Kvikkbilder i arbeid med tallforståelse

Forfatter:

Astrid Bondø

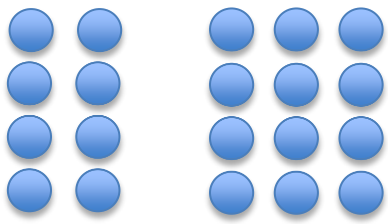
Publisert dato:

April 2016

Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen
Realfagbygget, NTNU, NO-7491 Trondheim

Kvikkbilde

Aktiviteten Kvikkbilde er designet for å engasjere elever i å visualisere tall og å forme mentale representasjoner av en mengde som for eksempel er presentert gjennom grupper av objekter eller symboler.[1] Elevene blir oppfordret til å søke etter effektive strategier for å finne ut hvor mange objekter det er, i stedet for å telle ett og ett. Kvikkbildet kan være et fotografi, en tegning, tier-rammer, klistremerker arrangert på et ark eller magneter på en magnettavle.



Figuren til venstre viser et kvikkbilde som består av 20 prikker. Læreren beskriver aktiviteten for elevene og viser deretter bildet i tre sekunder. Før elevene får se bildet, blir de fortalt at det vil være for kort tid til å telle alle prikkene. De blir oppfordret til å se en struktur i bildet. En mulighet er å se etter kjente mønstre og strukturer i bildet. Elevene får god tid til å tenke på hva de ser og hvordan de kan gruppere objektene for å finne antallet. Bildet vises for andre gang, og elevene får mulighet til å bekrefte eller revidere det de har tenkt. Deretter vil bildet være synlig, og læreren utfordrer elevene på å fortelle hva de så og hvordan de tenkte da de grupperte objektene.

Kvikkbilde brukes som et utgangspunkt for en diskusjon om viktig matematikk og gir læreren mulighet til å få fram elevenes tanker og ideer og gi respons på dem. Mens elevene deler sine tanker og strategier for å finne antall objekter, er lærerens rolle å lede samtalen, engasjere hele klassen i å vurdere ideene som kommer fram, orientere elevene mot hverandre og det matematiske målet. Underveis i diskusjonen må læreren velge ut ideene som kan være passende for det faglige målet, og som hun vil framheve spesielt og spille videre på. Ved et nøye gjennomtenkt valg av bilde og god planlegging kan læreren forutse noen av ideene elevene kommer med, og hvordan hun vil respondere på elevenes innspill.

[1] Arbeidet med Kvikkbilder er en del av prosjektet MAM – Mestre Ambisiøs Matematikkundervisning, http://www.matematikksenteret.no/mam/

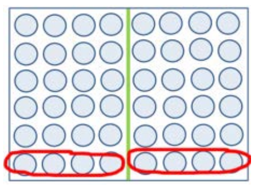
Faglig innhold i Kvikkbilde

Kvikkbilde er en aktivitet som kan brukes for å fremme tallforståelse, engasjere elevene i rike matematiske spørsmål og framheve ulike matematiske ideer. Lærere kan ta i bruk aktiviteten for å få innsikt i elevenes tenking og engasjere seg i og utfordre elevenes tallforståelse.

En god tallforståelse danner grunnlaget for arbeid med tall og regneoperasjoner og for å kunne bruke matematikk i dagliglivet. Valenta (2015) drøfter ulike aspekter ved tallforståelse ved å ta utgangspunkt i beskrivelsen av matematisk kompetanse utarbeidet av Kilpatrick, Swafford og Findell (2001). De beskriver matematisk kompetanse som bestående av fem komponenter: *begrepsmessig forståelse*, *beregning*, *anvendelse*, *resonnering* og *engasjement*, og Valenta tar utgangspunkt i de fem komponentene i sin beskrivelse av tallforståelse.

Nedenfor skisseres noen eksempler på hvordan man, avhengig av bildet og det faglige målet for samtalen, kan bruke et kvikkbilde i arbeid med ulike sider ved tallforståelse. I drøftingen brukes de ulike aspektene ved tallforståelse beskrevet av Valenta (2015). De er framhevet med kursiv i teksten.

