

**Teoretisk bakgrunnsdokument for
arbeid med regning på ungdomstrinnet
– Revidert våren 2014**

Innholdsfortegnelse

INNHALDSFORTEGNELSE	2
INNLEDNING	3
<i>Fire fagområder i teorien, én integrert praksis</i>	3
<i>Bakgrunnsdokument for arbeid med regning</i>	4
REGNING	5
REGNING SOM GRUNNLEGGENDE FERDIGHET I ALLE FAG	5
REGNING PÅ UNGDOMSTRINNET	6
HELHETLIG PROBLEMLØSNINGSPROSESS	6
<i>Gjenkjenne og beskrive</i>	6
<i>Bruke og bearbeide</i>	7
<i>Reflektere og vurdere</i>	8
<i>Kommunisere</i>	9
<i>Helhetlig problemløsningsprosess – matematisk modellering</i>	10
MATEMATISK KOMPETANSE	11
<i>Beskrivelse av de fem komponentene</i>	12
<i>Komponentene er innbyrdes avhengige</i>	18
HVA KJENNETEGNER ELEVER MED GODE REGNEFERDIGHETER PÅ UNGDOMSTRINNET?	19
AVSLUTNING	20
REFERANSER	21

Innledning

Dette teoretiske bakgrunnsdokumentet om regning er ett av seks vedlegg til Rammeverk for skolebasert kompetanseutvikling på ungdomstrinnet 2013-2017. Det er utarbeidet bakgrunnsdokumenter for de fire satsingsområdene, klasseledelse, lesing, skriving og regning, samt de gjennomgående temaene vurdering for læring og organisasjonslæring. Vedleggene har ikke status som førende dokumenter fra Utdanningsdirektoratet, men er ment å være til faglig inspirasjon for tilbydere (universitet og høyskole), deltakere (skoleeiere, skoleledere og lærere) og andre støttespillere (utviklingsveiledere og ressurslærere) i den skolebaserte kompetanseutviklingen. Dokumentene utdyper kapittel 5 i rammeverket, "Faglige innholdselementer i kompetanseutviklingen". Denne delen av rammeverket beskriver hva som kjennetegner god kvalitet på de fire satsingsområdene, på bakgrunn av forskning, erfaringer fra praksis, Opplæringsloven og læreplanverket.

Bakgrunnsdokumentet om regning ble revidert våren 2014. Hovedmålet med denne revideringen var å synliggjøre at regning som grunnleggende ferdighet handler om regning i alle fag. Revideringen er et forsøk på å knytte dokumentet tettere opp til rammeverk for grunnleggende ferdigheter og læreplanene i alle fag.

Fire fagområder i teorien, én integrert praksis

Hovedmålet med den skolebaserte kompetanseutviklingen på ungdomstrinnet er å utvikle en mer praktisk og variert undervisning som oppleves som relevant og utfordrende av elevene. Samtidig er det et viktig mål at lærere som deltar i den skolebaserte kompetanseutviklingen, skal utvikle sin kompetanse i klasseledelse, regning, lesing, skriving og vurdering for læring (Kunnskapsdepartementet, 2012b). Det er utarbeidet et teoretisk bakgrunnsdokument for hvert av de fire satsingsområdene klasseledelse, regning, lesing og skriving. For lærere som underviser på ungdomstrinnet, vil de fire faglige innholdselementene i kompetanseutviklingen i praksis henge tett sammen. Den skolebaserte kompetanseutviklingen må gjennomføres på en slik måte at den imøtekommer behovene de ulike skolene og lærerne møter i sin praksis.

God vurderingspraksis og god klasseledelse henger tett sammen, og er grunnleggende for lærernes pedagogiske praksis. Det er vanskelig å lykkes med god klasseledelse uten god vurderingspraksis og omvendt. Skal elevenes ferdigheter i lesing, skriving og regning bli bedre, er de avhengige av lærere som er dyktige klasseledere og som har en vurderingspraksis som bygger opp under gode relasjoner, tydelige faglige forventninger til elevene, et trygt læringsmiljø, læringsfremmende tilbakemeldinger og elever som er aktive deltakere i egen læreprosess. Dette er imidlertid ikke tilstrekkelig. Skal

elevne i ungdomsskolen forbedre sine grunnleggende ferdigheter i lesing, skriving og regning, må også alle lærere ha tilstrekkelig faglig kompetanse på disse områdene.

Kompetanseutviklingen skal foregå på skolen for alle ansatte. God organisasjonskultur er en forutsetning for kollektiv endring, og derfor blir også måter skolen lærer på kollektivt, som organisasjon, viktig i dette arbeidet. Det vises til de ulike bakgrunnsdokumentene for en grundig innføring i de aktuelle satsingsområdene, og hvordan de har relevans for hverandre.

Bakgrunnsdokument for arbeid med regning

I dette dokumentet defineres først regning som grunnleggende ferdighet i alle fag, før vi beskriver de fire ferdighetsområdene som utgjør den grunnleggende ferdigheten å kunne regne. Deretter beskrives den matematiske kompetansen elevene trenger for å kunne regne i de ulike fagene og samspillet denne kompetansen har med ferdighetsområdene.

Første utgave av dokumentet ble utarbeidet av en arbeidsgruppe som besto av følgende personer:

Ole Kristian Bergem	Postdoktor, Universitetet i Oslo
Lene Grøterud Leer	Universitetslektor, Matematikksenteret
Marianne Maugesten	Førstelektor, Høgskolen i Østfold
Mira Randahl	Universitetslektor, Matematikksenteret
Anders Sanne	Utviklingsleder, Matematikksenteret
May Renate Settemsdal	Universitetslektor, Matematikksenteret
Lill Sørensen	Universitetslektor, Matematikksenteret
Svein H. Torkildsen	Prosjektleder, Matematikksenteret
Kjersti Wæge	Førsteamanuensis, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Denne reviderte utgaven er utarbeidet av følgende personer:

Bård Vinje	Rådgiver, Matematikksenteret, leder av arbeidsgruppen
Eskil Braseth	Universitetslektor, Matematikksenteret
Stig Atle Myhre	Universitetslektor, Matematikksenteret
Guri A. Nortvedt	Forsker, Universitetet i Oslo
Kjersti Wæge	Leder, Matematikksenteret

Regning

Regning som grunnleggende ferdighet innebærer, ifølge Rammeverk for grunnleggende ferdigheter, å bruke matematikk på en rekke livsområder. «Å kunne regne innebærer å resonnerer og bruke matematiske begreper, fremgangsmåter, fakta og verktøy for å løse problemer og for å beskrive, forklare og forutse hva som skjer. Det innebærer å gjenkjenne regning i ulike kontekster, stille spørsmål av matematisk karakter, velge holdbare metoder når problemene skal løses, være i stand til å gjennomføre dem og tolke gyldigheten og rekkevidden av resultatene.» (Kunnskapsdepartementet, 2012a, s. 12)

Målet er at elevene skal kunne delta i samfunnet, slik at de blant annet skal kunne vurdere samfunnsspørsmål og treffe beslutninger på en reflektert og kritisk måte. Elevene skal bli aktive samfunnsborgere som kan ta hensiktsmessige avgjørelser i eget skole-, arbeids- og privatliv.

