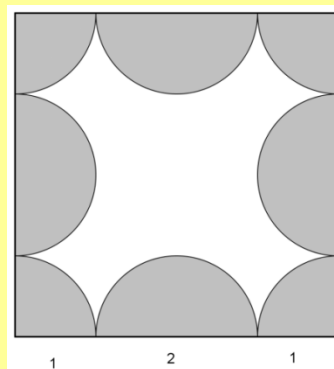


Oppgave 1

Hva er arealet av det grå området i figuren?

- A 3π B 5π C 6π D 9π E 12π



Tips til veiledning:

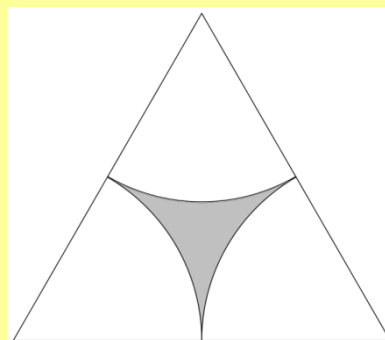
- Hva slags geometriske figurer er det grå området er sammensatt av?
- Finn grå områder som er like store.
- Tenk dere de mørke bitene satt sammen til figurer det er lett å finne arealet av? Forklar.
- Finn radius til sirklene? Har alle samme radius?
- Tegn en hjelpefigur og klipp ut de fargede bitene. Sett dem sammen til figurer som dere kan regne ut arealet av.

Oppgave 2 a

Fra en likesidet trekant med sidekant 2 fjernes alle punkter med avstand mindre enn 1 til ett av hjørnene, slik at vi står igjen med det grå området.

Hva er arealet av dette området?

- A $\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$ B $\sqrt{3} - \pi$ C $3 - \sqrt{\pi}$ D $3 - \pi$ E $2 - \frac{\pi}{2}$



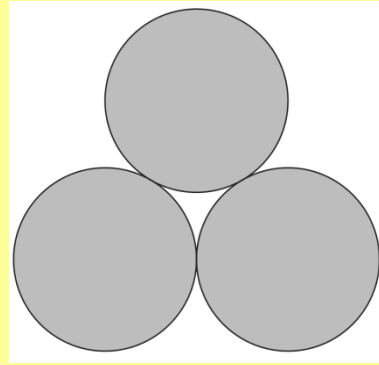
Tips til veiledning:

- Hva slags geometriske figurer avgrensner figuren dere skal finne arealet av?
- Hvor store er radiene i sirkelsektorene? Og hvor store er vinklene?
- Regn ut arealene av de tre hvite sektorene.
- Regn ut arealet av trekanten.
- Klipp ut trekanten og klipp langs linjene inne i trekanten. Sett sammen de hvite bitene slik at de utgjør et areal det er lett å beregne? Forklar.

Oppgave 2 b

Tre sirkler med radius 1 tangerer hverandre.

Finn arealet av det hvite feltet midt mellom sirklene?



- A $\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$ B $\sqrt{3} - \pi$ C $3 - \sqrt{\pi}$ D $3 - \pi$ E $2 - \frac{\pi}{2}$

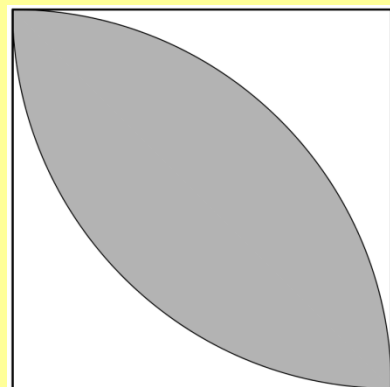
Tips til veiledning:

- Skriv på mål i tegningen.
- Tegn inn hjelpelinjer i figuren, - prøv å avgrense en eller flere figurer som dere kan beregne arealet av.
- Trekk linjestykker mellom sentrene. Hva slags figur får dere?
- Hva vet dere om trekanten dere får? Hvor lange er sidene? Hvor store er vinklene?
- Finn arealet av denne figuren.
- Inne i trekanten avgrenses tre sirkelsektorer. Finn arealet av disse.
- Hvis dere har en figur som inneholder hele det hvite feltet, kan dere se bort fra alt som ligger *utenfor* denne figuren.

Oppgave 3 a

To sirkler har radius 1 og sentrum i to motstående hjørner i et kvadrat med sidelengde 1.

Hva er arealet av området som ligger inni begge sirklene (det grå området på figuren)?



