Skriftserie for

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

No 1 - 2003

KONFERANSERAPPORT

Utvikling av matematikkundervisning i samspill mellom praksis og forskning

Nordisk konferanse i matematikkdidaktikk ved NTNU
18. og 19. november 2002

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Forside:
Statsråd Kristin Clemet og faglig leder ved Senteret, Ingvill M. Holden, klipper over to sammenlimte Möbiusbånd for å markere åpningen av Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen. Båndene ble til to hjerter hektet sammen. Sammenhektingen symboliserer samhold og samarbeid på tvers av skoleslag, institusjoner og landegrenser. Hjertene symboliserer kjærlighet til og glede over matematikken.
Foto: Steinar Fugelsøy, Adresseavisen

Trykk: NTNU-trykk
ISBN 82-471-5167-7

Forord

av Ingvill M. Holden

Konferansen *Utvikling av matematikkundervisningen i samspill mellom praksis og forskning* ble til som svar på et ønske fra Utdannings- og forskningsdepartementet om en nordisk åpningskonferanse for Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen. Lenge før Matematikksenteret var etablert, startet planleggingen av konferansen. Undertegnede fikk oppdraget, og fikk ganske fort på plass en nordisk programkomité bestående av Gudmundur Birgisson fra Island, Morten Blomhøj fra Danmark, Lisen Häggblom fra Finland, Bengt Johansson fra Sverige, Frode Rønning og Ingvill Holden fra Norge. Sammen fant vi fram til innhold og struktur på programmet, og vi bestemte oss for å ha inviterte foredragsholdere både til plenum og parallellsesjonene. Samtlige som ble spurt, takket ja med det samme! Dette var svært inspirerende for oss som arbeidet med konferansen. Ganske tidlig fant vi det naturlig å lage et sosialt og populærvitenskapelig program på lørdag og søndag før selve konferansen startet. På denne måten ville vi kunne skape en hyggelig atmosfære og ramme rundt arrangementet. Dette fungerte utmerket, og vi kunne merke den gode stemningen allerede lørdag kveld på vei med restaurant-trikk til dans på Lian. Søndagens program med Matematikk i Nidarosdomen, Matematikk i hoppbakken, Matematikk på Vitensenteret og Matematikk og musikk på Ringve musikkhistoriske museum har fått egne artikler i konferanserapporten, fra side 223. Jeg vil rette en spesielt varm takk til Frode Rønning, elever fra 10 klasse; Torgeir Aursjø Nilsen, Ingrid Otnes, Lene Stigen og Knut Magnus Nordby Gjertsen og lærer Kristen Garberg fra Selbu ungdomsskole, Nils Kristian Rossing og Carl Haakon Waadeland for deres flotte bidrag.

Selve åpningen av konferansen ble foretatt av Statsråd Kristin Clemet, som presenterte regjeringens handlingsplan for satsing på realfagene. Sammen med faglig leder ved senteret, klippet hun over to sammenklistrede Möbiusbånd for å markere åpningen av Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen. Möbiusbåndene ble forvandlet til to hjerter som var hektet inni hverandre (se forsidebildet). Hjertene skulle symbolisere kjærlighet til og glede over matematikken. At det var to sammenhektede hjerter skulle symbolisere samhold og samarbeid på tvers av skoleslag, institusjoner og landegrenser.

Alle inviterte foredragsholdere holdt opplegg av meget høy kvalitet, og gjorde sitt til at konferansen vil bli husket. Alle de fem nordiske land var godt representert, og jeg taker samtlige for svært gode bidrag. Det er denne konferanserapporten bevis på. Ole Skovsmose fra Danmark ga oss en flott start, som virkelig satte standarden på konferanseprogrammet. *A special warm thank you to our foreign guests from outside the Nordic countries, Marja van den Heuvel-Panhuizen from The Netherlands and John Mason from United Kingdom for their memorable contributions to the plenary sessions.* Jeg er også spesielt glad for innlegget fra vårt "brodersenter" i Sverige, NCM, med Göran og Lillemor Emanuelsson og Elisabeth Doverborg. Mattelandet i Finland som ble presentert av Karin Kairavuo, vil bli husket av mange.

Det var spesielt gledelig at så mange lærere fra hele Norden ville delta på konferansen. Vi hadde i utgangpunktet tenkt oss et deltakertall på mellom hundre og hundreogfemti, men vi innså fort at vi måtte la flere få være med. Jeg vil rette en spesiell takk til førstekonsulent Anne Kajander ved Institutt for matematiske fag ved NTNU, som var med meg i planleggingen og forarbeidet helt fra starten. Hun brukte all sin erfaring og alle sine gode forbindelser til å skaffe alt fra billig overnatting til egnede lokaler ved NTNU (noe som ikke er lett midt i semesteret). Da vi satte strek for påmelding, var deltakertallet oppe i trehundre. Jeg vil også takke senterets sekretær Merete Lysberg, som gjorde en stor innsats både før, under og etter konferansen, og til studentene Margrethe Steine, Heidi Dahl, Carl Fredrik Berg, Petter Bergh og Maria Vetleseter Bøe for uvurderlig hjelp under de to konferansedagene. Spesiell takk også til Bettina Dahl Søndergaard, som på kort varsel gikk inn i stillingen som rådgiver ved senteret, og gjorde en kjempeinnsats med påmeldingslister og kontakt med de mange deltakerne. Det var mange som følte de kjente Bettina da de kom til konferansen.

Overraskende, men ikke mindre gledelig, var det å få overrakt så mange og flotte gaver til Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen. Det var flotte bokgaver til biblioteket som vi skal bygge opp, og mange gaver med både symbolske og kunstneriske verdier. De vil få en synlig plass på matematikksenteret. Tusen takk til deltakerne fra Finland, Island, Sverige, Danmark og Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling ved Universitetet i Oslo for alle de flotte gavene.

Jeg føler meg overbevist om at konferansen førte til mange nye og varige kontakter, og at vi ved Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen vil ha mye samarbeid framover med alle som har deltatt på konferansen, både fra inn- og utland.

Til slutt vil jeg takke programkomiteens medlemmer for uvurderlig innsats. Uten deres hjelp ville programmet aldri blitt så spennende og variert. Gudmundur, Morten, Lisen, Bengt og Frode vil være mine venner for livet.

Innhold:

Innledning:

Innhold, forts.:

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

– hva kan vi vente oss av det?

av Ingvill M. Holden

I april 2002 gikk en pressemelding ut fra Utdannings- og forskningsdepartementet (UFD) om at det skulle opprettes et nasjonalt senter for matematikk i opplæringen. Tanken om et slikt senter hadde eksistert i UFD en tid, og da det kom en henvendelse fra Norsk matematikkråd med forslag til ulike tiltak for å styrke matematikkundervisningen i Norge, lå nettopp forslaget om opprettelsen av et nasjonalt matematikksenter som et av de sentrale punktene. UFD hadde på forhånd tatt kontakt med ledelsen ved Norges teknisk- naturvitenskapelige universitet (NTNU) for å sikre at det var vilje og plass til å legge et slikt senter nettopp her. Ledelsen ved NTNU bestemte sammen med UFD at senteret skal ligge direkte under rektor, med eksternt styre og et eksternt faglig råd.

Senteret har som hovedoppgave å øke kvaliteten på matematikkundervisning på alle nivå i grunnopplæringen, samt i lærerutdanningen. Det skal utvikles og spres ideer til undervisningsopplegg og arbeidsmåter som fremmer barn og unges lyst til å lære matematikk. Det er ingen begrensning på de lærendes alder, og vi vil rette oppmerksomheten såvel til førskolebarn som til voksne, i tillegg til barn og unge i skolepliktig alder. Kvaliteten skal sikres gjennom nært samarbeid mellom senteret, de øvrige matematikkmiljøene i Norge og lærere som underviser i skolen. Klasseromsnær fagdidaktisk forskning skal være en vesentlig del av virksomheten, og samspillet mellom teori og praksis skal løftes fram og synliggjøres, slik at resultater og anbefalinger har en sterk teoretisk forankring. Vi vil ha spesiell oppmerksomhet rettet mot jenter, og søke å finne fram til tiltak som styrke jentenes selvtillit, øke deres motivasjon og inspirere til valg av matematikkrevende studier og yrker.

Senteret skal til enhver tid ha fire og en halv ansatte: en faglig leder, en faglig og administrativ sentermedarbeider, to stipendiater og en halv sekretær. I tillegg vil det legges vekt på å bygge opp et internasjonalt nettverk, spesielt konsentrert om de nordiske landene. Vi ser for oss at gjesteforskere vil oppholde seg ved senteret i kortere og lengre perioder. I tillegg vil det være aktuelt å engasjere lærere til å være med i ulike prosjekter, der disse i perioder også vil oppholde seg ved senteret.

Senteret skal komme med anbefalinger til departementet når det gjelder læreplaner Det skal være et senter som er nyttig for lærere i skolen, slik at de kan henvende seg til senteret og få hjelp til å forbedre sin egen matematikkundervisning.

Senteret som et nettverk av matematikkmiljøer og ressurspersoner

For å kunne oppfylle mandatet om å bli et senter som er nyttig for lærere over hele landet, må senteret være mer enn de få ansatte ved NTNU. Senteret vil ha som mål å fungere som et koordinerende ledd for matematikkdidaktikkmiljøene ved små og store høgskoler og universitet. Det er et stort antall høgskoler med lærerutdanning i Norge, og alle disse har undervisning i matematikk og matematikkdidaktikk. I tillegg har alle de fire universitetene en praktisk pedagogisk utdanning, der matematikkdidaktikk inngår som et viktig fag. Det blir en viktig oppgave for Matematikksenteret å styrke det nettverket som allerede finnes i det norske matematikkdidaktikkmiljøet, og synliggjøre hva de ulike miljøene kan bidra med i forhold til det felles målet om en matematikkopplæring i Norge med høy kvalitet. Vi ønsker å presentere en samlet oversikt over personer knyttet til disse miljøene, slik at skolemiljøene over hele landet kan finne fram til ressurspersoner de kan samarbeide med for å heve kvaliteten på matematikkundervisningen på egne skoler.

Den gode læreren er nøkkelpersonen i dette arbeidet, og dermed blir lærerutdanning og etter- og videreutdanning av lærere i skolen, et svært viktig satsingsområde. Ulike miljøer samarbeider allerede om å legge opp kompetansehevingsprogrammer i matematikk for kommunene. I tillegg er flere miljøer involvert i å utvikle nettbaserte videreutdanningskurs for lærere. Det er etablert et nettsted for lærere (www.matematikk.org) som et resultat av et samarbeid mellom de fire universitetene, Matematikksenteret og høgskolene i Agder og Oslo. Dette nettstedet er under stadig utvikling, og vil snart få sider både for elever og foreldre.

Senteret skal bidra til oppbygging av et større matematikkdidaktikkmiljø i Norge. Vi skal arbeide for å øke rekrutteringen av hovedfags- og doktorgradsstudenter i matematikkdidaktikk. Siden det til enhver tid skal finansieres to stipendiatstillinger som en del av senterets virksomhet, vil dette alene være et viktig bidrag i dette arbeidet. Det arbeides med å legge opp et doktorgradsprogram i samarbeid med Institutt for matematiske fag ved NTNU. I tillegg vil vi samarbeide med ulike miljøer, også utenfor Norge, om å arrangere kurs og seminarer for studentene og søke fleksible ordninger for hvor studentene kan oppholde seg. Stipendiatene ved senteret kan ha veiledere ved NTNU eller andre institusjoner, men de skal arbeide med forskningsprosjekter som er nært knyttet til senterets virksomhet. Det vil også være mulig for studenter og ansatte ved andre institusjoner å oppholde seg ved senteret i kortere eller lengre perioder.

I tillegg til de allerede eksisterende fagmiljøene ved høgskoler og universitet, ønsker vi å arbeide for at lærere med spesielle evner og ressurser skal kunne bidra til fornying og forbedring av matematikkundervisningen i skolen. Det skal gjennomføres en systematisk oppbygging av et nasjonalt nettverk av ressurspersoner. Dette skjer i nært samarbeid med Landslaget for matematikk i skolene (LAMIS). De første ressurspersonene er allerede inne i en skoleringsprosess. Skoleringen består i kurs med grundig praksisforankring og teoretisk fundament, utvikling av kurs og gjennomføring av egne kurs med og uten veileder. I tillegg skal ressurspersonene samles ved senteret en gang i året for erfarings- og idéutveksling, videreutvikling av egen kompetanse og inspirasjon til fornyelse. Det er et mål å ha 5 til 6 ressurspersoner i hvert fylke, i alt rundt hundre ressurslærere spredt over hele landet.

