

Tallforståelse

Anita Valenta, Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Mai, 2015

Utvikling av tallforståelse framheves i LK06 som en sentral del av matematikkundervisningen i grunnskolen og som svært viktig for elevenes læring av matematikk. Men det er ikke åpenbart hva tallforståelse innebærer. Case (1998) beskriver tallforståelse slik:

Number sense is difficult to define but easy to recognize. Students with good number sense can move seamlessly between the real world of quantities and the mathematical world of numbers and numerical expressions. They can invent their own procedures for conducting numerical operations. They can represent the same number in multiple ways depending on the context and purpose of this representation. They can recognize benchmark numbers and number patterns: especially ones that derive from the deep structure of the number system. They have a good sense of numerical magnitude and can recognize gross numerical errors that is, errors that are off by an order of magnitude. Finally, they can think or talk in a sensible way about the general properties of a numerical problem or expression- without doing any precise computation. (p. 1)

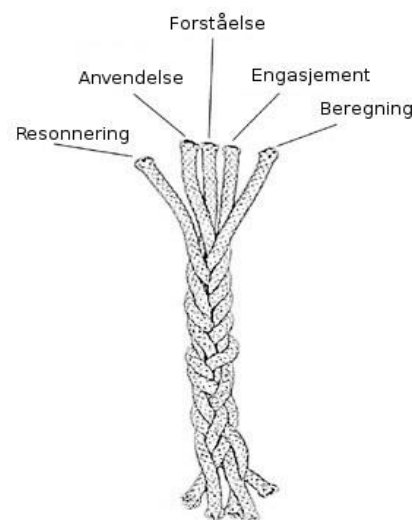
Her fremhever Case fleksibilitet i arbeidet med tall og regneoperasjoner, bruk av ulike representasjoner, utvikling av hensiktsmessige regnestrategier, overslagsregning, identifisering og bruk av ulike mønster, resonnering om egenskaper av tall og operasjoner. McIntosh, Reys and Reys (1992)¹ fremhever i tillegg et emosjonelt aspekt i sin definisjon av tallforståelse:

Number sense refers to a person's general understanding of number and operations along with the ability and inclination to use this understanding in flexible ways to make mathematical judgments and to develop useful strategies for handling numbers and operations.

Deres definisjon består av tre hovedelementer: generell forståelse av tall og operasjoner, bruk av denne forståelsen i matematisk resonnering og utvikling av hensiktsmessige strategier i arbeid med tall og regneoperasjoner og lyst til å gjøre det.

¹ sitert i Anghileri (2006), side 5

Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) beskriver matematisk kompetanse som sammensatt av fem komponenter: forståelse, beregning, anvendelse (strategisk tankegang), resonnering og engasjement. De fremhever at disse fem komponentene er tett sammenflettet og avhengige av hverandre. Komponentene støtter hverandre, og det er viktig at elevene får mulighet til å utvikle alle fem komponentene samtidig. Forbindelsen mellom de ulike komponentene blir da forsterket og elevene utvikler en matematisk kompetanse som er varig, fleksibel, nyttig og relevant. De fem komponentene finner vi igjen i sitatene om tallforståelse fra Case og McIntosh et al., og denne definisjonen av matematisk kompetanse kan ses som et mulig utgangspunkt for nærmere drøfting av tallforståelse.



I denne artikkelen presenteres en kort beskrivelse av de fem komponentene i matematisk kompetanse, og det drøftes ulike aspekter ved tallforståelse innen hver komponent. Denne beskrivelsen av tallforståelse og dens aspekter er utviklet med utgangspunkt i beskrivelsen av matematisk kompetanse gitt av Kilpatrick et al. (2001), forskning innen tallforståelse² og analyse av det faglige innholdet i oppgaver som er blitt utviklet for arbeid med tall og regning på mellomtrinnet innen ulike matematikkdiraktiske prosjekter³.

Beskrivelsen av tallforståelse tar utgangspunkt i mellomtrinnet, og eksemplene er valgt med hensyn til det⁴. Tallforståelsen utvikles gjennom skolegangen og gjennom arbeidet med matematiske spørsmål i hverdags- og yrkesliv. Fagene innen universitetsmatematikk, for eksempel tallteori og abstrakt algebra, vil bidra til utvikling av et mer abstrakt syn på tall, regneoperasjoner og deres egenskaper. På den andre siden vil dagligdagse erfaringer som kunde bidra til utvikling av overslagsregning og prosentregning. Aspektene som skisseres

² se for eksempel: Barmby, Harries, Higgins & Suggate, 2009; Kamii & Dominick, 1997; Markovits & Sowder, 1994; Reid, 2002; Schifter, 2009; Selzer, Prediger, Nührenborger, & Husmann, 2012; Saxe, Diakow, & Gearhart, 2012; Teppo & van den Heuvel-Panhuizen, 2013; Wagner & Davis, 2010.

³ se for eksempel: Carpenter, Franke, & Levi, 2003; Fosnot & Dolk, 2001, 2002; Lamon, 2006; Parrish, 2010; Russell, Schifter, & Bastable, 2011.