Regning som grunnleggende ferdighet i alle fag

I LK06 blir regning beskrevet som en av fem grunnleggende ferdigheter. Regning som grunnleggende ferdighet innebærer å kunne anvende matematikk i ulike fag når det er relevant og på de ulike fagenes premisser. Å kunne regne i fag er avgjørende for læring i alle fagene.

Regneferdigheten er synliggjort i LK06 på to måter. Læreplanene for fag inneholder en beskrivelse av hvordan regning skal forstås og hvilken progresjon regning har i de ulike fagene. I tillegg er regneferdigheten integrert i kompetansemålene i fagene. Å regne i et fag betyr, som nevnt over, å anvende matematikk i faget på fagets premisser. Regning skjer på fagets premisser når elevene anvender matematikk for å nå bestemte kompetansemål i det aktuelle faget. Regning er en forutsetning for å nå kompetansemål i fag og kan bidra til å utvikle elevenes kompetanse i de ulike fagene. Vi kan si at regning både er en forutsetning for å utvikle kompetanse og en del av kompetansen i de ulike fagene.

Å sette seg inn i og trekke slutninger fra tekster, bilder, figurer, grafer og tabeller med matematisk innhold, er en sentral del av det å kunne regne i ulike fag. Elevene skal også kunne gjenkjenne hvordan regning kan brukes i ulike faglige kontekster og formulere en matematisk modell, bruke relevante metoder for å løse problemet, og kunne vurdere gyldigheten av svarene de har kommet fram til knyttet til den faglige konteksten.

Gjennom ungdomstrinnet vil kravet til elevenes regneferdighet øke. Utvikling i å kunne regne kan beskrives som en utvikling langs to akser. Den eneaksen handler om kompleksiteten i situasjonen eller teksten problemet finnes i. Den andreaksen handler om bredden av matematiske begreper og

metoder som tas i bruk for å løse problemet. Utvikling i regning går fra å kjenne igjen og kunne løse problemer i enkle situasjoner ved hjelp av noen enkle metoder til å kunne løse problemer i komplekse situasjoner ved hjelp av et bredt spekter av strategier og metoder. De enkle problemene har få størrelser som varierer, og de kan ofte beskrives ved hjelp av en kjent modell. I mange tilfeller kan det være tilstrekkelig å gjennomføre én velkjent prosedyre for å finne løsningen på problemet. Komplekse situasjoner kjennetegnes ved at de omfatter flere variabler som må identifiseres og formuleres. Elevene må utvikle en sammensatt modell, og de må kanskje veksle mellom flere representasjoner for samme fenomen. For å løse problemet må elevene benytte seg av flere metoder, og de må ofte bruke kjente metoder i nye situasjoner. Til slutt må elevene reflektere over problemløsningsprosessen og vurdere svaret.

Regning på ungdomstrinnet

I vår beskrivelse av regning vil vi fokusere på to ulike aspekter ved elevenes aktivitet. Vi vil først beskrive de fire ferdighetsområdene som utgjør den grunnleggende ferdigheten å kunne regne. Deretter vil vi beskrive hvilken matematisk kompetanse elevene trenger for å kunne regne i de ulike fagene.

Helhetlig problemløsningsprosess

Å kunne regne består av fire ferdighetsområder. De tre ferdighetsområdene, *Gjenkjenne og beskrive*, *Bruke og bearbeide* og *Reflektere og vurdere*, er prosesser elevene må arbeide seg gjennom når de regner i fagene. De tre ferdighetsområdene utgjør til sammen en helhetlig problemløsningsprosess som vi kaller matematisk modellering (se for eksempel Lesh & Zawojewski, 2007; Niss, Blum & Galbraith; 2007; OECD, 2013; Polya, 1957). *Kommunisere*, som er det fjerde ferdighetsområdet, er et sentralt element i hver av de tre ferdighetsområdene. Elevene må kunne kommunisere med andre om modellen, hvilke strategier som er brukt og resultatene de har fått. Nedenfor vil vi gi en detaljert beskrivelse av de fire ferdighetsområdene.

Gjenkjenne og beskrive

Rammeverket for grunnleggende ferdigheter beskriver Gjenkjenne og beskrive som «å kunne identifisere situasjoner som involverer tall, størrelser og geometriske figurer som finnes i lek, spill, faglige situasjoner og arbeids- og samfunnsliv. Det innebærer å finne relevante problemstillinger og å analysere og formulere dem på en hensiktsmessig måte.» (Kunnskapsdepartementet, 2012a, s. 12)

Dette innebærer å gjenkjenne muligheter til å bruke matematikk og formulere matematiske problemstillinger i ulike faglige kontekster. Det handler blant annet om å kunne se at matematikk kan

brukes til å forstå eller bestemme løsningene på problemstillinger i praktiske situasjoner. Elevene må kunne gå fra et virkelig problem til en matematisk modell, som for eksempel kan bestå av likninger, formler, grafer og tabeller. Med virkelig problem mener vi her et problem eller en utfordring elevene møter i en kontekst fra et skolefag eller i dagliglivet. For å kunne gjøre dette, må elevene ofte oversette hverdagsspråk til matematisk språk og terminologi. Vi kaller dette «å matematisere en situasjon».

Et eksempel fra samfunnsfag kan illustrere denne prosessen. I samfunnsfag skal elevene kunne

- bruke statistiske kjelder til å berekne og beskrive tendensar og variasjonar i samfunnsfaglege drøftingar og vurdere om statistikkene gjev påliteleg informasjon (Kunnskapsdepartementet, 2013a, s. 9)
- samanlikne storleik, struktur og vekst i befolkningar og analysere befolkningsutvikling, urbanisering og flytting i nyare tid (Kunnskapsdepartementet, 2013a, s. 10)

Med utgangspunkt i disse kompetansemålene kan lærere gi elevene en faglig kontekst tilknyttet temaet befolkningsutvikling. Elever kan se muligheten til å bruke regning for analysere befolkningsutvikling og de kan formulere faglige problemstillinger som kan løses ved hjelp av regning. På bakgrunn av problemstillingene sine kan de formulere matematiske modeller for å belyse temaet befolkningsutvikling. Ved hjelp av matematiske modeller kan de si noe om hvordan befolkningsutviklingen har vært, og de kan anslå hvordan befolkningsutviklingen vil bli i verden i årene framover.