Idé og ressurs-senter for hjelpemidler i matematikkopplæringen

En viktig del av virksomheten vil være utvikling av ideer til undervisningsopplegg og undervisningsmateriell for alle nivå i skolen. Vi holder på å etablere et matematikklaboratorium ved senteret. Dette skal brukes til kursing og utvikling av undervisningsopplegg. Det vil bli utprøving med elever som gjester, og lærere kan komme og bruke rommet med sine elever. Laboratoriet skal også fungere som et eksempel på hvordan skoler selv kan organisere et matematikkrom, og hva slags utstyr som er relevant for ulike nivå i skolen. Materiell og undervisningsopplegg vil bli videreutviklet av hovedfags- og doktorgradsstudenter ved senteret.

På samme måten tenker vi oss oppbygging av en data-lab. Vi har allerede maskiner og rom, og har en del programvare til utprøving og testing. I samarbeid med lærere og elever i skolen, vil vi finne fram til programvare med høy kvalitet som egner seg for bruk i matematikkundervisningen på ulike klassetrinn og i ulike skoleslag. Vi vil også teste ut og anbefale materiell beregnet på førskolebarn. Vi vil holde kurs og ta imot besøk på datalaben. I tillegg vil vi utvikle et konsept for "Matematikklubb for barn" der både datalaben og matematikklaboratoriet vil bli brukt. Dette skal være en oppgave for stipendiatene ved senteret i samarbeid med elever i videregående skole. Det å ha med elever fra videregående skole ser vi som et rekrutteringstiltak i forhold til lærerutdanningen. Ideen kom fra det finske Mattelandet, som ble presentert på konferansen.

I samarbeid med Skolelaboratoriet for matematikk, naturfag og teknologi ved NTNU, har vi startet å bygge opp et bibliotek. Mange av bøkene ble gitt oss i gave under åpningskonferansen. Det vil ikke være et utlånsbibliotek, men et sted der gjester kan komme og gjøre seg kjent blant et stort utvalg av bøker. Vi vil ha tre kategorier bøker:
1. Faglitteratur i matematikkdidaktikk
2. Idebøker for lærere
3. Populærlitteratur og biografier beregnet på barn og ungdom
4. Lærebøker
Vi vil utarbeide en bokliste over alt som finnes i vårt bibliotek. Denne listen vil vi legge ut på våre nettsider, slik at andre kan få innsyn i hvilke bøker vi vil anbefale. I den grad det er mulig, vil vi oppgi priser og informasjon om hvor bøkene kan bestilles.

En viktig oppgave ved senteret i de kommende to år, vil være utviklingen av nasjonale prøver for elever på fire ulike klassetrinn i utdanningsløpet. Dette er et oppdrag fra UFD som vil gjennomføres i samarbeid med Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling ved Universitetet i Oslo og Telemarksforskning-Notodden. Her vil ha et spesielt nært samarbeid med lærere i fem Trondheimsskoler, som samtidig er pilotskoler i et kompetansehevingsprosjekt som ledes fra senteret.

Seminarer og konferanser

Vi vil være et ressurs- og møtested for forskere og lærere som underviser i matematikk på alle nivå. En type møteplass, vil være seminarer og konferanser. Vi vil satse på en større temakonferanse hver høst. Høsten 2003 vil tema være "Popularisering av matematikk". Dette er et av temaene for den 10. internasjonale matematikkongressen ICME10, som holdes i København i juli 2004. Vi ser dette som et interessant og aktuelt tema, og som samtidig kan knytte bånd mellom fagmiljøene i matematikk og matematikkdidaktikkmiljøene. I tillegg ønsker vi å arrangere mindre seminarer og samlinger med aktuelle temaer for ulike målgrupper. Her vil også foreldre og skoleungdom være aktuelle målgrupper. Vi vil satse på at også førskolelærere skal oppfatte senteret som et aktuelt sted å besøke.

I tillegg til arrangementer ved NTNU, vil det være aktuelt å arrangere konferanser, kurs og seminarer ved høgskoler og universitet, skoler og lokale møteplasser i andre deler av landet. Vi vil også være medarrangører ved nordiske konferanser som avholdes andre steder enn i Norge

Spredning og informasjon

Senteret skal ha sin egen skriftserie, der denne konferanserapporten er første nummer. Skriftserien skal gjøre det mulig å komme raskt ut med resultater og rapporter som er utarbeidet ved Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen. Det kan være delresultater fra doktorgradsarbeider og hovedoppgaver, nordiske samarbeidsprosjekter, idéhefter og temahefter som vi ønsker skal komme raskt ut til målgruppen for arbeidet vårt, nemlig lærere, lærerutdannere, forskere og politikere.

Vi har et nettsted under etablering. Adressen er www.matematikksenteret.no . Her presenterer vi nyhetsbrev hver måned, og nyttige tips og informasjon til lærere, lærerutdannere og beslutningstakere. Vi vil etter hvert få i gang et diskusjonsforum for ulike målgrupper, og har som mål at nettstedet skal bli en viktig møteplass for nettverkene vi har startet å etablere.

Videre har vi inngått en avtale med Caspar forlag og redaksjonen i tidsskriftet Tangenten. Hvert nummer, fra og med nummer 2 i 2003, vil inneholde inntil 8 sider med stoff fra Matematikksenteret. Dette vil bli en viktig måte å synliggjøre vår virksomhet og nå ut med informasjon til lærere og lærerutdannere.

Undervisningsopplegg og tips til lærere vil bli kanalisert gjennom alle de ovenfor nevnte media. I tillegg vil vi synliggjøre vår virksomhet, og bidra til å sette matematikk på dagsorden i årene som kommer. Dette skal vi gjøre gjennom aviser, tidsskrifter og media forøvrig. Vi vil være med i den offentlige debatt om matematikkundervisningen i Norge.

Nordisk og internasjonalt samarbeid

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen skal bidra til å videreutvikle det allerede gode nordiske samarbeidet blant forskere og forskerstudenter i matematikkdidaktikk. Vi vil utvide samarbeidet til også å omfatte praktiserende matematikklærere i de nordiske landene. Dette skal skje blant annet gjennom å gjøre konkurransen KappAbel til et nordisk arrangement (se artiklene om nordisk samarbeid s 11 og KappAbel s 225 . I tillegg vil vi ta initiativ til å invitere lærere fra de andre nordiske landene til våre arrangementer og kurs. Vi har dessuten et nært samarbeid med Nationelt Centrum för Matematikutbildning, NCM, i Göteborg, og vil legge fram forslag om felles arrangementer. For å kunne bygge opp et sterkt fagmiljø innenfor matematikkdidaktikk i Norge, er vi helt avhengig av samarbeid med våre nordiske kolleger, både når det gjelder veiledning og nettverksbygging blant forskerstudenter. Se mer om dette s 12.

Vi vil satse på å invitere gjesteforskere fra hele verden, og ser det som et mål at det etter hvert skal oppfattes som attraktivt for utenlandske forskere å oppholde seg ved senteret. Dette vil være et viktig ledd i å bygge opp vår egen veiledningskompetanse, og sikre høy faglig kvalitet på tilbudet til våre stipendiater. Her vil samarbeidet med de andre nordiske landene være spesielt viktig for å utnytte mulighetene til felles invitasjoner.

Arrangementer av nordiske konferanser er allerede et prioritert område, og vil fortsette fram mot ICME10 i 2004. Men det stopper ikke med det. Vi har allerede etablerte nordiske konferanser som gjentas med faste intervaller, slik som NORMA-konferansene. Vi vil bidra til å videreføre og videreutvikle disse arrangementene. NORMA05 holdes i Trondheim, der Matematikksenteret og Høgskolen i Sør-Trøndelag avdeling for lærerutdanning og tegnspråk vi stå som arrangører.

Nordisk samarbejde i matematikdidaktik

- en aktuel udviklingstendens

Morten Blomhøj & Ingvill M. Holden

Nordisk samarbejde inden for matematikundervisning og matematikdidaktisk forskning intensiveres i disse år. Denne udvikling har flere årsager.

For det første står de nordiske lande overfor en række fælles problemer, når det gælder forskningsbaseret udvikling af matematikundervisningens praksis. De relativt små forsknings- og udviklingsmiljøer i de enkelte lande har brug for nordisk samarbejde, ikke mindst i forbindelse med forskeruddannelse. Der tages aktuelt mange nationale initiativer vedrørende matematikundervisning i de enkelte lande, deriblandt oprettelse af centre for udvikling og dannelse af nationale forskerskoler. Men udbudet af faglig ekspertise er begrænset i de nordiske lande og det er nødvendigt med samarbejde og synergi mellem de enkelte aktiviteter, hvis bestræbelserne skal få gennemslagskraft og på sigt betydning for udvikling af matematikundervisningens praksis.

For det andet er det en afgørende praktisk omstændighed, at verdenskongressen ICME-10 (10^{th} International Congress on Mathematics Education) afholdes i København i 2004. Værtskabet for ICME-10 er baseret på en fælles ansøgning fra de fem nordiske lande og planlægningen af kongressen støttes af en særlig Nordisk Kontakt Komité (NCC) (se www.ICME-10.dk). Det er en stor og krævende opgave, der giver nogle enestående muligheder for at udvikle det nordisk samarbejde inden for matematikundervisning og matematikdidaktisk forskning. Ved ICME-10 bliver der lejlighed til at præsentere og diskutere de særlige træk ved matematikundervisningen i de nordiske lande. Det er NCC's intention, at afholdelsen af ICME-10 i København vil anspore mange matematiklærere og forskere fra de nordiske lande til deltagelse og medvirken i kongressen, og at ICME-10 dermed på sigt kan betyde en styrkelse af den nordiske forskning inden for området og give inspiration til udvikling af undervisningens praksis.

NCC består af to repræsentanter for hvert land, på nær Island der har én repræsentant. Gruppen kommer med indspil både til den lokale organisationskomité, og til den internationale programkomité, der ansvarlig for det videnskabelige program ved ICME-10. NCC arbejder på en bog om "den nordiske tradition" i matematikundervisningen, og har endvidere taget initiativ til et dobbeltnummer af tidsskriftet NOMAD om nordisk matematikdidaktisk forskning. Disse udgivelser vil foreligge til og blive præsenteret under ICME-10. Som optakt til ICME-10 bliver der arrangeret nationale og nordiske konferencer og symposier for at inspirere og forberede nordiske lærere, forskere og forskerstuderende til at bidrage og deltage på kongressen i 2004.

At konferencen ved åbningen af Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen ved NTNU i Trondheim var en nordisk konference kan netop ses som et udtryk for den igangværende udvikling inden for matematikkens didaktik. Programkomiteen for konferencen har derfor fundet det naturligt at inkludere en kort beskrivelse af den historisk baggrund og aktuelle status af det nordiske samarbejde i nærværende rapport. Det skal dog straks understreges, at den korte fremstilling der er plads til i denne sammenhæng på ingen måde gør krav på at være en dækkende beskrivelse af det nordiske samarbejde på området.

Lang tradition for nordisk samarbejde om matematikundervisning

Der er en lang tradition for nordisk samarbejde inden for matematikundervisning og matematikdidaktisk forskning. Et tidligt eksempel på formaliseret samarbejde er dannelsen af ”Nordiska Kommitten för Modernisering av Matematikundervisningen” i 1960. Kommissionens opgave var at sikre nordisk samarbejde i forbindelse med moderniseringen af matematikundervisningen på alle niveauer af uddannelsessystemet. Baggrunden for initiativet var ”the new math reform” , der prægede den internationale scene omkring matematikundervisningen i 50’erne og 60’erne. I det moderne industrisamfund fik både den almene og videregående matematikundervisning en vigtig rolle at spille som grundlag for uddannelse af kvalificeret arbejdskraft og det blev derfor vigtigt at skabe øget faglig sammenhæng i matematikundervisningen med henblik på at skabe øget flow gennem uddannelsessystemet. Den strukturalistiske skole med Bourbaki-gruppen som faglig spydspids havde et markant svar på denne udfordring, nemlig en gennemgribende reform af matematikundervisningens indhold fra første klasse til universitetsniveau baseret på mængdelære og et moderne funktionsbegreb.