⁴ I noen av eksemplene brukes det algebraisk notasjon, men det er gjort for å beskrive det faglige innholdet presist og innebærer ikke at elevene skal nødvendigvis bruke den type notasjon. Å skrive og snakke om "et (hvilket som helst) tall" i stedet for "et positivt helt tall n " kan ofte være presist nok i arbeidet med elever på mellomtrinnet.

nedenfor for mellomtrinnet vil stort sett være relevante og kunne tilpasses i en beskrivelse av tallforståelse på andre trinn selv om innholdet i dem kanskje ville vært noe annerledes.

Aspekter ved tallforståelse på mellomtrinnet

Forståelse innebærer å bygge opp begrepsmessige strukturer og se sammenhenger mellom ulike begreper, ideer og prosedyrer. Forståelse handler også om å tolke, forstå og benytte ulike representasjoner, oversette og veksle mellom ulike representasjoner ut fra hva som kan være nyttig for et gitt formål.

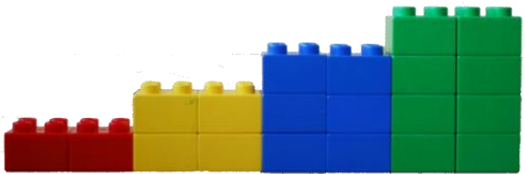
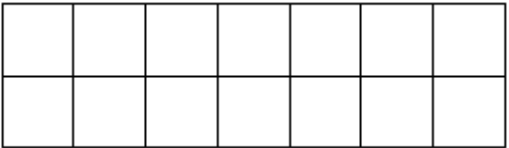
Ulike måter å representere tall på og overganger mellom representasjoner består i å representere positive og negative hele tall, brøk og desimaltall symbolsk, på tallinje, med ulike illustrasjoner, konkrete og regnefortellinger. Det å kunne tolke de ulike representasjonene og veksle mellom dem er av stor betydning for utvikling av tallforståelsen.

Eksempler

Se på tallet 6 som • en mengde på 6 objekter (for eksempel klosser) • en lengde på 6 • et tall på tallinja • et tall som står i relasjon til andre tall: er større eller mindre osv. • har ulike matematiske egenskaper, for eksempel 2 og 3 som faktorer	Se på $\frac{3}{4}$ • som et tall på tallinja • som tallet vi får når vi regner ut $3 : 4$ Kunne representere $\frac{3}{4}$ gjennom ulike situasjoner • 3 hele skal deles på 4 personer • en person får tre firedeler av en mengde
--	---

Ulike egenskaper ved tall består i å kjenne til og kunne beskrive egenskaper ved tall, identifisere tall som har egenskapene, beskrive strukturer og representere dem på ulike måter.

Eksempler

Partall er • tall som er delelig med 2 • er på formen $2 \cdot n$ der n er et naturlig tall • et par antall klosser gir to like lange tårn	
14 er et produkt av tallene 2 og 7. Det betyr at vi kan skrive 14 som $2 \cdot 7$. Produktet kan representeres • som antall ruter i et rutenett med 2 rader og 7 ruter i hver rad	

som antall drops i to poser med 7 drops i hver pose.	
Et tall som har rest 1 når det divideres med 3 er på formen $3 \cdot n + 1$. Kan representeres - med et antall drops som kan fordeles på 3 poser slik at det er like mye i hver pose, og så er det ett drop til overs - som antall klosser i tre tårn der det ene har en kloss mer enn de to andre	

Relasjoner mellom tall består i å kjenne til og kunne beskrive ulike relasjoner mellom tall, gjenkjenne relasjonene og representere dem på ulike måter.

Eksempler

Likhet og ulikhet, to tall som er nesten like store – viktig i overslag
Større enn og mindre enn, som at - et tall er 5 større enn et annet – differansen mellom dem er 5 - et tall er 3 ganger større enn et annet tall - sammenligning av et gitt tall med noen "referansetall" som 10, 100, 25, 1, $1/2$, osv., avhengig av tallet og situasjonen: 500 og 400 som referansetall i subtraksjonen $501 - 398$
Tall som har samme struktur 29 og 139 er begge på formen $10 \cdot n - 1$ - tall med 5 som faktor kan skrives på formen $5 \cdot n$ og representeres som antall drops i poser, med 5 drops i hver pose

Relasjoner som bygger på posisjonssystemet består av kunnskap om posisjonssystemet og fleksibilitet i overgang mellom symboler og innhold.