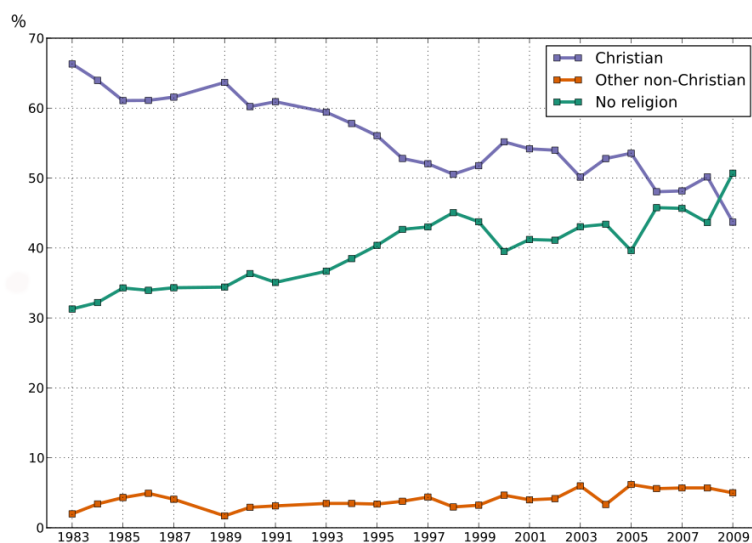
Bruke og bearbeide

Rammeverket for grunnleggende ferdigheter beskriver bruke og bearbeide som «å kunne velge strategier for problemløsning. Det innebærer å kunne bruke passende måleenheter og presisjonsnivå, utføre beregninger, hente informasjon fra tabeller og diagrammer, tegne og beskrive geometriske figurer, bearbeide og sammenlikne informasjon fra ulike kilder.» (Kunnskapsdepartementet, 2012a, s. 1)

Dette innebærer å bruke matematikk for å løse problemer i ulike faglige kontekster. Når elevene har formulert en problemstilling må de bruke matematiske begreper, prosedyrer, fakta og verktøy¹ for å finne en løsning på problemet. Underveis i prosessen må elevene resonnerer, velge gode strategier og bruke hensiktsmessige verktøy. Dette innebærer for eksempel å gjøre utregninger ved hjelp av de fire regneartene, løse likninger, lese av og bearbeide informasjon fra grafiske framstillinger, analysere data osv.

¹ Matematiske verktøy kan for eksempel være symboler, representasjoner og matematisk språk.

Et eksempel som illustrerer denne prosessen kan vi hente fra faget engelsk. I læreplanen i engelsk står det at elevene skal kunne drøfte levesett og omgangsformer i Storbritannia, USA, andre engelskspråklige land og Norge (Kunnskapsdepartementet, 2013b, s. 9). Hvis elevene skal kunne gjøre slike drøftinger, må de ha kunnskap om de aktuelle emnene. For å skaffe seg slik kunnskap kan elevene for eksempel lese av og bearbeide informasjon fra grafiske framstillinger. Den grafiske framstillingen nedenfor (se figur 1) viser utviklingen av ulike religioner i Storbritannia. Informasjonen elevene kan hente ut fra denne grafiske framstillingen, vil sammen med annen informasjon kunne danne et godt utgangspunkt for drøftingen av levesett og omgangsformer i Storbritannia.



Figur 1: Religion in the United Kingdom (wikipedia.org)

Reflektere og vurdere

Ifølge Rammeverket for grunnleggende ferdigheter innebærer Reflektere og vurdere «å tolke resultater, vurdere gyldighet og reflektere over hva resultatene betyr for problemstillingen. Det innebærer å bruke resultatet som grunnlag for en konklusjon eller en handling.»

(Kunnskapsdepartementet, 2012a, s. 12)

Dette innebærer å kunne reflektere over, tolke og vurdere løsninger. Elevene må kunne reflektere over løsningen og tolke det på bakgrunn av den opprinnelige problemstillingen og den faglige konteksten. Både løsningen og resonnementet må vurderes, og elevene må avgjøre om resultatene som de har funnet, er fornuftige og logiske ut fra den opprinnelige situasjonen. Dette innebærer blant annet å oversette fra matematisk språk og terminologi til hverdagsspråk.

Denne prosessen kan illustreres ved et eksempel fra faget mat og helse. Ifølge kompetansemålene for faget skal elevene kunne planlegge og gjennomføre måltider i forbindelse med høytider og fest (Kunnskapsdepartementet, 2013c, s. 5). Ved planlegging av måltider må elevene tilpasse matoppskriftene til det antallet personer de skal planlegge måltidet for. Den matematiske løsningen vil ofte være å øke eller minske mengden av hver ingrediens proporsjonalt med antall personer. Etter å ha funnet en matematisk løsning, må elevene reflektere over løsningen sin og vurdere om de har valgt en løsningsstrategi som er fornuftig ut fra den konkrete situasjonen. Kanskje blir det ikke riktig i denne situasjonen å øke eller minske mengden av ingrediensene proporsjonalt. Elevene må for eksempel vurdere om alle personene vil spise like mye, hvem som skal spise og om det vil være riktig i forhold til matoppskriften å endre mengden av alle ingrediensene proporsjonalt.

Når elevene skal reflektere over, tolke og vurdere en matematisk løsning er de avhengige av god fagkunnskap. De må kunne sette seg inn i den faglige konteksten som danner utgangspunktet for problemet eller utfordringen, og de må kunne vurdere om den løsningen de har kommet fram til, er fornuftig og logisk. I vurderingen må de trekke inn både faglige konteksten og kunnskap de har i faget.

Kommunisere

Rammeverket for grunnleggende ferdigheter beskriver Kommunisere som «å kunne uttrykke regneprosesser og resultater på ulike måter. Å kommunisere innebærer også å kunne begrunne valg, formidle arbeidsprosesser og presentere resultater til mottaker.» (Kunnskapsdepartementet, 2012a, s. 12)

Kommunikasjon er et viktig element i hver av de tre ferdighetsområdene som utgjør regning. Når elevene skal gjenkjenne det matematiske innholdet i en situasjon, beskrive det og formulere en problemstilling og en matematisk modell, må de kunne sette ord på, muntlig eller skriftlig, sentrale variabler, størrelser som varierer og sammenhenger mellom ulike variabler. Elevene må også kunne diskutere dette med medelever og lærer. Det innebærer for eksempel å diskutere hvordan situasjonen kan forenkles slik at man kan formulere en modell som kan bearbeides videre.

