Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

# Telle i kor


## Forfatter

Morten Svorkmo



## Publisert dato

April 2016





Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen
Realfagbygget, NTNU, NO-7491 Trondheim

## Hva er Telle i kor?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 120 | 720 | **1320** | 1920 | 2520 | 3120 |
| 240 | 840 | 1440 | 2040 | **2640** | 3240 |
| 360 | 960 | 1560 | **2160** | 2760 | **3360** |
| 480 | **1080** | 1680 | 2280 | 2880 | 3480 |
| **600** | 1200 | 1800 | 2400 | 3000 | 3600 |

Telle i kor er en aktivitet hvor klassen teller sammen ved å legge til eller trekke fra et bestemt tall, mens læreren skriver det elevene teller i en bestemt konfigurasjon av rader og kolonner på tavlen. Læreren stopper tellingen ved strategiske punkter, slik at elevene kan beskrive og begrunne mønster som kommer fram og bruke mønstrene når de fortsetter å telle. Tabellen viser et eksempel fra telling med 120. De røde tallene viser hvor læreren planlegger å stoppe tellingen. Stoppunktene kan ha til hensikt å samle elevene i tellingen, se etter mønster og foreslå tall som vil komme senere i tellingen. De svarte rutene viser hvilke tall læreren har tenkt å spørre etter ved stoppunktene 1080 og 2160.

Aktiviteten krever konsentrasjon fordi alle skal delta i selve tellingen, reflektere over og beskrive egne strategier og lytte aktivt til medelevers resonnement. Etter hvert som mønster og struktur blir synlig for elevene, vil elevene gå fra å addere/subtrahere to tall til å bruke mønsteret som kommer fram, for å telle videre. For å oppnå dette er det viktig at de valgte tallene og antall stoppunkter gjør det mulig å holde en viss flyt i tellingen.

En av fordelene med telleaktiviteten er at alle elevene i klassen kan telle høyt uten at den enkelte elev er i fokus. Strukturen i tellingen og skrivemåten kan være til støtte for elever som strever med å se mønster og sammenhenger mellom tallene.

Aktiviteten bidrar til å holde et felles fokus på en og samme oppgave over tid. Det vil være til hjelp for de elevene som trenger tid på å oppdage sammenhenger, som for andre er opplagt. Med en vel gjennomtenkt konfigurasjon vil det oppstå mange mønster. Noen vil være lette å oppdage, mens andre er mer krevende. Aktiviteten bærer derfor også i seg rike muligheter for differensiering.

# Tallforståelse i Telle i kor

En god tallforståelse danner grunnlaget for arbeid med tall og regneoperasjoner og for å kunne bruke matematikk i dagliglivet. Valenta (2015) drøfter ulike aspekter ved tallforståelse med utgangspunkt i de fem komponentene som Kilpatrick, Swafford, and Findell (2001) bruker for å beskrive matematisk kompetanse: *begrepsmessig forståelse, beregning, anvendelse, resonnering* og *engasjement.* Nedenfor diskuterer vi aspekter ved tallforståelse som kan komme til uttrykk i arbeidet med Telle i kor. De ulike aspektene som Valenta (2015) diskuterer, er fremhevet med kursiv.

Telle i kor egner seg godt i arbeidet med å lære *å gjenkjenne og beskrive struktur, mønster og sammenhenger i arbeidet med tall*. Resonnering, utforming av hypoteser og utforsking er sentrale elementer i matematisk arbeid, og å identifisere mønster og sammenhenger er det første steget i det. For å kunne legge merke til mønster og sammenhenger som er matematisk interessante, tar man i bruk tidligere kunnskap om ulike egenskaper og sammenhenger. Elevene må imidlertid utvikle en forståelse for hva matematiske mønster kan være. I tillegg trenger de å reflektere over og analysere hvilke strukturer som skaper mønstrene (Mulligan & Mitchelmore, 2009).

