Likninger og algebra

Det er større sprang fra å regne med tall til å regne med bokstaver enn det vi skulle tro. Vi tror at både likninger og bokstavregning (som er den algebraen elevene møter i grunnskolen) blir vanskelig fordi elevene ikke forstår at det er ”generalisert tallregning”. Det er viktig å motivere for likninger og algebra på en måte som gir bokstavregning *mening* for elevene. Aktiviteter og praktiske situasjoner der vi leter etter forklaringer på tallmessige sammenhenger, kan være en fin innfallsvinkel. Likedan kan praktiske situasjoner der det blir bruk for å løse en likning virke motiverende.

Det er direkte demotiverende og meningsløst å bare lære teknikker uten å forstå betydningen av det som foregår, eller se sammenhengen mellom tallregning og bokstavregningen.

Likninger
Likninger ”snikinnføres” på et tidlig tidspunkt i de flest lærebøker for barnetrinnet. Da er den ukjente en ”tom boks” der det skal fylles inn tallet som mangler. For eksempel:

$$2\cdot\square + 3 = 11$$

De aller fleste elever klarer fort å finne ut at det er tallet 4 som mangler. Det rare er at de samme elevene kan ha vanskeligheter med å løse likningen

$$2x + 3 = 11$$

når de kommer på ungdomsskolen. Det kan ha med flere ting å gjøre, for eksempel at de ikke er fortrolig med det matematiske symbolspråket, at 2x er 2 *ganger* x for eksempel. Men også at de ikke forstår at x skal behandles som et tall, og at hele ideen med likninger er å sette opp en relasjon der dette ukjente tallet inngår, for så å bruke gyldige matematiske operasjoner for å beregne dette ukjente tallet. Hvis det ikke blir gjort noen feil underveis, vil tallet de kommer fram til, oppfylle den relasjonen som var utgangspunktet for beregningene. Kanskje det er denne ideen, dette utgangspunktet, som glipper for mange elever, og at likningsløsingen bare blir en lek med tall som de ikke forstår hensikten med. Det kan faktisk hende at en elev som sier med en gang at $x = 4$, men som ikke klarer å trekke fra 3 på hver side av likhetstegnet og etterpå dele på 2, har forstått mer enn en elev som løser likningen slavisk og får riktig svar. Vi har sett mange tilfeller der sistnevnte elevtype ikke vet hva det *betyr* at $x = 4$, og heller ikke kan sjekke at svaret passer i den opprinnelige likningen.

Vi anbefaler at elevene blir introdusert for likninger via en praktisk problemstilling. Det kan for eksempel være:

Anne har en pose med 930 perler. Disse skal hun lage julegaver av. Hun skal tre perlekjeder med 100 perler på hvert kjede og armbånd med 30 perler på hvert kjede. Hun vil lage 5 armbånd med enn perlekjeder, siden 5 av vennene hennes bare skal få armbånd, mens alle damene i familien skal få begge deler. Hvor mange damer kan det være i familien for at hun skal få nok?

Her er det naturlig å sette opp en likning, selv om det er mulig å prøve seg fram. Likningen blir:

$100x + 30(x+5) = 930$

Da er det bruk for å kunne regneregler for likninger, for det er ikke lett for alle å se hva x blir direkte.