- A $\frac{\pi}{2}$ B $\pi - 1$ C $\frac{\pi}{2} - 1$ D $\frac{1}{2}$ E $\frac{1}{\pi}$

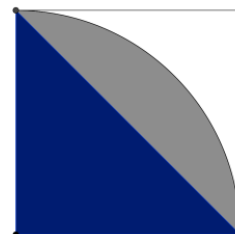
Tips til veiledning:

Lærerveiledning

- Forklar hvilke geometriske figurer oppgaven er satt sammen av. Marker og skriv mål på figuren.
- Hvilke arealer vil dere begynne å regne ut?
- Hvilke opplysninger trenger dere for å finne disse arealene? Har dere de opplysningene dere trenger?
- Tegn diagonalen som går gjennom det grå området.

Det er flere måter å løse dette problemet på. Veiledningen til elevene må følge av måten de har valgt å starte løsningen på.

- Inne i kvadratet ligger to kvarte sirkelsektorer med radius 1.
 - Hvor stor er hver sektor?
 - Hvis dere legger sammen arealene av de to sirkelsektorene, hvor stort er arealet som må trekkes ifra?
 - Arealet av området hvor sektorene overlapper hverandre må være summen av sektorenes areal minus kvadratets areal. Hvorfor?
 - Klipp ut to kvarte sirkler med samme radius og legg dem sammen inne i et kvadrat slik som på figuren. Marker området dere skal finne arealet av. Hvor stort areal må dere klippe bort?
- En annen måte er først å finne størrelsen av det hvite arealet inne i kvadratet.
 - Hvor stort er arealet av en sirkelsektor?
 - Hvor stort er arealet av kvadratet minus én sirkelsektor? Marker dette området på figuren.
 - Regn ut det samlede arealet for de hvite områdene
 - Finn arealet av det mørke området ved å bruke arealet av de hvite områdene.
- En tredje måte er å begynne med å finne arealet av én sirkelsektor og så trekke ifra arealet av en trekant.
 - Hvor stort er arealet av sektoren på figuren til høyre?
 - Hvor stort er arealet av den mørke trekanten?
 - Finn arealet av det grå segmentet på figuren.

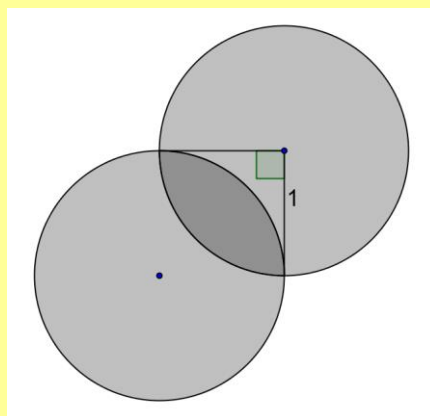


Oppgave 3 b

To sirkler med radius 1 overlapper hverandre slik figuren viser.

Hvor stort er arealet der de overlapper hverandre?

- A $\frac{\pi}{2}$ B $\pi - 1$ C $\frac{\pi}{2} - 1$ D $\frac{1}{2}$ E $\frac{1}{\pi}$



Tips til veiledning:

- Forklar hvordan figuren er bygd opp.
- Regn ut arealet av den markerte sirkelsektoren i den øverste sirkelen.
- Tegn korden gjennom området der sirklene overlapper.
- Korden og de to radiene danner en trekant. Hva vet dere om den trekanten?
- Marker en tilsvarende sektor i den nederste sirkelen. Da får dere fire radier som danner en firkant. Hva slags firkant er dette?
- Løs oppgaven ved å se bort fra alt som ligger *utenfor* det kvadratet som de fire radiene danner. Marker den delen av figuren som bare inneholder de opplysningene dere trenger å ta hensyn til.

Det er flere måter å løse dette problemet på. Spørsmålene til elevene må følge av måten de har valgt å starte løsningen på. Se veiledning til oppgave 3 a.

Oppgave 4

La A_1 være arealet av et kvadrat innskrevet i en sirkel med radius r , og A_2 være arealet av sirkelen.

Hva er forholdet mellom arealet av sirkelen og arealet av kvadratet?

A π B $\frac{\pi}{2}$ C $\frac{1}{2}$ D 2 E $\frac{2}{\pi}$

Tips til veiledning:

- Tegn figur! Hva betyr «innskrevet»?
- Hva betyr det å finne forholdet mellom to arealer?
- Tegn en eller begge diagonalene i det innskrevne kvadratet i sirkelen.
- Skriv alle opplysninger dere har inn i figuren.
- Finn et uttrykk for arealet av sirkelen.
- Finn et uttrykk for arealet av det innskrevne kvadratet. Hvilke opplysninger trenger dere?

Veiledningen av elevene avhenger av hvordan de velger å begynne for å finne arealet av kvadratet, hvordan de eventuelt deler det opp:

- Tegn en diagonal i kvadratet. Hvor lang er den? Den deler kvadratet i to trekanter. Hva slags trekanter? Hvilke lengder trenger dere å kjenne for å regne areal av disse trekantene? Skriv lengdene inn på figuren og regn ut.
- Hvis begge diagonalene i kvadratet tegnes, blir kvadratet delt opp i fire trekanter. Hva slags trekanter? Hvilke lengder trenger dere å kjenne for å finne arealet av de fire trekantene? Skriv dem inn i figuren og regn ut.