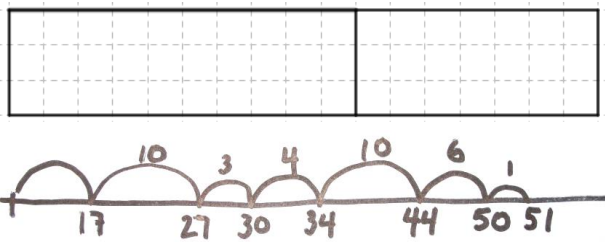
Eksempler

Se på 123 som							
1 hundrer, 2 tiere og 3 enere 12 tiere og 3 enere 11 tiere og 13 enere ...							
Se på 0,7 som							
10 ganger mindre enn 7 10 ganger større enn 0,07 7 tideler ...							
Se på 1,2 som							
100-delen av 120 10 ganger større enn 0,12 ...							
57 drops	10-pakker	0	1	2	3	4	5
	enkel	57	47	37	27	17	7

Ulike måter å representere regneoperasjoner på og overganger mellom representasjonene

innebærer å kunne representere regneoperasjoner symbolsk, med konkreter og tegninger, på ei tallinje og gjennom regnefortellinger. Det innebærer også å kunne tolke representasjonene og skifte mellom dem.

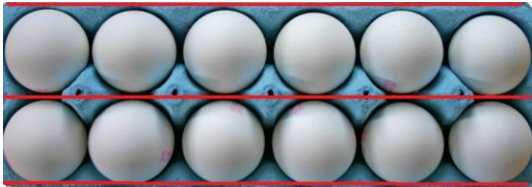
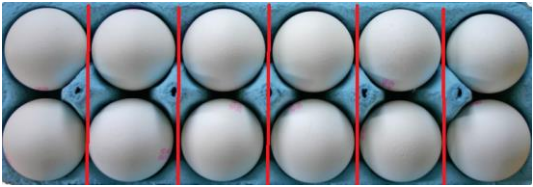
Eksempler

Kjenne igjen regneoperasjoner i ulike typer regnefortellinger fra hverdagen og beskrive konteksten symbolsk.	23 elever skal deles i firer-grupper. $23 : 4 = 5$, rest 3 Fem grupper med fire og ei gruppe med 3.
Kunne presentere et gitt regnestykke i form av en regnefortelling eller en illustrasjon, for eksempel representere - et subtraksjonsstykke som en differanse på ei tallinje - et multiplikasjonsstykke som antall ruter i et rutenett eller som "hopp" på tallinjen ($3 \cdot 17$)	
Kjenne til ulike typer situasjoner som svarer til en gitt regneoperasjon, kunne forklare likheter og forskjeller mellom dem.	- "ta bort" og "differanse" i subtraksjon - multiplikasjon som "like grupper", rutenett, areal av en rektangel, forstørring

Grunnleggende egenskaper ved regneoperasjoner

består av kunnskap om de kommutative, assosiative og distributiv egenskap ved regneoperasjoner, kunnskap om motsatte regneoperasjoner og identitetselementer. Det innebærer å kunne forklare egenskapene og uttrykke dem både symbolsk og med ulike representasjoner.

Eksempler

Kommutativ egenskap ved multiplikasjon: $a \cdot b = b \cdot a$ (Tilsvarende egenskap ved addisjon)	
$2 \cdot 5$ 	$5 \cdot 2$ 
Assosiativ egenskap ved addisjon $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Tilsvarende egenskap ved multiplikasjon)	

Når man skal legge sammen tre tall, som f.eks. 24, 11 og 9, så kan man legge sammen 11 og 9 først, så 24, eller man kan legge sammen 24 og 11 først, så 9. Det blir likt.
 $24 + (11 + 9) = (24 + 11) + 9$.

Det kan man se ved å tenke seg for eksempel tre sjokolader som koster 24, 11, og 9 kroner og vi skal finne prisen tilsammen. Da spiller det ingen rolle hvilke to priser vi starter med å addere før vi legger den siste, prisen blir den samme til slutt.

Den distributive egenskapen: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

$$12 \cdot 4 = (10 + 2) \cdot 4$$



Addisjon og subtraksjon er motsatte operasjoner, at $(a + 5) - 5 = a$. Tilsvarende med multiplikasjon og divisjon: $(a : 7) \cdot 7 = a$.

0 er det tallet som er slik at $a+0=a$ for alle tall a , og tallet $-a$ er slik at $a+(-a)=0$;
 Tilsvarende, 1 er det tallet som er slik at $a \cdot 1 = a$, og tallet $1/a$ er slik at $a \cdot 1/a = 1$.

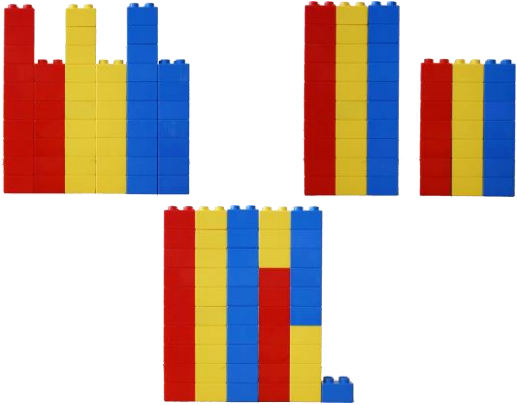
Beregning handler om å kunne utføre ulike matematiske prosedyrer nøyaktig, fleksibelt og hensiktsmessig. Fleksibilitet består i å veksle mellom ulike prosedyrer og foreta hensiktsmessige valg i en gitt situasjon.