Tabellen viser en plan for telling med 4, og vi kan identifisere flere mønster i den. I hver rad har tallene samme siffer på enerplassen. Fra kolonne til kolonne øker tierne med to. Den matematiske begrunnelsen for denne økningen er at fire adderes fem ganger i hver kolonne, 5 · 4 = 20. Men denne *relasjonen mellom tall* gjelder ikke bare mellom tallene i nederste rad. Den gjelder med samme begrunnelse for alle radene.

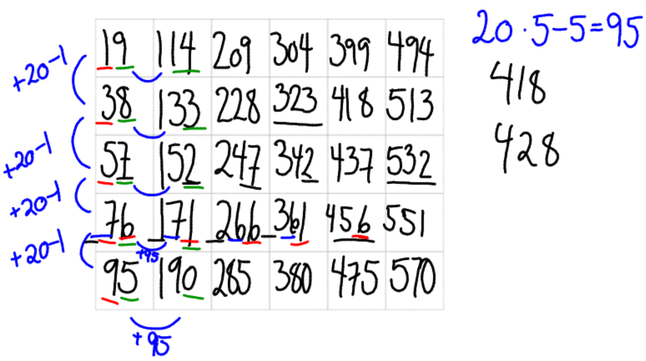
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 24 | 44 | 64 | [2]84 | 104 |
| 8 | **28**[1] | [1]48 | 68 | 88 | 108 |
| 12 | 32 | 52 | **72**[2] | 92 | 112 |
| 16 | 36 | 56 | 76 | [2]96 | 116 |
| 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 |

+20 +20 +20 +20 +20

Når man teller videre fra et tilfeldig valgt tall, må man telle fem ganger før man kommer til tallet som står på samme linje i neste kolonne. Når man legger 100 til første kolonne, får man tallene i sjette kolonne.

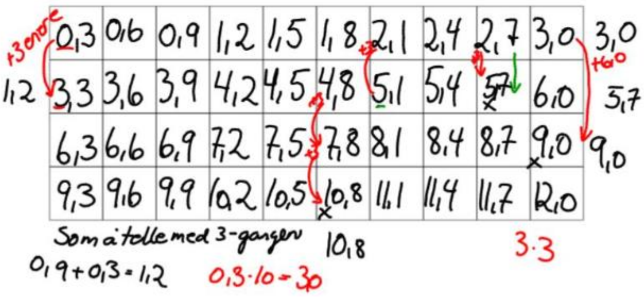
Telle i kor kan for øvrig være en aktivitet som passer til å diskutere ulike *egenskaper ved tall*. I telling med 4 kan man for eksempel diskutere partall. Partall er på formen 2 · n, der n er et naturlig tall. Når vi teller med fire, vil alle tallene være på formen 2 · 2 · n. Vi får altså annethvert partall i tellingen.

*Å beregne* handler ikke bare om å regne nøyaktig, men også om å kunne utføre matematiske prosedyrer fleksibelt og hensiktsmessig. For å få til dette er det viktig å *utvikle varierte strategier for tall og tallbehandling* (Svingen, 2016).




Eksempelet viser hvordan telling med 19 er brukt for å få fram strategier som kan egne seg til å regne med 19. Her er strategien å se tallet 19 som 20 – 1, og videre at 95 i hver kolonne også kan uttrykkes som 20 · 5 – 5. Generelt har vi at 19 · n er det samme som 20 · n – n. Tilsvarende sammenhenger gjelder for alle tall med 9 enere.

Telle i kor kan også brukes i arbeid med *relasjoner som bygger på posisjonssystemet*.




Et eksempel er aktiviteten Telle i kor med 0,3 fra 0,3. Å telle med 0,3 kan ha som målsetting å forstå overgangene mellom tideler og enere i posisjonssystemet og sammenhengen mellom desimaltall og brøk. Hvordan man leser tallene, er avgjørende for hvilke begrep elevene bruker når de beskriver og begrunner mønster og sammenhenger. Å telle null-komma-tre, null-komma-seks osv., gir en annen opplevelse enn når man teller tre tideler, seks tideler osv. Dette blir ekstra tydelig i overgangen mellom null-komma-ni og en-komma-to sammenlignet med å lese ni tideler og tolv tideler. En sammenligning av disse måtene å lese tallene på understreker med andre ord sammenhengen mellom brøk og desimaltall. Aktiviteten kan også egne seg til å se sammenhengen mellom 0,3 og 3, altså at tallet 3 er ti ganger større enn tallet 0,3. Denne relasjonen kan en utnytte i enkelte regneoperasjoner.

