

Mona Røsseland

# Hva er matematisk kompetanse?

Norge har nok en gang kommet dårlig ut i undersøkelser som viser elevers kompetanse i matematikk. Vi leter etter årsaker, og vi prøver å finne den riktige veien framover. Før vi kan enes om en hensiktsmessig strategi for å gjøre norske barn og unge bedre i matematikk, bør vi diskutere hva det innebærer å ha matematisk kompetanse. Noen mener at bare elevene kan de fire regningsartene (les algoritmene) når de går ut barneskolen, må vi være fornøyde. Andre mener at det viktigste er at elevene er kreative og klarer å finne løsninger på problemløsningsoppgaver uten tanke på en 'riktig' fremgangsmåte. Heldigvis er det mange som mener at det er viktig at elevene behersker flere ulike kompetanser i matematikk, men da trenger vi en bevisstgjøring omkring hva det vil si å ha matematiske kompetanse.

I Danmark har de kommet et stykke på vei i dette arbeidet. I 2000 satte de i gang prosjektet *Kompetenceudvikling og Matematiklæring*, der målet var å prøve å skape en felles forståelse for hva det vil si å beherske matematikk.

matematikkbeherskelse, og hvordan dette kan påvirke matematikkundervisningen og gjøre den bedre. Arbeidet ble ledet av Mogens Niss, professor ved Roskilde Universitetssenter, og i 2002 kom rapporten *Kompetancer og matematikklæring* [5] fra det danske Undervisningsministeriet.

Rapporten er grunnlag for min beskrivelse av de matematiske kompetansene. Det har også vært inspirasjonskilde til de nasjonale prøvene i matematikk i Norge. I disse prøvene blir elevene testet i ulike oppgavetyper, og de blir vurdert ut i fra en beskrivelse av matematiske kompetanser. Etter prøvene skal lærerne lage en profil over hver elev og for klassen som helhet. Profilen beskriver hvilket nivå elevene har i de ulike kompetansene. Kompetansebegrepene jeg gjør rede for her ligger til grunn for arbeid med de nasjonale prøvene.

Den danske rapporten vender seg bort fra den tradisjonelle, pensumbaserte beskrivelsen av matematikkfaget. I stedet foreslår den at *hensikt* og *utbytte* med undervisning karakteriseres ved hjelp av åtte kompetanser som en ønsker at elevene skal utvikle. De åtte kompetansene er: **Tankegang-, Resonnement-, Kommunikasjon-, Problembehandling-, Modellering-, Representasjon-, Symbol og**

**Mona Røsseland** er nettverkskoordinator ved Matematikksenteret, [mona.rosseland@hjemme.no](mailto:mona.rosseland@hjemme.no)

## **formalisme- og Hjelpemiddelkompetansen.**

Denne kompetansebaserte beskrivelsen av matematikkfaget ønsker jeg å belyse gjennom to artikler her i Tangenten. Den siste artikkelen kommer i Tangenten nr 2 (2005).

Jeg velger å knytte beskrivelsen av kompetansene opp mot undervisning gjennom å vise hvilke type aktiviteter og situasjoner som kan være med å stimulere utviklingen av kompetansene hos elevene. Skal de nasjonale prøvene bli et hjelpemiddel for lærerne, vil det være helt vesentlig at lærerne har en god forståelse for hva de ulike kompetansene står for. Det vil også være av betydning at lærerne tar kompetansebeskrivelsene med inn i klasserommet, som grunnlag for undervisningen slik at det får praktiske konsekvenser i norsk skole.

I denne artikkelen tar jeg for meg tankegangs-, resonnements- og kommunikasjonskompetansen. I den siste artikkelen beskriver jeg problembehandlings-, modellerings-, hjelpemiddel-, representasjons-, symbol- og formalismekompetansen. Der belyser jeg noen problemstillinger i forhold til å bruke kompetansebeskrivelsene som grunnlag for vurdering, slik det blir gjort i forbindelse med de nasjonale prøvene i matematikk.