Utvikling av varierte regnestrategier kan ta utgangspunkt i regnefortellinger, illustrasjoner, tallinje, konkreter eller i symboler. Når regnestrategier utvikles gjennom regnefortellinger, illustrasjoner o.l., er det viktig at elevene også beskriver tankene sine symbolsk slik at en bevissthet om fremgangsmåten generaliseres utover den gitte konteksten. Regnestrategier kan også utvikles gjennom arbeid med mønster

Eksempler

Regne ut $4 \cdot 49$ ved å representere regnestykket som 4 poser med 49 drops.
 Se at 49 drops er 1 færre enn 50 og at vi da kan regne ut $4 \cdot 49$ som $4 \cdot 50 - 4 \cdot 1$

$$\begin{array}{r} 4 \cdot 5 \\ 4 \cdot 50 \\ 4 \cdot 49 = 4 \cdot 50 - 4 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} \textcircled{50} & \textcircled{50} & \textcircled{50} & \textcircled{50} \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{array}$$

Regne ut $3 \cdot 17$ ved å tenke på 17 som 17 klosser som deles opp i 10 og 7. Da kan vi se $3 \cdot 17$ som $3 \cdot (10 + 7) = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 7$								
Tenke på 501-398 som differansen mellom tallene og regne «bakover». $501 - 398 = 1 + 100 + 2$								
<table border="0"> <tr> <td>$12 : 4 = 3$</td> <td>Hva er likt i de tre første regnestykkene?</td> </tr> <tr> <td>$12 : 2 = 6$</td> <td>Hva er forskjellig i de tre første regnestykkene?</td> </tr> <tr> <td>$12 : 1 = 12$</td> <td rowspan="2">Hva kan svaret på det siste regnestykket være? – Begrunn svaret ditt</td> </tr> <tr> <td>$12 : \frac{1}{2} = ?$</td> </tr> </table>		$12 : 4 = 3$	Hva er likt i de tre første regnestykkene?	$12 : 2 = 6$	Hva er forskjellig i de tre første regnestykkene?	$12 : 1 = 12$	Hva kan svaret på det siste regnestykket være? – Begrunn svaret ditt	$12 : \frac{1}{2} = ?$
$12 : 4 = 3$	Hva er likt i de tre første regnestykkene?							
$12 : 2 = 6$	Hva er forskjellig i de tre første regnestykkene?							
$12 : 1 = 12$	Hva kan svaret på det siste regnestykket være? – Begrunn svaret ditt							
$12 : \frac{1}{2} = ?$								

Bruk av varierte regnestrategier består i å beherske ulike skriftlige og muntlige strategier, overslag og bruk av digitale hjelpemidler – alt etter som hva som kan være hensiktsmessig i en gitt situasjon.

Eksempler

I en diskusjon om mulige strategier for å beregne $75 \cdot 89$ kan mulige forslag være: $(10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 5) \cdot 89$ $7 \cdot (10 \cdot 89) + (10 \cdot 89) : 2$ $(100 - 25) \cdot 89$ der $25 \cdot 89$ er en firedel av $100 \cdot 89$ $\frac{3}{4} \cdot (100 \cdot 89)$ $75 \cdot (100 - 10 - 1)$ $7500 - 750 - 75$...
Bruke overslag i situasjoner der et nøyaktig svar ikke er viktig og til å vurdere rimeligheten av svaret man har fått når en har brukt andre regnestrategier. I regnestykket $75 \cdot 89$ kan vi runde av 89 til 100 og se at svaret må være under 7500. Svaret må ligge i området 6500-7000.
I situasjoner der vi trenger et nøyaktig svar på regnestykker som $68 \cdot 842$ eller $134,24 : 51,2$ er bruk av digitale hjelpemidler et naturlig valg.

Valg av en hensiktsmessig regnestrategi for et gitt regnestykke består i å utnytte egenskaper ved de involverte tallene og regneoperasjonene. Det innebærer å bruke egenskaper ved tall, posisjonssystemet og regneoperasjoner. Erfaringer med referansetall inngår også i dette aspektet.

Eksempler

Utnytte egenskaper ved posisjonssystemet og regneoperasjoner. $127 + 202 = 120 + 200 + 7 + 2$ – distributiv og kommutativ lov for addisjon $30 \cdot 21 = (3 \cdot 10) \cdot 21 = (3 \cdot 21) \cdot 10$ – assosiativ og kommutativ lov for multiplikasjon
Utnytte egenskaper ved tall og regneoperasjoner. $27 : 5 = (25 + 2) : 5 = 5 + \frac{2}{5} = 5 + 0,4 = 5,4$ – distributiv lov $\begin{array}{r} 5 \cdot 5 + 2 \\ \parallel \\ 27 : 5 = 5 + \frac{2}{5} = 5 + 0,4 = 5,4 \end{array}$
Utnytte sammenhengen mellom multiplikasjon og divisjon. $0,25$ er det samme som en firedel, så $0,25 \cdot 36 = 36 : 4 = 9$
Utnytte referansetall og egenskaper ved regneoperasjonene. $17 \cdot 98 = 17 \cdot 100 - 17 \cdot 2 = 1700 - 34 = 1666$

Effektivitet og nøyaktighet er viktige elementer i arbeid med regneoperasjoner. Dette aspektet ved beregning bygger på kunnskap om tall, automatisering av enkle beregninger, et spekter av referansetall og et bredt utvalg av regnestrategier med alle regnearter. I dette aspektet inngår også kombinasjoner av regnearter og videreutvikling av regnestrategier.