# Telle i kor i undervisningen

## Planlegging

Det er lett å tenke at en skal utfordre på flere områder samtidig. Det kan imidlertid føre til at målsettingen med tellingen drukner i litt for mange gode hensikter og at fokuset blir uklart. I undervisningen er det viktig å ha et tydelig matematisk mål og å utforme aktiviteten ut fra det (Kazemi & Hintz, 2014). Den matematiske ideen man ønsker å fremme i tellingen, gjør det lettere å velge tellevariant, konfigurasjon man velger å notere tallene i og stoppunkter med en tydelig hensikt.

**Eksempel på telleaktiviteter med ulike matematiske mål:**

| | |
|---|---|
| Telle med 19 fra 19 | Effektive multiplikasjonsstrategier<br>Hvordan utnytte (20 - 1) |
| Telle med 4 fra 4 | Multiplikative strukturer<br>Å se at multiplikasjon med partall alltid gir partall |
| Telle med 0,3 fra 0,3 | Desimaltall og forståelse av tidelsplass<br>Plassverdisystemet |
| Telle nedover med 10 fra 346 | Se struktur i 10-tallsystemet<br>Hundreroverganger |
| Telle med 15 fra 4 | Algebraisk tenkning<br>$15 \cdot n + 4$ |
| Telle med ¾ fra ½ | Egenskaper ved brøk<br>Relasjoner mellom brøker |

Startpunkt og steg velges ut fra målet for aktiviteten. En godt planlagt aktivitet der læreren forbereder seg på forventede elevresponser, gjør det lettere å lede aktiviteten mot målet.

Konfigurasjonen læreren velger, kan også forsterke det læreren ønsker å oppnå. I eksemplene der det ble telt med 120, 4 og 19, ble tallene skrevet i kolonner med fem rader. Det gir mønster som er lette å oppdage, både i kolonnene og i radene. Betrakter man den femte raden, finner man økning på henholdsvis 600, 20 og 95. Hvis ingen elever ser økningen andre steder, kan de utfordres med et spørsmål: Er dette den eneste raden der det øker med samme tall fra kolonne til kolonne?

I telling med 4 vil man anta at elevene ser det gjentagende mønsteret 4-8-2-6-0 i hver kolonne. Noen elever vil se at tierne øker med to fra kolonne til kolonne når de teller med 4. At denne relasjonen går igjen mellom kolonnene i hele tabellen, kan være en utfordring for mange elever. Noen elever trenger å se sammenhenger mellom tallene og høre begrunnelser flere ganger før de er i stand til å bruke mønsteret videre i tellingen.

Når man teller med 19 i denne konfigurasjonen, vil enerne minke med 1 fra 9 til 0 i de to første kolonnene. Samtidig øker sifrene på tierplassen med 2 i de samme kolonnene. Her vil en av utfordringene være å se sammenhengen mellom 19 og 20 – 1 og å kunne utnytte den i tellingen.

I eksempelet der det ble telt med 0,3, valgte læreren en konfigurasjon der tallene ble skrevet rad for rad i 10 kolonner. Det gir samme siffer på tidelsplassen i hver kolonne, og enerne øker med tre fra rad til rad i samme kolonne. Dette er mønster som gjør tellingen enkel for elevene som ser mønsteret, samtidig som det gir et godt utgangspunkt for å snakke om de matematiske ideene som blir uttrykt i målsettingen.

