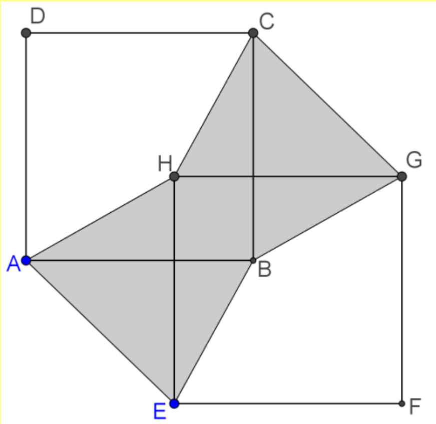
Oppgave 1

ABCD og *EFGH* er like store kvadrater.
AB||*EF* og *AD*||*EH*. Det fargelagte området
har areal 1.

Hvor stort er arealet til kvadratet *ABCD*?



A 1 B 2 C ½ D 3/2

E Det kommer an på hvordan man plasserer kvadratene

Tips til veiledning:

- Tenk dere at dere deler opp det grå feltet og flytter på bitene. Hvor mye av de grå bitene trengs for å fylle kvadratet *ABCD*?
- Klipp ut figuren og alle de grå bitene som ligger utenfor kvadratet *ABCD*. Legg disse inn i kvadratet *ABCD.* Hvor stor del av det hvite området blir fylt?

Hvis noen vil løse oppgaven ved regning, må de bruke bokstaver som representasjon for noen av linjestykkene i figuren:

- Hvilke linjestykker vil dere velge? Prøv å bruke så få ukjente som mulig. Skriv bokstavene inn på figuren.
- Hva slags firkant får vi der kvadratene overlapper?
- Del opp det grå området i figurer som dere kan finne arealet av. Ved hjelp av de ukjente linjestykkene dere har valgt kan dere lage uttrykk for disse arealene.
- Hvor stor er summen av alle de grå arealene? Og hva er uttrykket for arealet av kvadratet *ABCD* når dere bruker de bokstavene dere har valgt?

Videre utforskning:

- Vil arealet av kvadratet *ABCD* være avhengig av størrelsen på firkanten der de overlapper (firkanten med hjørner *H* og *B*)?
- Dette problemet kan utforskes i GeoGebra. Begynn med å tegne to like store kvadrater der *AB*||*EF* og *AD*||*EH*. Marker mangekanten *AEBGCJ* og kvadratet *ABCD* og få fram arealene til de to figurene. Flytt kvadratene i forhold til hverandre og se hva som skjer med det grå arealet. Forklar.

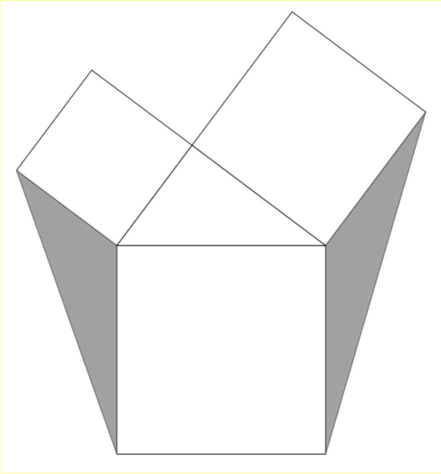
Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Oppgave 2

Trekanten i midten av figuren har sidelengder 3, 4 og 5. Et kvadrat er tegnet utvendig på hver av sidene.

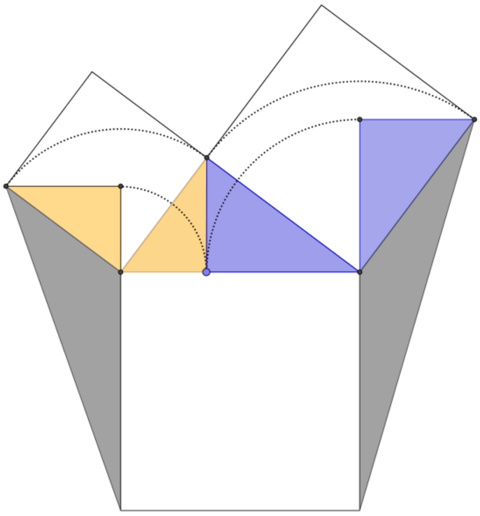
Hva er summen av arealene til de to skyggelagte trekantene?