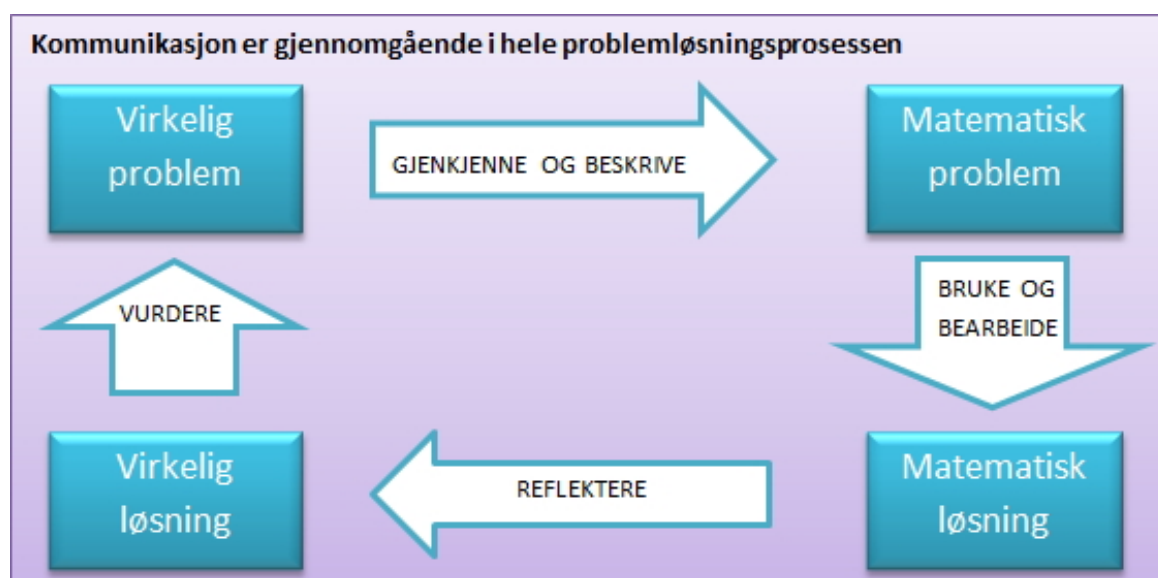
Videre må elevene kunne uttrykke fremgangsmåter, resonnementer og resultater på ulike måter. De må også kunne begrunne valg av strategier og verktøy.

Sist med ikke minst må elevene kunne kommunisere om det de har kommet frem til. De må kunne legge frem tolkninger av resultatene, og drøfte modellens begrensninger og hvorvidt resultatene er fornuftige og logiske ut fra konteksten.

Helhetlig problemløsningsprosess – matematisk modellering

Som nevnt utgjør de tre ferdighetsområdene, *Gjenkjenne og beskrive*, *Bruke og bearbeide* og *Reflektere og vurdere* til sammen en helhetlig problemløsningsprosess som vi kaller matematisk modellering, og kommunikasjon er et viktig element i hver av de tre ferdighetsområdene.

Å regne for å lære i fagene innebærer for eksempel å stille opp en modell for befolkningsvekst, finne ut hvilke mål en meisekasse skal ha, eller vurdere en grafisk framstilling av valgresultatene fra siste stortingsvalg. Når elevene regner i fag arbeider de seg gjennom ett eller flere trinn i modelleringsprosessen slik den er fremstilt i figur 2. I enkelte tilfeller kan en av prosessene være mer krevende enn de andre, og det kan også være slik at elevene ikke er innom alle prosessene. Hvis elevene får presentert en ferdig matematisk modell, for eksempel en grafisk framstilling av valgresultater, vil det være naturlig at de går direkte til prosessen Bruke og bearbeide.

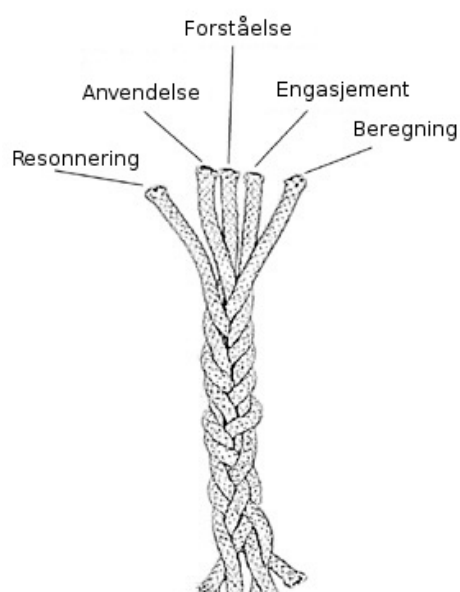


Figur 2: Helhetlig problemløsningsprosess – matematisk modellering

Matematisk kompetanse

Arbeid med de fire ferdighetsområdene *Gjenkjenne og formulere, Bruke og bearbeide, Reflektere og vurdere og Kommunisere* kan bidra til at elevene utvikler forståelse for begreper og lærer å beherske mange strategier for å løse problemer. Regning i de ulike fagene kan forsterke elevenes matematiske kompetanse, samtidig som regning kan bidra til å utvikle elevenes kompetanse i fagene. Matematisk kompetanse kan beskrives ved hjelp av fem komponenter som til sammen utgjør det Kilpatrick og hans kolleger kaller "mathematical proficiency" (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001).

1. **Forståelse:** Forstå matematiske begreper, representasjoner, operasjoner, prosedyrer og relasjoner
2. **Beregning:** Utføre prosedyrer, som involverer tall, størrelser og figurer, effektivt, nøyaktig og fleksibelt
3. **Anvendelse:** Formulere problemer matematisk og utvikle strategier for å løse problemer ved å bruke passende begreper og prosedyrer
4. **Resonnering:** Forklare og begrunne en løsning til et problem, eller utvide fra noe kjent til noe som ikke er kjent
5. **Engasjement:** Være motivert for å lære matematikk, se på matematikk som nyttig og verdifullt, og tro at innsats bidrar til økt læring i matematikk



Figur 3: Matematisk kompetanse består av fem sammenflettede tråder (oversatt utgave, hentet fra Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001, p. 117)

Komponentene kan forstås som tråder i et tau som er flettet sammen, og som er avhengige av hverandre (se figur 3). De fem komponentene støtter hverandre, og det er viktig å påpeke at elevene må utvikle alle fem samtidig. Forbindelsen mellom de ulike komponentene blir da forsterket og elevene utvikler kompetanse som er varig, fleksibel, nyttig og relevant (Kilpatrick et al., 2001).