To aspekter som vil komme i alle kvikkbilder, er *ulike måter å representere tall på og overganger mellom representasjoner*. Den generelle hensikten med kvikkbilder er å få fram ulike måter å se et antall på og å koble bildet, den muntlige beskrivelsen og det symbolske utrykket sammen. Kvikkbilder kan hjelpe elevene til å utvikle forståelse av at tall kan uttrykkes og tolkes på ulike måter og til å veksle mellom disse ulike representasjonene.

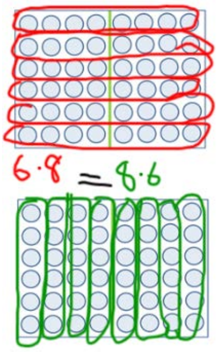


Figuren viser et bilde av 48 prikker. Elevene betrakter prikkene og beskriver hva de tenker, samtidig som de markerer på bildet og prøver å utrykke tankene med matematiske symboler.

Eksempel på elevsvar: «På nederste rad ser jeg fire prikker to ganger, og så ser jeg at det er seks slike rader. Det kan vi skrive som (2 · 4) · 6.»

Kvikkbilder er også godt egnet til å studere *ulike måter å representere regneoperasjoner på og overganger mellom representasjoner.* På bildet over representeres multiplikasjon som areal/tabell. Elevene forteller hvordan de ser antall prikker og beskriver det symbolsk. Aktiviteten inviterer til å koble den muntlige beskrivelsen til bildet og symboler og på den måten hjelpe elevene til å se sammenhengen mellom representasjonene.

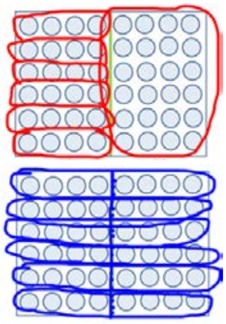
Å tolke ulike representasjoner av regneoperasjoner og å veksle mellom disse er viktig for utvikling av tallforståelse. Kunnskap om regneoperasjonene innebærer også å kunne forklare egenskapene ved operasjonene og utrykke dem med ulike representasjoner. *Grunnleggende egenskaper ved regneoperasjoner* handler om kunnskap om de kommutative, assosiative og distributive egenskapene ved regneoperasjoner, om ulike representasjoner av egenskapene og om resonnering knyttet til dem.



Målet for arbeidsøkten er avgjørende for hvilket bilde man velger. Bildet til venstre er for eksempel godt egnet til å drøfte kommutativ egenskap ved multiplikasjon, 6 · 8 = 8 · 6. Antall prikker kan betraktes som seks 8-ere, (6 · 8) eller som åtte 6-ere, (8 · 6). En endring av bildet der en bruker andre tall enn 6 og 8, kan være et utgangspunkt for å diskutere egenskapen a · b = b · a mer generelt (a og b er positive hele tall).

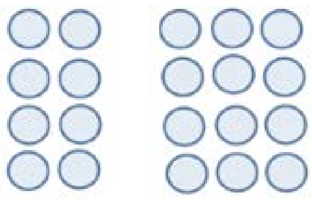
Multiplikasjon kan betraktes som gjentatt addisjon. Ifølge konvensjonen tenker man at b adderes a ganger, slik at a · b = b + b + ... + b (a ganger). At multiplikasjon er kommutativ, a · b = b · a (for alle tall a og b) innebærer at rekkefølgen på faktorene ikke spiller noen rolle. Det vil si at b + b + ... b (a ganger) er like mye som a + a + ... + a (b ganger) når a og b er positive hele tall. I bildet over betyr det at 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6. Når kunnskap om den kommutative egenskapen er etablert, trenger man ikke å være oppmerksom på rekkefølgen til faktorene. Men når denne egenskapen skal diskuteres, er det nødvendig at man har en felles tolkning av hva a · b som gjentatt addisjon står for.