Som vi ved i dag var der mange alvorlige pædagogiske vanskeligheder forbundet med at gennemføre et sådant program, og på nordisk plan var der allerede fra starten markant kritik af reformbestræbelserne. Reformprocessen var imidlertid en vigtig katalysator for det nordisk samarbejde, og samarbejdet nået også ned på græsrodsplan. Matematiklæreforeningerne i de nordisk lande begyndte at arrangere fælles nordisk årsmøder/konferencer.

Som nogle af de seneste resultater af denne form for nordisk samarbejde kan følgende konferencer nævnes. Sommeren 2002 blev den 18. nordiske LMFK-kongressen afholdt i Torneå i Finland. LMFK står for Lærere i matematik, fysik og kemi, og har foreninger i alle de nordiske lande med lærere på det gymnasiale uddannelsestrin som medlemmer (se http://www.lmfk.dk/). Mottoet for sidste års kongres er betegnende for LMFK-foreningerne: "Elämyksiä elämään - Livet, ett äventyr. Vårt syfte är att bjuda lärare i matematiska ämnen på minnesrika upplevelser, bra föreläsningar och konkreta tips för undervisningen.” De nordiske kongresser afholdes hvert tredje år, og i 1999 var arrangementet lagt i Tromsø.

Der er også en lang tradition for nordiske konferencer om matematikundervisning med fokus på barne- og ungdomstrinnet. Der er holdt åtte slike konferencer: Kungälv, Sverige 1975, Kungälv, Sverige 1979, Flúðir, Island 1983, Gilleleje, Danmark 1986, Linköping, Sverige 1990, Åbo, Finland 1993, Nordfjordeid, Norge 1997 og Borgarfjörður, Island 2000. I anledning Verdens matematikkår i 2000, gik de nordiske matematiktidsskrifter Tangenten, Flötur, Nämnaren, Maol og Matematik sammen om en fællesudgivelse: ”Matematik(k) & undervisning - Norden 2000”. Det blev til en bog som giver mange spændende glimt fra nordiske klasserum, og en bog hvor både lærer- og elevstemmerne er tydelige.

Nordisk samarbejde om forskning og forskeruddannelse

Som forskningsfelt er matematikkens didaktik i de nordiske lande et relativt ungt og lille felt i international målestok, men feltet er i stærk vækst. I Norden er der kun omkring 50 personer, der som led i en fast stilling har forpligtigelse til at forske inden for matematikkens didaktik. Inden for de sidste 15 år er antallet af forskerstuderende imidlertid tidoblet, således at der aktuelt er omkring 60 aktive fuldtidsstuderende i formelle forskeruddannelsesprogrammer inden for matematikkens didaktik i de nordiske lande. Hertil kommer, at mange matematiklærere på de forskellige niveauer af uddannelsessystemet, ved siden af deres lærerjob, er engageret i udviklings- og forskningsarbejde.

På trods af feltets beskedne volumen har nordisk matematikdidaktisk forskning ydet væsentlige bidrag til feltet, hvilket også er en hovedårsag til, at Danmark i samarbejde med de øvrige nordiske lande har fået værtskabet for ICME-10.

Forskningsmiljøerne i de nordiske lande er imidlertid typisk meget små og findes ofte som grupper på 2-3 forskere, der arbejder med matematikdidaktik ved universitetsinstitutter i matematik eller pædagogik samt ved læreruddannelser. Kun få miljøer er stærke nok til at varetage uddannelse af nye forskere inden for egne rammer. Svarende hertil bliver der aktuelt arbejdet på at opbygge nationale forskerskoler i flere af de nordiske lande. Øget nordisk samarbejde vil kunne hæve niveauet for forskeruddannelse inden for matematikkens didaktik.

Og der er gode erfaringer at bygge på for et sådant nordisk samarbejde. Under det danske initiativ ”Matematikundervisning og Demokrati” finansieret af Statens Humanistiske Forskningsråd, 1988-1991, blev der afholdt tre nordiske forskningssymposier med specielt sigte på at støtte uddannelse af forskere (Nissen og Blomhøj, 1992, 1993), (Nissen og Bjørneboe, 1990). I forlængelse heraf blev der i 1990 med støtte fra NorFA (Nordisk Forsker Akademi) etableret et nordisk forskernetværk for matematikdidaktik. Netværket, der fungerede frem til og med 1992, omfattede ankerpersoner og forskerstuderende fra alle fem nordiske lande. Sigtet var specielt at støtte unge forskere og forskerstuderende, således at de kunne besøge relevante miljøer i de nordiske lande, og således, at de kunne mødes ved mindre forskningsseminarer i de nordiske lande. Baseret blandt andet på de stærke kontakter, der blev etableret i denne periode, er traditionen med nordiske forskersymposier søgt vedligeholdt. Der har i Island været afholdt et forskersymposium i 1994 og en konference om matematikundervisningen i 2000, og i perioden 1996-2002 har der været afholdt fire nordiske forskersymposier i Umeå (Lithner og Wallin, 1996, 1997, 2000).

Hertil kommer NORMA-konferencerne, der er nordiske forskningskonferencer med et international perspektiv og deltagelse af forskere fra ikke-nordiske lande. Der har været afholdt tre sådanne konferencer, Lahti 1994, Kristiansand 1998 (*Theory into Practice*) og Kristianstad 2001 (Bergsten, C. & Grevholm, B. (in press)), og den fjerde planlægges afholdt i Trondheim 2005.

Det nordiske samarbejde i starten af 90erne resulteret også i etableringen af forskningstidsskriftet ”Nordisk Matematikkdidaktikk”, der udkom med første årgang 1993. Som et nyre eksempel på resultater af nordisk forskningssamarbejde bør også nævnes forskningsantologien ”Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv” (Grevholm, 2001).

Erfaringerne fra disse aktiviteter er entydigt positive. De mange fællestræk ved uddannelsessystemerne i de nordiske lande gør det muligt og særdeles frugtbart at belyse og diskutere matematikdidaktiske forskningsspørgsmål på baggrund af forskningsprojekter, der tager udgangspunkt i matematikundervisningen i de enkelte lande. Muligheden for at holde forskningssymposier på de nordiske sprog har vist sig særdeles betydningsfuld for mange forskerstuderende, og det har gjort det muligt at inddrage matematiklærere, der arbejder med udviklingsprojekter i egen undervisning i disse symposier, hvilket i høj grad har styrket samspillet mellem forskning og undervisning.

I de nordiske lande har matematiklærere på alle niveauer af uddannelsessystemet relativ stor frihed til og ansvar for undervisningens tilrettelæggelse og gennemførsel. Ikke mindst derfor er det vigtigt at fastholde og udvikle det tætte samspil mellem forskning i og udvikling af matematikundervisningens praksis som et karakteristisk træk ved nordisk matematikdidaktisk forskning.

Det var netop baggrunden for valget af tema for åbningskonferencen. Konferencens forløb og de mange beskrivelser af spændende udviklings- og forskningsprojekter i denne rapport viser tydeligt det frugtbare i denne tilgang til nordisk samarbejde inden for matematikkens didaktik.

Det er imidlertid også nødvendigt, at forskeruddannelse inden for matematikkens didaktik indebærer kontakt til det internationale forskningsmiljø. Publicering af forskningsrapporter og artikler på engelsk samt deltagelse i og medvirken ved internationaler konferencer er de væsentligste midler hertil. Målrettet nordisk samarbejde om forskeruddannelse kan give værdifuld støtte til, at unge forskere kommer tidligt i gang med at publicere i internationale tidsskrifter og at deltage i relevante internationale konferencer.

Vi er overbevist om at afholdelsen af ICME-10 i Danmark og "satellit-konferencerne" PME28 (Psychology of Mathematics Education) og HPM (History and Pedagogy of Mathematics, se www.math.uu.se/hpm/), der afholdes i 2004 i henholdsvis Bergen, Norge og i Uppsala, Sverige, vil give gode muligheder for, at nordiske forskere og forskerstuderende kan etablere og udbygge kontakter til internationale forskningsmiljøer. Til støtte for specielt forskerstuderende og yngre forskeres medvirken ved ICME-10 arrangeres, der en "Nordic pre-conference" i Växjö, Sverige i maj 2003 (se www.msi.vxu.se/picme10).

Fælles udfordringer for matematikundervisningen i de nordiske lande

At se almen uddannelse som grundlag for fastholdelse og udvikling af den demokratiske samfundsform er et af de mest grundlæggende fællestræk ved de nordiske lande. Almen uddannelse i de nordiske lande skal ikke blot give grundlag for videreuddannelse af kvalificeret arbejdskraft til sikring af fortsat økonomisk og social udvikling, men skal først og fremmest støtte det enkelte menneskes personlige, sociale og faglige udvikling med henblik på aktiv medleven og kritisk stillingtagen i et moderne demokratisk samfund.

Matematikundervisning har en vigtig rolle at spille i et sådant uddannelsesprojekt. Matematik indgår på mangfoldige måder i det moderne højteknologiske samfund, og i samspil med andre vidensområder er anvendelse af matematisk viden en vigtig samfundsformende faktor. For det enkelte menneske er matematikholdige kompetencer af betydning i privatliv, uddannelse, arbejdsliv og i livet som borger i et demokratisk samfund. Matematikundervisning bør derfor være en central del af den uddannelse, der tilbydes alle.

Samtidig er det af afgørende samfundsmæssig betydning, at der uddannes tilstrækkeligt mange højt kvalificerede mennesker inden for det matematiske og naturvidenskabelige område. Det er nødvendigt, fordi der gennem forsknings- og udviklingsvirksomhed kan produceres svar på nogle af de mange udfordringer, som samfundsudviklingen afstedkommer, og fordi mennesker med sådanne kompetencer kan videreudvikle vort højteknologiske og demokratiske samfund. Som grundlag for en sådan bestræbelse er det naturligvis specielt vigtigt, at der uddannes tilstrækkeligt mange fagligt og didaktisk kvalificerede matematiklærere til alle niveauer af uddannelsessystemet. I de nordiske lande er der store vanskeligheder med at sikre tilstrækkelig rekruttering til læreruddannelser i matematik og videregående matematikbaserede studier. Vi har simpelthen svært ved at sikre, at tilstrækkeligt mange lærer matematik på tilstrækkeligt højt niveau. Årsagerne hertil er særledes komplekse og der er ingen nemme løsninger i udsigt. Der arbejdes for tiden med etablering af nye læreruddannelsestilbud i matematik, naturvidenskab (realfag) og teknologi i flere af de nordiske landene, noget som forhåbentlig vil trække flere studenter til lærergerningen.

Matematikkens placering i kulturen i det moderne samfund er af stor betydning for, hvordan matematikundervisningen fungerer i uddannelsessystemet. Selv om matematikken i realiteten spiller en afgørende rolle for samfundsudviklingen og for det enkelte menneskes muligheder, er dens rolle og funktion ofte usynlig på den samfundsmæssige overflade. Matematik opleves ikke som integreret i kulturen på samme måde som f.eks. engelsk. Det kræver en stærk matematikdidaktisk forskningsindsats at tydeliggøre matematikkens samfundsmæssig betydning og herudfra begrunde matematikundervisningens indhold og form på uddannelsessystemets forskellige niveauer. Tilsvarende har matematikundervisning en særlig opgave med at motivere eleverne og begrunde fagets berettigelse som led i en almen uddannelse. Det kræver en mangeartet og koordineret indsats, at udvikle en matematikundervisning, der kan løfte disse store uddannelsesmæssige udfordringer. Et styrket nordisk samarbejde om matematikdidaktisk forskning og udvikling af matematikundervisningens praksis vil være et væsentligt skridt på vejen.

Matematikkonkurranser gir muligheder for den nordiske samarbejde

Det er tatt ulike initiativ for å fremme det nordiske samarbeidet. Blant disse er arrangement av ulike matematikkonkurranser med felles oppgaver og en stor nordisk finale. Konkurransen Baltic way for elever i videregående skole, er eksempel på en konkurranse der også de baltiske land er med, i tillegg til norden. Den ble avholdt i Oslo under Verdens matematikkår i 2000, og det var 11. gang konkurransen ble avholdt, men 9. gang med land utenfor Baltikum. I motsetning til de fleste slike konkurranser, er dette er en lagkonkurranse, med fem elever på hvert lag som skal løse 20 oppgaver i løpet af fire og en halv time. Desverre er det svært få jenter som deltar, og fra Norge var det ingen i 2000.