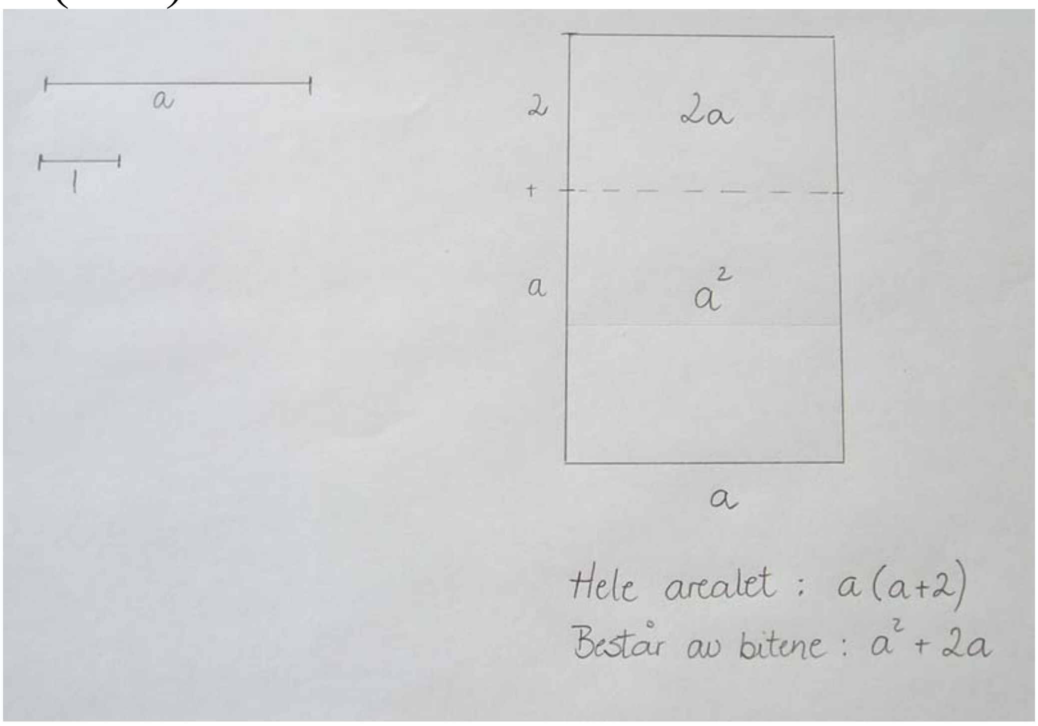
$100x + 30x + 150 = 930$
$130x = 780$
$x = 6$

Anne kan altså lag 6 perlekjeder og 11 armbånd.

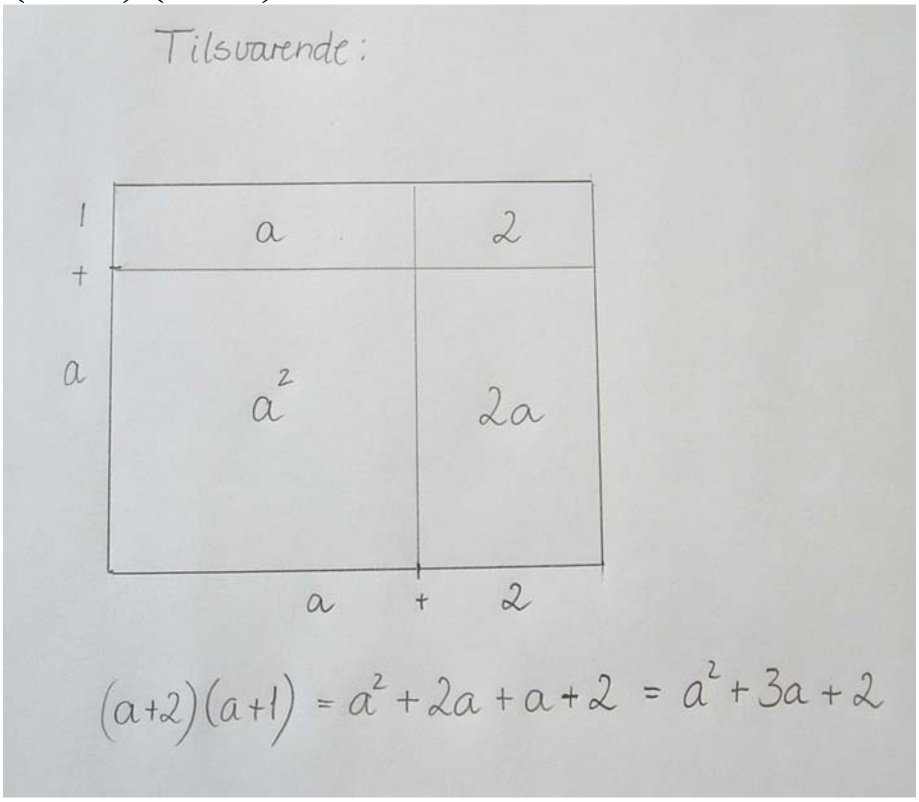
Algebra
Som et ledd i å øke tallforståelsen og samtidig sansen for å se strukturer, tallmønster og system, er det fint å bruke ulike klassiske puslespill (Hanois tårn, Froskespill, figurtall, magiske terninger, snu trekanten, magiske trekanter, magisk kvadrat, talltriks etc). Når mønster er oppdaget, skal det etter hvert uttrykkes generelt. Det kan i første omgang beskrives med ord, men etter hvert skrives det med algebraiske uttrykk. Hvis det finnes ulike måter å beskrive mønsteret på, er det en fin algebraisk øvelse å vise st det blir det samme.