Eksempler

$128 : 8$ er 12 tiere og 8 enere, og det skal deles på 8. Det gir 1 hel tier til hver. Da er det 4 tiere 8 enere igjen. Vi kan da ta $40 : 8$ som er 5 og legge til $8 : 8$ som er 1. Svaret blir $10 + 5 + 1 = 16$
$75 \cdot 89$. Ta utgangspunkt i at $75 \cdot 100 = 7500$ og så subtrahere en tidel og en hundredel. $7500 - 750 - 75$

Anvendelse eller strategisk tankegang innebærer å kunne gjenkjenne og formulere matematiske problemer, representere dem på en hensiktsmessig måte, utvikle en løsningsstrategi og vurdere hvor rimelig løsningene er. Med matematiske problemer menes det her problem i hverdags-, arbeids- og samfunnsliv der matematikk kan anvendes, men også abstrakte matematiske problem og spørsmål. Kjennetegnet på et "problem" er at man ikke har

opparbeidet en rutine for å løse det. Man trenger å utvikle en strategi for å løse problemet. Dette innebærer at det som er et problem for noen ikke trenger å være det for noen andre. Eksempelene i det følgende må betraktes ut fra denne forståelsen av problem.

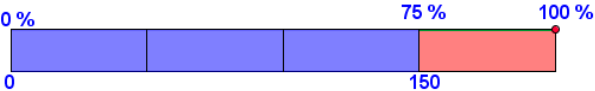
Gjenkjenning og formulering av matematiske problem innebærer å gjenkjenne situasjoner der ulike begreper og ideer knyttet til tall og talloperasjoner kan brukes til å beskrive situasjonen og formulere et matematisk problem eller hypotese. Innhenting av nødvendig informasjon og vurdering av det resultatet en kommer til inngår også i dette aspektet.

Eksempler

Finne ut om vafler som selges i kantina har for høy pris.	
Finne ut hvor langt en bil kan kjøre med full tank.	
Finne ut om alle hele tall som har 5 som faktor har 0 eller 5 som siste siffer, og hvorfor de gjør det i så fall.	
Hva vil klassefesten koste per person?	

Utvikling av en løsningsstrategi for et matematisk problem består i å kunne representere problemet på ulike måter og knytte det til kunnskap om tall, regneoperasjoner og kjente sammenhenger og fremgangsmåter. Videre består det i å kunne utforske problemet systematisk og søke etter mønster eller system. For å få bedre innsikt i ulike sider ved problemet kan det være nyttig å skifte mellom ulike representasjoner.

Eksempler

Bilen bruker 0,48 l/mil. Hvor mye bensin bruker den på 20 km? Vi kan lage en tabell som gir oversikt.	$\begin{array}{r} 0,48 \text{ l/mil} \\ 0,48 0,96 \\ \hline 10 20 \end{array}$ ca 1 l for 20 km
Ei bukse kostet 150 kr på salg. Hva kostet buksa opprinnelig når rabatten var 25 %?	

Vurdering av svar dreier seg om å overveie størrelsene og se for seg situasjonen, tenke gjennom om svaret kan være rimelig. Det innebærer også å tenke gjennom om det er noe som kan ha betydning for beregningene og som det ikke er tatt hensyn til under arbeidet.

Eksempler

Hva er gjennomsnittlig temperatur om morgenen når målingene ei uke viser $5,8 - 6,7 - 12,4 - 13,9 - 9,9 - 11,7 - 14,2$?	Bruker lommeregner og taster $5,8 + 6,7 + 12,4 + 13,9 + 9,9 + 11,7 + 14,2 : 7$ Displayet viser 67,5.
--	---

Resonnering handler om å kunne forklare hvordan man tenker, se etter mønster og sammenhenger. Videre handler det om å utforme hypoteser, begrunne sammenhenger mellom ulike begreper, egenskaper og framgangsmåter og følge med i andres resonnement. Det innebærer også å kunne argumentere for gyldigheten av en hypotese ved å utforme et resonnement med utgangspunkt i noe som er kjent og å stake ut veien mot det som er ukjent og skal undersøkes. Innen tallforståelse handler resonnering om egenskaper ved tall og regneoperasjoner, og man kan skille mellom det å resonnerere om og begrunne en regnestrategi på et gitt regnestykke og å bevise en generell regel.

