for alle tredjegradsfunksjoner. Det har jeg lært meg.

Men det er jo ikke slik for grafen til $x^3$.

Æsj! Det stemmer.

Det kan jo hende du har litt rett likevel, men at det er noe mer vi må se etter?

a) Løs oppgaven elevene arbeider med.

b) Ta utgangspunkt i dialogen ovenfor. Utforsk og kommenter Trym sin «regel».

# 4 tips til hvordan man kan endre tradisjonelle oppgaver til å bli mer utforskende:

**Tips 4:** «Thin slicing»

- Ta utgangspunkt i noen elevene kan fra før og legg til ett og ett moment.
- Hver nye oppgave er litt vanskeligere enn forrige.

| |
|---|
| $3x = -5$<br>$5x + 12 = 3x - 6$<br>$2x + 18 = 0$ |
| $x^2 = 16$<br>$x^2 - 9 = 0$ |
| $(x-2)^2 = 9$<br>$(x-2)^2 = -9$<br>$(x-3)^2 + 5 = 21$ |
| $x^2 + 2x + 1 = 25$ |
| $x^2 + 4x + 1 = 25$<br>$x^2 - 7x + 1 = 0$<br>$3x^2 + 9x + 5 = 0$<br>$-\frac{1}{2}x^2 + 6x - 1 = 0$ |

# Eksempel på opplegg om andregrads-funksjoner i tenkende klasserom:

## Tradisjonelt:

Lærer forteller hvordan konstantene *a* og *c* påvirker grafen til andregradsuttrykket $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Elevene får et sett uttrykk og skal bestemme om de har topp- eller bunnpunkt og hvor de skjærer y-aksen.

## Tenkende klasserom:

### Oppgave 1

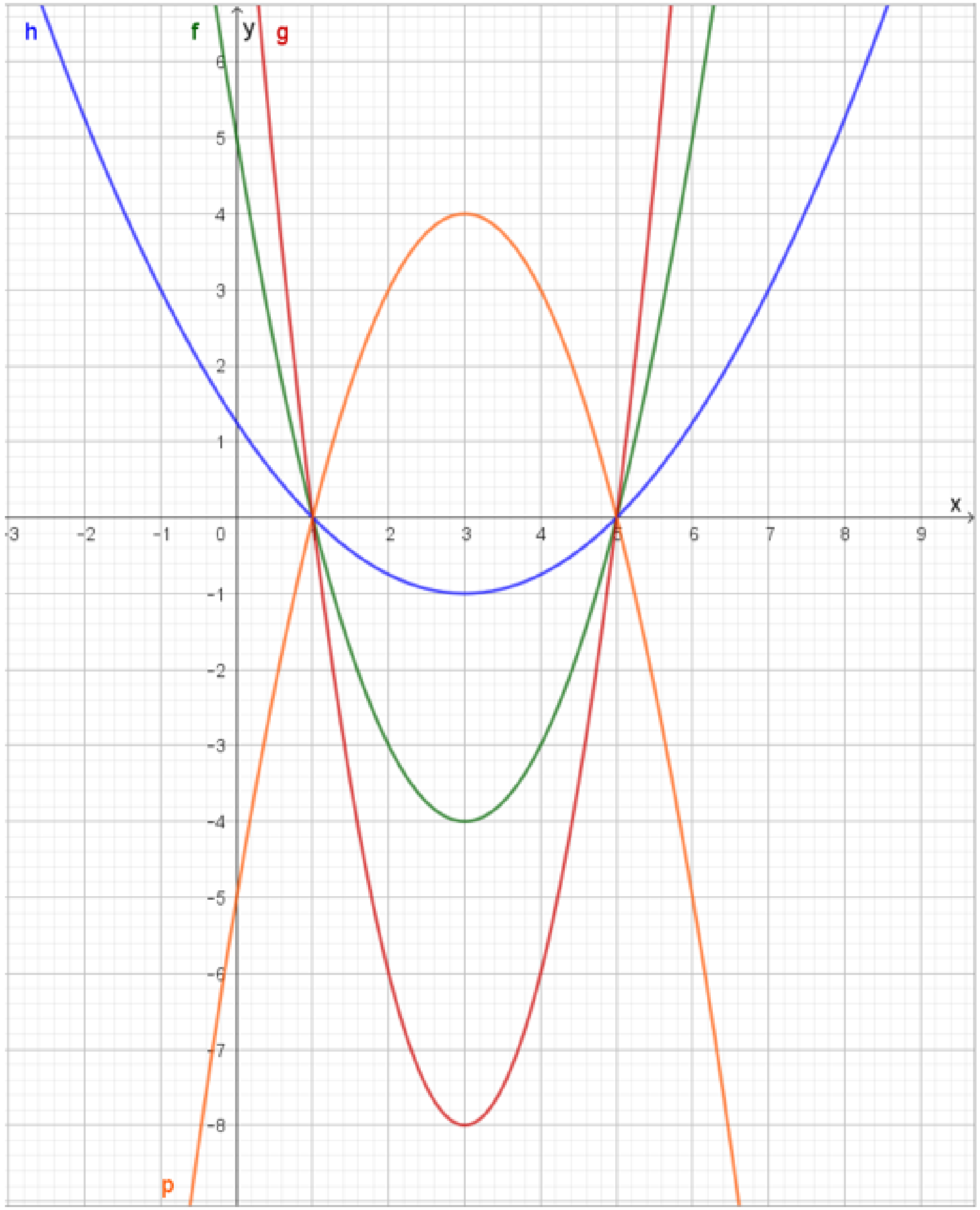
Dere har jobbet mye med andregradsuttrykk, f.eks. $x^2 - 6x + 5$. Hvordan vil det se ut i et koordinatsystem hvis vi lar y-verdien bestemmes av et slikt uttrykk? Dvs. at vi skriver