For å *forstå* *algebra-reglene,* anbefaler vi å bruke geometri, slik som antydet under beskrivelsen av multiplikasjon. Hvis elevene er vant til å tenke på multiplikasjon som areal, skal dette gå veldig bra. Det finnes ferdige algebra-brikker, eller elevene kan bare tegne i matematikkboka.

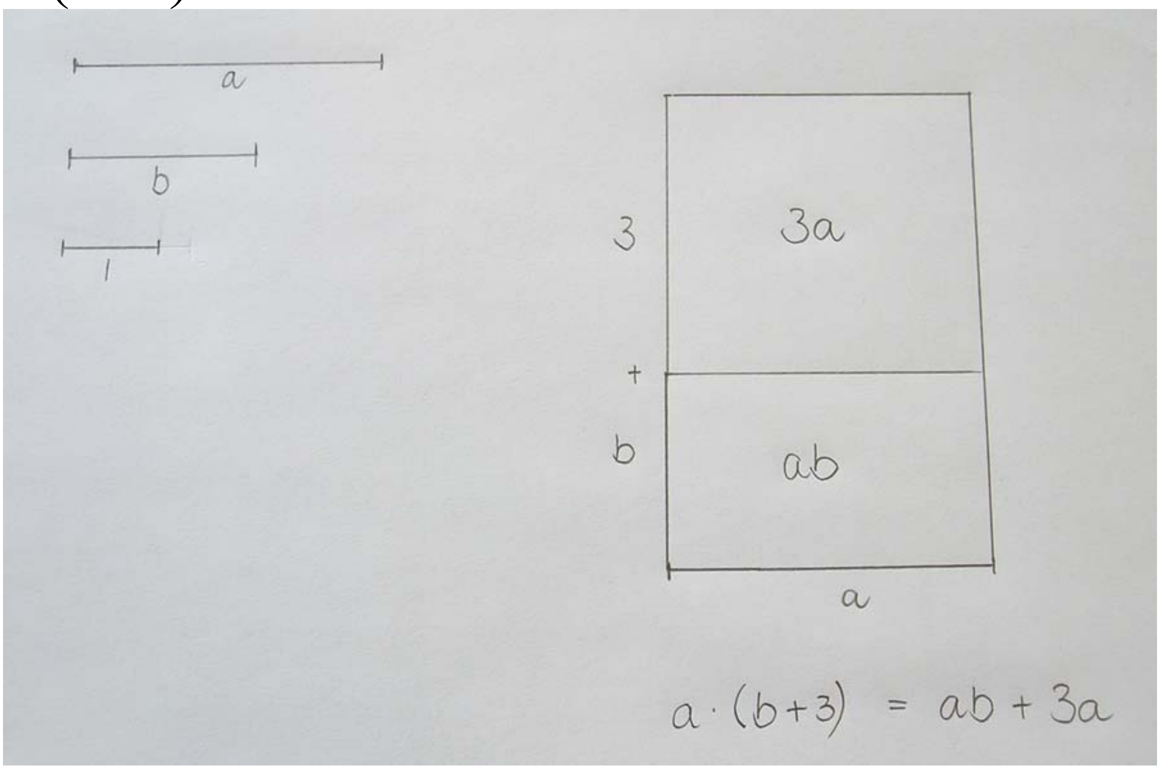
a (a+2)