Bildet kan også brukes til å drøfte assosiativ egenskap ved multiplikasjon, (a · b) · c = a · (b · c). Da merker vi oss at bildet består av to identiske deler. I hver av delene er det seks rader med fire prikker i hver rad, altså 6 · 4 prikker. Antallet prikker totalt kan da uttrykkes symbolsk som (6 · 4) · 2.



Bildet kan også betraktes som seks rader med åtte prikker i hver. Åtte ser vi som fire i den ene delen og fire i den andre. Symbolsk blir dette 6 · (4 + 4) = 6 · (2 · 4). Siden 2 · 4 = 4 · 2 (kommutativitet), kan vi få uttrykket 6 · (4 ·2).

Siden antallet er det samme uansett hvordan vi ser på bildet, får vi (6 · 4) · 2 = 6 · (4 · 2). På grunn av den kommutative og assosiative egenskapen ved multiplikasjon kan faktorene multipliseres i hvilken som helst rekkefølge. Svaret blir det samme uansett. 6 · 4 · 2 = (6 · 4) · 2 = (4 · 6) · 2 = 6 · (4 · 2) = 4 · (2 · 6) = ... osv. En endring av bildet der en prøver med andre tall enn 2, 4 og 6, kan være et utgangspunkt for å diskutere egenskapen (a · b) · c = a · (b · c) mer generelt (når a, b og c er positive hele tall).

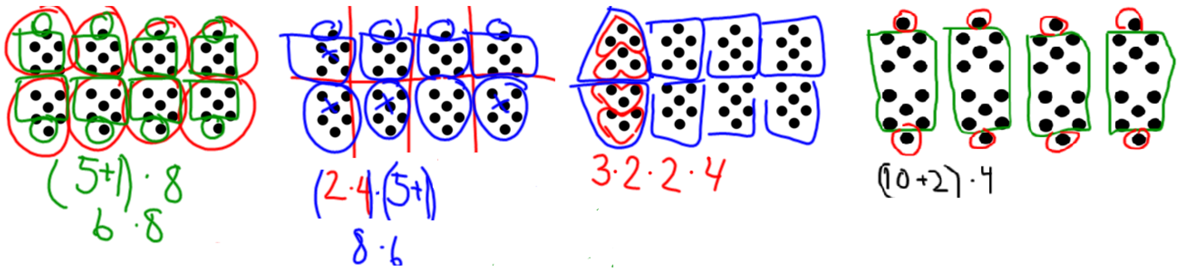


Dersom målet med aktiviteten er å diskutere den distributive egenskapen, a · (b + c) = a · b + a · c, vil det være naturlig å velge et bilde der prikkene er organisert på en annen måte. Bildet til venstre kan betraktes som to deler. Den ene delen består av to kolonner med fire prikker i hver kolonne, og den andre består av tre kolonner med fire prikker i hver kolonne. Antallet prikker kan da uttrykkes symbolsk som 2 · 4 + 3 · 4.

En annen måte å se antallet på er å se figuren som helhet, bestående av fem kolonner med fire prikker i hver. Symbolsk kan dette uttrykkes som 5 · 4. Dersom de fem kolonnene betraktes som to kolonner i den ene delen og tre kolonner i den andre delen, kan tankegangen beskrives symbolsk som (2 + 3) · 4. Sammenhengen mellom de ulike utrykkene og representasjonene kommer godt fram i figuren, og siden antallet er det samme uansett hvordan vi ser bildet, betyr det at 2 · 4 + 3 · 4 = (2 + 3) · 4 = 5 · 4. En endring av bildet der en prøver med andre tall enn 2, 3 og 4, kan være et utgangspunkt for å diskutere egenskapen (a + b) · c = a · c + b · c mer generelt (når a, b og c er positive hele tall).