I Norge har vi en relativt ny konkurranse med navn KappAbel (se www.kappabel.com). Den er beskrevet i mer detalj på side 225 i denne rapporten. I denne sammenheng vil vi nevne at KappAbel er i ferd med å bli et felles nordisk arrangement. Den startet som en mer tradisjonell konkurranse i 1998 for Agder-fylkene. I forbindelse med Verdens matematikkår i 2000, fikk Landslaget for matematikk i skolen, sammen med Institutt for matematiske fag ved NTNU utfordringen å gjøre den til en nasjonal konkurranse. Da ble det gjort noen viktige grep i forhold til konkurransens innhold og form. Det ble bestemt at konkurransen skal være en lagkonkurranse der hver deltakende 9. klasse utgjør ett lag. Oppgavene skal være annerledes en tradisjonelle ”skoleoppgaver”, ved at de skal fremme samarbeid, diskusjoner, og bruk av ulike matematiske kompetanser. I tillegg utgjør tredje runde i konkurransen et større prosjektarbeid med et oppgitt tema. Det er dette konseptet som gjør KappAbel unik og spennende, og som ha apellert til didaktikkmiljøene i alle de nordiske landene. I 2002 var Danmark og Island med, og i 2003 er også Sverige med. Det søkes midler til å gjøre konkurransen helnordisk, med landsfinaler i hvert land, og en stor felles nordisk finale. I 2004 vil vi legge finalen til København under ICME10. I tillegg ønsker vi et nordisk forskningssamarbeid omkring KappAbel, der vi vil prøve å finne svar på konkurransens innvirkning på elevenes motivasjon og syn på matematikk, og eventuelt hvordan den kan inspirere lærere til å ta i bruk nye arbeidsformer i sin egen matematikkundervisning.

Sverige er i år for femte gang med i den internasjonale Kängurutävlingen: "Tredje torsdagen i mars varje år genomförs den stora internationella matematiktävling som i Sverige fått namnet Kängurutävlingen - Matematikens hopp! I de flesta andra länder kallas den Kangourou des Mathématiques, det franska namnet. Svenska arrangörer är Kungliga Vetenskapsakademien i samarbete med NCM. Den främsta avsikten med Kängurutävlingen - Matematikens hopp är att stimulera intresset för matematik. Tävlingsmomentet vill vi tona ner och vi delar därför inte ut några centrala priser. Vi hoppas också att problemen inte bara används under tävlingsdagen, utan att dess möjligheter kommer undervisningen till glädje även efteråt t ex genom lösning och diskussion i grupper och klasser." Elever fra 3. til 9. klasse kan delta i konkurransen. Island var med første gang i 2002, med omkring 25% av eleverne i 6. og 7. klasse. De er med i år fro annen gang, og gjennomfører konkurransen etter svensk modell. Det finnes ulike varianter av denne konkurransen i ulike land. Danmark og Finland har ikke vært med enda. I Norge har vi planer om å delta første gang i 2004. Dette kan bli et nytt nordisk prosjekt som kan knyttes opp mot forskning i samarbeid mellom lærere i skolen og forskere i universitets- og høgskolemiljøene.

Nordisk samarbejde i fremtiden

Som det fremgår er det nordisk samarbejde inden for matematikundervisning og matematikdidaktisk forskning rodfæstet i en lang tradition og netop nu særdeles alsidigt og frugtbart. Der er tilmed gode muligheder for, at samarbejdet kan udvikles yderligere i de kommende år. Gennem de mange nordiske arrangementer opbygges der faglige netværk mellem matematiklærere og didaktikere på tværs af landegrænserne.

I NCC arbejder vi målrettet på at udnytte samarbejdet omkring planlægningen af ICME-10 til at styrke det nordiske samarbejde inden for området generelt. Vi har således foreslået Nordisk Ministerråd at igangsætte et omfattende program for nordisk samarbejde om udvikling af matematikundervisningens praksis og matematikdidaktisk forskning. Det samlede program omfatter tre elementer: forskeruddannelse og forskernetværk; udvikling af matematikundervisningens praksis; samt nordisk samarbejde om planlægning og afholdelse af ICME-10. De tre elementer er tilrettelagt med henblik på gensidigt samspil. De forskningsrelaterede aktiviteter sigter således både på at støtte præsentation af nordisk forskning ved ICME-10 og på at udnytte kongressen til at styrke nordiske forskeres forbindelse til internationale forskningsmiljøer. Udviklingsaktiviteterne sigter på at udvikle matematikundervisningens praksis på et forskningsbaseret grundlag og på at skabe større samspil mellem forskning og udvikling. Udvikling af KappAbel til en fælles nordisk matematikkonkurrence indgår som et væsentligt element i denne del af programmet. Samtidig er det en vigtigt del af sigtet, at aktiviteterne kan formidles som led i den fælles nordiske præsentation af matematikundervisningens praksis og matematikdidaktisk forskning ved ICME-10 i 2004.

Det nordiske samarbejde går således en spændende fremtid i møde.

Referencer:

Bergsten, C. & Grevholm, B. (eds) (in press). Conceptions of mathematics. Proceedings of the Third Nordic Conference on Mathematics Education, Kristianstad, 8-12 June 2001. Linköping: SMDF.

Grevholm, B. (red.) (2001): Matematikdidaktik – ett nordiskt perspectiv. Studentlitteratur, Lund.

Lithner, J. og H. Wallin (red.) (1996): Preparation of Researchers in Mathematics Education. Pub. No. 1 1996, Department of Mathematics Umeå University.

Lithner, J. og H. Wallin (red.) (1997): Nordisk forskarworkshop, matematikdidaktisk forskning. Pub. No. 1 1997, Department of Mathematics Umeå University.

Lithner, J. og H. Wallin (red.) (2000): Nordic Research Workshop: Problem Driven Research in Mathematics Education. Pub. No. 1, 2000, Department of Mathematics Umeå University.
Rapporterne fra Umeå kan rekvireres ved henvendelse til: Johan.Lithner@math.umu.se.
Nissen, G. & Blomhøj, M. (red.) (1993): Criteria for Scientific Quality andRelevance in the Didactics of Mathematics. Report from symposium held in Gilleleje, from April 27 to May 2, 1992. IMFUFA Roskilde Universitetscenter.
Nissen, G. & Blomhøj, M. (red.) (1992): Matematikundervisning og Demokrati II. Rapport fra nordisk forskersymposium, 16.-18. juni 1991, Gilleleje, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter.
Nissen, G. & Bjørneboe, J. (red.) (1990): Matematikundervisning og Demokrati. Rapport fra nordisk forskersymposium, 14.-16. juni 1990, Gilleleje, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter.
Rapporterne fra Roskilde Universitetscenter kan rekvireres ved henvendelse til: Dorthe Vedel: vedel@ruc.dk.
Norden (2000): Matematik & Undervisning, Udgivet af de nordiske matematiktidsskrifter: Flötur (Island), Maol (Finland) og Matematik (Danmark), Nämnaren (Sverige) og Tangenten (Norge).
Kan bestilles, også alle tidsskrifterne.

Søren Antonius

Søren Antonius, f. 1951 (e-mail: soeren.antonius@dig.sdu.dk) er cand.scient. i matematik fra Aarhus Universitet 1976 med sidefag i filosofi fra Københavns Universitet 2000. Han har undervist i matematik på højere handelseksamen siden 1977 og har været fagkonsulent i matematik ved Undervisningsministeriet 1981-96. I øjeblikket er han Ph.D.-stipendiat ved Dansk Institut for Gymnasiepædagogik, Syddansk Universitet.

Matematisk modellering på højere handelseksamen i Danmark

Søren Antonius

Abstract

Modellering og anvendelse af IT anses af de fleste som vigtige aspekter af det gymnasiale matematikfag, men disse aspekter tilgodeses kun i begrænset grad i den praktiske undervisning. I denne artikel giver jeg et bidrag til en forståelse af denne manglende overensstemmelse mellem intentioner og realiseringen af disse intentioner på baggrund af en lærer- og en elevundersøgelse. I den forbindelse kommer jeg ind på eksamens konstitutive virkning og mulighederne for at realisere intentionerne gennem projektarbejde, idet jeg refererer til et forsøg med en såkaldt projektprøve til erstatning af den traditionelle skriftlige prøve.

Introduktion

I de gymnasiale uddannelser i Danmark indgår modellering og anvendelse af IT i målsætningen for matematik[1]. Modellering og IT kan ses som adskilte aspekter i undervisningen, men de kan også ses under den samme synsvinkel, nemlig som modellering ved hjælp af IT. Der er et naturligt 'link' mellem modellering og IT i kraft af at IT har en række potentialer i relation til modellering (Ballacheff & Kaput 1996). Jeg anlægger i denne artikel primært et sådant fælles perspektiv.

Men ét er at modellering og IT er omfattet af fagets målsætning. Noget andet er undervisningen. Modellering tilgodeses kun i form af det man kan kalde standardanvendelser, dvs. bestemte typer af modeller brugt i bestemte præstrukturerede kontekster. Og anvendelse af IT begrænser sig først og fremmest til anvendelse af grafregner, og som regel kun som et redskab til tegning af grafer og check af resultater. IT fungerer som et *elektronisk penalhus*. Diskrepansen mellem målsætning og den pædagogiske praksis kan have mange forklaringer. Det er min opfattelse at de forskellige systemaktører er splittede når det gælder modellering og IT, og at de på hver deres måde yder modstand mod en integration af disse aspekter. Undervisningsministeriet har formuleret en målsætning om at inddrage modellering og IT, samtidig med bekendtgørelsen (læreplanen) omfatter en detaljeret beskrivelse af en lang

1 I min undersøgelse af modellering og anvendelse af IT tager jeg udgangspunkt i matematikfaget på højere handelseksamen, som er én af fire gymnasiale uddannelser i Danmark, men det er min vurdering at de fleste betragtninger og positioner har relevans og gyldighed for matematik i de gymnasiale uddannelser generelt.

række begreber, teorier og metoder, som gør det næsten umuligt at få tid til modellering. Lærerne synes på den ene side, at modellering og IT er vigtigt, men de yder også modstand i kraft af, at de gennem en universitetsuddannelse i matematik har fået en faglig opdragelse, der indtil for nylig ikke inddrog modellering og IT. Eleverne synes som hovedregel godt om anvendelse af matematik på 'virkelige' problemstillinger, samtidig med at de yder modstand, fordi modellering er svært og en uhyre kompleks aktivitet, og fordi IT umiddelbart forekommer at være et forstyrrende og komplicerende element i deres læreprocesser. Og eksamen yder modstand i kraft af at den består af en traditionel skriftlig prøve og en lige så traditionel mundtlig prøve. Ingen af disse prøveformer giver plads til modellering, og de lægger desuden ikke op til brug af IT (ud over grafregner). Der er gode grunde til at tro at netop eksamen har en afgørende betydning for at intentionerne med modellering og IT ikke tilgodeses i undervisningen og elevernes læring.

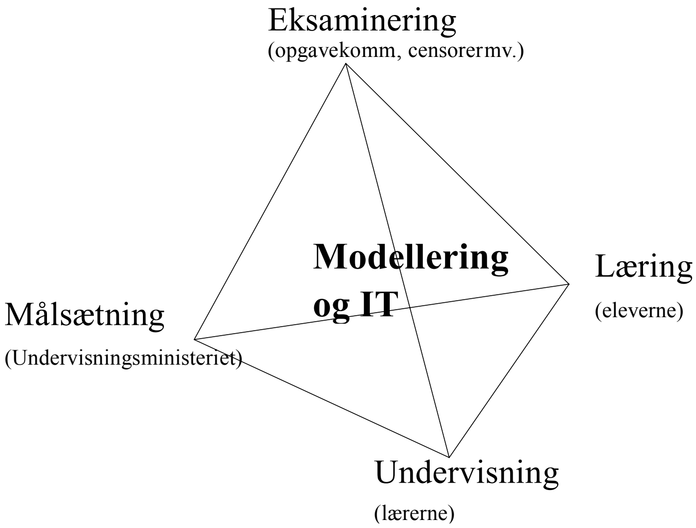
Men der eksisterer andre prøveformer, som har en række potentialer i retning af at understøtte modellering og IT, fx en projektprøve som i øjeblikket afprøves som forsøg på højere teknisk eksamen, én af de fire gymnasiale uddannelse i Danmark. Eleverne har tre uger til at arbejde med et projekt, der bl.a. indeholder modelleringsopgaver. De skal dokumentere deres besvarelse i form af en rapport, hvorefter projektrapporten skal forsvares ved en kort mundtlig prøve (Madsen et al. 2001).