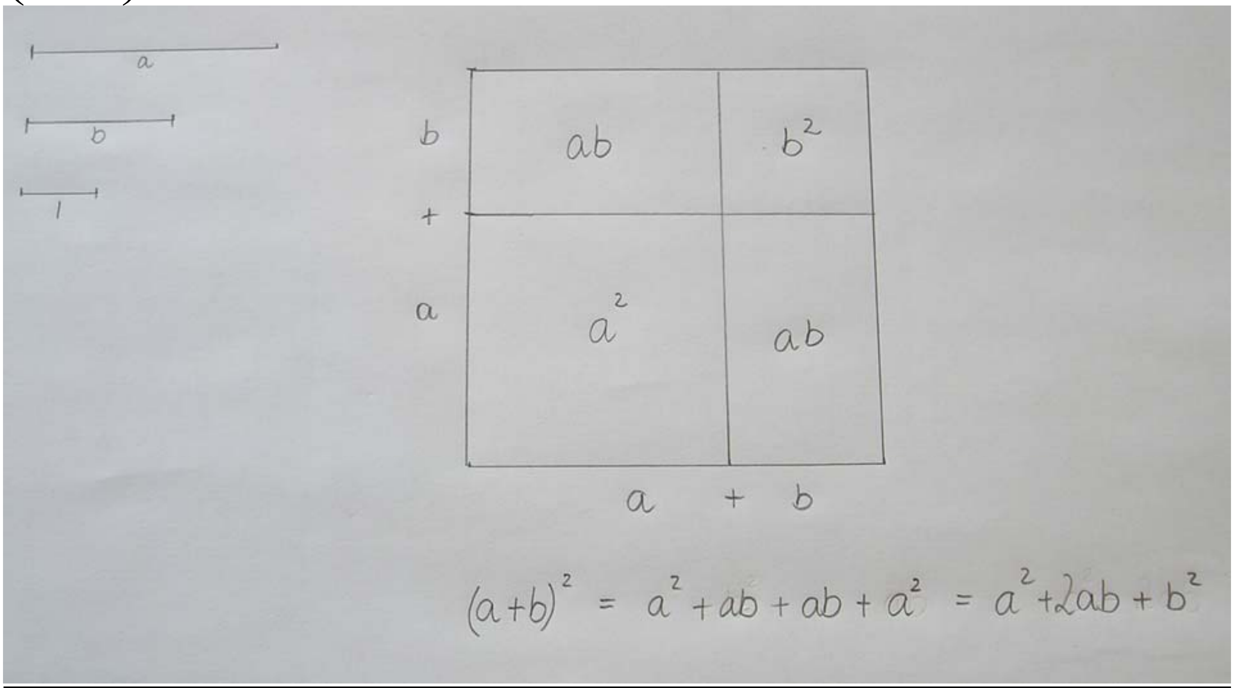
$(a+2)(a+1)$


Tilsvarende:
1
+
a
a
2
a^2
$2a$
a + 2
$(a+2)(a+1) = a^2 + 2a + a + 2 = a^2 + 3a + 2$