Gjenkjenning og beskrivelse av struktur, mønster og sammenhenger i arbeidet med tall

består i å søke etter og beskrive mønster og sammenhenger. Dette er det første steget i resonnering, utforming av hypoteser og utforskning.

Eksempler

I et tidligere eksempel så vi hvordan en sekvens av relaterte regnestykker kan brukes som utgangspunkt i utvikling av en regnestrategi. I sekvensen fremheves det en sammenheng mellom divisor (halveres) og kvotient (dobles), og denne sammenhengen kan lede til flere hypoteser.	
$12 : 4 = 3$	<i>Hypoteser:</i>
$12 : 2 = 6$	<i>- svaret på $12 : \frac{1}{2}$ er 24.</i>
$12 : 1 = 12$	<i>- når divisor i et divisjonsstykke halveres, så doubles svaret</i>
$12 : \frac{1}{2} = ?$	<i>- når vi deler et tall med en brøk som har 1 i telleren, så ganger vi bare tallet med nevneren</i>
En elev sier: "Jeg tror at $99 \cdot 11 = 999$. Det er fordi at når man ganger et tall med 11, så gjentas tallet. Som for eksempel $3 \cdot 11 = 33$, $7 \cdot 11 = 77$ og $8 \cdot 11 = 88$."	

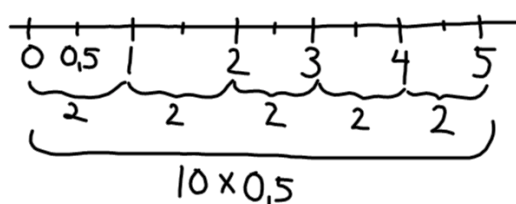
Begrunnelser av regnestrategi/sammenheng på enkeltteksempler består både i å kunne begrunne og kommunisere egne resonnement om enkeltteksempler og å kunne følge med i andres begrunnelser.

Eksempler

$12 \cdot 35 = 10 \cdot 35 + 2 \cdot 35$ fordi jeg kan tenke på $12 \cdot 35$ som 12 hauger med 35 kroner i hver. Jeg regner først ut hvor mye penger det er i 10 hauger, og så de to siste haugene. Da legger jeg sammen de to delene til slutt.

Hvis den distributive egenskapen er kjent fra før, kan argumentasjonen være: Jeg deler 12 opp i to deler, multipliserer begge med 35 og legger sammen til slutt.

Tallet 5 er 10 ganger større enn tallet 0,5. Det er fordi 0,5 betyr 5 tideler, og hvis man skal finne tallet som er 10 ganger større så tar man altså "5 tideler" 10 ganger. To og to "5 tideler" blir 1, så vi får 5 til slutt.



$31 \cdot 10$ er 310 fordi man kan tenke på det som 31 tiere. Ti tiere er 100, 30 tiere er 300, så 31 tiere er 310

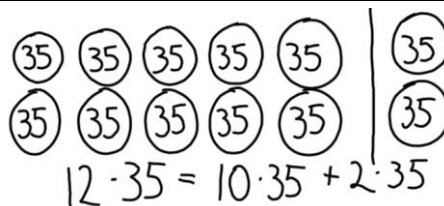
Utforskning av generelle hypoteser ved bruk av et generisk eksempel eller et moteksempel.

Når vi bruker et generisk eksempel ser vi på et enkeltteksempel "på en generell måte". Ved å resonnerer undersøker vi om noe ville blitt annerledes med andre eksempler av samme type. Ofte kan det være formålstjenlig å bruke en regnefortelling eller modell for å se hva som skjer og hvorfor det blir slik. Resonnering om grunnleggende egenskaper ved regneoperasjoner er for eksempel umulig uten å ta i bruk en annen representasjon enn symboler. Bruk av ulike representasjoner kan generelt være viktige for elevers resonnering og utforskning av generelle sammenhenger. Moteksempler er også viktige i utforskning av generelle hypoteser.

Eksempler

Hypotese

Man kan alltid dele opp et av tallene i en multiplikasjon, og så multiplisere hvert av leddene med det andre tallet, som i $12 \cdot 35 = 10 \cdot 35 + 2 \cdot 35$. Vi kan også dele opp 12 i 7 + 5 eller 3 + 9, eller andre mulige kombinasjoner.

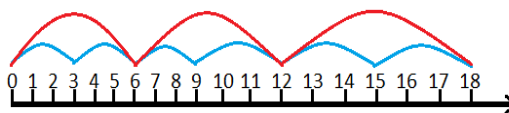


Hvis vi tenker på $12 \cdot 35$ som penger som er 12 hauger, 35 kroner i hver, og vi lurer på hvor mye penger det er, så kan vi dele haugene i 10 hauger og 2 hauger, finne ut hvor mye penger det er i hver av delene, så legge sammen. Det kan vi alltid gjøre, uansett antall hauger og hvor mye penger det er i hver haug.

Her resonneres det om den distributive egenskapen ved multiplikasjon av positive hele tall.