Det didaktiske tetraeder

Jeg ser altså *modellering og IT* som et aspekt, der udspændes af fire forskellige aktører, nemlig *Undervisningsministeriet* der fastlægger målsætningen, *lærerne* der varetager undervisningen, *eleverne* der lærer, og *eksamenssystemet* som afholder prøver. Disse systemaktører anlægger forskellige perspektiver på modellering og IT. Det er min opfattelse at Undervisningsministeriets iagttagelsesposition kan udtrykkes med spørgsmålet: *Hvad er godt for samfundet?* Lærernes position kan udtrykkes med: *Hvad er godt for faget?* Eleverne anlægger et individuelt perspektiv, udtrykt i form af spørgsmålet: *Hvad er godt for mig?* Og eksamenssystemets position er udspændt mellem et krav om validitet og reliabilitet, udtrykt med et spørgsmål: *Hvad kan og bør vi måle?*

Man kan anskueliggøre denne udspænding i form at et *didaktisk tetraeder* (Antonius 2002). Det fastlægger et systemisk perspektiv, og de fire systemaktører bestemmer forskellige versioner af faget. Efter inspiration af Heinrich Bauersfeld (1979) kan man betegne disse versioner med *the matter meant*, *the matter taught*, *the matter learnt* og *the matter assessed*. Det er et dynamisk system, idet perspektiverne er forbundne ved binære relationer, herunder ikke mindst de relationer der er mellem 'grundplanet' i tetraederet og eksamen. Tetraederet er desuden knyttet til begrebet *authentic assessment* (Cumming & Maxwell 1999), som netop er kendetegnet ved at evaluering og eksamen ikke blot ses som et neutralt instrument til måling og kontrol af elevernes læring, men som dynamisk indlejret i hele den pædagogiske praksis og ofte omtalt som *the tail that wags the dog*. Som forholdene er i øjeblikket er systemet ude af balance, fordi undervisningen, elevernes læring og eksamensprøverne ikke afspejler målsætningen med modellering og IT. I denne artikel giver jeg nogle bud på, hvordan lærere og elever – og dermed tetraederet – vil reagere ved en opprioritering af modelleringsaktiviteter, for eksempel ved at indføre en projektprøve til erstatning af eller til supplement af den traditionelle skriftlige prøve.

Figur 1: Det didaktiske tetraeder



Læreropfattelser

I det følgende vil jeg referere fra en undersøgelse om lærernes opfattelser af og holdninger til modellering, IT og eksamen.

Lærerne synes generelt at der mange gode argumenter for at inddrage modellering i undervisningen. De fremhæver især to argumenter. Dels et *pragmatisk argument*, dvs. at matematik kan ved hjælp af modellering bruges til at løse realistiske og praktiske problemstillinger fra virkeligheden, og dels et *psykologisk argument*, dvs. at realistiske og praktiske problemstillinger fra virkeligheden kan ved hjælp af modellering bruges til at lære matematik. De to argumenter dækker over to forskellige opfattelser af matematikfagets rolle som bidragende til den *materiale* henholdsvis den *formale* dannelse (Blomhøj 2001).
Som forklaringer på at lærerne ikke inddrager andre former for modellering end standardanvendelser, peger de især på tre forhold, nemlig: 1) *Der er ikke tid til det* (66% af lærerne), underforstået: hvis man skal tilgodese pensumlisten er der ikke tid til tidskrævende modelleringsforløb, 2) *Det er for svært for eleverne* (50%), og 3) *Det er der ikke egnet undervisningsmateriale til* (30%). Derimod mener kun 4% at de ikke er kvalificerede til at undervise i modellering. Læreren placerer altså årsagerne til manglende modellering i ”omverdenen” og ikke hos dem selv. 74% af lærerne giver samtidig udtryk for at de er indforstået med at der reduceres i pensumlisten for at give mere plads til modellering. Det kan tolkes som et udtryk for at læreren er positive over for en reel inddragelse af modellering i undervisningen.
Lærerne synes også at der er gode argumenter for at anvende IT. De fremhæver især to argumenter. Dels at IT kan bruges som et redskab til at løse praktiske problemstillinger (*technology for doing*), dels at IT kan bruges til at lære matematik (*technology for learning*). De to argumenter er koblede til det pragmatiske henholdsvis det psykologiske argument for modellering.

På spørgsmålet om hvilke former for IT de bruger i undervisningen nævnes først og fremmest grafregneren (84% af lærerne) og regneark (74%). CAS-værktøjer bruges kun af 40% af lærerne. Det skal tilføjes at grafregneren bruges dagligt, mens de andre værktøjer kun bruges lejlighedsvist. Det kan forekomme overraskende at så få lærere bruger CAS, idet CAS (herunder pc-produkter) faktisk er et tilladt hjælpemiddel ved den skriftlige prøve, og når denne prøve indeholder en række standardopgaver som uden videre ville kunne løses ved hjælp af CAS. Forklaringen er formentlig dels lærernes fagopfattelse (CAS-baseret matematik er ikke 'rigtig' matematik), dels at mange lærere stadigvæk er usikre på hvordan de skal anvende CAS i undervisningen. De er specielt usikre på hvilke krav der bør stilles til elevernes dokumentation af CAS-baserede opgaveløsninger. Den almindelige opfattelse er at eleverne gerne må bruge CAS, men at de ikke må dokumentere deres resultater med henvisning til CAS. Det er en kendsgerning at 2 år efter at alle IT-hjælpemidler er blevet tilladt ved den skriftlige prøve, er der stort set ingen elever der benytter disse værktøjer.

Dermed er spørgsmålet kommet til eksamen og hvordan modellering og IT bør indgå i eksamen. Foretrækker lærerne at eksamen skal forblive som den er, bestående af en traditionel skriftlig og mundtlig prøve uden ret megen modellering eller IT, eller foretrækker lærerne en anden form? 56% mener at der bør indgå mere modellering i de eksisterende prøver. Med hensyn til brug af IT mener 40% af lærerne at eleverne bør kunne dokumentere deres opgavebesvarelser ved en skriftlig prøve ved henvisning til et CAS-output. Kun 34% af lærerne foretrækker en anden prøveform, og den form de nævner hyppigst kan karakteriseres som en projektprøve svarende til den der afprøves i øjeblikket på højere teknisk eksamen.

Jeg tolker disse resultater på den måde at lærerne er positive over for en opprioritering af modellering i undervisningen, men at de er reserverede når det gælder øget brug af IT i form af CAS, og at de (endnu) ikke er parat til at give afkald på den nuværende skriftlige prøve, fx til fordel for en projektprøve. Det er for mig klart at disse holdninger dækker over et skisma, og at det ikke uden videre er muligt at forene et ønske om at tilgodese modellering og IT samtidig med en fastholdelse af den nuværende eksamen.

Elevopfattelser

I dette afsnit vil jeg anskue spørgsmålene om modellering, IT og eksamen på baggrund af en elevundersøgelse, herunder en række klasserumsobservationer.

Det er tydeligt at eleverne har en opfattelse af undervisningen, som er karakteristisk for det man kunne kalde den 'traditionelle' didaktiske kontrakt (Brousseau 1997). Fra et spørgsmål som indeholdt en række forskellige udsagn om matematikundervisningen, kan bl.a. nævnes følgende: 81,5% af eleverne mener at matematikopgaver normalt er *øvelser* i at blive fortrolig med matematiske begreber og metoder, 93,3% mener at opgaver besvares ved hjælp af *tal, formler og figurer*, og 86,9% mener at spørgsmål i matematikopgaver normalt kun har *ét rigtigt svar*. Der er tilsvarende lille tilslutning til udsagn som peger i retning af en modelleringskontrakt: Kun 17,8% mener at opgaver normalt går ud på at løse praktiske problemstillinger, kun 6,1% mener at opgaver normalt besvares ved hjælp af en rapport, og kun 12,1% mener at spørgsmål normalt har flere forskellige rigtige svar.

Det er alt sammen udtryk for elevernes opfattelser af hvordan undervisningen *er* (deskriptive udsagn). Man kan ikke på det grundlag konkludere, at eleverne også synes at undervisning *bør* være sådan (normative udsagn). Forskellige spørgsmål til eleverne indikerer da også at de fortrækker en undervisning, der i højere grad end i øjeblikket indeholder modelleringsaktiviteter. For eksempel finder 41,1% af eleverne anvendt matematik 'overvejende interessant', men kun 25,3% finder ren matematik 'overvejende interessant'. Eleverne foretrækker at 18% af undervisningstiden bruges på projektarbejde (det er et gennemsnitstal for alle elever), hvilket er noget mere end der bruges i dag. Spørger man direkte til deres opfattelser af modellering får man dog ikke megen information; begrebet er ganske enkelt ikke kendt af eleverne i almindelighed.

Elevernes holdning til anvendelse af IT er generelt meget positiv. 63,6% mener at matematik bliver mere interessant, når man må bruge IT, og 74,7% mener at matematik bliver lettere med IT. Elevernes baggrundserfaringer for at svare på disse spørgsmål er først og fremmest brug af grafregner.

Når det gælder elevernes opfattelser af eksamen er det interessant, at de er mere forbeholdne over for fuld udnyttelse af IT. De synes stort set alle at det bør være tilladt at bruge en grafregner, men kun 27,9% mener at det bør være tilladt at bruge mere avanceret programmel som for eksempel CAS. Det kan tolkes som et udtryk for at eleverne tilslutter sig den praksis der er i øjeblikket, som netop er kendetegnet ved at eleverne bruger grafregner, men ikke CAS (selv om det er tilladt). Det kan også tolkes som et udtryk for at eleverne ikke ved hvad de skulle bruge CAS til, af den simple grund at de ikke kender CAS-værktøjer fra undervisningen. Endelig kan tallet være udtryk for at de har overtaget lærernes opfattelse af at CAS-baseret matematik ikke er 'rigtig' matematik (jf. begrebet *algebraic guilt*, Dahland & Lingefjärd 1996).
Eleverne giver udtryk for en tilsvarende opbakning til den eksisterende eksamen og specielt den traditionelle skriftlige prøve. 81,5% af eleverne mener at der fortsat bør være en sådan prøve, mens 55,9% fortsat ønsker en mundtlig prøve. Det er interessant på baggrund af at eleverne normalt klarer sig bedre ved den mundtlige prøve end ved den skriftlige. Der er derimod kun begrænset tilslutning til en projektprøve på 34,7%. Jeg tror at en del af forklaringen på disse resultater er at den skriftlige prøve er en så institutionaliseret del af faget, at også eleverne har svært ved at se hvordan man skulle kunne undvære den, og i forlængelse heraf har de svært ved at se, hvordan man kan anvende projektprøveformen i netop faget matematik.

Min sammenfattende vurdering er, at eleverne er potentielt interesserede i modellering, men at de har meget få erfaringer med sådanne aktiviteter. Det er desuden min vurdering at eleverne er generelt positive over for brug af IT, men at deres erfaringer også på dette område er begrænsede. Når det gælder eksamen er eleverne meget loyale over for de eksisterende prøveformer – især den traditionelle skriftlige prøve – og der er kun lille tilslutning til en projektprøve, muligvis også på grund af manglende erfaringer.

For at give eleverne et bedre erfaringsgrundlag for at kunne vurdere disse spørgsmål har jeg i samarbejde med en lærer udarbejdet tre korte modelleringsopgaver, som eleverne i en klasse fik 3 uger til at arbejde med – 1 uge til hver opgave. De tre opgaver var formuleret som 'åbne' opgaver:

1. Udviklingen i udslippet af menneskeskabt kuldioxid
Kuldioxid fremkommer bl.a. ved forbrænding af organisk materiale, fx olie. Det er almindeligt kendt, at mængden af menneskeskabt kuldioxid er voksende, og det kan være en af forklaringerne på at temperaturen i Verden er stigende. En stadig stigning i temperaturen vil have store konsekvenser for hele verdens økosystem. Det er derfor vigtigt at kunne vurdere udviklingen i udslippet af menneskeskabt kuldioxid.

Hvordan vil den samlede mængde af menneskeskabt kuldioxid udvikle sig de kommende år?

2. Børneopsparing
Forældrene og/eller bedsteforældrene kan oprette en børneopsparingskonto til deres barn eller barnebarn. NN [klassens matematiklærer, SA] er for nylig blevet far til en dreng og har oprettet en sådan konto.