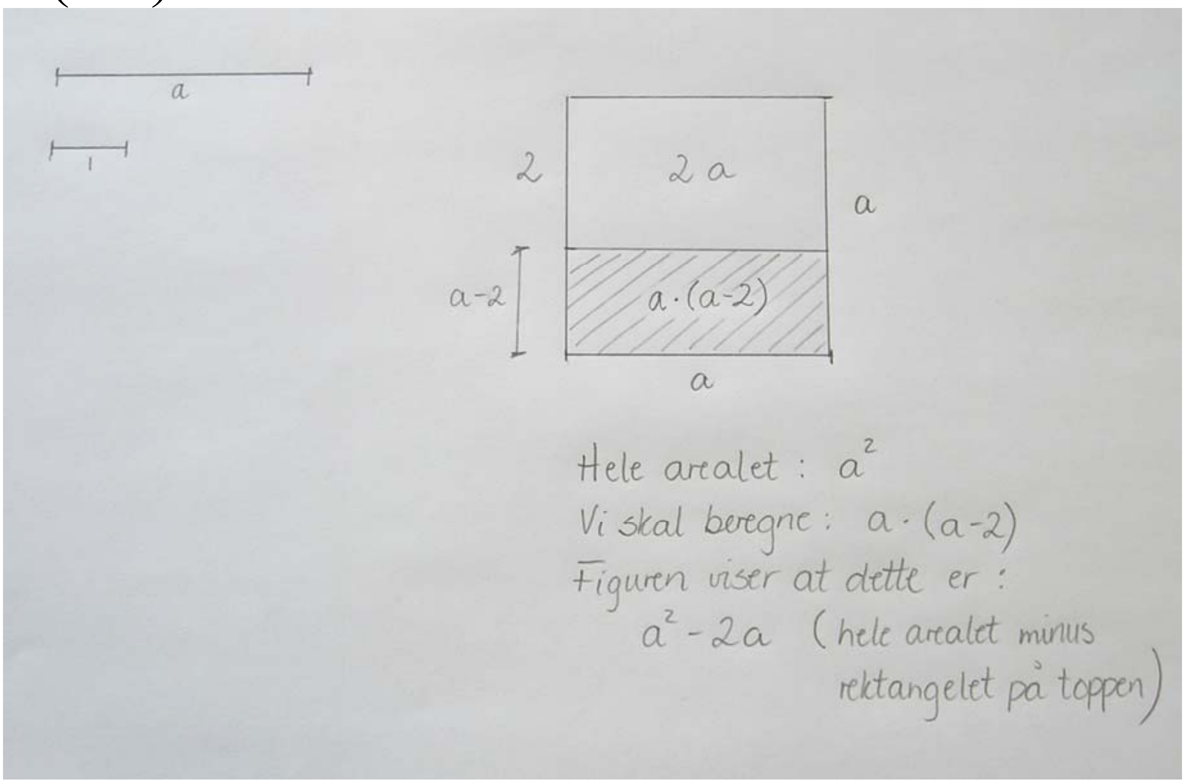
$a\ (b+3)$


a
b
1
3
3a
+
b
ab
a
$a \cdot (b+3) = ab + 3a$

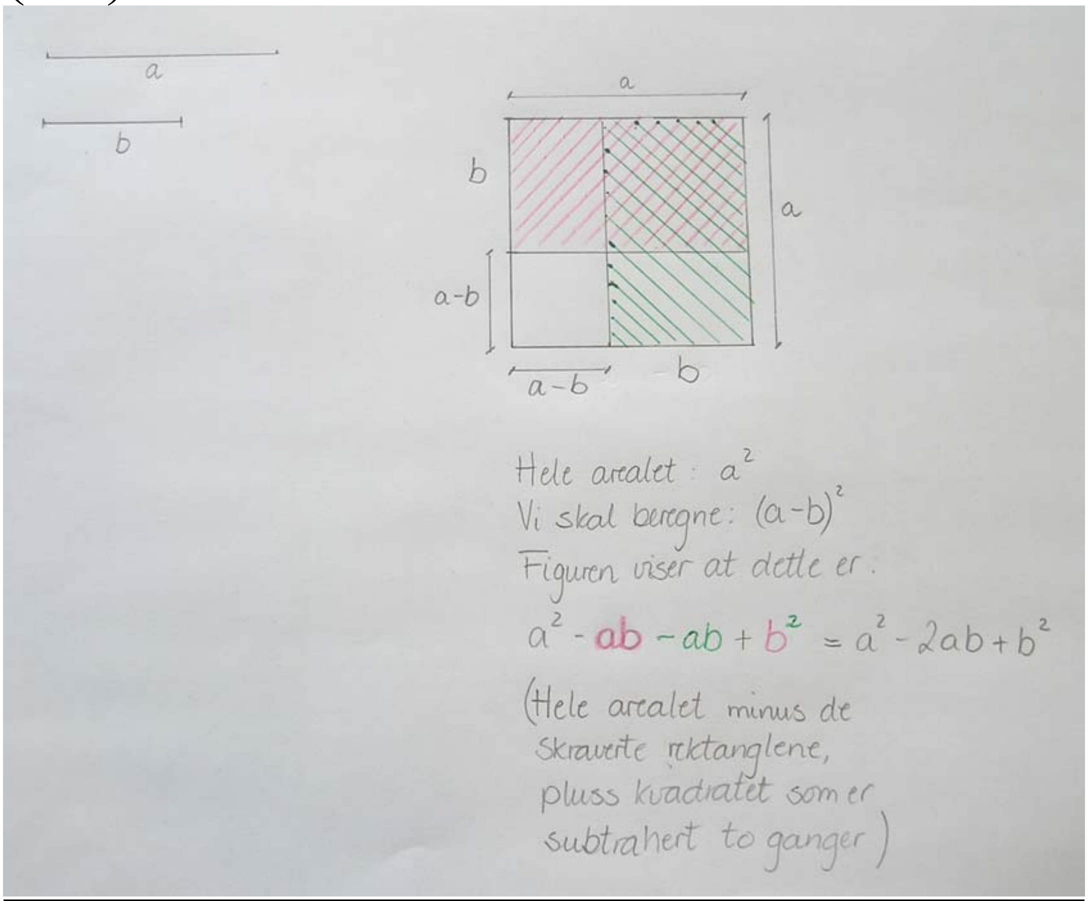
$(a+b)^2$


a
b
1
b
+
a
ab
b^2
a^2
ab
a + b
$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + a^2 = a^2 + 2ab + b^2$

a (a-2)


a
1
2
2 a
a
a-2
a·(a-2)
a
Hele arealet : a^2
Vi skal beregne : $a \cdot (a-2)$
Figuren viser at dette er :
$a^2 - 2a$ (hele arealet minus rektangelet på toppen)

$(a-b)^2$



Bevis og sammenhenger ved bruk av algebra

<u>Eksempel 1. Mystiske tall:</u>

Hva skjer og hvorfor?

1. Velg et tresifret tall der ikke alle sifrene er like, for eksempel 528
2. Ordne sifrene i synkende rekkefølge: 852
3. Ordne sifrene i stigende rekkefølge: 258
4. Finn differansen mellom de to tallene:

$$\begin{array}{rr} & 852 \\ - & 258 \\ = & 594 \end{array}$$

5. Skriv svaret i omvendt sifferrekkefølge: 495
6. Finn summen av dette tallet og svaret:

$$\begin{array}{rr} & 594 \\ + & 495 \\ = & 1089 \end{array}$$

Hvis hele klassen gjør dette, med ulike tall, vil alle få 1089 til sluttsvar. Eneste unntak er hvis svaret på punkt 4 blir 99. Da må det leses som 099, så fungerer det også (099 + 990 = 1089).

Hvorfor blir det sånn? Vi kan gjøre en del observasjoner.

a) Det vil alltid stå 9 på tierplassen i svaret i 4, siden de midterste sifrene i 2 og 3 er like, og vil må "låne" til enerplassen (største siffer på enerplassen i tallet fra 3)
b) Summen av sifrene på hundrerplassen og enerplassen i svaret i 4 er alltid 9.
c) Da blir summen 9 på enerplassene til tallene i 6. 9 + 9 = 18 på tierplassene, som gir 1 i minne. Summen på hundreplassen er 9 + 1 i minne = 10, altså 1089.

Men dette er ikke noe bevis, siden vi ikke har bevist at summen av sifrene på hundrerplassen og enerplassen i svaret i 4 alltid er 9.