A 12 B 15 C 18 D 24 E 25



Tips til veiledning:

- Skriv de opplysningene dere kjenner inn i figuren.
- Hva slags trekant er trekanten i midten av figuren?
- Figuren til høyre kan være til hjelp for noen elever:
  Hva vil figuren vise?
  Kan figuren brukes til å finne lengder av linjestykker du kan trenge?
  OBS. Figuren finnes i stort format blant oppgavearkene.
- Tegn eller kopier figuren til høyre og klipp opp figuren langs de rette linjene. Flytt på de gule og blå bitene og kontroller at figuren til høyre stemmer, dvs. at vi kan dele trekanten i midten i to deler som kan flyttes ut og inntil de to grå trekantene.
- Begge de to grå trekantene har en side med lengde 5.
  Hvis dere betrakter disse som grunnlinjer i trekantene, hva blir da høydene?
- Hva er arealet av hver av de grå trekantene?
- Hvor stort blir arealet av hver av de to grå trekantene sammenlignet med trekanten i midten?



Videre utforskning:

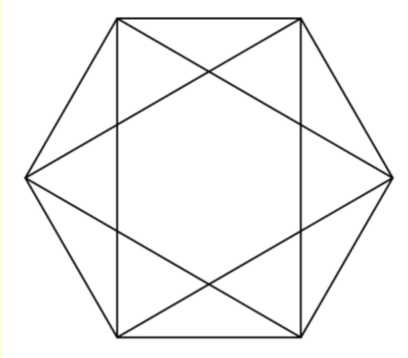
Også denne oppgaven er egnet for videre utforskning i GeoGebra:

- Tegn en rettvinklet trekant med kvadrater på alle sidene.
- Finn arealene av de to grå trekantene ved å tegne dem som «Mangekanter».
- Sammenlign arealene av de grå trekantene med arealet av den rettvinkla trekanten. Hvordan går det med forholdet mellom arealene når dere varierer størrelsen på den rettvinkla trekanten?
- Dere kan også markere de to små trekantene (den gule og den blå på figuren ovenfor) og rotere dem om hvert sitt hjørne som figuren viser.

Oppgave 3

I figuren er det to regulære sekskanter.

Hva er forholdet mellom arealene til den største og den minste sekskanten?



A 2 B 3 C $2\sqrt{3}$ D 4 E Ingen av disse

Tips til veiledning:

- Hva menes med «forholdet mellom arealene»?
- Marker de to regulære sekskantene i figuren.
- Siden vi skal sammenligne to arealer der ingen størrelser er angitt, kan vi angi lengden av et linjestykke i figuren, f.eks. sette lengden av sidekanten i den store sekskanten lik 1 eller a.
- Trekk flere hjelpelinjer og del figuren opp i flere smådeler som kan sammenlignes. Tegn eller klipp.
- Marker den seksarmede stjerna inne i figuren. Del opp den lille sekskanten ved diagonaler gjennom midtpunktet. Da får dere seks trekanter. Sammenlign arealet av disse og arealet av trekantene som danner spissene på stjerna.
- Hvor stort areal har trekantene som ligger inne i den store sekskanten, men utenfor stjerna?

Eller:

- Finn forholdet mellom sidene i de to sekskantene. Bruk dette forholdet til å finne forholdet mellom arealene. Hvorfor og hvordan?

Veiledningen må følge det utgangspunktet eleven velger. Noen vil beregne arealer, mens andre vil leite etter arealer som kan sammenlignes, f.eks. deler av figuren som er like store.

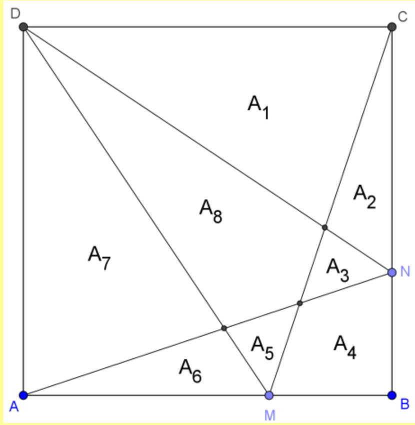
Videre utforskning:

- Inne i den store sekskanten er det en regulær, seksarmet stjerne. Hva er forholdet mellom arealene av den lille sekskanten og stjerna? Og hva er forholdet mellom arealene av stjerna og den store sekskanten?
- Tegn figuren i GeoGebra og kontroller løsningen.