$$y = x^2 - 6x + 5$$

Da blir dette en andregradsfunksjon, og vi kan da også velge å skrive $f(x) = x^2 - 6x + 5$

Bruk det dere kan om funksjoner og andregradsuttrykk til å tegne grafen.

### Oppgave 2




På bildet over ser dere fire andregradsfunksjoner. Hva er funksjonsuttrykkene deres?

Kan dere beskrive likheter/forskjeller og hva dere tror dette skyldes?

# Tenkende klasserom: 14 faktorer som fremmer tenking

1. Oppgaver som stimulerer til tenking
2. Synlig tilfeldige treergrupper
3. Vertikale tavler

**Toolkit #1**

4. Møblering i klasserommet
5. Spørsmålsrespondering
6. Når, hvor og hvordan oppgaver gis
7. Lekser
8. Elev-autonomi

Toolkit #2

9. Hint og «utvidelser»
10. Konsolidering
11. Notater

Toolkit #3

12. Evaluering
13. Formativ vurdering
14. Karaktersetting

Toolkit #4

# 2 Synlig tilfeldige treergrupper

**Hvorfor jobbe i gruppe?**

- Gruppearbeid stimulerer viktige egenskaper som å kunne lytte, uttrykke egne ideer, forklare andre noe man selv har forstått osv.

**Hvorfor akkurat 3?**

- Forskningen viser at 3 personer er det ideelle antallet. Da er det mange nok til å skape dynamikk og mindre sjanse for at noen melder seg ut.

**Hvorfor synlig tilfeldige grupper?**

- Skaper frihet fra roller og tar bort forutinntatte forventninger
- **Godt klassemiljø!**

# 3 Vertikale tavler

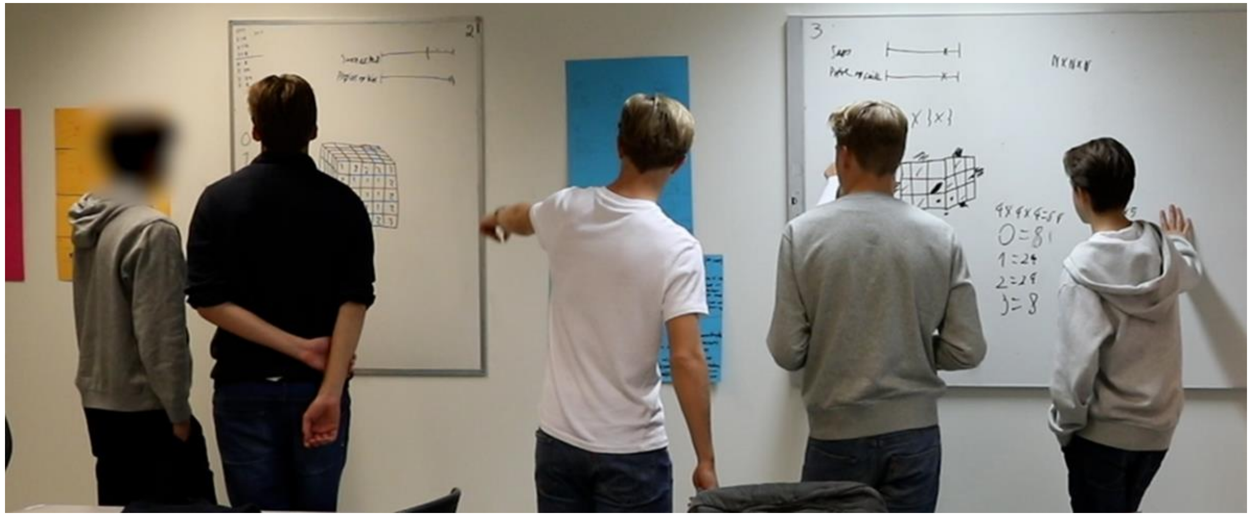
Hver treer-gruppe får sin egen tavle. Gruppa får én tusj på deling.