## Gjennomføring

Det er ambisiøst å lede samtalen mot et ønsket mål samtidig som man skal respondere og bygge videre på elevenes ulike resonnement. Skal læreren lykkes med å engasjere elevene i samtalen på denne måten, må læreren under forberedelsen tenke grundig gjennom hvilke matematiske ideer som skal ha fokus, og hvilke mønster elevene kan komme til å se. Under gjennomføringen av aktiviteten må læreren også være åpen for at elevene kan komme med andre mønster og argumentasjoner enn det læreren har forberedt.

I en utvidet variant av tellingen med 120, har vi sett på hvilke tall som kan komme dersom man hadde fortsatt tabellen. Elevene må begrunne ut fra strukturen i tabellen.

- Kommer 5120? I så fall i hvilken rad/kolonne? Begrunn.
- Kan du si et tall større enn 5000 du er helt sikker på ikke vil komme? Begrunn.
- Kan du si et tall større enn 5000 du er helt sikker på vil komme? Begrunn.

Å argumentere rundt disse spørsmålene kan gi gode diskusjoner, men her er det selvsagt lett å gå seg bort fra en opprinnelig målsetting og dra aktiviteten ut i andre retninger enn det en hadde tenkt. Det kan være bedre å spare materialet for så å gå videre ved en senere anledning, hvis det er ønskelig. Da fjerner man seg kanskje litt fra grunnideene i det å telle i kor, men man kan få mange spennende og gode matematiske diskusjoner som kan hjelpe elever til å se sammenhenger mellom ulike tenkemåter, og gi læreren verdifull innsikt i elevers tenking.

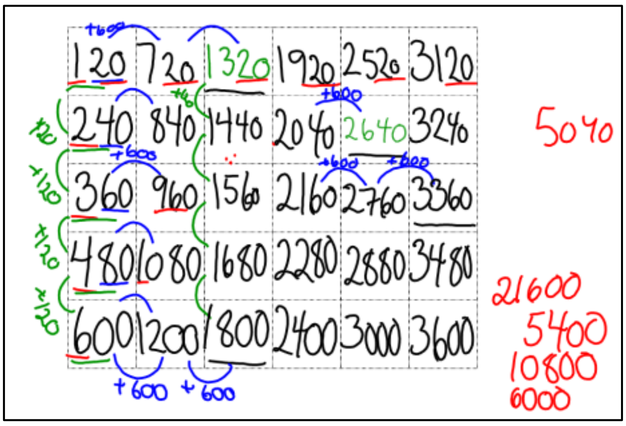
Skal elevene bli engasjerte i samtalen, er det viktig at de er i stand til å forklare hvordan de tenker og kan begrunne resonnementene sine slik at andre kan ta del i deres matematiske tenking. Elevene må derfor utfordres på å beskrive mønster de ser og på å bruke strukturer og sammenhenger til å begrunne mønster (Shumway, 2011). Elevene må også kunne lytte aktivt til hverandre hvis de skal bli oppmerksomme på sammenhenger mellom ulike resonnement.

Det er nok av utfordringer underveis som kan gjøre sitt til at tellingen og den matematiske samtalen ikke går som planlagt, men er man oppmerksom på noen av utfordringene på forhånd, kan det hende at de er lettere å håndtere. Dette kan blant annet dreie seg om å

- lede aktiviteten mot målet
- gi elevene nok tenketid slik at flere er med
- få elevene til å lytte til hverandres resonnement
- skape et klima der det å svare «feil» er akseptert. Det er lov til å ombestemme seg.
- vite hvordan elevene tenker og møte dem med utfordrende respons på sitt nivå
- aktivisere mange elever
- utfordre kognitivt på flere nivåer

*Engasjement* i Telle i kor handler mye om å orientere elevene mot en felles oppgave. Målet er ikke å finne ett svar, men å se verdien av å utvikle flere framgangsmåter for samme type problem i fellesskap. Å oppleve at både medelever og lærer lytter til hverandres resonnement, er et signal om at tankene er verdifulle, og det gjør at engasjementet øker.