Oppgave 4

I kvadratet *ABCD* ligger punktene *M* på *AB* og *N* På BC, tilfeldig plassert. Figuren deles inn i åtte deler med arealene $A_1, A_2, \ldots, A_8$, slik bildet viser.

Hvilket av følgende uttrykk er lik A_8?



A) $A_2 + A_4 + A_6$ B) $A_1 + A_4 + A_7$ C) $A_3 + A_4 + A_5$ D) $A_1 + A_3 + A_5 + A_7$

E) $A_2 + A_5 + A_7$

Tips til veiledning:

Her kan elevene prøve mange ulike veier til løsning. La dem få føle resonnement de har begynt på. Det er flere måter å se løsningen på.

- Er det noen svaralternativer som ser ut som de kan utelukkes? Hvorfor?
- Kopier figuren opp flere ganger og marker A_8 (kopieringsoriginal i oppgavesettet). Fargelegg løsningsalternativene i hver sin figur. Er det nå noen svaralternativer som ser ut som de kan utelukkes?
- Inne i kvadratet er det to store trekanter, *AND* og *CDM*. Hva er felles for disse to trekantene?
- Sammenlign grunnlinjer og høyder i de to trekantene (*AND* og *CDM)*.
- Hvor stor del av arealet i kvadratet utgjør hver av disse trekantene (*AND* og *CDM*)?
- Hvor stor del av arealet utgjør de to trekantene til sammen?
- Sammenlign arealet hvor de to trekantene overlapper hverandre og arealet som ligger inne i kvadratet men utenfor begge trekantene. Tips: det kan være enklere å se hvis man fargelegger.
- Hvorfor må disse to arealene være like store?

Eller:

- Hvor stor del av arealet til kvadratet utgjør $A_1 + A_8 + A_5$?
- Fins det noe areal som er like stort som $A_1 + A_8 + A_5$ og som inneholder trekantene A_1 og A_5?
- Og hvor stor del av arealet til kvadratet utgjør $A_1 + A_2 + A_4 + A_5 + A_6$?
- Sammenlign disse to arealene med hverandre, dvs. sett dem lik hverandre og finn hvilket areal A_8 er lik.

Ekstra utfordring:

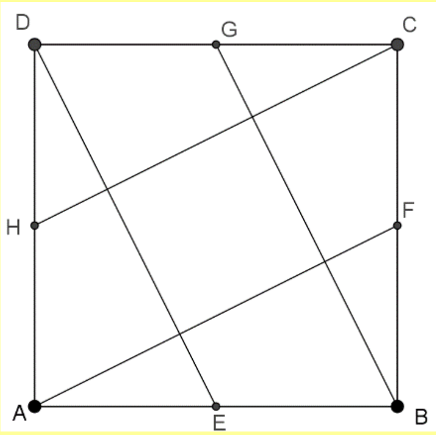
- Bruk et ark der kvadratet i oppgaven er kopiert mange ganger. Fargelegg områder som utgjør *halvparten* av kvadratets areal på flest mulig måter. Skriv opp hvilke arealer som fargelegges i hvert tilfelle. Hvor mange kombinasjoner finner dere?

Også denne oppgaven kan utforskes videre i GeoGebra:

- Tegn et kvadrat *ABCD* og sett av punktene *N* på *AB* og *M* på *BC.* Tegn alle linjestykkene inne i figuren og marker arealet til mangekanten A_8 og arealet som er oppgavens løsning (sum av arealer av mangekanter). Er disse arealene like store? Flytt *N* og M langs sidekantene og undersøk om løsningen er uavhengig av hvor disse punktene er plassert. Forklar.

Oppgave 5

Et kvadrat *ABCD* med sidelengde 1 er gitt. Punktene *E*, *F*, *G* og *H* ligger midt på hver sin sidekant, slik figuren viser. Linjene *AF*, *BG*, *CH* og *DE* trekkes. Da dannes et kvadrat inne i figuren.



Hva er forholdet mellom arealet av det store kvadratet og det lille?

$A\ \frac{1}{2}$ $B\ \frac{1}{3}$ $C\ \frac{1}{4}$ $D\ \frac{1}{5}$ $E\ \frac{1}{6}$

<u>Tips til veiledning:</u>

- Hva menes med «forholdet mellom arealene»?
- Er det noen svaralternativ dere tror dere kan utelukke? Hvorfor?

