

Mona Røsseland

# Hva er matematisk kompetanse? – del 2

Dette er andre del av en artikkel som tar for seg de matematiske kompetansene som ligger til grunn for de nasjonale prøvene i matematikk. Den første delen (Tangenten nr. 1/2005) tok for seg tankegangs-, resonnements- og kommunikasjonskompetansen. Denne gang vil jeg beskrive modellerings-, problembehandlings-, hjelpemiddel-, representasjons-, symbol og formalismekompetansen. Men aller først vil jeg starte med et glimt fra klasserommet.

## Sissel og Lars sin matematiske kompetanse

For en tid tilbake møtte jeg to fjerdeklassinger som begge hadde et problematisk forhold til matematikk. Klasselærer og jeg ble enige om å 'teste' dem i lys av de matematiske kompetansebegrepene. Lite ante jeg da om hvilke oppdagelser som skulle komme frem eller om hvorfor dette hadde vært så vanskelig å finne ut av tidligere.

Dette var to elever som opplever at matematikk var vanskelig. Sissel får gjort svært lite i timene, og hun har problem med å følge klas-

sens løp i faget. Lars har en mer sammensatt problemsituasjon. Han sliter både med konsentrasjonsvansker og det sosiale samspillet i klassen. Han liker ikke matematikk, sier han og gjør minst mulig i timene.

Jeg laget en del varierte oppgaver, som tok utgangspunkt i de ulike kompetansene. Sissel og Lars var sammen med meg en og en og mange av oppgavene foregikk i en muntlig form. Jeg leste opp teksten eller problemstillingen, mens de svarte muntlig ofte ved hjelp av tegninger og utregninger på ark.

Eksempler på oppgaver som Sissel fikk: – *Du skal dele 24 kr med to andre. Hvor mye får dere hver? – Du har 45 kr. En is koster 10 kr. Hvor mange is kan du kjøpe? – Jeg har 15 drops og du har 25 drops. Hvor mange flere har du?*

Sissel har store problemer med disse oppgavene. Hun hører hvilke tall som kommer frem i oppgavene, men vet ikke hva hun skal gjøre med dem for å finne et svar. Jeg må gjøre oppgavene enklere og enklere, og det er først når tallene er under 10 og det bare er en regneoperasjon at hun klarer oppgavene uten hjelp. Hun har få og rigide strategier, enten teller hun på fingrene eller så tegner hun rundinger på arket og krysser ut ved subtraksjon.

Mona Røsseland er nettverkskoordinator ved Matematikksenteret, [mona.rosseland@hjemme.no](mailto:mona.rosseland@hjemme.no)

Brått får jeg meg en overraskelse. Vi er kommet til de oppstilte stykkene som hun skal regne på ark. Det er både to og tresifrete tall, og både addisjon og subtraksjon. I det jenta ser oppgavene, lyser hun opp og utbryter: – *Dette kan jeg!* Og ganske riktig, regnestykkene går unna, og hun viser at hun mestrer både minnetall og veksling. Dette klarer hun på tross av at hun tidligere i testsituasjonen har vist at hun ikke er trygg på posisjonssystemet.

Lars møter meg med et mørkt blikk. Han vet at dette gjelder matematikk, og han har gjort det helt klart for meg at han hater matte. Jeg prøver meg frem med små enkle problemoppgaver. Til min overraskelse svarer han lynraskt på alle sammen. Han forandrer også holdning og er riktig glad og fornøyd mens svarene triller ut som erter ut av en sekk. Jeg må begynne å improvisere vanskegraden, for mine ferdiglagde oppgaver er tydelig for lette. Oppgavene er sammensatte og tallområdet er over hundre. Lars forklarer tydelig hvordan han tenker, og han viser også alternative løsningsmåter på flere av oppgavene.

Jeg merker gåsehuden på ryggen, for det er helt tydelig at jeg sitter fremfor en gutt med usedvanlige evner i matematikk. – *Hvordan i all verden kan han hate matematikk?* Jeg begynner å få en liten anelse på hva svaret er når jeg spør hva han får hvis han deler 63 på 3. Plutselig forandrer han ansiktsuttrykk. Det mørke blikket møter meg igjen: – *Jeg kan ikke dele!* sier han bestemt, ... *men svaret er 21!*

Jeg får indikasjon på hva som er i vente. Når de oppstilte stykkene kommer frem, går det helt i styr for Lars. Han blir tydelig utilpass og usikker: – *Jeg kan ikke dette!* Gjentar han igjen og igjen. – *Kan jeg ikke heller sette stykkene bortover, for da ser jeg hva svaret blir?* Lars klarer omsider å løse alle de oppstilte stykkene, men først etter at jeg har bearbeidet

og motivert han til å prøve. Det begynner i midlertidig å demre for meg hvorfor gutten hater matematikk. Det er trolig dette han forbinder med faget: Han tvinges til å regne side opp og side ned med matematikkstykker, der han blir tvunget til pugging av huskereglene: – *Husk å sette minnetall. Husk å sette strek over riktig tall når du låner!*