Hvor stort et beløb vil drengen kunne disponere over, når han bliver voksen?

3. Mordet på Baskervilles herregård
En blæsende, regnfuld novembernat blev den geniale detektiv McPherson tilkaldt til et mord på Baskervilles herregård. McPherson ankom til gerningsstedet (det var i biblioteket) kl. 4.00. Han fremdrog straks sit termometer og målte ligets temperatur til 27 grader C. Temperaturen i værelset var 17 grader C.

Derefter gav han sig – som sædvane i disse sager – til at søge efter fodspor i vindueskarmen og blomsterbedet. Denne undersøgelse varede 3 timer, og kl. 7.00 målte han igen ligets temperatur, der i mellemtiden var faldet til 23 grader C. Rumtemperaturen var uændret.

Op af lommen tog den geniale detektiv McPherson nu sin blok og foretog visse beregninger, og lidt efter kunne han fortælle de undrende tilskuere, at den hovedmistænkte, butleren, ikke havde begået mordet. Han havde nemlig fået fri kl. 22.00 og var derefter taget hjem for at passe sin gamle mor.

Hvordan kunne McPherson komme til den konklusion?

Arbejdet med opgaverne omfattede både problemformulering (her i betydningen formulering af det konkrete spørgsmål eleverne ønsker at besvare), dataindsamling (fx via internettet), systematisering, forenkling, matematisering, modelbehandling, fortolkning, validering samt rapportskrivning – idet der naturligvis må forventes forskelle med hensyn til hvor eksplicit, reflekteret og grundigt eleverne arbejder med de forskellige aspekter. *Børnesparingsopgaven* omfatter tillige undersøgelser af reglerne for en sådan konto (som sammen med bankrenter mv. kan findes på internettet), og *Mordet på Baskervilles herregård* består bl.a. i et 'fysik-forsøg' med afkøling af varmt vand med henblik på at eleverne selv skulle opdage *Newton's Law of Cooling*.

De to første opgaver repræsenterer realistiske problemstillinger (i den form jeg kalder *sagprosa*-genren), mens den sidste er en opdigtet problemstilling (en repræsentant for *fiktions*-genren).

Efter modelleringsforløbet udfyldte eleverne et spørgeskema, og de blev interviewet. Et af spørgsmålene gik på hvad eleverne havde syntes om at arbejde med modelleringsopgaverne. De fleste elever giver udtryk for ganske positive holdninger til opgaverne. De nævner bl.a. at den slags opgaver giver mening, de kan se hvad matematikken skal bruges til, opgaverne er mere udfordrende, det er ligesom at arbejde i erhvervslivet, de kan selv vælge hvordan de vil besvare opgaverne, de kan bruge mere IT (bl.a. internet og regneark) osv. Men der er også en del der tager afstand fra den slags opgaver. De bryder sig ikke om 'åbne' opgaver, de synes ikke om selv at skulle indsamle data via internettet … *for man får jo forskellige resultater på de forskellige hjemmesider*, det er svært (problemerne er fuzzy-formulerede fordi der ikke på forhånd er formuleret en konkret opgave), der er megen spildtid og det bliver kedeligt i længden, de synes ikke om at skrive matematikrapporter osv.

I spørgeskemaet bad jeg dem bl.a. om for hver af de tre modelleringsopgaver at prioritere mellem tre opgaveversioner med det samme 'rene' matematikindhold (her eksponentiel vækst): en kontekstfri 'ren' matematikopgave, en traditionel og struktureret anvendelsesopgave og den åbne modelleringsopgave. De to første varianter er almindelige opgaveformer i undervisningen og udtryk for det man kunne kalde den traditionelle kontrakt, mens den sidste kan ses som repræsentant for modelleringskontrakten. Der er naturligvis forskelle mellem elevernes prioriteringer, men hvis man vurderer opgaverne ud fra elevernes gennemsnitlige prioriteringer er resultatet følgende:

Tabel 2: Prioriteringer mellem forskellige opgaveversioner

	Menneskeskabt kuldioxid	**Børneopsparing**	**Mordet på Baskervilles herregård**
Kontekstfri opgave	Den dårligste	Den næstbedste	Den dårligste
Trad. anvendesesopg.	Den bedste	Den bedste	Den næstbedste
Modelleringsopgave	Den næstbedste	Den dårligste	Den bedste

Det viser sig altså at modelleringsversionen bliver prioriteret som henholdsvis den næstbedste, den dårligste og den bedste. Den traditionelle anvendelsesversion klarer sig samlet set bedst med to førstepladser og en andenplads.

Det er ikke let at give en årsagsforklaring på disse resultater. Ser man på hver enkelt af de tre modelleringsopgaver, så bliver nogle elever motiveret af opgaven, mens andre tværtimod demotiveres. Der er ikke umiddelbart nogen forbindelse mellem en opgaves objektive relevans og dens subjektive relevans. Ser man på tværs af de tre modelleringsopgaver forekommer det svært at forklare hvorfor den ene bliver vurderet som den bedste (*Mordet på Baskervilles herregård*), mens en anden bliver vurderet som den dårligste (*Børneopsparing*). *Børnesparingsopgaven* er for en umiddelbar betragtning den der er tættest på elevernes virkelighed, dels fordi mange elever har en sådan konto, og dels fordi den var knyttet til en hel konkret begivenhed, nemlig lærerens nyfødte barn. Omvendt er *Mordet på Baskervilles herregård* udtryk for en opgave, der ikke har umiddelbare relationer til virkeligheden, men dens kvaliteter ligger måske i at der er et konkret spørgsmål (opgaven er er ikke lige så fuzzy-formuleret som de andre), den indeholder mange billeder som gør opgaven narrativ tilgængelig, den er udtryk for det man kunne kalde *edutainment*, og den kan ses som et spil i en fiktiv virkelighed med sine egne spilleregler som fritager eleverne fra at forholde sig til den komplicerede 'virkelige' virkelighed (det kunne have været en del af handlingen i en kriminalfilm).

Jeg mener ikke at man kan tolke undersøgelsens resultater sådan at fiktions-opgaver generelt er mere relevante eller motiverende end sagprosa-opgaver. Men jeg mener heller ikke at man generelt skal afskrive at bruge fiktions-opgaver. Fiktionsopgaver kan være nyttige i en række sammenhænge hvor hensigten er at bruge modellering til at lære matematiske begreber og metoder (jf. det psykologiske argument) (de Lange 1995; Toom 1999). Det er dog vigtigt at eleverne ikke opfatter sådanne opgaver som udtryk for realistiske anvendelser (jf. det pragmatiske argument). Fiktions-opgaver giver ikke noget billede at den rolle som matematisk modellering spiller i samfundet. Netop denne rolle er vigtig i et højteknologisk samfund, og den udgør ifølge nogle hele grundlaget for en almen matematikundervisning (Blomhøj 2001).

Afslutning

Lærerne er ikke en homogen gruppe når det gælder holdninger til modellering, IT og eksamen. Der er størst homogenitetsgrad hvad angår tilslutningen til en oppriortering af modellering. Men når det gælder anvendelsen af IT og eksamen er opfattelserne mere delte, dog med en overvægt at lærere der går imod fuld udnyttelse af IT ved eksamen, og med en tilsvarende overvægt af lærere der ønsker at bevare den traditionelle eksamen. Selv om lærerne kommunikerer ud fra den fælles synsvinkel *Hvad er godt for faget?*, så giver denne fælles position plads til holdninger, som ikke uden videre lader sig forene.

Elevernes opfattelser før modelleringsforløbet er på mange måder sammenfaldende med lærernes, specielt hvad angår reservationerne over for en ændring af eksamenspraksis. Resultaterne efter modelleringsforløbet kan tolkes som et udtryk for elevernes individuelle præferencer og dermed også for elevernes individuelle orienteringer. Selv om elevernes kommunikation i undervisnings- og læreprocesserne kan rummes inden for spørgsmålet *Hvad er godt for mig?*, er det er klart at denne fælles iagttagelsesposition giver plads for forskellige og diametralt modsatte konkretiseringer. Det som den ene foretrækker, det tager den anden afstand fra – og begge med den samme begrundelse: *Det giver (ikke) mening for mig*.

Modellering er derfor ikke et universalmiddel til at skabe motiverede og aktive elever. Det skal bruges med forsigtighed og ud fra en nøje vurdering af hvorvidt den konkrete opgave må formodes at kunne motivere eleverne. Det må overlades til læreren og hans pædagogisk-faglige kompetence at foretage denne vurdering i det konkrete tilfælde, og der bør være plads til såvel sagprosa-genren som fiktions-genren.

Referencer

Antonius, S. (2002). Matematikkens grundlag. I: Matilde – Nyhedsbrev for Dansk Matematisk Forening, s. 17-18

Ballacheff, N. & Kaput, J.J. (1996). Computer-Based Learning Environments in Mathematics. I: Bishop, A.J.; Clements, K.; Keitel, C.; Kilpatrick, J. & Laborde, C. (eds.) (1996), International Handbook of Mathematics Education, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, s. 469-501

Bauersfeld, H. (1979). Research related to the mathematical learning process. I: International Commission on Mathematical Instruction (eds.), New Trends in Mathematics Teaching, Vol. IV, Unesco, s. 199-213

Blomhøj, M. (2001). Hvorfor matematikundervisning? – matematik og almendannelse i et højteknologisk samfund. I: Niss, M. (ed.), Matematikken og Verden, København: Fremad, s. 218-246

Brousseau, G. (1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Cumming, J.J. & Maxwell, G.S. (1999). Contextualising Authentic Assessment. Assessment in Education 6(2), s. 177-194

Dahland, G. & Lingefjärd, T. (1996). Graphing calculators and students' interpretations of results: A study in four upper secondary classes in Sweden. Nordisk Matematikkdidaktikk 4(2/3), s. 31-50

De Lange, J. (1995). Assessment: No Change without Problems. I: Romberg, T.A. (ed.), Reform in School Mathematics and Authentic Assessment, Albany: SUNY Press, s. 87-172

Madsen, A.-G.; Jensen, H.N.; Christiansen, J.B. & Karmark, O. (2001). Evaluering af forsøg med elektroniske eksamensopgaver på hhx og htx. Danmarks Erhvervspædagogiske Læreruddannelse

Toom, A. (1999). Communications, Word Problems: Applications or Mental Manipulatives. For the Learning of Mathematics 19(1), s. 36-38

Dinna Balling

Dinna Balling, f 1964 (e-mail: balling.schmidt@mail1.stofanet.dk) er cand.scient. i matematik og fysik fra Aarhus Universitet 1989. Hun har undervist 11 år i matematik og fysik i det almene gymnasium i Danmark. I øjeblikket er hun Ph.D. - stipendiat på 3. år ved Dansk Institut for Gymnasiepædagogik, Syddansk Universitet, Danmark.

Introduktion af grafregneren[1] i matematikundervisningen i et samarbejde mellem forsker og lærer

Dinna Balling

Resumé

I artiklen omtales et forskningsprojekt, som er udført i samarbejde med 4 lærere. Formålet har været at undersøge muligheder og problemer ved at introducere grafregneren som et undervisningsværktøj i matematikundervisningen i den danske gymnasieskole. Forskningsmetoden omtales, der gives et undervisningsforløb til introduktion af begrebet differentialkvotient med brug af grafregner, og der diskuteres muligheder og problemer under overskrifterne *Matematikken i forløbet, matematik og teknik, grafregneren som kommunikationsmiddel* og *den skriftlige eksamens styrende rolle.* Hovedkonklusionerne vil være, at det kan lade sig gøre at indføre grafregneren som undervisningsværktøj i undervisningen, hvis lærerne støttes f.eks. som i dette projekt, og at nogle af de største forhindringer for integration af grafregneren i undervisningen er dels den nuværende skriftlige eksamen, dels at lærer og elever er uvante med at anvende andre arbejdsformer i matematikundervisningen.

Forskningsbaggrund.