Da må vi skrive opp tallet med helt generelle siffer og se hva vi får:
La tallet være

$$abc\text{, der } a>b>c$$

$$\begin{array}{cccc} & a & b & c \\ - & c & b & a \\ = & (a-1-c) & 9 & (10+c-a) \end{array}$$

Neste regnestykke blir:

$$\begin{array}{cccc} & (a-1-c) & 9 & (10+c-a) \\ + & (10+c-a) & 9 & (a-1+c) \\ = & 10 & 8 & 9 \end{array}$$

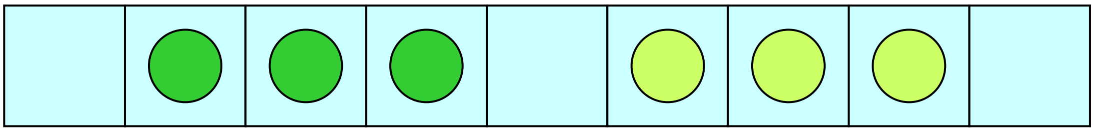
Eksempel 2. Froskespillet:

Vi gir følgende utfordring til elevene:

FROSKEHOPP

En lysegrønn og en mørkegrønn froskefamilie sitter på vannliljeblader. Det er tre lysegrønne og tre mørkegrønne frosker og midt i mellom dem er det et ledig vannliljeblad. Den ene familien vil gjerne bytte plass med den andre, og froskene kan flytte seg på følgende måter:

1. De lysegrønne froskene flytter mot venstre og de mørkegrønne mot høyre.
2. De kan hoppe til et ledig naboblad eller over en annen frosk til et ledig blad.
3. Det er ikke plass til mer enn èn frosk på et blad.
4. Oppgaven er ferdig når de to familiene har byttet plass.



OPPGAVER

A. Still opp tre mørkegrønne og tre lysegrønne brikker på et rutemønster slik som på figuren (bruk knapper, mynter eller noen annet, men det må være to ulike typer, så familiene skilles fra hverandre).

B. Når du har klart det, gjør det en gang til. Denne gangen teller du antall hopp.

C. Prøv samme oppgave med en frosk på hver side. Hvor mange hopp må til? Prøv også med to frosker på hver side.

D. Lag en tabell der du fører opp antall frosker på den ene siden i èn kolonne og antall hopp fra de starter til alle har byttet plass i en annen kolonne. Prøv å finn en sammenheng mellom tallene i de to kolonnene.

E. Gjett hvor mange hopp som trengs når det er fire frosker på hver side. Sjekk om det stemmer.

Vanskeligere

F. Gjett hvor mange hopp som trengs når det er 50 eller 100 frosker på hver side.

G. Kan du finne en formel som gjør at du kan regne ut antall hopp uansett hvor mange frosker som er på hver side?

Etter lang tids spilling, prøving, telling og feiling, kan det bli en tabell som ser slik ut

Antall frosk i hver familie	**Antall hopp til alle har byttet plass**		
1	3		
2	8		
3	15		
4	24		
…	…		
50	$50 \cdot 52 = 2600$	$51^2 - 1 = 2600$	$3 + 5 + 7 + \ldots + (2 \cdot 50+1) = 2600$
100	$100 \cdot 102 = 10200$	$101^2 - 1 = 10200$	$3+5+7+\ldots+201 = 10200$
n	$n(n+2)$	$(n+1)^2-1$	$3+5+7+\ldots+(2n+1)$

De tre alternativene på ”antall hopp til alle har byttet plass” er laget for å illustrere at ulike elever vil ha ulike måter å se det på. Det kan finnes flere måter. Her er poenget blant annet å få fram flere, slik at vi etterpå kan prøve å forstå hvorfor alle måtene blir like.
Da må vi bruke *algebra:*

1. kolonne: $n(n+2) = n^2 + 2n$

2. kolonne: $(n+1)^2 - 1 = (n^2 + 2n + 1) - 1 = n^2 + 2n$

3. kolonne: Denne er litt vanskeligere. Her må vi bruke at summen av tallrekker der Differansen mellom leddene er konstant, er lik det aritmetiske gjennomsnittet av første og siste ledd, multiplisert med antall ledd:

$$3 + 5 + 7 + \ldots + (2n+1) = \frac{(3 + (2n+1)) \cdot n}{2} = \frac{(2n+4) \cdot n}{2} = (n+2) \cdot n = n^2 + 2n$$