Gåsehuden er forsvunnet og tilbake sitter vemodet. Lars vil ikke bli en ny Abel likevel, ikke i den tradisjonelle skolen i alle fall. Slik jeg ser det, vil både Sissel og Lars bli tapere i matematikkfaget. Sissel fordi hun innehar en ferdighet som hun ikke *kan* bruke, fordi hun fullstendig mangler innsikt og forståelse, selv om hun er flink til å kunne huskereglene. Lars fordi han ikke *får* bruke sin kompetanse i matematikktimene. Han blir tvunget til å sitte med det han ikke mestrer eller forstår meningen med.

Hvor mange talentfulle barn mister vi i den tradisjonelle matematikkundervisningen dersom eneste fokus er pugging av regler og regning av oppgaver som utelukkende styrker en side ved matematisk kompetanse, nemlig symbol og formalisme?

### Anvendelse og matematisk modellingskompetanse

---

Kompetanse i modellering inneholder det å kunne strukturere den situasjonen som skal bearbeides, å kunne matematisere situasjonen. Det vil si å kunne oversette situasjonen til et matematisk språk med matematiske problemstillinger, med nødvendige symboler og matematiske uttrykk. Når en så har klart å lage et matematisk uttrykk, som representerer den opprinnelige situasjonen, må en også evne å behandle uttrykket. En skal kunne forklare hva svaret betyr for den praktiske situasjonen, og hvilke forutsetninger som må være

oppfylt for at modellen skal kunne brukes og svaret være gyldig. Kompetansen inneholder også å kunne diskutere modellen med andre og vurdere ulike modeller opp mot hverandre (NSMO).

Modellering inneholder altså en rekke forskjellige elementer. For det første må en finne matematikken i en praktisk situasjon, for så å oversette den til et matematisk språk og løse de matematiske problemene. Kompetansen går også på om elevene klarer å vurdere om løsningen er realistisk og drøfte løsningene i forhold til den opprinnelige situasjonen.

Kompetansen inneholder altså evne til å analysere modellen kritisk, det vil si å vurdere om den valgte modellen er den mest fornuftige i forhold til mulige andre modeller eller om modellen i det hele tatt egner seg til rent matematiske beregninger. En slik kompetanse vil gjøre elever bedre rustet til å vurdere andres valg av modeller. Jeg tenker spesielt på medias ofte ukritiske bruk av statistikk. I mange tilfeller kan de være i liten overensstemmelse med fakta og gi misvisende konklusjoner.

Å anvende matematikk ligger også innenfor dette kompetanseområdet. For de yngste elevene vil bruk og behov for matematikk være mer naturlig enn modellering i mer teoretisk forstand, med formler og beregninger i ulike modeller. Modelleringskompetansen har også mange likhetstegn med problembehandlingskompetansen, men skiller seg altså ut ved at elevene her også må gjøre mange utenommatematiske vurderinger, mens en i problembehandling kan forholde seg til rene tallopgaver.

### Eksempler på oppgaver

Elevene skal planlegge en dag i en fornøylespark. De må forholde seg til en viss sum

penger, og ut i fra den skal de planlegge hva de skal gjøre i parken.



En kan gjerne ta utgangspunkt i en eksisterende park, f.eks. Tusenfryd, men læreren må legge inn priser på aktivitetene. Elevene skal planlegge aktivitetene både ut fra et pengeperspektiv og et tidsperspektiv. De må beregne tiden de bruker på hver aktivitet, men også tiden som går med til køståing og forflytning, både til og fra parken, og også mellom aktivitetene. Elevene får eller lager et kart over parken, og de får/lager liste over hva de ulike aktivitetene koster.

Elevene kan godt lage et oppsett for hele familien sin, ikke bare seg selv. Det kan legges inn minimum en halv time til lunsj. Alle kan lage en liste over hva de kjøper i kiosken. Elevene lager en fullstendig oversikt over dagen. I denne oversikten har de med hvilke aktiviteter de har vært med på, det totale pengeforbruk og tidsbruk.

En kan også legge inn en oppgave der elevene må beregne hva som svarer seg av å ha en pris på inngangsbilletten og så er aktivitetene gratis, eller gratis inngang og så betaler en for hver aktivitet. Her kan elevene lage ulike modeller og utforske med flere forskjellige tallstørrelser. Hva må prisen være på de ulike

aktivitetene, for at det til sammen skal bli omtrent samme pris som inngangsbilletten? En bør kanskje se hele familien under ett når en beregner dette, for vil det ene alternativet passe best for alle?