Lærerveiledning

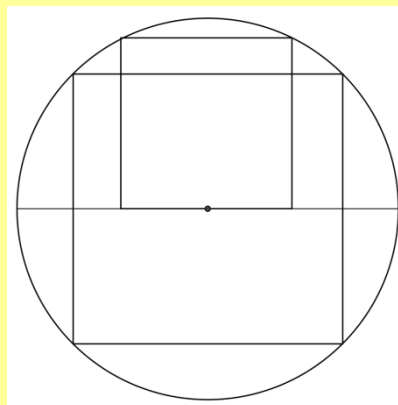
- Hvis begge diagonalene tegnes, kan dere se at kvadratet deles opp i to trekanter med diagonalen som grunnlinje og radien som høyde. Finn arealene.
- Tegn en diagonal i kvadratet. Finn sidelengden ved hjelp av Pytagoras' setning.

Oppgave 5

La K_1 være arealet av et kvadrat innskrevet i en halvsirkel og la K_2 være arealet av et kvadrat innskrevet i hele sirkelen.

Da er forholdet $K_1 : K_2$ lik

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{2}{5}$ C $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D $\frac{\sqrt{3}}{4}$ E $\frac{1}{\sqrt{5}}$



Tips til veiledning:

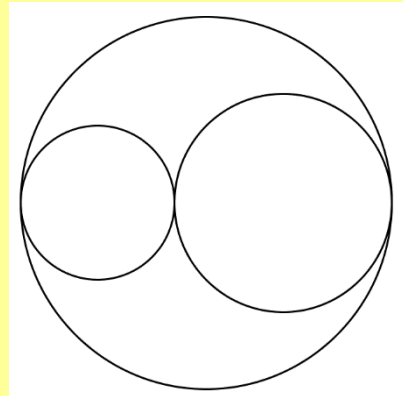
- Skriv alle opplysningene dere har inn i figuren. Hvilke opplysninger trenger dere?
- Dere trenger ett tall eller én bokstav for én lengde i figuren. Hvorfor er det nok? Hvilken lengde vil dere velge?
- Det er et godt tips å velge en bestemt lengde på sirkelens radius, dere kan velge et tall som f.eks. 1 eller en bokstav som f.eks. r . Hvorfor vil begge deler gi riktig løsning?

Se veiledningsspørsmål til forrige oppgave når det gjelder arealet av kvadratet som er innskrevet i sirkelen (K_2).

- Lag en ny figur av sirkelen med et kvadrat innskrevet i den ene halvsirkelen. Skriv på de opplysningene der har. Hvilke lengder trenger dere å regne ut for å finne arealet av det innskrevne kvadratet?
- Tegn inn hjelpelinjer. Hvilke? Prøv dere fram!
- Prøv å finne hjelpelinjer som gir delfigurer med nok informasjon til at dere kan beregne sidelengden av det lille kvadratet.
- For å finne siden i kvadratet innskrevet i halvsirkelen kan dere tegne inn radien fra sentrum ut til et av hjørnene som ligger på sirkelbuen. Da får dere en rettvinklet trekant som hjelper dere til å finne siden i kvadratet og dermed arealet. Hvilke sidelengder kjenner dere i denne trekanten?
- Hvorfor er den ene kateten dobbelt så lang som den andre?
- Kall sidene i kvadratet for x . Siden i kvadratet er lik lengden av den lengste kateten i trekanten. Regn ut!

Oppgave 6

Sentrene i de tre sirklene i figuren ligger på en rett linje. Den mellomstore sirkelen har dobbelt så stort areal som den minste.



Hvor stort er forholdet mellom arealet av den største og den minste sirkelen?

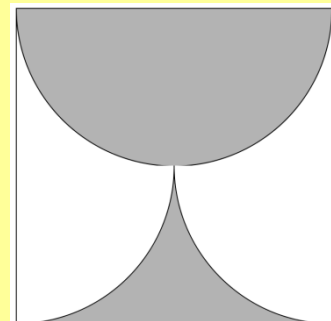
- A 4 B 5 C $2+\sqrt{2}$ D $3+2\sqrt{3}$ E $3+2\sqrt{2}$

Tips til veiledning:

- Tegn en linje gjennom berøringspunktene for sirkelen.
- Hvilke andre punkter ligger på denne linjen?
- Hva betyr det å finne forholdet mellom to areal?
- Det er ikke oppgitt noen lengdemål i oppgaven, så dere må bestemme det dere trenger selv. Hvor mange lengder er det nødvendig og tilstrekkelig å bestemme? Hvilke(n) vil dere velge?
- Velg å gi radien i én av sirklene navn, f.eks. r , eller sett radien i en av sirklene lik 1.
- Hvis dere har valgt en av radiene som utgangspunkt: Finn de to andre radiene uttrykt ved den første.
- Hva er sammenhengen mellom forholdet mellom samsvarende sidelengder og forholdet mellom arealene av to formlike figurer?
- Lag et uttrykk for arealet av den største og den minste sirkelen og finn forholdet mellom arealene.