### En kompetansebeskrivelse av matematisk faglighet

Hvorfor er det så nødvendig å forandre på vår tradisjonelle måte å se matematikkfaget på? Hvorfor lage de nasjonale prøvene så kompliserte, der en må forholde seg til mange nye begreper, som disse matematiske kompetansene?

Skolematematikken har vært preget av et fokus på produktet og den riktige fremgangsmåten, og en har arbeidet for å få større fokus på prosessdimensjonen i faget. Vi ser det tydelig at L97 understreker betydningen av

elevaktivitet, der elevene skal konstruere sin egen kunnskap. Vi er nå blitt mer opptatte av *hvordan* elevene bruker sin matematiske kompetanse, hvilke strategier de velger for å løse oppgaver og problemer og hvilken begrepsforståelse de har.

Også i PISA-undersøkelsen (Programme for International Student Assessment) har prosessdimensjonen i faget grunnleggende betydning. Her blir det understreket at det kreves ulik matematisk kompetanse for å løse forskjellige typer matematiske problemer. PISA fokuserer altså i langt større grad på et mer integrert spektrum av kunnskaper, ferdigheter og holdninger enn det som har vært vanlig i tester til nå. En legger vekt på elevenes evne til å tolke informasjon og trekke slutninger på basis av kunnskap og ferdigheter som de har, og på hvordan elevene bruker kunnskaper og ferdigheter i gitte sammenhenger (Bergem [1]).

### I PISA brukes tre kompetanseklasser

Oppgavene er delt inn i tre kategorier etter hvilke kompetanser de krever:

*Reproduksjonsklassen:* Oppgavene er knyttet til elevens bruk av faktakunnskaper og standardalgoritmer. En kan også finne enkle problemløsningsoppgaver her, men konteksten er matematisk og fremgangsmåten (algoritmen) gitt.

*Forbindelsesklassen:* Her skal elevene se forbindelser og kunne sette sammen informasjon som grunnlag for problemløsningen. Elevene må da ha evne til å se sammenhenger mellom ulike deler av matematikken for å løse oppgavene, og de skal kunne bruke ulike representasjoner.

*Refleksjonsklassen:* Her er oppgavetyperne mer sammensatte enn ved forrige klasse og krever at elevene i tillegg har evne til å utvikle originale løsningsstrategier. Kompetansen kjennetegnes ved at elevene selv må finne fram til hva som er oppgavens matematiske problem, og vise evne til kritisk tenkning, analyse og refleksjon (Lie m.fl. [2]).

Når de overordnede målene i matematikk kun tydeliggjør hvilke matematiske emneområder som skal læres, er det vanskelig å klargjøre hva matematikkundervisning skal gå ut på. Vi vet at det er langt mer gjennomgripende forhold enn pensumbeherskelse som gjør seg gjeldende i matematisk faglighet. Faren blir at en reduserer matematisk faglighet til 'rette og feile svar', noe som igjen fører til et for lavt ambisjonsnivå for undervisningen. En kompetansebeskrivelse av faget går langt mer direkte på selve undervisningen, for da vil en også sette fokus på ferdigheter som vanskelig lar seg teste i en skriftlig prøve. Lærerne bør dermed sette flere krav til sin undervisning, for eksempel bruke mer tid på kommunikasjon, der elevene får forklare hvordan de tenker og forstår.

En slik reduksjon av matematikkompetanse kan sammenlignes med å identifisere språkbeherskelse med en liste over ordforråd og grammatiske regler en skal gjenkjenne og kunne. Norsklærere har større ambisjoner for undervisningen enn at elevene bare lærer dette. De ønsker at elevene skal forstå stoffets oppbygging og indre sammenheng, og ikke minst være skapende og analyserende i faget i forhold til et mangfold av sjangrer og stilarter. En kan selvsagt understreke at dette ikke går uten et ordforråd og grammatikk, men ingen vil heller mene at det i seg selv er nok for språkbeherskelse (Niss [4]). På samme måte blir det med matematikken.