### Problembehandlingskompetanse

Kompetansen inneholder det å kunne **finne** og **formulere** matematiske problemstillinger, kunne **løse** matematiske problemstillinger og etter hvert også kunne løse dem på forskjellige måter (ibid). Et matematisk problem er en spesiell form for matematisk spørsmål, der oppgaven krever en matematisk undersøkelse for å komme frem til svaret. Spørsmål eller oppgaver som kan besvares med rutineferdigheter eller standardalgoritmer blir ikke regnet som et matematisk problem.

Begrepet matematisk problem er altså ikke absolutt, men relativt i forhold til den personen som skal løse det. Det som for en person kan være rutineoppgave, kan for en annen være et problem som en ikke vet nøyaktig fremgangsmåte på. Et eksempel på det kan være oppgaven:  $2544 : 6 =$  . For en tredjeklassing vil dette være et matematisk problem, som gjerne lærer må knytte til en sammenheng før eleven klarer å komme i gang. For mange syvendeklassinger vil dette være en rutineoppgave, der de kjenner fremgangsmåten. De vil da ikke ha bruk for problembehandlingskompetansen i denne oppgaven.

### Eksempler på oppgaver

«Hiros mor er syk»

Historien foregår i Japan. Hiros mor er havnet på sykehus, og han bestemmer seg for å ta lillebroren med seg og gå i tempelet hver dag for å be om at hun snart må bli frisk. Hver gang gir de en mynt hver i kollekt, som de legger i en kurv ved utgangen til tempelet.

Hiro har 18 ti-yen mynter, mens lillebroren har 22 fem-yen mynter. De går til tempelet hver dag, helt til en av dem går tom for mynter. Hiro har selvsagt mest penger, men en dag de er på vei hjem fra tempelet har dette forandret seg.

Fra hvilken dag har lillebroren mest penger?

Vis hvordan du kom frem til svaret. Kan du finne flere fremgangsmåter?



Elevene kan løse oppgaven på ulike måter. De kan ta i bruk enkle løsningsstrategier, for eksempel ved hjelp av tegning eller konkretiseringsmidler, eller de kan finne løsningen med tilfeldig prøving og feiling. Men de elevene som har høy problemløsningskompetanse vil kunne resonnerer og løse problemene med systematisk valg av strategi, og de vil være i stand til å velge mellom ulike løsningsstrategier, for så å velge den mest hensiktsmessige.

Andre eksempler på oppgaver:

- En bonde har 26 dyr på gården sin. Han har både griser og høner. Til sammen har de 84 bein. Hvor mange griser har han, og hvor mange høner har han?
- Skriv tre regnestykker som gir 100 til svar.
- Finn så mange figurer som mulig med

strikk på geobrettet der omkretsen av figuren er 12.

### Representasjonskompetanse

Representasjonskompetanse inneholder det å kunne **forstå og avkode, tolke og bruke** ulike representasjoner av matematiske objekter, fenomener, problemer eller situasjoner. Denne kompetansen inneholder også bruk av symboler, både algebraiske, visuelle, geometriske og verbale representasjoner, diagrammer, tabeller og konkrete representasjoner (for eksempel at en knapp kan symbolisere et menneske). I kompetansen ligger også det å kunne **forstå forbindelsene mellom** ulike representasjonsformer, kunne velge blant dem og oversette mellom dem (ibid).

Et elementært eksempel på denne kompetansen kan være evnen til å representere et naturlig tall med prikker eller klosser av lik form og størrelse, eller oppskrivning av tall i posisjonssystemet ved hjelp av enerbrikker, tierstaver, hundrebrett og tusenkuber. Et annet eksempel er tidsangivelser, både på analog og digital måte (to ulike representasjoner av det samme klokkeslett).

Elevenes representasjonskompetanse kommer til uttrykk gjennom deres evne til å abstrahere kronkrete ting som fire halve pizza pluss tre firedels pizza. Kompetansen kommer også til syne blant annet gjennom deres evne til å tegne figurer, sette opp tabeller og skjemaer som hjelp til å forstå mer abstrakte ting, som rene tallsymboloppgaver.

Et eksempel på representasjonskompetanse i tilknytning til oppgaven om «Hiros syke mor» kan være elevers ulike besvarelser. Noen elever vil lage en tegning der de fordeler pengene til guttene i hver sin kurv. De tegner da gjerne 22 og 18 sirkler og stryker ut en mynt fra hver gutt og hele tiden teller hvor

mye de har igjen. Andre lager seg en tabell, der noen starter fra dag 1 og fortsetter utover, mens andre begynner med dag 18 og teller seg bakover. Det finnes også elever som løser oppgavene ved å sette opp en likning:

$$180 - 10x = 110 - 5x.$$

Av særlig betydning i matematikk er symboliske representasjoner. Derfor er det nær forbindelse mellom representasjonskompetansen og symbolbruk- og formalismekompetansen, som blant annet fokuserer på 'spillereglene' for omgangen av matematiske symboler.