Elevenes matematiske kompetanse, i form av de fem komponentene, danner i stor grad grunnlaget for regning i de ulike fagene. Det er viktig å påpeke at elevene først og fremst skal utvikle de fem komponentene i matematikkfaget. Det vil variere fra situasjon til situasjon i de ulike fagene i hvilken grad de ulike komponentene blir tatt i bruk, men alle fem komponentene kan tas i bruk i ferdighetsområdene som utgjør regning. For å illustrere dette kan vi se på eksemplet om

befolkningsutvikling i samfunnsfag. Forståelse kan for eksempel involveres i ferdighetsområdet *Gjenkjenne og beskrive* ved at elevene må kunne forstå hvilke matematiske begreper som er relevante i situasjonen og formulere en problemstilling. Elevene må forstå de matematiske begrepene prosent og prosentvis endring, og de må kunne se sammenhengen mellom dem for å kunne løse problemet i prosessen *Bruke og bearbeide*. Når elevene skal *Reflektere og vurdere* løsningsens holdbarhet i den faglige konteksten, kan forståelse involveres ved at elevene må vurdere de forskjellige representasjonene som de har benyttet for å beskrive den praktiske situasjonen problemet oppstod i.

Beskrivelse av de fem komponentene

Nedenfor følger detaljerte beskrivelser av de fem komponentene. Vi vil også presentere eksempler som illustrerer på hvilken måte hver enkelt komponent i modellen er viktig for ferdighetsområdene som regning er definert ved. Eksempelene vil illustrere samspillet mellom ferdighetsområdene og de fem komponentene. For å synliggjøre dette samspillet, vil vi i hvert eksempel fokusere på et av ferdighetsområdene og på den komponenten beskrivelsen omhandler. Det er viktig å påpeke at de fem komponentene er innbyrdes avhengige. Dette blir nærmere beskrevet senere i dokumentet.

1. Forståelse: Forstå matematiske begreper, representasjoner, operasjoner og relasjoner.

Elever som har utviklet forståelse i matematikk kan mer enn isolerte regler og prosedyrer. De vet hvorfor en matematisk idé er viktig, i hvilke situasjoner den er nyttig, og de ser sammenhengen mellom matematiske idéer (Kilpatrick & Swafford, 2002; Kilpatrick, et al., 2001; NCETM, 2008). Elevene er i stand til å tolke, forstå og benytte ulike representasjoner, og de kan se sammenhenger mellom forskjellige representasjoner knyttet til en gitt situasjon. Elever som har utviklet forståelse, kan se mønster og systemer i forskjellige problemer og situasjoner (Kilpatrick & Swafford, 2002; Kilpatrick, et al., 2001; Niss & Jensen, 2002; OECD, 2010). For at elevene skal utvikle forståelse innenfor et emne, er det viktig at det fokuseres på framgangsmåten i stedet for kun løsningen til et problem.

Forståelse slik det er beskrevet over er en viktig komponent i ferdighetsområdene som utgjør regning. For eksempel vil det å tolke, forstå og benytte ulike representasjoner være sentralt i prosessen *Bruke og bearbeide*. Den forståelsen elevene har utviklet i matematikkfaget kan forsterkes i møte med andre faglige kontekster. Eksemplet nedenfor illustrerer at elevene må kunne tolke og forstå tabeller i norskfaget.

Eksempel – å kunne regne i norsk

I forbindelse med Stortingsvalget i 2013 har VG med jevne mellomrom fått meningsmålinger fra InFact.

De siste dagene før valget var det målinger hver dag. Målingen som skal presenteres i avisen 6. september finnes i tabellen sammen med målingene som ble presentert 4. og 5. september.

Tabellen inneholder også et par tidligere målinger.

Meningsmåling fra InFact/VG

Fakta om undersøkelsen

- Utfører: InFact Norge AS
- Populasjon: Norge, innbyggere +18 år
- Antall intervjuer: 2 041 gjennom 2 separate undersøkelser
- Vekting: Kjønn, alder, bosted og partivalg 2011
- Feilmargin: Maksimalt +/- 1,9 %, gjelder totalutvalget
- Metode: InFact automatiske telefonintervjuer
- Periode: 4. og 5. september 2013

Stortingsvalg 2013

	22.8	31.8	4.9	5.9	6.9
Parti	%	%	%	%	%
Rødt	1,5	1,9	1,8	1,7	1,8
SV	4,7	4,8	4,9	4,9	4,6
Ap	28,1	28,0	28,2	29,2	30,5
Sp	4,7	5,4	5,6	5,5	5,2
Krf	5,9	6,5	7,1	6,9	5,9
V	5,9	5,2	5,0	5,5	6,2
H	29,6	27,2	27,5	27,6	26,9
Frp	13,3	15,6	14,5	13,1	13,8
MDG	4,7	3,3	3,5	3,7	3,1
Andre	1,6	2,1	1,9	1,9	2,0
	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

Oppgave

Tenk deg at du er journalist i VG. Skriv en artikkel som informerer om utviklingen i de ulike partiene sin oppslutning. Artikkelen skal inneholde overskrift, ingress og brødtekst, faktarute og tabeller/diagram.

Læreplanen i norsk sier at elevene skal kunne skrive kreative, informative, reflekterende og argumenterende tekster på hovedmål og sidemål med begrunnede synspunkter og tilpasset mottaker, formål og medium (Kunnskapsdepartementet, 2013d, s. 9). I eksempelet over skal elevene skrive en kreativ, informativ, reflekterende og argumenterende avisartikkel. For å kunne gjøre dette må elevene kunne lese av og tolke tabellen. Dette inngår i den andre prosessen i modellering, nemlig *Bruke og bearbeide*. Det er avgjørende at elevene har forståelse av tabell som representasjonsform for å kunne skrive denne artikkelen. Elevene kan også benytte andre representasjoner, eksempelvis linjediagram, for å illustrere budskapet i artikkelen. Elever som kan se sammenhenger mellom ulike representasjonsformer kan altså utnytte dette når de skriver artikkelen. Detaljert beskrivelse av

dette undervisningsopplegget finnes under pedagogiske ressurser på Utdanningsdirektoratets nettsider tilknyttet regning.

2. Beregning: Utføre prosedyrer som involverer tall, størrelser og figurer effektivt, nøyaktig og fleksibelt

Beregning handler om å beherske forskjellige prosedyrer ved å bruke "hoderegning", blyant og papir, digitale verktøy eller andre hjelpemidler (Kilpatrick & Swafford, 2002; Kilpatrick, et al., 2001; NCETM, 2008; Niss & Jensen, 2002; OECD, 2010). Beregning omfatter mer enn de fire regneartene. Det omfatter å beherske prosedyrer fra alle områder innen matematikken, slik som å måle lengder, løse ligninger, konstruere en vinkel, tegne grafer og beregne gjennomsnitt. Å *beherske* prosedyrer betyr å kunne utføre dem effektivt, nøyaktig og fleksibelt. Elever som utfører prosedyrer fleksibelt, kan veksle mellom forskjellige prosedyrer og velge prosedyren(e) som er mest nyttige i den bestemte situasjonen. De kan også tilpasse prosedyrene til den bestemte situasjonen (Kilpatrick & Swafford, 2002; Kilpatrick, et al., 2001).