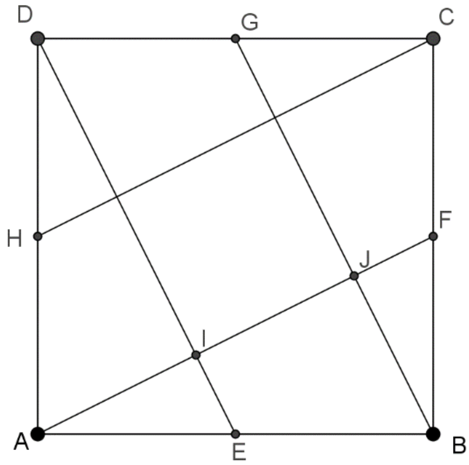
Til elever som vil løse problemet geometrisk:

- Klipp ut kvadratet og klipp opp figuren langs alle linjene.
- Legg bitene sammen på nye måter.
- Legg bitene slik at de danner like store kvadrater som kvadratet i midten.
- Hvor mange kvadrater av samme størrelse kan dere legge?

Til elever som vil løse problemet ved regning:

- Finn kongruente og formlike trekanter og firkanter i figuren.

- I stedet for å finne arealet til det lille kvadratet i midten: Finn arealet som ligger *utenfor* dette kvadratet, men innenfor det store.
- Vis at trekantene *ABF*, *ABJ* og *AEI* er formlike. Dette kan dere bruke til å finne flere lengder i figuren. Hvilke lengder trenger dere å finne?



Fasit:

Oppgave	Løsning
1	A
2	A
3	B
4	A
5	D

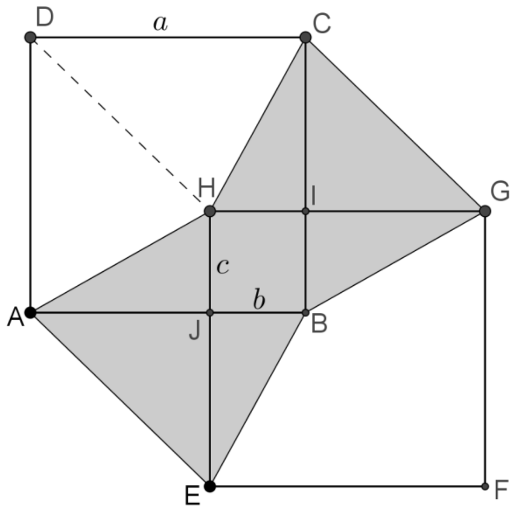
Forklaringer

Oppgave 1

Geometrisk løsning:

$$\triangle AHD \cong \triangle BCG$$
$$\triangle DCH \cong \triangle ABE$$

Hvorfor?



De to trekantene *BGC* og *ABE* vil til sammen ha samme areal som det hvite feltet i kvadratet *ABCD*.

Løsning ved klipping:

Samme løsning finnes ved å klippe ut trekantene *ABE* og *BCG* og legge dem inn i det hvite området i kvadratet *ABCD.*

Algebraisk løsning:

Firkanten BIHJ er et rektangel. Setter sidene i de store kvadratene lik *a* og sidene i rektangelet i midten lik *b* og *c*. Summen av alle delene av det grå området blir

$$1 =$$
$$\triangle BCG + \triangle HIC + \triangle JHA + \triangle ABE + \square JBIH =$$
$$\frac{a\cdot(a-b)}{2} + \frac{b\cdot(a-c)}{2} + \frac{c\cdot(a-b)}{2} + \frac{a\cdot(a-c)}{2} + bc =$$
$$\frac{a^2 - ab + ab - bc + ac - bc + a^2 - ac}{2} + bc = a^2$$

Det fargelagte området er like stort som arealet av ett kvadrat, dvs. at kvadratet *ABCD* har areal 1.

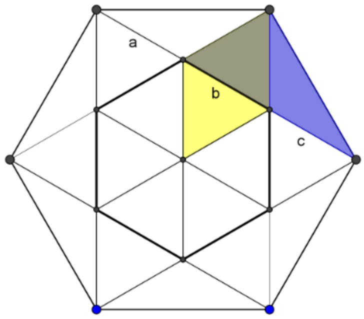
Firkanten i midten er et rektangel, i spesielle tilfeller er det også et kvadrat. Uansett hvor stor eller liten vi gjør overlappingen, vil det grå arealet være like stort som ett av de store kvadratene.

Oppgave 2

Begge de to trekantene har grunnlinje 5 og høyde 12/5. Med andre ord har de begge samme areal som trekanten i midten.