Å utvikle, bruke og samtale om varierte strategier inngår som kompetansemål på alle trinn i LK06. Kunnskap om egenskapene ved regneoperasjoner utgjør en vesentlig del av barns strategier i arbeid med tall. Denne kompetansen gjør det enklere å ta i bruk mer fleksible og varierte strategier. Undervisning om strategier i arbeid med tall kan gjerne ta utgangspunkt i et kvikkbilde. Da er det viktig at elevene beskriver tankene sine muntlig og symbolsk og i tillegg får drøftet om framgangsmåten kan generaliseres. Svingen (2016) beskriver hvordan elevene utvikler varierte strategier i arbeid med tall. Artikkelen viser hvordan tall kan representeres på flere måter, og med det utgangspunktet kan elevene utvikle et bredt utvalg av strategier som igjen gir mulighet for større fleksibilitet i problemløsing.

Resonnering handler om å forklare hvordan man tenker, begrunne sammenhenger og framgangsmåter og å følge med i andres resonnement og vurdere gyldigheten av disse. I arbeidet med kvikkbilder er *gjenkjenning og beskrivelse av struktur, mønster og sammenhenger* et sentralt element i diskusjonen. I tillegg til egne resonnement må man lytte til og reflektere over strategier andre bruker, og se sammenhenger mellom resonnementene. Som eksemplene nedenfor viser, betrakter elevene et bilde på ulike måter. Den muntlige beskrivelsen og det skriftlige uttrykket vil av den grunn bli svært forskjellige.



Et mål med dette kvikkbildet kan være å få fram flest mulig strategier, sammenligne de skriftlige utrykkene og velge ut noen for å undersøke om uttrykkene kan representere samme antall. Eksempel: *Er (5 + 1) · 8 det samme som (10 + 2) · 4?*

Dersom målet for aktiviteten er å diskutere den distributive egenskapen ved multiplikasjon, må læreren løfte fram elevsvar som leder fram mot det. Eksempel: "Sammenhengen mellom (5 + 1) · 8 og 6 · 8. Hvordan kan vi ved hjelp av figuren argumentere for at de to symbolske utrykkene er likeverdige?" Gjennom dette spørsmålet dreies aktiviteten til å omhandle en *begrunnelse av regnestrategi/sammenheng på enkelteksempler*. Læreren kan stille spørsmål om egenskapen gjelder for andre tall også. Ved å dreie diskusjonen mot en endring av bildet, vil elevene undersøke sammenhengen mer generelt. Det legges da til rette for *utforskning av generelle hypoteser ved bruk av et generisk eksempel eller et moteksempel*. Å kjenne igjen strukturer og sammenhenger vil hjelpe elevene når de skal begrunne strategier i andre sammenhenger. Hvis de for eksempel skal multiplisere $13 \cdot 7$, kan de med kunnskap om den distributive egenskapen dele opp og tenke $10 \cdot 7 + 3 \cdot 7$.

Elevene vil forhåpentligvis *oppleve det som meningsfullt å søke etter relasjoner i arbeidet med tall* og *se det som nyttig å bruke ulike representasjoner i arbeidet med tall.* Å se et kvikkbilde i kun tre sekunder skaper nysgjerrighet og engasjement hos elevene. Aktiviteten har også lav inngangsterskel, alle elevene har mulighet til å bidra med det de ser. Fokuset er ikke på riktig antall prikker, men på å få fatt i hvordan elevene betrakter bildet, hva de tenker og hvilke strategier de tar i bruk for å se antallet. I diskusjonen underveis kan elevene oppleve at det er mange måter å løse oppgaven på, og at det er lov til å endre mening og justere strategier. Det skriftlige uttrykket blir fortellingen om deres tenking. Å sammenligne de ulike tankegangene og de ulike skriftlige uttrykkene kan engasjere elevene.

Kvikkbilde i undervisningen

Planlegging

I planleggingen av Kvikkbilde bør en være veldig bevisst på valg av bilde. Det er en fordel å ha et tydelig mål med aktiviteten og velge bilde ut fra det. Det er lett å tenke at bildet er for enkelt for elevene, men dersom bildet blir for komplisert eller åpner for at det er mange ting å se, er det vanskelig å holde fokus på det som er det spesifikke målet for aktiviteten.