Hypotese:

Alle tall som er delelig med 6 er også delelig med 3".



Vi kan se på 48 som $8 \cdot 6$. Det blir $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$.

Vi kan dele hver 6-er i to 3-ere. Da blir $48 = 3 + 3 + \dots + 3$ 16 ganger.

Da er $48 = 16 \cdot 3$ og altså delelig med 3.

Det kan vi gjøre uansett hvilket tall som er delelig med 6. Vi starter med å dele opp hver 6-er i to 3-ere, og ser da at tallet er delelig med 3 også.

Oppgave: $99 \cdot 11$. Hypotese: Det blir 999. Når vi ganger et tall med 11, så gjentas tallet som $3 \cdot 11 = 33$, $7 \cdot 11 = 77$ og $8 \cdot 11 = 88$.

Hypotesen stemmer for tallen 1-9, men ikke generelt. $99 \cdot 11$ er et moteksempel.

Utforske gyldigheten av generelle hypoteser ved utforming av generelle resonnement.

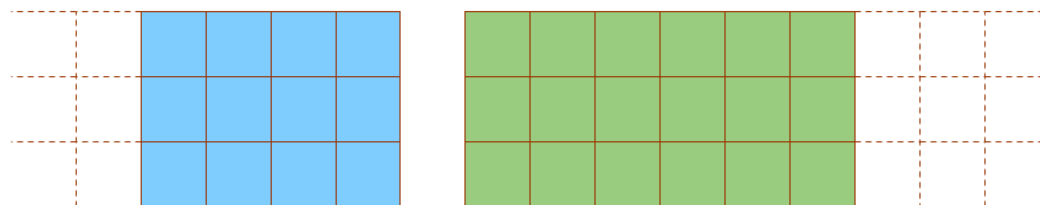
Generelle hypoteser kan også undersøkes generelt, ikke bare ved generiske eksempler eller moteksempler som vist over. Generelle resonnement bygger på kjente resultater og gjerne ved å ta i bruk algebraisk notasjon, men det er ikke alltid nødvendig.

Eksempler

Hypotese

Hvis vi legger sammen to tall som begge er delelige med 3, så vil også summen være delelig med 3.

Et tall som er delelig med 3 kan tenkes som et antall kvadrat som ligger inntil hverandre i 3 like lange rader. Et annet tall som er delelig med 3 kan ordnes på samme måte. Vi ser at vi kan legge sammen en rad fra det første tallet med en rad fra det andre tallet. Da får vi igjen 3 like lange rader, og antall kvadrater er summen av de to tallene vi startet med. Siden summen også er ordnet i 3 like lange rader, er også summen delelig med 3.



Samme hypotese som over kan vi begrunne ved bruk av algebraiske symboler og kjennskap til den distributive loven.

Et tall som er delelig med 3 er på formen $3 \cdot$ et positivt heltall. Hvis vi sier at det første tallet er $3 \cdot a$ og det andre tallet er $3 \cdot b$, er summen $3 \cdot a + 3 \cdot b$. Siden multiplikasjon er distributiv, er summen lik $3 \cdot (a + b)$ og delelig med 3.

Engasjement handler om å se matematikk som fornuftig, nyttig og verdifull. Videre innebærer dette aspektet å ha tro på at det er mulig bli kompetent i matematikk og at man lærer ved å streve og ikke gi opp.

Ha tro på at innsats fører til læring handler om å bli flink til å legge merke til ulike relasjoner, utvikle varierte regnestrategier, skifte mellom representasjoner, løse matematiske problem, gjøre en innsats for å utforme og begrunne hypoteser. Det er et arbeid som tar tid og krever konsentrasjon, men det er mulig for alle.

Oppleve det som meningsfullt å søke etter relasjoner i arbeidet med tall handler om at elevene bør få erfare at det å se etter sammenhenger og strukturer gir mening og gjør faget kreativt og skapende. Mønstre og sammenhenger er selve kjernen i matematikk. Søk etter mønstre og sammenheng kan gjøre tilsynelatende kjedelige regnestykker til utgangspunkt for spennende og kreative måter å tenke på og å utfordre seg selv på.

Se det som nyttig å bruke ulike representasjoner i arbeidet med tall. Alle matematiske objekter, også tall og regneoperasjoner, er abstrakte. Det er ikke noe vi kan peke på og si "DET er tallet 6". Vi kan bare representere tallet på ulike måter: som symbolet 6, eller som $4 + 2$ eller $3 \cdot 2$, som et punkt på tallinja, som en mengde på 6, som en lengde på 6, osv. Ulike representasjoner gir innblikk til ulike egenskaper og aspekter ved "tallet 6". Noen ganger kan det passe bedre å representere tallet på en spesiell måte. Det er gjennom ulike representasjoner vi får tilgang til matematiske objekter, og elevene bør lære å bruke ulike representasjoner slik at de ser hvor nyttig det er for forståelsen.