## Innspill fra elever




Eksempelet viser hvordan tavla så ut etter en telling med 120 fra 120. Tallene skrives etter hvert som elevene teller. Det som står med grønt og blått i figuren, viser tall, sammenhenger og mønster som elevene har bragt inn i diskusjonen. Notatene kan være til hjelp i den matematiske samtalen, og de kan bidra til at flere elever oppdager mønster, ser sammenhenger og forstår andre elevers resonnement.

Observasjoner elever har kommet med:

- Sifferet på tierplass har en fast struktur 2 – 4 – 6 – 8 – 0
- Enerplassen står fast på 0, så vi kan sammenligne tellingen med 12-gangen
- Sifferet på hundrerplassen øker med 1, bortsett fra i nederste rad der det øker med 2
- Økningen fra kolonne til kolonne er 600

Under tellingen med 120 valgte læreren å fokusere på overgangen fra hundrere til tusener. En av elevene så dette på en annen måte: «Jeg tenkte sånn en, to, tre, fire og så seks, sju, åtte, ni og så ser det ut som ti for det er ti og åtti.» Under oppsummeringen kom det igjen fram at elevene hadde sett at det blir 1, 2, 3, 4 og så mangler 5, og det fortsetter med 6, 7, 8, 9 og 10. 11 mangler, og vi kan fortsette på 12, 13 osv. Dette mønsteret gjentas i hver kolonne. Eleven betraktet altså tusen som ti hundrere osv. Læreren anerkjente måten å se tallene på, men bygde ikke videre opp under den tanken. Slike innspill kan en gjerne ta opp igjen og drøfte nærmere ved en senere anledning.

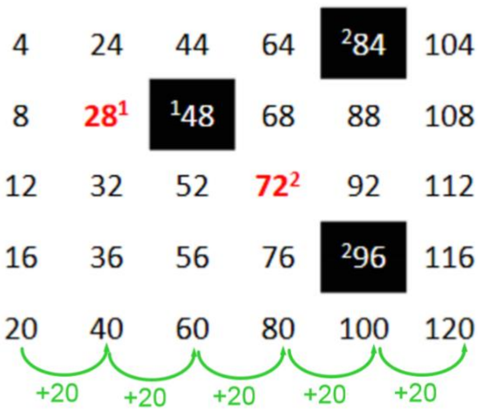
Begrunnelsen for at sifferet på hundrerplassen økte med to på nederste rad, formulerte en elev slik: «Fordi det er 120, og 20 ganger fem blir 100, og da blir det en til hundrer.»

Strukturen i tabellen er slik at vi får $5 \cdot 120 = 600$ i hver kolonne. 120 blir addert fem ganger. Flere elever så økningen med 600 mellom kolonnene i den nederste raden ganske raskt, men at dette gjaldt i alle radene, var ingen selvfølge. Det var ikke like opplagt at de kunne legge 600 til 2040 for å finne tallet ved siden av i neste kolonne, som at de kunne gjøre det fra 1200 til 1800 og videre til 2400.

Ved stoppunktene kom elevene med forslag til tall på et gitt sted i tabellen. I eksempelet, telle med 120 fra 120, holdt noen elever lenge fast på én tellestrategi, addere 120 gjentatte ganger, til de kom til det aktuelle stedet. Etter hvert som elever oppdaget strukturer i tabellen, endret noen strategi relativt raskt, mens andre trengte god tid og flere bekreftelser før de begynte å ta i bruk nyoppdagede strategier. En ting er å se at andre strategier fungerer, noe annet er faktisk å ta dem i bruk. Det kan sitte langt inne for noen elever. Det kan være mer fristende å holde på det som de har erfart fungerer, og i slike tilfeller er det lett for læreren å forklare elevene hvordan de skal tenke. Det er nettopp i slike situasjoner læreren heller bør være på jakt etter gode spørsmål som gjør at elevene selv kan oppdage og erfare nye strategier som mer effektive og hensiktsmessige i gitte situasjoner.