### Symbolbruk og formalismekompetansen

Symbol- og formalismekompetanse inneholder det å kunne **bruke og avkode** symbol- og formalismespråket og **oversette mellom** matematisk symbolspråk og dagligtale. Det vil også si å ha innsikt i de matematiske "spillereglene". Denne kompetansen skiller seg dermed fra representasjonsfasen ved at den fokuserer på symbolenes karakter, status og betydning og på selve håndteringen av dem, inklusive regler (ibid).

Her er det altså evnen til å kunne bruke det formelle matematiske språket på en måte som gir mening for deg selv og andre. Den består også i å beherske vedtatte regler og definisjoner, som for eksempel å vite at multiplikasjon har fortrinn fremfor addisjon i et matematisk uttrykk [2]. Kompetanse tilsier også at de skal kunne lage en tilknytning til det virkelige liv (regnefortelling) ut fra et rent regnestykke.

Elevene kan bruke streker, fingrer og konkrete for å representere tall. De med lav representasjon- og symbol/formalismekompetanse har ofte problemer med blant annet posisjonssystemet, måleenheter og geometriske symboler.

Elever med høy representasjon-, symbol-

og formalismekompetanse klarer å se sammenhengen mellom bilde, symbol og virkelighet. De kan manipulere med symboler og regneoperasjoner, og de regner lett mellom ulike regneoperasjoner og velger den mest hensiktsmessige representasjonen i en gitt situasjon (ibid).

Eksempler:

- 453 står for 4 hundreder, 5 tiere og 3 enere.
- 0,5 betyr det samme som 'en halv'.
- Lag regnefortelling til  $12 - 7 = 5$ .
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  betyr at kvadratet av summen av to tall er lik kvadratet av det første tallet pluss det dobbelte produktet av begge tallene pluss kvadratet av det siste tallet.

### Hjelpemiddelkompetanse

Kompetansen inneholder det å **vite om** ulike hjelpemidler som egner seg til matematisk virksomhet, ha innblikk i **muligheter og begrensninger** disse hjelpemidlene gir, og **kunne bruke** dem på en hensiktsmessig måte.

Matematikken har alltid benyttet seg av diverse tekniske hjelpemidler, både til å representere og fastholde matematiske saksforhold og til å håndtere dem, for eksempel i forbindelse med målinger og utregninger. Det dreier seg ikke kun om IT, altså lommeregnerne og datamaskinen (herunder beregningsprogrammer, grafiske tegneprogrammer, computeralgebra og regneark), men også om tabeller, kulerammer, linjal, passere, vinkelmålere, logaritme- eller normalfordelingspapir m.v. Kompetansen går altså ut på å kunne omgås og forholde seg til slike hjelpemidler [1].

### Eksempler på hjelpemidler:

Tellemateriale som knapper, brikker og steiner, ulike konkrete representasjoner for brøk, tallinjer, måleinstrumenter, passer, vinkelmåler, geobrett, centicubes, cuisinnainstaver, terninger, spesialpapir, polydronbrikker osv. I tillegg kommer ulike former for lommeregnerne og programvare (Cabri, TI-interactive, regneark, Maple, Matemania, Chefrens pyramide osv.).

### Oppsummering

Det er ikke tvil om at en slik kompetansebeskrivelse av matematikkfaget tilfører faget en ny dimensjon. Det kan være til god hjelp for mange lærere som underviser i matematikk og som selv føler seg usikre i faget. For mange har læreboken vært eneste alternativ i undervisningen, og elevene er i altfor stor grad blitt sittende og regne på oppstilte oppgaver. Ved å sette fokus på at matematikk består av mange kompetanser og at alle disse må stimuleres i undervisningen, vil det forhåpentligvis presse frem en mer allsidig undervisning. Det holder ikke å kun drille algoritmer og formler, for at elevene skal klare seg best mulig til prøvene eller eksamen. Jeg håper det vil tvinge seg fram et metodeskifte rundt om i mange klasserom, bort fra instrumentell innlæring til mer fokus på innsikt, forståelse og varierte arbeidsmetoder.

### Litteraturliste

- [1] Niss, M, Jensen, T. H. (2002) Utdanningsstyrelsens temahæfter nr. 18-2002; *Kompetanser og matematikklæring*. Undervisningsministeriet, København
- [2] Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen (NSMO); [www.matematikkcenteret.no/](http://www.matematikkcenteret.no/) Informasjon om de Nasjonale Prøver i matematikk.