Å ha matematisk kompetanse kjennetegnes ved å ha viten om, å forstå, utøve, anvende og kunne ta stilling til matematikk og matematisk virksomhet i et mangfold av sammenhenger. Dette impliserer naturligvis en mangfoldighet av konkret viten og konkrete ferdigheter innen forskjellige matematiske områder, men matematisk kompetanse kan ikke reduseres til disse forutsetningene.

## Beskrivelse av kompetansene

---

### *Tankegangskompetansen*

Denne kompetansen består først og fremst i det å være klar over hvilke typer spørsmål som er karakteristisk for matematikk, selv å kunne stille slike spørsmål og ha blick for hvilke typer av svar som kan forventes. Matematisk tankegang omfatter *bevissthet rundt* hvilke spørsmål som er karakteristiske for matematikk. Det vil også si å *kjenne, forstå og kunne bruke* matematiske begreper, kunne *abstrahere* og *generalisere* og kunne skille mellom *påstander, antagelser* og *bevis*. For grunnskolen vil dette gjelde elementær matematikk, det vil si grunnbegrepene for størrelse, tall og rom som det er naturlig at de respektive aldersgrupper befatter seg med (se NSMO [3]).

Denne kompetansen vil komme til syne gjennom dialog mellom elevene og mellom elevene og lærer. Elever med god tankegangskompetanse kan stille spørsmål som – *Finnes det et tall som både er partall og oddetall? Hva betyr brøk egentlig? Hvorfor blir svaret større enn det vi deler med når en deler med et tall mindre enn 1?* Denne kompetansen henger nøye sammen med resonnementskompetansen, og til tider kan det være vanskelig å skille dem fra hverandre. Disse to kompetansene, sammen med kommunikasjonskompetansen blir også slått sammen til en kompetanseprofil i de nasjonale prøvene fra 2005.

Slik jeg ser det, vil denne kompetansen være en betydningsfull lærerkompetanse. Det er viktig at lærerne har evne til å stille gode spørsmål til elevene, spørsmål som får elevene til å reflektere. Ved hjelp av lærerens ledende spørsmål klarer elevene selv å resonnerer seg frem til svar som gir innsikt og forståelse. Her tror jeg vi har mye å lære, for vi har ofte en higen etter å gi elevene svarene med en gang de spør. Kanskje vi langt oftere skulle stille spørsmål tilbake til elevene, og så la dem få tid til å tenke og gjerne komme med nye mer reflekterte spørsmål? Eksempelet med figurtall (nedenfor) viser lærerens tankegangskompetanse i sin dialog med elevene.

### *Resonnementkompetansen*

Kompetanse i matematisk resonnement inneholder å kunne *tenke ut og gjennomføre* uformelle og formelle resonnementer, kunne omforme resonnementer og antagelser til *gyldige bevis* og kunne følge og bedømme matematiske resonnementer og forstå hva et bevis er (Niss m.fl. [5], s. 54).

Denne kompetansen er aktiv når en elev klarer å bedømme holdbarheten av en matematisk påstand, det innebærer også å overbevise seg selv og andre om eventuell gyldighet av denne. Det dreier seg både om regler og setningers riktighet, men også avgjørelsen om at gitte svar på spørsmål, oppgaver eller problemer er korrekte og tilstrekkelige. Resonnementskompetansen er den som aktiverer hvilke operasjoner en skal bruke i en regneoppgave, hvis denne aktiveringen stiller krav til oppfinnsomhet, analyseevne eller overblikk. Denne kompetansen henger nøye sammen med både modellerings- og problemløsningskompetansen, og vi kan si at resonneringskompetansen er disse kompetansenes 'juridiske' side, den som vurderer om svaret er rett eller galt (ibid. s. 210).