En elev hadde denne begrunnelsen for at 1320 kom til å stå øverst i tredje kolonne: «Jeg tok 120 og ganget med 10. Det er 1200, og så plusset jeg på 120 for da blir det gange 11.» Da læreren spurte hvordan han visste at han kunne gange med 11, svarte eleven: «Det var jo fem på hver kolonne, og så var det på starten av den tredje.» Eleven hadde da sett at alle tallene i tabellen var et multiplum av 120, og at plasseringen i tabellen refererte til et bestemt multiplum.

Å telle med 4 fra 4 kan i utgangspunktet virke som en enkel aktivitet med få muligheter. Utprøving har vist det motsatte. Det er en aktivitet der en må bestemme seg for hvilken matematisk idé som skal ha fokus, ellers kan det gå i mange retninger.




Mange elever kan relativt raskt se en økning på 20 i den nederste raden, men det er ikke like opplagt for alle at den samme økningen går igjen i alle rader. Ved å få elever til å begrunne hvorfor det øker med 20 i den nederste raden, kan flere elever oppdage at dette faktisk gjelder i alle rader. Dette er et vesentlig poeng for å forstå oppbyggingen av tabellen, og for noen elever kan det være nødvendig å se at dette gjentar seg for å få en forståelse av mønsteret og sammenhengen i tabellen.

Hvis man ønsker et fokus på partall-oddetall, kan det være et poeng å se på sifrene på enerplassen og deretter generalisere ved å be elever foreslå andre tall som kan komme dersom tabellen fortsetter.

## Bruk av samtaletrekk

Hvis man ønsker at elevene skal være aktive lyttere til hverandre, er det viktig at læreren selv lytter aktivt til elevenes innspill. For å være sikker på man har oppfattet elevens resonnement, kan man stille oppfølgingsspørsmål. Alternativt kan man oppfordre medelever til å reformulere eller forklare hvordan de forsto det som ble sagt. Det er uansett viktig at innspill fra elever blir behandlet slik at elevene føler at de blir tatt på alvor.

Wæge (2015) beskriver flere samtaletrekk som kan brukes som et verktøy i matematiske samtaler. Disse kan for det første brukes når læreren ønsker å få elevene til å delta i samtalen, lytte til hverandre og følge med på hverandres tenking. De kan også benyttes når læreren ønsker klarhet i hvordan elevene tenker, noe som igjen vil gi læreren innsikt i likheter og ulikheter i tenkemåtene. Til sist vil verktøyene kunne bidra til å knytte alt dette sammen.

Det viktigste er å bygge et klassemiljø der det er trygt å ta ordet, naturlig å dele et resonnement med andre og lytte til andres forklaringer og, ikke minst, rom for å ombestemme seg underveis. Hvis man skal fremme elevers evner til å utforske og resonnere, er det avgjørende at klimaet i gruppen gjør dette mulig. Bevisst øving i å beherske samtaletrekk er et godt redskap for å utvikle både lærerens og elevenes evne til å gi responser som skaper konstruktiv og fruktbar kommunikasjon i klasserommet.

## Referanser

Kazemi, E., & Hintz, A. (2014). *Intentional talk. How to structure and lead productive mathematical discussions.* Portland: Stenhouse Publishers.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping Children Learn Mathematics.* Washington DC: National Academy Press.

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009, Vol 21, No. 2). Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. *Mathematics Education Research Journal*, pp. 33-49.

Shumway, J. (2011). *Number sense routines. Building Numerical Literacy Every Day in Grades K-3.* Portland: Stenhouse Publishers.

Svingen, O. L. (2016). *Barns strategier i arbeid med tall.* Lastet ned fra http://www.matematikksenteret.no/content/4791/Innholdsside 4.4.2016

Valenta, A. (2015). *Aspekter ved tallforståelse*. Hentet fra http://www.matematikksenteret.no/content/4791/Artikler#Tallf 10.11.2015

Wæge, K. (2015). Samtaletrekk - redskap i matematiske diskusjoner. *Tangenten (2/2015)*.