Oppgave 7

Den grå delen av et kvadrat med sidelengde a er avgrenset av en halvsirkel og to kvartsirkelbuer.



Hvor stort er det grå området?

- A $\frac{\pi a^2}{8}$ B $\frac{a^2}{2}$ C $\frac{\pi a^2}{2}$ D $\frac{a^2}{4}$ E $\frac{\pi a^2}{4}$

Tips til veiledning:

- Hva slags geometriske former består figuren av?
- Hva er radien i halvsirkelen og hva er radien i kvartsirkelene? Skriv det inn på figuren.
- Del opp kvadratet i mindre deler slik at dere kan finne det grå området bit for bit. Hvordan vil dere dele?
- Hvorfor vil ei horisontal delelinje som tangerer den øverste halvsirkelen, halvere kvadratet?
- Klipp opp figuren og sett sammen de grå delene. Hvor stor del av kvadratet fylles av grå biter? Forklar.

Eller

- Del opp figuren i to eller fire deler. Regn ut det svarte arealet i hver av delene.

Det er flere måter å dele figuren på slik at beregningene forenkles. La elevene prøve seg fram. De kan dele figuren i to like store deler med en horisontal halveringslinje eller i fire like store deler med en horisontal og en vertikal linje.

Fasit:

Oppgave	Løsning
1	A
2a og 2b	A
3a og 3b	C
4	B
5	B
6	E
7	B

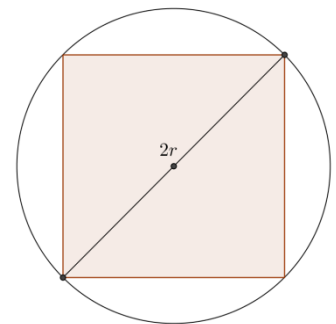
Forklaringer:

Oppgave 4

Areal av kvadratet, $A_1 = 2r^2$ (to trekanter med grunnlinje $2r$ og høyde r)

Areal av sirkelen, $A_2 = \pi r^2$

$$A_2 : A_1 = \pi r^2 : 2r^2 = \pi : 2$$



Oppgave 5

Vi vet at $K_2 = 2r^2$. Se oppgave 4.

Hjelpelinja fra sentrum til et av hjørnene i kvadratet er en radius og samtidig hypotenus i en trekant.

Kaller sidelengden i kvadratet for x .

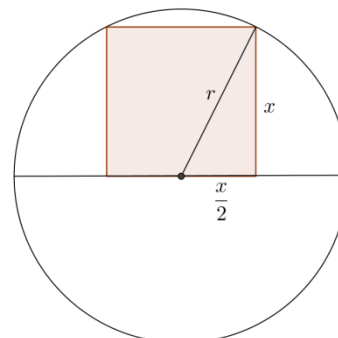
$K_1 = x^2$ Finner x^2 uttrykt ved r :

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^2 = r^2$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{4x^2}{4} = r^2$$

$$\frac{5}{4}x^2 = r^2 \quad | \cdot \frac{4}{5}$$

$$x^2 = \frac{4}{5}r^2 = K_1$$

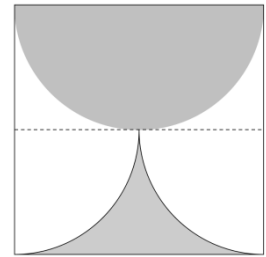


$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{4}{5}r^2}{2r^2} = \frac{4}{2 \cdot 5} = \frac{2}{5}$$

Oppgave 7

Ved å halvere kvadratet slik som figuren viser, vi det grå området i den øverste halvdelen være en halvsirkel med $r = a$, dvs. $\frac{1}{2} \pi a^2$

I den nedre halvdelen av kvadratet blir det motsatt, her er den grå delen lik et halvt kvadrat minus to kvartsirkler, eller et halvt kvadrat minus en halvsirkel, dvs. $2a^2 - \frac{1}{2} \pi a^2$



Oppgaven kan også løses ved å føye til ei vertikal delelinje, slik at den grå halvsirkelen deles i to like store deler som kan fylle ut de to hvite områdene i den nedre halvdelen av kvadratet.

Eller man kan se at det grå feltet i nedre halvdel av kvadratet deles i to og kan fylle de to hvite feltene i den øvre halvdelen av kvadratet.

Uansett vil de grå områdene fylle et areal som er halvparten av kvadratets areal.