Å *forstå* et resonnement er for eksempel å kunne forstå utsagn som: Tone har flere dukker enn Kine, og Kine har flere dukker en Marit. Da har Tone flere dukker enn Marit.

Eksempel på å *kunne følge og forholde seg til* et elementært matematisk resonnement er:

- *Utsagn*: Berit og Anne bor henholdsvis 1,5 og 2 km fra skolen, så de må bo 3,5 km fra hverandre.
- *Resonnement*: Nei, det trenger de ikke. Det kan jo være de bor på samme vei til skolen, og da vil det bare være 0,5 km mellom dem.

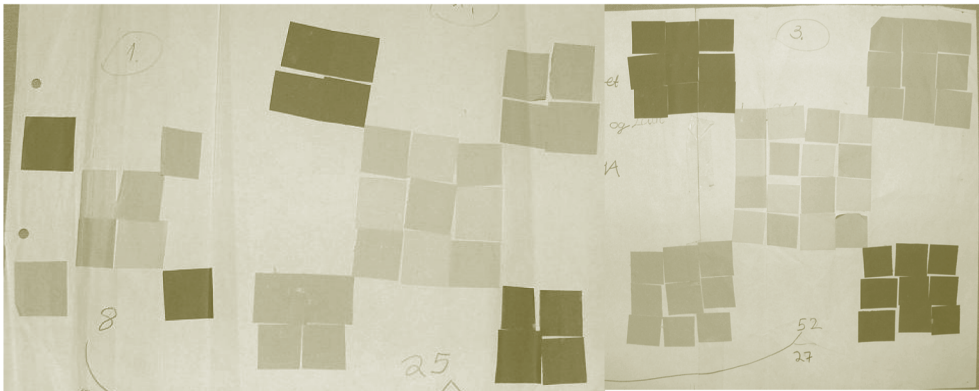
På barnetrinnet vil elevenes resonnementer være intuitive og uformelle eller konkrete, basert på spesifikke opptellinger, utregninger eller tegninger. Det er derfor ikke forventet at de skal gjennomføre noen bevisførsel i en streng betydning av begrepet. Eksempelet som følger viser både tankegangs- og resonnementskompetansen gjennom en aktivitet med figurtall.

### Arbeid med figurtall

– et undervisningsopplegg som legger til rette for utvikling av tankegang- og resonnementskompetanse.

En fjerde klasse arbeider med figurtall. Læreren har satt elevene i gang med å lage ulike figurer ved hjelp av små kvadratiske brikker. Først skal elevene lage en figur der de ikke får bruke mer enn 8 biter. Neste steg blir å lage en noenlunde tilsvarende figur, men den skal være større. Det innebærer at de må bruke flere brikker. Så skal de lage en tredje figur, som igjen er større enn de forrige, men lik i form. Læreren ber elevene finne ut hvor mange brikker de har brukt i hver figur.

Kari og Lucie har funnet ut at de har brukt



8 biter i første figur, 25 biter i andre figur og 52 biter i tredje figur. Læreren observerer jentene i arbeidet, og kommer nå med noen spørsmål: – *Kan dere finne ut hvor mange biter dere trenger til fjerde figuren, uten å legge den med biter?*

– *Nei, går det an?* svarer jentene tvilende.  
– *Jo, jeg tror det!* sier læreren og går et stykke unna jentene for å se hvordan de griper problemet an alene.