I tillegg går beregning ut på å estimere resultatet av en prosedyre. For eksempel kan elever estimere at $37 \cdot 18$ må være mellom 370 og 740, fordi $37 \cdot 10 = 370$ og $37 \cdot 20 = 740$.

For at elever skal bli gode i beregning må de få muligheten til å lære et vidt spekter av prosedyrer, og de må arbeide grundig med prosedyrene slik at de både blir forstått og automatisert. De må videre bli utfordret til å benytte ulike prosedyrer i ulike sammenhenger i oppgaver med forskjellige formål. Ved å arbeide på denne måten kan elevene bli i stand til å utføre prosedyrene effektivt, nøyaktig og fleksibelt. Bruk av digitale hjelpemidler, som lommeregner og datamaskin, kan øke elevenes forståelse av og deres kunnskap om prosedyrer dersom de benyttes på en måte som støtter og integrerer de ulike komponentene.

Beregning slik det er beskrevet over er en viktig komponent i regning, og den er sentral i prosessen *Bruke og bearbeide*.

Eksempel – å kunne regne i engelsk

I læreplanen for engelsk står det blant annet at elevene skal kunne uttrykke seg om måleenheter som brukes i engelskspråklige land (Kunnskapsdepartementet, 2013b, s. 5). Dette innebærer at elevene må kunne bruke forskjellige prosedyrer for å gjøre om disse måleenhetene til kjente måleenheter avhengig av situasjonen de befinner seg i. For eksempel vil elever som reiser til engelskspråklige land ha behov for å kunne behandle engelske/amerikanske måleenheter effektivt når de skal kjøpe ulike varer og tjenester. Massen til kjøttretter oppgis ofte i *ounce* (oz), der 1 oz er 28 gram. En kjøttrett er som regel mellom 5-10 oz. Problemet for elevene er å vite hvor mye dette er

i gram. Elevene må først gjenkjenne at det handler om forholdet mellom oz og gram, som er 1 : 28. Deretter må de formulere en matematisk modell for å kunne uttrykke seg om måleenheten oz. Å gå fra den virkelige verden til en modell inngår i ferdighetsområdet, *Gjenkjenne og beskrive*. I dette tilfellet kan en overslagsregel være godt nok, for eksempel kan elevene bruke at 1 oz er omtrent det samme som 30 gram. Et annet eksempel er å følge matoppskrifter som stadig oftere blir oppgitt på engelsk med engelske/amerikanske måleenheter. I matlaging kan det i noen tilfeller gå bra med overslagsregning som i eksemplet over, mens andre oppskrifter krever at man er mer nøyaktig.

Dette eksemplet illustrerer hvordan *beregning* er nødvendig for at elevene skal kunne uttrykke seg om måleenheter som brukes i engelskspråklige land. Her blir elevenes utvikling av enkle strategier for overslagsregning viktig for å oppnå kompetanse i faget engelsk.

3. Anvendelse: Formulere problemer matematisk og utvikle strategier for å løse problemer ved å bruke passende begreper og prosedyrer

Et begrep eller en prosedyre er ikke nyttig hvis ikke elevene vet når og hvor det skal brukes. I skolen får elevene spesifikke problemer de skal løse, men utenfor skolen møter elevene situasjoner hvor deler av utfordringen består i å vite hva problemet dreier seg om. Elevene må derfor være i stand til å formulere og avgrense problemer. De må utvikle løsningsstrategier, velge den strategien som er mest hensiktsmessig for å løse problemene, bruke den og tolke resultatet (Kilpatrick & Swafford, 2002; Kilpatrick, et al., 2001; NCETM, 2008; Niss & Jensen, 2002; OECD, 2010).

Anvendelse har mange likhetstrekk med regning som modellering i alle fag, og den er en sentral komponent i alle ferdighetsområdene. For eksempel vil det å formulere og avgrense problemer være helt avgjørende for prosessen *Gjenkjenne og beskrive*.

Eksempel – å kunne regne i samfunnsfag

I et av kompetansemålene i samfunnsfag står det at elevene skal kunne beskrive hvordan forbruksmønsteret har utviklet seg i Norge (Kunnskapsdepartementet, 2013a, s. 10). I arbeidet for å nå dette kompetansemålet kan elevene få i oppgave å finne ut hvordan forbruksmønsteret i Norge har endret seg de siste 100 årene. Dette er en åpen oppgave og besvarelsen avhenger i stor grad av hva elevene ønsker å sette fokus på. Derfor blir ferdighetsområdet *Gjenkjenne og beskrive* spesielt viktig. Elevene må avgrense oppgaven før de kan gjenkjenne matematikken som er relevant og formulere en problemstilling og en matematisk modell. Elevene kan for eksempel undersøke lønnsinntekter før og nå og sammenligne det med faste utgiftsposter som mat, strøm, vann, klær osv. Det vil gi en pekepinn på hvor mye penger familiene har hatt å rutte med, noe som igjen kan si noe om forbruksmønsteret. For å kunne gjøre dette, må elevene formulere en modell for sammenligningen. Beregninger som omfatter forhold og prosent kan være relevante for å løse

problemene de har formulert. Disse beregningene vil inngå i den andre prosessen, *Bruke og bearbeide*.

Dette eksemplet illustrerer hvordan bruk av komponenten *anvendelse* er nødvendig for at elevene skal kunne beskrive hvordan forbruksmønsteret har utviklet seg i Norge. En slik utvikling avhenger av mange faktorer og kan illustreres på mange måter. Elevene er derfor avhengige av å kunne avgrense oppgaven, formulere problemet, og velge riktig løsningsstrategi som illustrerer det de ønsker å sette fokus på for å nå kompetansemålet i samfunnsfag.

4. Resonnering: Forklare og begrunne en løsning til et problem, eller å utvide fra noe kjent til noe som ikke er kjent

Resonnering handler om å tenke logisk og forklare hvordan man tenker. Det handler også om å vurdere løsningen(e) på et problem og å reflektere over de strategiene man velger for å løse problemet. Å resonnerer innebærer å reflektere over begreper, matematiske fakta og prosedyrer, og se hvordan de logisk henger sammen med hverandre og konteksten rundt (Kilpatrick & Swafford, 2002; Kilpatrick, et al., 2001; NCETM).

For at elevene skal bli gode til å resonnerer må de bli utfordret til å forklare og begrunne egne og andres løsninger (Kilpatrick & Swafford, 2002; Kilpatrick, et al., 2001). De må bli bedt om å forklare og begrunne prosedyrer som blir brukt både med tanke på det matematiske og kontekstuelle aspektet. Elevene bruker resonnement for å komme fram til gode løsningsmetoder som er tilpasset den bestemte situasjonen.