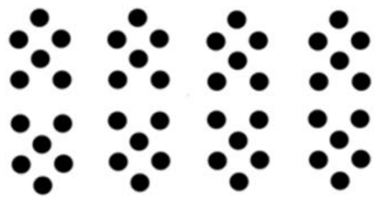
Læreren må tenke gjennom hvilke spørsmål som skal stilles, hvilke elevsvar som kan forventes og hvilke strategier elevene vil ta i bruk. Læreren må også bestemme hvilke av ideene hun vil spille videre på, finne strategier for å engasjere hele klassen i å vurdere disse ideene og orientere elevene mot hverandre og det matematiske målet. Dersom en ønsket strategi ikke kommer fram, kan læreren skrive den symbolsk på tavla, si at det er strategien til en elev i en annen klasse og utfordre elevene på hvordan denne eleven kan ha tenkt.

Det er ikke behov for utstyr utover kvikkbildet, men noen ganger kan det være hensiktsmessig at elevene kan bruke ark og skrivesaker når de skal klargjøre sin strategi for seg selv eller formidle den i samtale med læringspartneren.

Vi på Matematikksenteret har prøvd ut kvikkbilde flere ganger med elever og vil nedenfor skissere en del momenter som er viktige i planleggingen, samt en del erfaringer vi har gjort oss under gjennomføring av aktiviteten.

Valg av faglig mål og bilde

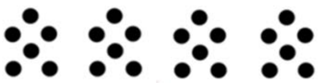
Kvikkbilde 8 · 6 er eksempel der vi måtte justere målsetting underveis. Bildet ble brukt i utprøving av aktiviteten. Vi opplevde både at vi ville nå for mange mål, og at bildet ikke egnet seg like bra for alle målene vi hadde satt. Etter hvert justerte vi målsettingen. Dette medførte også endringer i hvilke strategier og elevsvar vi ville løfte fram under samtalene. Vi ser imidlertid at bildet med fordel kan forenkles og likevel brukes til å oppnå samme mål.



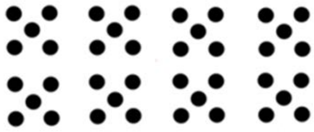
Bildet viser åtte grupper med seks prikker i hver gruppe. Siden de fleste elevene på mellomtrinnet kjenner til terningen, valgte vi å bruke femmeren på terningen som utgangspunkt i bildet.

Det generelle målet vårt for aktiviteten var å sammenligne og diskutere ulike måter å se et antall på. Vi ønsket også at elevene skulle resonnere omkring tallenes struktur og egenskaper, samt egenskaper ved regneoperasjoner.

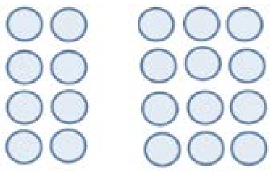
Under utprøvingen erfarte vi at bildet egnet seg veldig bra til å få fram mange ulike måter å se antall prikker på. Det spesifikke målet var å se på tallet 48 som et produkt av to eller flere faktorer, og i utgangspunktet så vi for oss muligheter til å diskutere både kommutative, assosiative og distributive egenskaper ved multiplikasjon. Vi fant imidlertid fort ut at bildet ikke egnet seg til å drøfte den kommutative egenskapen ved multiplikasjon, 6 · 8 = 8 · 6. Når vi tolker multiplikasjonene inn i dette bildet, ser vi at multiplikasjon som gjentatt addisjon bare fungerer i det ene utrykket, 8 · 6. Vi ser at det er åtte seksergrupper og kan tenke på antallet som 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6, men vi kan ikke se seks åtte-grupper.



Dersom den kommutative egenskapen er etablert, er bildet et fint utgangspunkt til å diskutere assosiative og distributive egenskaper, men bildet kan med fordel forenkles og likevel fungere bra som et utgangspunkt for diskusjon. Til en diskusjon om den distributive egenskapen, kan bildet forenkles ved for



eksempel å redusere det til bare en rad. Dersom man ønsker å diskutere assosiativitet, kan antall prikker i hver gruppe reduseres.