Oppgave 3

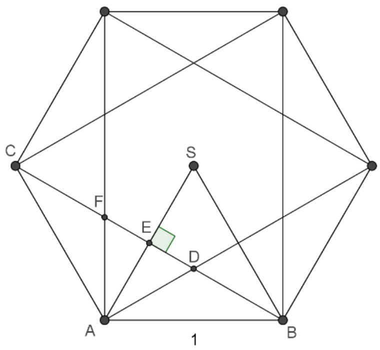
Geometrisk løsning:



Diagonalene i den store sekskanten deler hverandre i tre like lange deler, $a = b = c$. Hvorfor? Den gule og den grå trekanten på figuren er kongruente likesidede trekanter. Hvorfor? Den grå og den blå trekanten har samme grunnlinje og samme høyde, dvs. at de har samme areal. I den lille sekskanten fins det seks og i den store fins det atten trekanter med like stort areal.

Man kunne også ha beregnet arealene til trekantene med linjestykket som svarer til $a + b + c$ på figuren som grunnlinje og lagt dem sammen med arealene til de øvrige små kongruente likesidede trekantene.

Geometrisk løsning med litt regning:



Setter sidelengdene i den store sekskanten lik 1, $AB = 1$.

Vil finne sidelengden i den lille sekskanten, DF, og bruke forholdet mellom sidene i sekskantene til å finne forholdet mellom arealene:

Trekant ABS er likesidet med sidelengde 1, og BE er en høyde i trekanten.

$$BE = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$BC = 2BE = 3DF$, så

$$DF = \frac{1}{3} \cdot 2BE = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{AB}{DF} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\frac{\text{Areal store sekskant}}{\text{Areal lille sekskant}} = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

Oppgave 4

$$\text{Areal } \triangle CDM = \text{Areal } \triangle ADN = \text{ areal av halve kvadratet}$$
$$\text{Areal } \triangle CDM + \text{Areal } \triangle ADN = \text{ arealet av hele kvadratet}$$
$$(\cancel{A_1} + \cancel{A_8} + \cancel{A_5}) + (\cancel{A_7} + A_8 + \cancel{A_3}) = \cancel{A_1} + A_2 + \cancel{A_3} + A_4 + \cancel{A_5} + A_6 + \cancel{A_7} + \cancel{A_8}$$

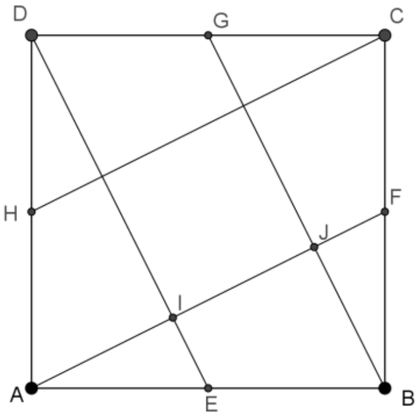
Eller

$$\cancel{A_1} + \cancel{A_5} + A_8 = \cancel{A_1} + A_2 + A_4 + \cancel{A_5} + A_6$$

Begge sider representerer halvparten av kvadratets areal.

Oppgave 5

Vil finne *IJ*, og så *IJ*^{2}.



$$AF = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$IJ = \frac{2}{5} AF$$ fordi

$\triangle ABF \sim \triangle AJB \sim \triangle AIE \cong \triangle BJF$. Trekantene er rettvinklede og

$$\text{lille katet} = \frac{1}{2} \cdot \text{store katet}$$.

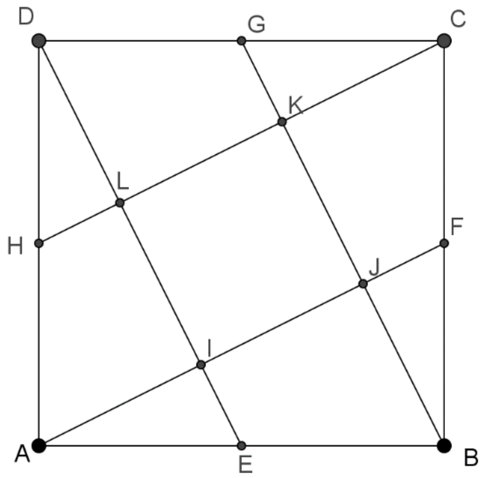
$$BJ = AI = \frac{1}{2} AJ = IJ$$

$$JF = \frac{1}{2} BJ = \frac{1}{2} IJ = \frac{1}{4} AJ = \frac{1}{5} AF$$

$$IJ = \frac{2}{5} AF$$

$$IJ = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$IJ^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \right)^2 = \frac{1}{5}$$



Dvs. det lille kvadratet er 1/5 av det store kvadratet som har areal 1.