Der er mange, der har teoretiseret og eksperimenteret med de nye muligheder for at øge elevernes læring ved at introducere teknologi i matematikundervisningen. Det er rimeligt at sige, at de fleste i dag mener, at introduktion af teknologi potentielt kan øge elevernes læring. Forskningen viser imidlertid også, at dette ikke vil ske automatisk blot teknologien tillades, og at en nødvendig om end næppe tilstrækkelig betingelse for, at introduktionen kan blive en succes er, at læreren er engageret i projektet og tilrettelægger undervisningsforløb, der udnytter de nye muligheder i teknologien. Læreren skal i den forbindelse påtage sig nye roller i klasserummet. Det kræver stor risikovillighed af læreren, og der er mange forhindringer for at dette kan lade sig gøre. Derfor behøver læreren støtte og opmuntring for at udvikle sig. Læreren spiller en helt afgørende rolle i introduktionen af teknologi i matematikundervisningen, og det danner baggrund for i dette projekt at vælge at samarbejde med lærere om at belyse grafregnerens muligheder i den danske gymnasieskole

1 Grafregner vil i dette papir dække over en lommeregner med et grafisk display (f.eks. TI83), der kan tegne grafer og lave numeriske beregninger, men ikke kan lave symbolmanipulation,

Resultater fra spørgeskemaundersøgelsen

I foråret 2001 afvikledes i forbindelse med herværende forskningsprojekt en spørgeskemaundersøgelse blandt matematiklærere som en indledning til det videre lærersamarbejde. Der blev sendt et spørgeskema ud til 1.x´s matematiklærer på alle gymnasieskoler i Danmark. Dette blev gjort for at få et overblik over, hvad lærerne gjorde med grafregneren og hvad de mente om den. Resultaterne fra denne undersøgelse vil blive nøjere diskuteret i en senere artikel, men nogle resultater fra undersøgelsen skal kort nævnes her.

1. Lærerne og deres elever brugte efter lærernes eget udsagn grafregneren meget i undervisningen, men hovedsageligt til opgaveregning og til kontrol af facitter som f.eks. ved udregning af bestemte integralers eksakte værdi, hvor grafregneren kan beregne et numerisk facit, der kan bruges til kontrol af den eksakte værdi. Grafregneren blev ikke brugt som et undervisningsværktøj, men som et beregningsværktøj.
2. Lærernes brug af grafregneren var meget styret af de krav og opgavetyper, der stilles til den afsluttende skriftlige eksamen i matematik. Til denne eksamen kræves grafregner, men de fleste af opgaverne kan udmærket regnes uden. Der stilles uklare og skrappe krav til opgavebesvarelser baseret på grafregner-udregning om f.eks. valg af tegnevindue, initialt gæt på nulpunkt etc., og der stilles en del opgaver, hvor der ønskes en eksakt værdi. Der er også en time ud af 4, hvor eleverne er helt uden teknologiske hjælpemidler under eksamen.
3. Lærernes valg af arbejdsformer er i følge undersøgelsen meget traditionelt med tavlegennemgang af teori og opgaver fulgt af individuel eller parvis opgaveregning. Større gruppearbejder, projektarbejder og ekskursioner var meget sjældne.
4.

Disse resultater gjorde det interessant i det videre samarbejde at undersøge, om grafregneren havde flere potentialer, om den kunne bruges som et undervisningsværktøj og til at forny arbejdsformerne uden at eleverne af den grund skulle stilles ringere til den afsluttende eksamen.

Kontekst for studiet.

De lærere, jeg har samarbejdet med er alle ansat i det danske almene gymnasium. Nogle af skolerne havde derudover også hf, men samarbejdet involverede udelukkende klasser på den matematiske linje i det almene gymnasium[2]. I ungdomsuddannelsessystemet i Danmark findes der 3 niveauer for matematik: C-niveau, som opnås efter 1 års undervisning i 225 minutter om ugen, B-niveau, som opnås efter 2 års undervisning og A-niveau, som opnås efter 3 års undervisning.
Alle niveauer afsluttes med en centralt stillet skriftlig prøve.
I 1997 blev bekendtgørelserne for faget ændret, så det blev obligatorisk for eleverne at medbringe en grafregner til deres afsluttende skriftlige prøve på A- og B-niveau. Det betyder, at det er muligt for lærerne på disse niveauer at basere deres undervisning på, at eleverne besidder en grafregner.
Alle matematiklærere i det almene gymnasium er universitetsuddannede i matematik. De føler sig som matematikere og har et stort fagligt overskud. Aldersprofilen af de danske

2 Det almene gymnasium er en ungdomsuddannelse, som er et tilbud til danske børn efter 9 eller 10 års skolegang i den obligatoriske folkeskole. Tilbuddet om det almene gymnasium konkurrerer med tilsvarende tilbud om ungdomsuddannelse fra f.eks. handelsskoler, tekniske skoler og hf. Efter endt ungdomsuddannelse kan de unge påbegynde en videregående uddannelse. Det almene gymnasium er 3-årigt, og der er to linjer, matematisk og sproglig. Over 50% af en ungdomsårgang tager en ungdomsuddannelse.

gymnasielærere i matematik er sådan, at det kun vil være et fåtal, der har prøvet andet end helt traditionel, teknologifri matematikundervisning under deres egen uddannelse. Efteruddannelsesmulighederne i den danske gymnasieskole begrænser sig til et 4-dages kursus i gennemsnit hver 2.-10. år alt efter skole, og der vil være matematiklærere, der ikke har deltaget i nogen form for efteruddannelse de sidste 10 år.
De sidste overenskomstforhandlinger for lærerne er ikke gået til deres tilfredshed, og det har ført til en generel afmatning, hvor lærerne "kun gør det, de får betalt for" og hvor de yngre lærere føler sig lønmæssigt bagud i forhold til de ældre. Lærerne føler også, at de skal varetage mere og mere administration og at der med den stigende gymnasiefrekvens kommer flere og flere elever ind med lærings- og adfærdsvanskeligheder, og at de derfor kommer til at bruge mere og mere tid på arbejde, der ikke har noget med at undervise i deres fag at gøre. Disse faktorer spiller ind, når der skal samarbejdes med lærerne.

Formål med samarbejdet

Som det fremgik af spørgeskemaundersøgelsen bruges grafregneren i undervisningen mest til svære beregninger og til kontrol af resultater. Som det fremgår af afsnit 1 har grafregneren tilsyneladende flere potentialer som et værktøj til at give eleverne mulighed for at eksperimentere med matematikken og selv opdage lovmæssigheder. Det er derfor interessant at undersøge, om og i givet fald hvordan lærere kan udnytte disse muligheder i deres undervisning. Dette var målet for lærersamarbejdet. Forskningsspørgsmålet er:
Hvilke potentialer indløses og hvilke problemer opstår, hvis lærere støttes til at introducere grafregneren som et undervisningsværktøj?

Metodik:

Det faktiske forløb.

Det første problem i dette projekt var at finde frem til nogle lærere, der med rimelighed kunne siges at være "almindelige". Det ville have været i modstrid med projektets ide at samarbejde med nogle af de lærere, der allerede arbejdede meget innovativt med teknologi i matematikundervisningen. At grafregneren er blevet indført som obligatorisk skulle gøre det muligt at finde frem til lærere, der havde erfaringer med teknologien uden at være foregangsmænd i forbindelse med dens anvendelse i undervisningen.
I forbindelse med afviklingen af den spørgeskemaundersøgelse, der er omtalt i første afsnit blev der udsendt et skema til samtlige deltagere i spørgeskemaundersøgelsen, hvor læreren blev bedt om at tage stilling til, hvorvidt de ønskede at hjælpe med det videre arbejde. 25 lærere meldte sig til dette, hvilket i sig selv er et positivt resultat. Af de 25 blev de 4 udvalgt til samarbejdet. Forløbet startede med et interview, hvor jeg fik uddybet emner, der var kommet frem i spørgeskemaet og i øvrigt fik et førstehåndsindtryk af de 4 læreres matematiksyn, læringssyn, teknologisyn etc. I umiddelbar forlængelse af første interview holdt læreren og jeg et møde, hvor der blev redegjort for, hvad mine intentioner med det videre samarbejde var. Det blev gjort klart, at det ikke var min plan at komme med et færdigt undervisningsforløb men at støtte lærerens egen udvikling af et forløb til introduktion af begrebet differentialkvotient. Jeg bestræbte sig på at stille meget få ufravigelige krav.

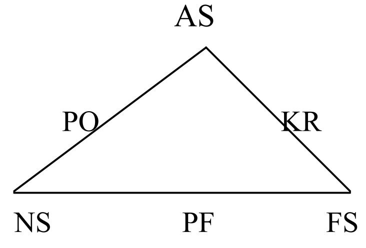
Disse krav var:

- Læreren skulle udvikle eget undervisningsmateriale.
- Forløbet skulle starte med en diskussion, hvor læreren skulle analysere begrebet differentialkvotient og opstille mål for forløbet-
- Grafregneren skulle inddrages i forløbet.
- Forløbet skulle være en introduktion til begrebet differentialkvotient.

Efter den indledende diskussion af begrebet differentialkvotient blev der læst bekendtgørelser, da det ikke har været en del af dette projekt at lave egentlige pensum- eller eksamensforsøg, men netop at undersøge, hvad der kunne gøres indenfor eksisterende bekendtgørelser. Det blev f.eks. overvejet, hvorvidt eleverne via dette projekt ville få de færdigheder, der efterspørges til eksamen. Undervejs i diskussionerne fremlagde jeg nogle ideer fra et idekatalog, som jeg havde udarbejdet inden mødet.
Efter dette indledende møde gik lærerne i tænkeboks og udarbejdede selvstændigt forslag til undervisningsmateriale. Dette materiale fremsendte de i flere omgange til forskeren til kommentering. Under denne kommentering trak jeg både på mine egne erfaringer som lærer og på mange didaktiske teorier, f.eks. Sfard(1991). Lærerne brugte mange af mine kommentarer til materialet, men ikke dem alle sammen, og det var en del af aftalen, at kommenteringen var et tilbud og helt uforpligtende for læreren, mens jeg forventedes at svare på alle mails, breve og telefonopkald. Dette tilsyneladende skæve forhold oplevedes ikke som noget problem fra min side, da forskningsprojektet er min hovedbeskæftigelse, mens det i perioder nærmest var i vejen for lærernes egentlige arbejde.
Efterfølgende videooptagede jeg de første 3 gange, lærerne underviste efter det udarbejdede materiale.
Et par måneder efter forløbet er lærerne geninterviewet med udgangspunkt i samarbejdet og deres udbytte af det.

Analyse af data

I Skovsmose(2001) opstilles en model for kritisk forskning, som i høj grad kan anvendes i forbindelse med herværende forskningsprojekt. I Skovsmoses terminologi analyseres den kritiske forskning med reference til relationerne mellem en **n**uværende **s**ituation i klasserummet (NS), en **f**orestillet **s**ituation (FS), som er foreslået som en idealiseret undervisningsmulighed og endelig en **a**rrangeret **s**ituation (AS), som er en eksperimenterende praksis. **P**ædagogisk **f**antasi(PF) er en relation mellem NS og FS, **p**raktisk **o**rganisering(PO) er en relation mellem NS og AS og **k**ritisk **r**æsonnement(KR) er retfærdiggørelsen af indsigterne i FS, baseret på studiet af AS. Kvaliteten af forskningen diskuteres i disse tre termer.
Skovsmoses model for kritisk forskning ser grafisk således ud:



Skellet mellem PF og PO er analytisk. I praksis udføres de i en delt samarbejds- og forhandlingsproces mellem lærer og forsker, og kvaliteten af begge processer kan diskuteres i samarbejdstermer.

I forhold til det her beskrevne forskningsprojekt er den nuværende situation beskrevet via forskerens egne erfaringer fra praksis, via spørgeskemaundersøgelsen og via de første lærerinterview. Den forestillede situation fremkom gennem diskussioner mellem lærer og forsker, hvor forskerens input var inspireret dels af egne erfaringer, dels af didaktiske teorier og tidligere undersøgelser, mens lærerens baseredes på egne erfaringer. Den praktiske situation begrænsedes i forhold til den forestillede situation af især kravene til skriftlig eksamen, men derudover af forhold på den enkelte skole som f.eks. lektionslængde, lektionens placering på dagen etc. De to processer pædagogisk fantasi og praktisk organisering kan bruges til at beskrive meget af den kommunikation og forhandling, der fandt sted mellem forsker og lærer i efteråret 2001, men som Skovsmose også gør det klart er skellet mellem de to processer analytisk – i praksis forhandles der om begge dele i mange af de e-mails, der var det vigtigste kommunikationsmedie det efterår.
Kritisk ræsonnement er en igangværende proces.

Validitet

Samarbejdet mellem forsker og lærer var på mange måder baseret på forskerens egen tid som lærer i feltet. I kommunikationen med lærerne talte vi sammen som kolleger og ligeværdige partnere, og lærerne betegner selv samarbejdet som et lærersamarbejde.