Kvikkbilde 2 · 4 + 3 · 4 gir et eksempel på hvordan man kan forberede aktiviteten. Som tidligere nevnt, bør læreren på forhånd se for seg ulike løsningsstrategier og prøve å forutse hvordan elevene vil tenke og forklare. Bildet brukes til å diskutere den distributive og den kommutative egenskapen av multiplikasjon. Nedenfor er et eksempel på notater en lærer har skrevet under forberedelsen til dette eksemplet:

4 · 2 + 4 · 3	Ser 2-ere, fire ganger nedover, og 3-ere, også fire ganger nedover
2 · 4 +3 · 4	Ser 4-ere, først 2 ganger og så 3 ganger) – koble til a) for å fremme kommutativitet. Nøkkelspørsmål.
4 · 5	Ser 5-ere, fire ganger nedover - sammenheng med a), diskutere distributivitet, symbolsk og på bildet. 4 · 2 + 4 · 3 = 4 · (2 + 3)= 4 · 5. Nøkkelspørsmål.

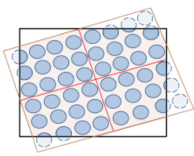
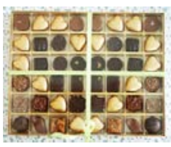
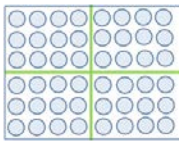
Eksempel på nøkkelspørsmål:

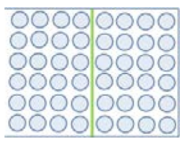
> Hva er likt og hva er forskjellig i uttrykkene i 4 · 2 + 4 · 3 og 2 · 4 + 3 · 4?
> Hvorfor er 4 · 5 det samme som 4 · 2 + 4 · 3?

Kvikkbilde 4 · 12 er et eksempel på en oppgave der vi underveis endret bildet flere ganger. Vi startet med et bilde av en konfekteske der noen av sjokoladebitene var utenfor bilde. Esken var delt i fire like deler ved hjelp av et silkebånd, og det var tolv sjokolader i hver del (derav navnet 4 · 12). Vi laget en figur som illustrerte konfektesken, til bruk under samtalen med elevene. Etter hvert byttet vi ut bildet med en konfekteske der alle sjokoladene var synlige. Esken var fremdeles delt i fire deler.

I drøftingen om egenskaper ved regneoperasjoner erfarte vi at elevene fikk problemer med å skille tallene og det de representerte, fordi det i uttrykkene var to firere som representerte ulike ting. Eksempel: 4 · 3 · 4, fire deler der hver del består av tre rader med fire sjokolader i hver rad.

Vi endret bildet slik at esken ble delt i to deler og faktorene i multiplikasjonene ble 2, 4 og 6.



Eksempel: $2 \cdot 6 \cdot 4$, to deler der hver del består av seks rader med fire sjokolader i hver rad.

Elevers arbeid med kvikkbilder

Bildene som brukes i aktiviteten innbyr til mange ulike måter å se og uttrykke antallet på. Mange elever betraktet Kvikkbilde $8 \cdot 6$ som åtte grupper med seks prikker i hver, og vi noterte det symbolske uttrykket $8 \cdot 6$. Ved å utfordre elevene på hvordan de så at det var seks prikker i ei gruppe, fikk vi muligheten til å diskutere den distributive egenskapen ved multiplikasjon. Noen så sekseren som femmeren i terningen og en prikk på toppen og at det var to rader med fire slike grupper i hver rad. Det kan skrives som $(5 + 1) \cdot 4 \cdot 2 = (5 + 1) \cdot 8$. For å finne antallet kan man da summere fem og en og multiplisere summen med åtte (eller $4 \cdot 2$), eller man kan regne ut antall prikker i femmerne til sammen og summere enerne i etterkant. Elevene klarte å knytte resonnementene til bildet og se det i sammenheng med det matematiske uttrykket $8 \cdot 5 + 8 \cdot 1 = 8 \cdot (5 + 1) = 8 \cdot 6$.