Jentene diskuterer en stund seg i mellom før de spør: – *Kan vi få tegne figuren i stedet?* Jentene får ruteark og tegner den fjerde figuren. De teller antall biter og kommer til 89. Så kommer læreren igjen med nye spørsmål: – *Kan dere nå finne ut hvor mange biter dere trenger til den femte figuren, og denne gangen uten å tegne den?* Jentene ser rådville ut, så læreren kommer med et nytt tips: – *Hvis dere skriver ned alle tallene dere har funnet til nå i et skjema, blir det litt mer oversiktelig.* Læreren hjelper jentene i gang med å lage en tabell:

Figur nr.	1	2	3	4	5
Antall biter	8	25	52	89	
Vokser med	17	27	37		

– *Hva forteller tallene dere? Kan dere finne noe mønster i dem?* Læreren trekker seg nok en gang litt i bakgrunnen, og lar jentene resonner seg frem på egenhånd. Jentene begynner å studere tallene: – *Hvor mye større blir tallene fra figur til figur? Kan det være at figurene hele tiden vokser med 10 mer enn forrige gang?* Det går ikke så veldig lang tid før de kommer med en hypotese: – *Mon tro om ikke det neste figuren vokser med 47?* – *Lærer, vi tror at den femte figuren vil ha 136 biter.* De klarer nesten ikke sitte stille på stolene, og de nesten roper ut. – *Kan vi få tegne nå?*

Læreren synes det er en glimrende ide, og berømmer jentene for deres fremragende matematiske resonnement og fremgangsmåte. Det tar heller ikke lang tid før de fornøyd kan konstatere at femte figur virkelig består av 136 biter. – *Går det an å finne ut hvor mange brikker dere trenger til den 10. figuren?* spør læreren. Lucie stønner litt: – *Da trenger vi store ark til å tegne på.* – *Trenger vi å fortsette å tegne, tro?* spør Kari. – *Hvis vi vet hvordan figurene vokser, kan vi kanskje regne det ut uten å tegne?* Jentene finner seg en kalkulator og går i gang med å fylle ut tabellen. Timen er over for lengst og deres medelever er gått ut, og læreren går til lunsj. Da hun kommer tilbake, sitter jentene med store smil, og de kan fortelle at den tiende figuren vil ha 521 biter!

## Kommunikasjonskompetanse

Kompetanse i kommunikasjon inneholder det å kunne sette *seg inn i og tolke* andres matematikkholdige skriftlige, muntlige eller visuelle utsagn og 'tekster'. Det er å kunne *uttrykke seg* om matematiske forhold på ulike måter og på forskjellig nivå av teoretisk og teknisk nøyaktighet, både skriftlig, muntlig og visuelt for forskjellige kategorier av mottakere (ibid., s. 60).

Vi kan gjerne si at denne kompetansen er todelt, i og med at kommunikasjonen skjer mellom avsendere og mottakere. På denne måten består denne kompetansen dels i å forstå og tolke andre sine matematikkholdige tekster, både visuelle, skriftlige (f. eks. i bøker og i oppgaver) og muntlige (eks. læreren gir en grublis muntlig). Dette vil da betegne *den mottakende siden* av kommunikasjonskompetansen. I tillegg trenger elevene denne kompetansen når de selv skal formidle sine matematiske kunnskaper, for eksempel når de skal gjøre rede for et matematisk resonnement, – *Hvordan tenkte du nå? – Hvordan kom du frem til svaret?* og dette kan de gjøre skriftlig, muntlig eller visuelt gjennom f. eks. tegninger. Dette viser *uttrykks-siden* av kommunikasjonskompetansen.

### Eksempler på vurdering av kommunikasjonskompetansen hos to 4. klassinger

Klassen jobber med problemløsningsoppgaver, såkalte grubliser, og læreren går rundt og snakker med elevene. Hun prøver å få elevene til å formidle hvordan de forstår oppgavene og hva de tenker når de løser dem.