Resonnering slik det er beskrevet over er også en viktig komponent i alle ferdighetsområdene som utgjør regning. For eksempel vil resonnement være avgjørende innenfor området *Reflektere og vurdere*.

Eksempel – å kunne regne i naturfag

I et av kompetansemålene i naturfag står det at elevene skal kunne gjøre rede for begrepene fart og akselerasjon (Kunnskapsdepartementet, 2013e, s. 10). I arbeidet med dette kompetansemålet kan elevene for eksempel få i oppgave å finne ut hvor lang strekning en bil med gjennomsnittshastighet på 45 km/t tilbakelegger på 12 minutter. Å tenke logisk her kan for eksempel være følgende: Med en gjennomsnittshastighet på 45 km/t kjører bilen 45 km på en time, men ettersom bilen kun kjører i 12 minutter må den tilbakelagte strekning være mindre enn 45 km. 12 minutter går fem ganger i en time, altså kjører bilen $\frac{1}{5}$ av den strekningen den ville gjort på en time. $45 : 5 = 9$. Bilen tilbakelegger en strekning på 9 km. I dette eksemplet går tallene veldig fint opp i hverandre, men dersom tallene

ikke er like enkle å arbeide med, kan overslagsregning være en god måte å resonnerer seg fram til et omtrentlig svar.

Resonnement blir også brukt for å avgjøre om ens egen eller andres løsninger er riktige, og vurdere hvorvidt et resultat er rimelig. Hvis vi ser for oss at eleven i eksemplet over hadde løst oppgaven ved å bruke formelen $Strekning = fart \cdot tid$, uten å ta hensyn til de ulike enhetene, ville det gitt svaret 580 km. Dette svaret er selvfølgelig ikke riktig. Elever vil kunne resonnerer seg fram til at løsningen er urimelig, fordi det er umulig å tenke seg at en bil kjører 580 km på 12 minutter. Dette inngår i ferdighetsområdet *Reflektere og vurdere*, der eleven reflekterer over løsningen og tolker den i forhold til den opprinnelige problemstillingen og konteksten.

Eksemplet viser hvordan komponenten *resonnering* er viktig når elever skal komme fram til logiske løsninger og vurdere hvorvidt et resultat er rimelig. Å kunne tenke logisk og reflektere over matematiske løsninger er avgjørende for at elevene skal kunne gjøre rede for begrepet fart i naturfag.

5. Engasjement: Være motivert for å lære matematikk, se på matematikk som nyttig og verdifullt, og tro at innsats bidrar til økt læring i matematikk

Å være engasjert i en matematisk aktivitet er nøkkelen til å lære matematikk. Engasjement handler om at elevene er motiverte for å lære matematikk, at de ser på matematikk som nyttig og verdifullt, og at de tror at de kan lære matematikk dersom de gjør en innsats. Videre handler det om elevenes selvtillit og følelse av mestring i læringsprosessen (Kilpatrick & Swafford, 2002; Kilpatrick, et al., 2001; NCETM, 2008).

Engasjement er tett bundet sammen med de andre komponentene. For å kunne utvikle de fire første komponentene; forståelse, beregning, anvendelse og resonnering, bør elevene ha en forestilling om at matematikk er bygd opp på en logisk og fornuftig måte, og de må ha en tro på at de er i stand til å forstå og løse problemer i ulike situasjoner. Elever som ser på matematikk som en vilkårlig mengde med regler og prosedyrer, og som ikke har tro på at de kan lære matematikk, vil unngå faglige utfordringer og bli demotiverte dersom de feiler. Dersom elevene utvikler forståelse i matematikk, for eksempel ved å forstå hvorfor arealet til trekanter kun er avhengig av grunnlinjen og høyden, vil de oppleve mestring, og de får økt selvtillit i matematikk (Kilpatrick & Swafford, 2002; Kilpatrick, et al., 2001).

Problemer som er knyttet til kontekster elevene kjenner, kan både inspirere til matematisk aktivitet og vise matematikkens relevans. Regning i alle fag kan bidra til at elevene ser på matematikk som

nyttig, relevant og verdifullt. Dersom problemene også har lav inngangsterskel, slik at alle elevene vil kunne starte på oppgaven, kan de også få tro på at de kan løse oppgaven.

Eksempel – å kunne regne i matematikk

Et eksempel i matematikk som både er knyttet til en kjent kontekst og som har lav inngangsterskel finner vi i boken *Rika matematiske problem* (Hagland, et al., 2005):

Lisa skal kjøpe kuleis og kan velge mellom fire ulike smaker. Hun vil ha to iskuler.

På hvor mange ulike måter kan hun velge isen sin?

Denne oppgaven kan for eksempel være relevant i forhold til kompetansemålet som sier at elevene skal drøfte og løse enkle kombinatoriske problem (Kunnskapsdepartementet, 2013f, s. 9). Arbeid med denne typen oppgaver involverer alle de fem komponentene for matematisk kompetanse, og ferdighetsområdene som utgjør regning. Elevene må *Gjenkjenne og beskrive* ved å tolke situasjonen og uttrykke den med matematikkens språk. De må *Bruke og bearbeide* ved å utføre nødvendige beregninger og de må *Reflektere og vurdere* når de argumenterer for at resultatene de kommer fram til er holdbare og at de gir svar på spørsmålet. Elevene kommuniserer om løsningsprosesser og resultater, begrunner valg og presenterer resultater til mottaker.

Komponentene er innbyrdes avhengige

De fem komponentene som utgjør matematisk kompetanse er innbyrdes avhengige. Hvordan komponentene er knyttet sammen og støtter hverandre, kan vi se i forholdet mellom forståelse og beregning. Forskning indikerer at det er et kontinuerlig samspill mellom disse to komponentene og at forståelse og beregning utfyller hverandre (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001). Elever som forstår, kan sammenligne og vurdere forskjeller og likheter mellom forskjellige prosedyrer, og de kan tilpasse prosedyrene til situasjonen. Forståelse kan gjøre at det blir lettere for elevene å lære nye prosedyrer. Det er mindre sannsynlig at de gjør feil når de bruker prosedyrene, og det blir lettere å huske dem. Samtidig kan beregning styrke og utvikle forståelsen. Ved å utvikle en prosedyre som kan løse mange problemer, kan elevene oppdage at matematikken er forutsigbar, strukturert og består av mønster (Kilpatrick & Swafford, 2002; Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001).