En annen måte å tenke på er:

$\triangle ABJ \cong \triangle BCK \cong \triangle CDL \cong \triangle DAI$ og arealet av hele kvadratet er 1. Finner arealet av $\triangle ABJ$.

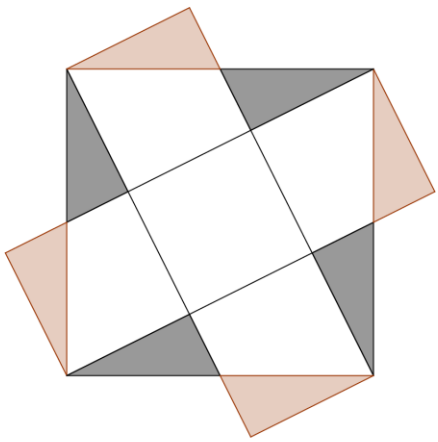
$$\triangle ABJ \sim \triangle AEI \;\; \text{og } AE = \frac{1}{2} \text{AB} \;\; \Rightarrow$$

$$\text{Areal}\triangle AEI = \frac{1}{4} \text{Areal}\triangle ABJ \;\; \text{og} \;\; \triangle AEI \cong \triangle BFJ \;\; \Rightarrow$$

$$\text{Areal}\triangle ABJ = \frac{4}{5} \text{Areal}\triangle ABF = \frac{4}{5} \cdot \frac{AB \cdot BF}{2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{5}$$

$$\text{Arealene } \triangle ABJ + \triangle BCK + \triangle CDL + \triangle DAI = \frac{4}{5}$$

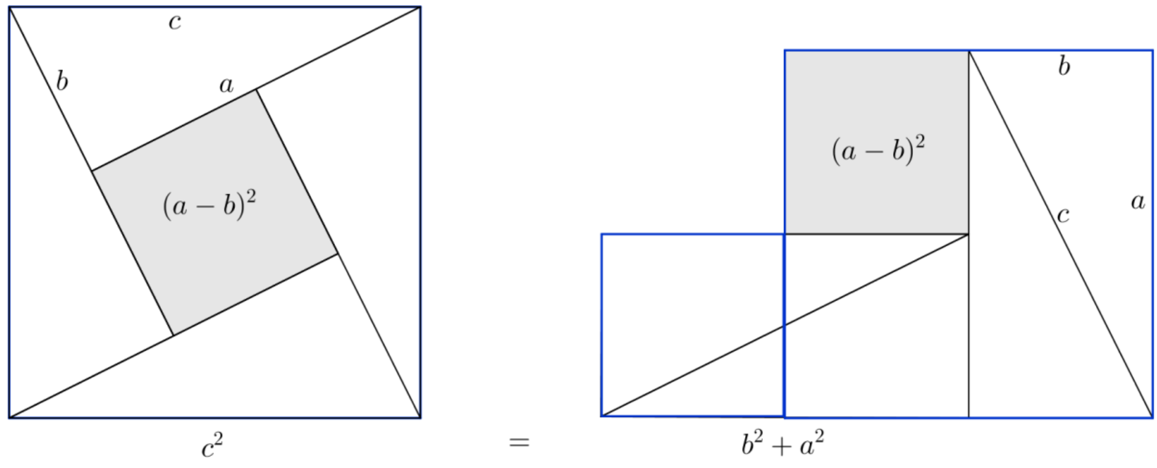
$$\text{Areal } \square IJKL = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$



Man kan også se løsningen ved å «klippe og flytte areal»:

Hvis vi klipper ut de fire små trekantene i hjørnene (grå) og legger dem ut slik figuren viser (lysebrunt), vil vi se at arealet av det store kvadratet kan bygges om til fem kongruente kvadrater, og det midterste kvadratet er ett av disse.

Det kan også være noen som assosierer figuren i oppgaven med følgende bevis for Pytagoras' setning:



I vårt tilfelle er $a = 2b$, så $c^2 = b^2 + 4b^2 = 5b^2 = 5(a-b)^2$, siden $b = a - b$.