Sissel klarer til en viss grad å forklare hva hun tenker, men det er i et enkelt og dagligdags språk. Hun bruker lite et matematisk språk, som for eksempel sier hun ikke enere og tiere, men ord som *begynne bakerst* når hun skal for-

klare hvordan hun tenker i addisjonsstykker. Hun er også i stor grad avhengig av konkrete for å forstå og forklare hva hun gjør. Hun viser dårlig begrepsforståelse, noe som igjen reduserer hennes muligheter til å forstå og sette seg inn i de matematiske tekstene. Se eksempel fra dialogen mellom henne og lærer da hun arbeider med oppgaven: *Du har 80 kr og så kjøper du to flasker brus til 15 kr stykk. Hvor mye penger har du igjen?*

Sissel resonnerer: – *Jeg tar en tikroning, og så en til ... og så ...* Hun er veldig usikker og lærer spør hvor mange tiere det er i 80. – *Det er 10–20 ... 30–40–50–60 ... 40, nei, 70–80.* Hun tegner nå 8 sirkler på papiret. Lærer hjelper videre og gjentar oppgaven med at hun skal kjøpe to brus til 15 kr. Nå er hun veldig usikker, men sier forsiktig: – *Da kan jeg i hvert fall ta bort en tikroning ... Og så ..., ja, nå må jeg tenke ... tror du det går an til å ta kroner også? Nei, jeg forstår ikke hvordan jeg skal gjøre dette, sier hun fortvilt. – Jeg klarer det ikke!*

Lærer hjelper henne videre, med å gjenta oppgaven. – *Du har 80 kr og så skal du kjøpe deg brus. Hvor mye må du betale i kiosken for brusen? ... Jeg må betale 20 kr ... eller blir det mer?* Nå forslår lærer at hun tegner ned pengene. Hun tegner ned en tier og fem kronestykker og sier videre: *så tar jeg en tier til ... Kan jeg veksle en tikroning, tror du?* Til slutt klarer hun å finne frem til at det blir 30 kr, og teller seg frem til at hun da vil ha 50 kr igjen av de 80.

Lars på sin side viser stor kompetanse i kommunikasjon. Han forklarer løsningene sine på en tydelig måte, og han bruker et matematisk språk i sine forklaringer. Han sier blant annet hundreplass, og han bruker helt naturlig tiere og enere. Lars har heller ingen problemer med å forstå innholdet i problemløsningsoppgavene, og han viser god begrepsforståelse. På oppgaven – *Du har 4 poser med kjærligheter.*

Det er 8 kjærligheter i hver pose. Hvor mange kjærligheter har du? viser han at han både har flere mulige løsningsmetoder og at han klarer å formidle hvordan han tenker: Han sier:  $16 + 16 = 32$ ! Han skriver ned  $8 \times 4 = 32$  mens han forklarer: – Det er 8 i hver pakke og så er det 4 pakker, det blir 32. – Jeg kunne også ha skrevet det slik:  $8 + 8 + 8 + 8 = 32$ . Men jeg tenkte slik:  $(8 + 8 = 16) \Rightarrow 16 + 16 = 32$ .

Eksempelene illustrerer at dialogen med lærer er verdifull når vi skal vurdere elevene sin matematiske kompetanse. For å få et fullgodt bilde av kompetansene til elevene våre, er det ikke tilstrekkelig med en to timers prøve. Men dette vil jeg komme nærmere inn på i den neste artikkelen.

#### Litteraturliste

---

- [1] Bergem, O. C. (2002) *Utvikling av matematikkoppgaver i PISA*. Hovedfagsoppgave levert til Institutt for læreutdanning og skoleutvikling ved UiO.
- [2] Lie, S, Kjærnsli, M, Roe, A og Turmo, A; Nasjonal hovedrapport PISA 2000: Godt rustet for framtida? Norske 15-åringers kompetanse i lesing og realfag i et internasjonalt perspektiv. *Acta Didactica* 4/2001
- [3] Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen (NSMO); [www.matematikkenteret.no](http://www.matematikkenteret.no) *Informasjon om de Nasjonale Prøver i matematikk*.
- [4] Niss, M (1999). Kompetencer og uddannelsesbeskrivelse, *Uddannelse* 9: 21–29. Danmark
- [5] Niss, M, Jensen, T. H. (2002) *Utdannelsesstyrelsens temahefter nr. 18- 2002; Kompetancer og matematiklæring*. Undervisningsministeriet, København