- Elevene blir mindre anonyme
- Lettere å gestikulere: >50% av kommunikasjonen er ikke-verbal
- Samme orientering til arbeidet
- Mulighet til å se på andre grupper: Det er tenkingen og forståelsen som er viktig, ikke resultatet
- Fremmer evner som kommunikasjon, utholdenhet, tålmodighet, å ta sjanser
- Lærer får større innsyn i elevenes arbeide

# Våre erfaringer: Hva sier elevene om metoden?

**Positivt:**

- Gøy, engasjerende, sosialt
- Ser andres metoder
- Hører andre forklare
- Øver selv på å forklare
- Dele på tusjen, skrive andres ideer
- Fint å få diskutere
- Går til andre grupper for å få hint
- Blir bedre kjent



# Våre erfaringer: Hva sier elevene om metoden?

Jeg syns tavleoppgaver i grupper er utrolig morsomt, og føler at jeg selv blir mye mer interessert og nysgjerrig.

Jeg liker problemløsnings-oppgavene vi gjør på tavlene, hvor vi selv må tenke og komme fram til en løsning.

Trekanttall som jeg aldri har hatt på ungdomsskolen fikk jeg til bedre enn enkle brøkoppgaver som har vært pensum tidligere. Jeg ble overrasket over hvor mye jeg ubevisst har lært av tavleoppgavene, selv om det var mye feil og mye å bli bedre på.

# Våre erfaringer: Hva sier elevene om metoden?

**Positivt:**

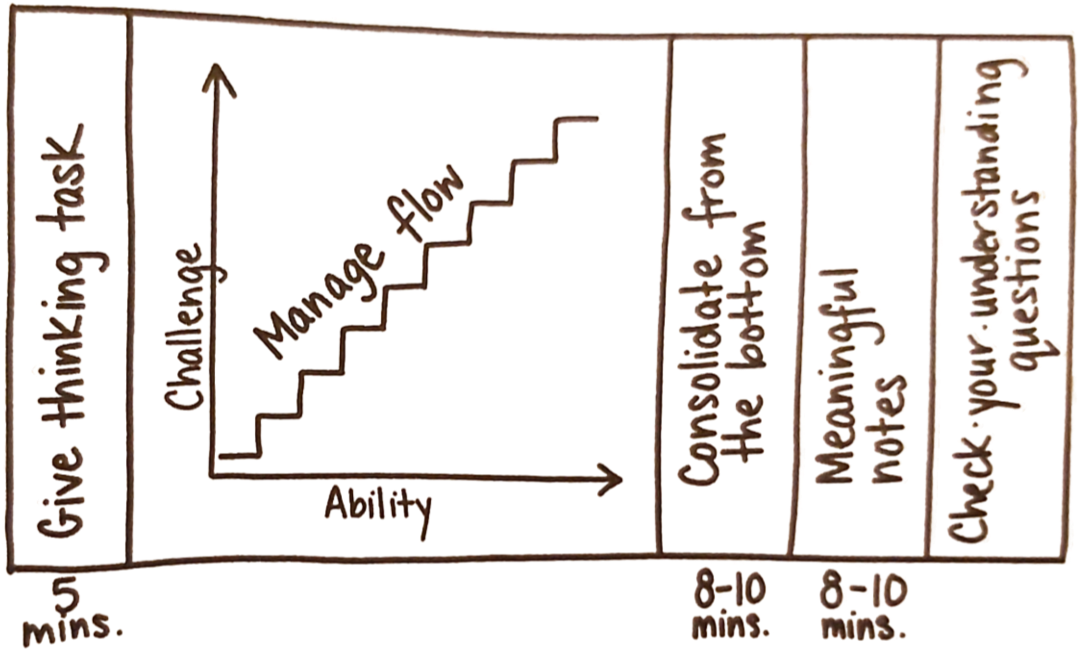
- Gøy, engasjerende, sosialt
- Ser andres metoder
- Hører andre forklare
- Øver selv på å forklare
- Dele på tusjen, skrive andres ideer
- Fint å få diskutere
- Går til andre grupper for å få hint
- Blir bedre kjent

**Negativt:**

- Lenge ved tavler, for lite tid til oppgaver
- Mister konsentrasjonen etter hvert
- Noen tar styringen eller melder seg ut
- Redd for å si feil
- Noen ganger er det ingen som skjønner hva vi skal gjøre
- Vanskelig å forklare andre når man selv ikke helt har skjønt oppgaven

# Lærernes utfordringer ved metoden

1. Tid! Hvordan legge opp en økt?




2. Hvordan sørge for at alle gruppene er i flytsonen?
3. Hvordan sørge for at alle gruppemedlemmer er engasjerte?
4. Hvordan vite at alle på gruppa forstår?

# Hvordan jobber vi med prosjektet?

- Oppstarten høsten 2022:
  - Testet ut i alle 1T-klasser
  - 1T gitt til lærere som ønsket å bli med
  - Pedagogisk utviklingstid 90 min hver uke
  - Så videoer, leste boka og kapittel for kapittel ble tatt for seg utover høsten og prøvd ut i klasserommet

- 2023-2024:
  - 2 prosjektledere, avdelingsleder, alle 1T og 1P-lærere
  - Pedagogisk utviklingstid 90 min hver uke
  - Lager felles oppgaver, deler erfaringer
  - Fordypning i ulike deler av metoden