Se verdien av å utvikle flere fremgangsmåter for samme type problem. Ulike fremgangsmåter og sammenligning av dem gir mulighet til å se et problem fra ulike sider. Det gir også mulighet for å tenke kreativt, velge hensiktsmessige fremgangsmåter og å etablere relasjoner mellom ulike ideer. Elevene bør se på disse elementene som viktige i arbeid med ulike problem knyttet til tall og regneoperasjoner, og som oftest vil dette være viktige enn selve svaret når en lærer seg matematikk.

Utvikling av tallforståelse

De fem komponentene – forståelse, beregning, anvendelse, resonnering og engasjement – og aspektene ved hver av dem er tett sammenflettet og avhengige av hverandre. De støtter hverandre, og det er det må fremheves at de utvikles samtidig. Utvikling av regnestrategier henger tett sammen med forståelse av relasjoner mellom tall og operasjoner, ulike representasjoner, begrunnelser for regnestrategier og verdsetting av ulike måter å tenke på. Tilsvarende med alle andre aspekter av tallforståelse; de utvikles sammen, forsterkes av hverandre og kan ikke tenkes i som en rekkefølge. En oppgave legger gjerne opp til noen aspekter i større grad enn noen andre, og det kan være viktig at læreren også velger hvilke aspekter hun ønsker å fremheve under arbeidet med en gitt oppgave. Men det er viktig at alle de ulike aspektene arbeides med over tid. Elevene utvikler da en tallforståelse som er varig, fleksibel, nyttig og relevant både for videre matematikklæring, i deres hverdagsliv og seinere i deres profesjonelle karriere.

Bevissthet og metakognisjon er sentrale aspekter ved matematikklæring generelt, og også i utvikling av tallforståelse. Elever som får arbeide med tallforståelse med utgangspunkt i denne forståelsen av trådmodellen vil implisitt utvikle både bevissthet og metakognisjon. Men det er også viktig å diskutere utvikling av kompetansene eksplisitt med elevene. Spesielt vil aspekter ved *engasjement* kunne forsterkes gjennom eksplisitt diskusjon med elevene om hva matematikk handler om og hvordan man lærer matematikk. Verdien av representasjoner og nyttig av å utvikle flere fremgangsmåter må inngå i denne prosessen. Diskusjoner der man "ser ovenfra" på arbeid med tall og regneoperasjoner og diskuterer hva, hvordan og hvorfor kan bidra til økt motivasjon og bedre prestasjonen i faget.

Referanser

- Anghileri, J. (2006) *Teaching Number Sense*, 2nd edn. London: Continuum.
- Barmby, P., Harries, T., Higgins, S., & Suggate, J. (2009). The Array Representation and Primary Children's Understanding and Reasoning in Multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, 70(3), 217-241.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically : Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth: N.H., Heinemann
- Case, R. (1998, April). A psychological model of number sense and its development. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Diego.
- Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division*. Portsmouth, N.H.: Heinemann.

- Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work: constructing fractions, decimals, and percents*. Portsmouth, N.H.: Heinemann.
- Kamii, C., & Dominick, A. (1997). To Teach or Not to Teach Algorithms. *Journal of Mathematical Behaviour*, 16(1), 51-61.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (red.)(2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. J. Washington, National Research Council. DC: National Academy Press.
- Lamon, S. J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding*. New York: Routledge 3.utg.
- Markovits, Z., & Sowder, J. (1994). developing Number Sense: An Intervention Study in Grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(1), 4-29.
- McIntosh, A., Reys, B. og Reys, R. (1992). A proposed framework for examining number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 25-31.
- Parrish, S. (2010). *Number talks. Helping children build mental math and computation strategies*. Scholastic Inc.
- Reid, D. A. (2002). Conjectures and Refutations in Grade 5 Mathematics. *Journal for Research in Mathmetics Education*, 33(1), 5-29.
- Russell, S. J., Schifter, D., & Bastable, V. (2011). *Connecting Arithmetic to Algebra*. Portsmouth, N.H.: Heinemann.
- Saxe, B. G., Diakow, R., & Gearhart, M. (2013). Towards curricular coherence in integers and fractions: a study of the efficacy of a lesson sequence that uses the number line as the principal representational context. *ZDM Mathematics Education*, 45, 343-364.
- Schifter, D. (2009). Representation-based proof in the elementary grades. In D. Stylianou, M. Blanton, & E. Knuth (red.), *Teaching and Learning Proofs across the grades* (s. 71-86). New York: Routledge.
- Setler, C., Prediger, S., Nuhrenborger, M., & Husmann, S. (2012). Taking away and determining the difference - a longitudinal perspective on two models of subtraction and the inverse relation to addition. *Educational studies in Mathematics*, 79, 389-408.
- Teppo, A., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Visual representations as objects of analysis: the number line as an example. *ZDM Mathematics Education*, 46, 45-58.
- Wagner, D., & Davis, B. (2010). Feeling number: grounding number sense in a sense of quantity. *Educational Studies in Mathematics*, 74, 39-51.