I utprøvingen opplevde vi at aktiviteten engasjerte elevene, de ville gjerne forklare hvordan de så antall prikker og beskrive tankegangen med matematiske symboler. Oversettingen mellom den visuelle og symbolske representasjonen er et sentralt element i arbeidet med kvikkbilder, men for elevene er det ofte utfordrende å beskrive tankegangen sin med det matematiske symbolspråket. Derfor er det viktig at læreren tenker gjennom hvilke måter elevene kan komme til å betrakte bildet på, hvordan de ulike betraktningene uttrykkes med matematisk symbolspråk, hva som kan være utfordrende for elevene og hvordan det kan håndteres.

Noen ganger valgte elevene i vår utprøving en symbolsk notasjon som beskrev deres tenking, men som ikke samsvarte med konvensjonen. For eksempel sa en elev: "*Jeg ser seks prikker i ei gruppe, og det er fire grupper øverst og like mange under, det blir åtte. Jeg skriver $6 \cdot 8$ fordi jeg så de seks prikkene først*". I følge konvensjonen skulle tankegangen beskrives som $8 \cdot 6$, men siden den kommutative egenskapen av multiplikasjon ikke var et mål for samtalen, gjorde vi ikke elevene oppmerksomme på det.

Under utprøvingen så vi at elevene ofte beskrev tankegangen sin i flere steg. Når de skulle beskrive tankegangen symbolsk, oppsto det feil bruk av likhetstegn, for eksempel $2 \cdot 4 = 8 \cdot 6 = 48$. Elevene kan oppfordres til å skrive det de tenker som en tekst, slik eksemplet i forrige avsnitt viser, eller de kan oppfordres til å kombinere symbolene med tekst: 2 grupper i hver rad · 4 prikker i hver gruppe · 6 rader. Man kan også bruke piler for å beskrive stegene i tenkingen: 2 · 4 → 8 · 6 → 48.

Bruk av piler er et steg på veien mot å se flere operasjoner i ett og samme uttrykk ved bruk av parenteser. Dette vil være sentralt for å kunne diskutere egenskaper ved operasjoner og ulike tallstrukturer. Målet er at elevene skal kunne beskrive tenkingen gjennom ett utrykk, for eksempel (2 · 4) · 6. Forståelse for slike uttrykk og erfaringer med å diskutere likheter og forskjeller mellom dem er viktig for arbeid med algebraiske uttrykk senere i skolegangen

Gode matematiske samtaler

Wæge (2015) beskriver flere samtaletrekk som kan brukes som et verktøy i matematiske samtaler. Disse kan for det første brukes når læreren ønsker å få elevene til å delta i samtalen, lytte til hverandre og følge med på hverandres tenking. De kan også benyttes når læreren ønsker klarhet i hvordan elevene tenker, noe som igjen vil gi læreren innsikt i likheter og ulikheter i tenkemåtene. Til sist vil verktøyene kunne bidra til å knytte alt dette sammen.

Gode matematiske samtaler er avhengig av at det er etablert et trygt klassemiljø slik at elevene tør å si hva de tenker og ikke er redde for å svare feil. Elevene må være vant til å lytte til hverandre, stille spørsmål til det som er uklart og argumentere for sine løsninger. Samtalene må bidra til at elevene, ved hjelp av læreren, ser sammenhenger mellom de ulike løsningene og framgangsmåtene som klassen kommer opp med, og at de ser dette i lys av det matematiske målet for timen.

Samtaletrekk

- Gjenta
- Repetere
- Resonnere
- Tilføye
- Vente
- Snu og snakk
- Endre

Referanser

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (red.)(2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. J. Washington, National Research Council. DC: National Academy Press.

Svingen, O. L. (2016). *Barns strategier i arbeid med tall*. Lastet ned fra http://www.matematikksenteret.no/content/4791/Innholdsside den 4.1.2016

Valenta, A. (2015). *Aspekter ved tallforståelse*. Lastet ned fra http://www.matematikksenteret.no/content/4791/Innholdsside#Tallf den 10.11. 2015

Wæge, K. (2015), *Samtaletrekk – redskap i matematiske diskusjoner*. Tangenten 2/2015