Siden komponentene er innbyrdes avhengige, er det viktig å arbeide med alle komponentene samtidig. I enkelte undervisningsøkter kan man ha hovedfokus på én eller to av komponentene, men det er viktig at det jobbes med alle komponentene for å styrke koblingene mellom dem. Arbeid med å utvikle elevenes matematiske kompetanse, i form av de fem komponentene, vil gi elevene et godt grunnlag for å kunne bruke regning som grunnleggende ferdighet i utvikling av fagkompetanse i alle fag.

Hva kjennetegner elever med gode regneferdigheter på ungdomstrinnet?

I løpet av ungdomstrinnet øker kravene til elevenes regneferdigheter. Elevene på ungdomstrinnet skal kunne tolke, forstå og løse sammensatte problemer i forskjellige kontekster. Videre skal de kunne vurdere løsningene kritisk og presentere strategier og løsninger skriftlig og muntlig.

Elever med gode regneferdigheter på ungdomstrinnet har en god forståelse av matematiske begreper og idéer og forstår sammenhengen mellom dem. I tillegg kan de se mønster og systemer i problemer i de ulike fagene. Videre forstår og anvender elevene ulike matematiske representasjoner på en hensiktsmessig måte.

Elever med gode regneferdigheter på ungdomstrinnet behersker forskjellige matematiske prosedyrer og kan anvende disse i ulike fag. De kan utføre prosedyrene effektivt, nøyaktig og fleksibelt, og velge de prosedyrene som er hensiktsmessige i en gitt situasjon. Elevene kan utføre prosedyrene ved å bruke "hoderegning", papir og blyant, digitale verktøy eller andre hjelpemidler.

Elever på ungdomstrinnet med gode regneferdigheter har utviklet varierte strategier for å løse virkelige problemer i ulike situasjoner, og utvikler nye strategier ved behov. De sammenligner forskjellige strategier for å løse et problem, og velger den mest hensiktsmessige framgangsmåten. Elevene bruker tid på å forstå et gitt problem, på å se sammenhenger med det de kan fra før og på å finne ut hvordan de skal angripe problemet. De fokuserer ikke bare på hvilke beregninger som skal gjøres.

Elever med gode regneferdigheter på ungdomstrinnet reflekterer over og vurderer prosessen fra problem til løsning. I tillegg vurderer de løsningenes gyldighet innenfor fagets kontekst. Elevene kan presentere, forklare, begrunne, diskutere og stille spørsmål av matematisk karakter. Videre kan de tolke og forstå tekster, bilder, figurer, grafer, tabeller osv. med matematisk innhold.

Elever med gode regneferdigheter på ungdomstrinnet er motiverte for å lære å regne i alle fag. De ser at matematikk kan være nyttig og verdifullt i alle fag, og som noe de kan lære dersom de gjør en innsats (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001). I tillegg er de villig til å gjøre arbeidet som trengs for å utvikle gode regneferdigheter i alle fag. Å være engasjert i en matematisk aktivitet er nøkkelen til å bli god i regning.

Elevene utvikler gode regneferdigheter gjennom å arbeide variert og ta utgangspunkt i både praktiske og teoretiske situasjoner.

Avslutning

I dette dokumentet har vi presentert regning som grunnleggende ferdighet i alle fag. Deretter har vi beskrevet den matematiske kompetansen elevene trenger for å kunne regne i de ulike fagene.

Referanser

- Björkqvist, O. (2003). Matematisk problemløsning I B. Grevholm (Red.), *Matematikk for skolen* (s. 51-70). Bergen: Fagbokforlaget.
- Kilpatrick, J., & Swafford, J. (2002). *Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics.
- Kunnskapsdepartementet (2011). *Meld. St. 22 (2010-2011). Motivasjon - mestring - muligheter. Ungdomstrinnet*. Oslo: Kunnskapsdepartementet.
- Kunnskapsdepartementet (2012a). *Rammeverk for grunnleggende ferdigheter*. Oslo: Kunnskapsdepartementet.
- Kunnskapsdepartementet (2012b). *Strategi for ungdomstrinnet: Motivasjon og mestring for bedre læring. Felles satsing på klasseledelse, regning, lesing og skriving*. Oslo: Kunnskapsdepartementet.
- Kunnskapsdepartementet (2013a). *Læreplan i samfunnsfag*. Lastet ned 19. mai 2014, fra <http://data.udir.no/kl06/SAF1-03.pdf?lang=nno>
- Kunnskapsdepartementet (2013b). *Læreplan i engelsk*. Lastet ned 19. mai 2014, fra <http://data.udir.no/kl06/ENG1-03.pdf?lang=nob>
- Kunnskapsdepartementet (2013c). *Læreplan i mat og helse*. Lastet ned 19. mai 2014, fra <http://data.udir.no/kl06/MHE1-01.pdf?lang=nno>
- Kunnskapsdepartementet (2013d). *Læreplan i norsk*. Lastet ned 19. mai 2014, fra <http://data.udir.no/kl06/NOR1-05.pdf?lang=nob>
- Kunnskapsdepartementet (2013e). *Læreplan i naturfag*. Lastet ned 19. mai 2014, fra <http://data.udir.no/kl06/NAT1-03.pdf?lang=nob>
- Kunnskapsdepartementet (2013f). *Læreplan i matematikk fellesfag*. Lastet ned 19. mai 2014, fra <http://data.udir.no/kl06/MAT1-04.pdf?lang=nno>
- Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics*

- teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 763-803). Charlotte, NC: Image Age Publishing.
- Lesh, R. A., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In F. K. J. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 763-804). Charlotte, NC: Information Age.
- NCETM (2008). *Mathematics matters*. London: National Centre for Excellence in Teaching Mathematics (NCETM).
- Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss. (Eds.) (2007), *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study*(pp 3–32). New York, NY: Springer Science + Business Media, LLC.
- Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. L. (2007). Introduction. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 3- 32). Boston, MA: Springer Science + Business Media, LCC.
- Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematikl ring: Ideer og inspiration til udvikling av matematikundervisning i Danmark*. København: Undervisningsministeriet.
- OECD. (2013) *PISA 2012 Assessment and Analytical framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. Paris: OECD Publishing.
- OECD (2010). *PISA 2012 Mathematics framework*. Paris: OECD.
- OECD (2013) *PISA 2012 Assessment and Analytical framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. Paris: OECD Publishing.
- Polya, G. (1957). *How to Solve It* (2nd ed.). Princeton, NJ: Princeton University Press.
- W ge, K. (2007). *Elevenes motivasjon for   l re matematikk og unders kende matematikkundervisning*. Doktoravhandling. Trondheim: NTNU.
- W ge, K., & Rossing, N. K. (2005). Strikkhopp med Barbie. I C. Kirfel (Red.), *Tangenten: Inspirasjonsbok for matematikklærere* (s. 122-128). Bergen: Caspar forlag.