Alle lærerne vurderer samarbejdet positivt, selvom det er forskelligt, hvad de har fået ud af det. Forskerens indflydelse på processen er i følge både lærere og forsker størst i to tilfælde:

1) Det er forskeren, der taget initiativet til samarbejdet, og uden denne første udfordring til lærerne i spørgeskemaet ville der ikke være sket noget tilsvarende i i hvert fald tre af klasserne.
2) Forskerens vejledning af lærerne under udarbejdelsen af materialet vurderes af både lærere og forsker som en betydelig faktor i processen. Ligeledes har diskussionerne med lærerne umiddelbart efter videooptagelser i klassen givet øget lærernes refleksion over den pågældende time.

Derimod mener forskeren ikke, at videooptagelser eller interview har påvirket processen mere end det altid vil gøre som et instrument til øget bevidsthed og refleksion i lærerens egen udvikling.

Generaliserbarhed

Det er oplagt, at der her er tale om kvalitativ forskning, og at resultaterne derfor ikke umiddelbart har almen gyldighed. De 4 lærere, om end forsøgt udvalgt efter "objektive" kriterier er via det, at de meldte sig, at de blev udvalgt og gennem samarbejdet ikke længere repræsentative for den danske gymnasielærerstand. Det er min påstand at måden at samarbejde på alligevel kan generaliseres. Samarbejdet er forløbet forskelligt fra lærer til lærer, men alle lærere erklærer i sidste interview, at de har haft udbytte af samarbejdet og 3 af dem erklærer selv, at de ikke ville have gjort det uden vores samarbejde. I udgangspunktet var lærerne "almindelige", og de har alle flyttet sig. At det kan lade sig gøre at hjælpe lærere i deres udviklingsproces som lærere via et sådant samarbejde er et generaliserbart resultat.

De 4 undervisningsmaterialer er meget forskellige, men der er alligevel ideer, der går igen. De gennemgående ideer kommer nok i høj grad fra forskeren, men de fremstår i 4 forskellige fortolkninger. Visse af disse ideer og fortolkninger kan komme andre lærere til gode som inspiration til deres egen planlægning, og selve ideen om i sin planlægning at tage udgangspunkt i sin egen begrebsforståelse sammenholdt med bekendtgørelsestekst i stedet for at tage udgangspunkt i, hvad der står i den valgte lærebog er også generaliserbar.

I næste afsnit følger en sammenskrivning af ideerne i undervisningsmaterialet til fri afbenyttelse af interesserede lærere. I afsnittet med forskningsresultater følger de muligheder og problemer ved at bruge grafregneren på denne måde, som ses i det konkrete samarbejde med de 4 lærere. Igen er problemerne måske specifikke for den arrangerede situation, men via kritisk ræsonnement vil sider af problemerne kunne belyse den forestillede situation.

Undervisningsresultater

I dette afsnit vil nogle af ideerne i undervisningsmaterialet blive gennemgået til inspiration for udvikling af andet undervisningsmateriale. Afsnittet vil lægge vægt på de aspekter af resultaterne, som kan have relevans for lærere.

Ideerne som fremkommer i dette kapitel er ikke i særlig høj grad forskerens, men er dels hentet andre steder fra, dels kommet fra de involverede lærere. Ideerne i det føromtalte idekatalog, som forskeren udarbejdede er f.eks. samlet op i bemærkninger på konferencer og via en efterlysning i de danske matematiklærernes blad "LMFK", hvor lærere skrev ideer til mig, både store og små ideer, på mail, brev eller pr. telefon. Det er umuligt i denne sammenhæng at "ære dem, der æres bør". Som hovedinspirationskilde skal nævnes Bjørn Felsager og Gert Schomacker: Tænk med en graf, Munksgaard 1997, og her i især siderne 102-104 om at vippe med en sekant.

De udviklede materialer er ikke ens. I denne artikel vil jeg medtage eksempler på opgavetyper. Jeg har konstrueret en sammenskrivning af de 4 forskellige forløb, som jeg gerne sender til interesserede elektronisk. Min mailadresse står forrest i artiklen. I det skitserede materiale tages der udgangspunkt i tangent- og sekantbegrebet, mens hastighedsbegrebet ikke omtales. I de 4 forløb var der to, der tog udgangspunkt i hastighedsbegrebet og ledte eleverne ind på tangentbegrebet ved at lade dem beregne gennemsnitshastigheder i stadig mindre intervaller. Dette er en lige så god indgangsvinkel. Det eneste, der må anbefales er at holde antallet af nye begreber nede, og f.eks. vælge mellem at arbejde med sekanter og hastighed.

Forløbet er til introduktion af begrebet differentialkvotient. Eleverne forudsættes at have et rimeligt kendskab til funktioner og analytisk geometri, f.eks. antages det, at de er bekendt med formlen til at finde en hældningskoefficient for en lineær funktion. Der antages derimod ikke noget om kendskab til grænseværdi, differentiabilitet eller lignende. Forløbene er anvendt i begyndelsen af 2.g, men en af lærerne overvejer i sidste interview om ikke forløbet med fordel kunne anvendes tidligere, som en introduktion til differentialregning uden symbolmanipulation, formelle definitioner eller beviser.

Som indledning er det en god ide at stille motiverende opgaver, som f.eks.:

Opgave *Tegn $f(x) = (x^3 - 6x^2)^4$*
Hvilke problemer får I?
Hvad ville være rart at vide om denne funktion?
Hvad skal man vide for at kunne lave et fornuftigt vindue på grafregneren?

Opgave *Vælg en vilkårlig funktion, tegn den på jeres grafregner.*
Vælg en bestemt x-værdi, f.eks. x=2. Zoom ind omkring 2 mange gange. Hvad sker der med grafen? Hvorfor sker det? Kan I finde et andet punkt på grafen, hvor det ikke sker? Kan I finde en anden funktion, hvor det ikke sker?

Opgave *Find ligningen for den linje, I får når I zoomer ind på grafen for funktionen $f(x)=0.25x^2 - 2x$ i punktet med x-værdien x=2. Indskriv jeres forskrift som y_2 på grafregneren. Tegn de to grafer. Hvordan ser det ud? Prøv at zoome ud igen. Hvordan ser det ud nu? Hvad ville I kalde linjen i forhold til funktionen?*

Efter opsamling på disse opgaver og introduktion af begrebet tangent, kan der f.eks. arbejdes med sekantbegrebet:

Opgave *Tegn grafen for $f(x)=0.25x^2 - 2x$ i standardvinduet.*
Find hældningen for den sekant (linje), der går igennem (2,f(2)) og (5,f(5)).
Find hældningen for den sekant, der går igennem (2,f(2)) og (-1,f(-1)).
Kan I finde et udtryk for sekanten gennem (2,f(2)) og $(x_1,f(x_1))$?

Opgave *Sekanter kan tegnes på grafregneren. For at øge tegnehastigheden af graferne skal I vælge $X_{res}=5$ i Windows-menuen.*

Vi vil igen arbejde med funktionen $f(x)=0.25x^2 - 2x$ i punktet (2,f(2)).

a) Læg nogle værdier ind i listen L_1. I skal i hvert fald bruge –1 og 5.
b) Indskriv følgende: (Gåseøjnene skal med!): ”$(Y(L_1)-Y(2))/(L_1-2)$” sto L_2
c) Minder denne formel jer om noget?
d) Se på talværdierne i L_2 og sammenlign med opgave 4. Hvad er det, der beregnes i L_2?
e) Nu kan vi få tegnet sekanterne ved at indskrive følgende formel i Y_2:
f) $Y_2= L_2\ (x-2)+ Y_1\ (2)$. Prøv det. Hvad er det for en formel, der her bliver skrevet lidt sært?
g) Vælg nogle nye x-værdier i L_1 , som ligger tæt på 2. Hvad sker der i L_2? Hvad sker der med sekanterne?
h) Hvad sker der med sekanterne, når x-værdierne i L_1 kommer uendeligt tæt på 2?
i) Hvad bliver tangentens hældning til grafen for f i 2?

Og nu kan eleverne introduceres til notationen f´ og navnet differentialkvotient, og de kan slippes løs på flere opgaver af samme type: Andre x_0´er, andre funktioner.

Derefter introduceres, hvordan grafregneren kan tegne tangenter, og eleverne kan kontrollere deres tidligere resultater. De kan også regne mere traditionelle opgaver med at finde tangenter.

Når eleverne er trygge ved dette, kan man introducere den afledede funktion, f.eks. således:

Opgave *Tegn grafen for* $f(x) = x^2$ *. Udfyld skemaet nedenfor med differentialkvotienter.*

x	$f'(x_0)$
-1	
0	
1	
2	
3	

Kan du finde en formel til bestemmelse af $f'(x_0)$*?*

Herefter kan eleverne introduceres til metoder, der angiver differentialkvotienten direkte, og slippes løs på at gætte formler for differentialkvotienter for alle mulige funktioner, polynomier, trigonometriske funktioner, eksponential- og logaritmefunktioner etc., og regne alle mulige slags opgaver. Et udvalg af muligheder:

Opgave *Indskriv funktionen* $f(x) = x^3$ *som* Y_1 *Find den afledede funktion for f.*
Indskriv funktionen $f(x) = x^4$ *som* Y_1*. Find den afledede funktion for f.*
Kan I gætte en formel for differentiation af $f(x) = x^n$*, helt generelt?*

Opgave *(Svær!) Hvad kan differentialkvotienter bruges til?*
a) Hvordan ser grafen for en differentiabel funktion ud?
b) *Findes der funktioner, der ikke er differentiable?*
c) Hvilken sammenhæng er der mellem fortegnene for f´ og funktionen monotoniforholdene for f? Hvad sker der dér, hvor f har ekstrema?

Opgave *I denne opgave skal I finde differentialkvotienter til summer og differenser af funktioner.*
a) Indtast funktionen $f(x) = x^4 - 6x^2$*.*
b) Gæt $f'(x)$*. Kontroller jeres gæt med* $Y_1 = f(x)$ *,* $Y_2 =$ *gæt og* $Y3 = nDeriv(Y_1,x,x)$*.*
c) Indskriv funktionen $f(x) = x^2 + x^3$ *som* Y_1 *.*
d) Gæt $f'(x)$ *. Kontroller jeres gæt med* $Y_1 = f(x)$ *,* $Y_2 =$ *gæt og* $Y3 = nDeriv(Y_1,x,x)$*.*
e) Formuler nogle generelle formler for $f'(x)$*, når funktionen hedder:*
1) $f(x) = h(x) + g(x)$ *2)* $f(x) = h(x) - g(x)$
3) $f(x) = k \cdot g(x)$*, hvor k er en konstant.*
Svarene er ikke konkrete funktioner, men indeholder $h'(x)$ *og* $g'(x)$*.*

*Opgave ** *(Svær) Differentiation af et produkt. Vi mangler en formel for at kunne differentiere en funktion af typen* $f(x) = h(x) \cdot g(x)$*.*
a) Indtast funktionerne $f(x) = x \cdot e^x$ *i* Y_1 *og* e^x *i* Y_2*.*
b) lav en tabel over værdier af x, $f(x)$*,* e^x *og den afledede af* $f(x)$*. Kan I se nogen sammenhæng mellem tallene?*
c) Kan I ud fra dette lave en formel for differentialkvotienten for $f(x) = h(x) \cdot g(x)$*?*

Opgave *Andengradspolynomiet og toppunktet.*
a) Differentier andengradspolynomiet $f(x) = ax^2 + bx + c$*.*
b) *Sæt* $f'(x) = 0$
c) *Hvilken formel har I nu fundet et alternativt bevis for?*
d)

Sideløbende med disse opgaver kan der meget hurtigt regnes opgaver af den type, der stilles til den afsluttende skriftlige eksamen. Efter forløbet har eleverne en klar fornemmelse af, at differentialkvotienten er hældningen for tangenten, og de er gode til at bruge grafregneren til at eksperimentere og kontrollere. Der er ikke bevist noget, men i eventuelt efterfølgende beviser kan der trækkes på begreberne sekant, sekanthældning, tangent og tangenthældning.

Gennem mine observationer i de 4 klasser synes jeg at kunne se, at det virker godt at henlægge den daglige opsamling på gruppearbejdet til grupperne, f.eks. ved at indlægge tænkespørgsmål i materialet, hvor eleverne skal standse op, tænke over hvad de har lært og formulere svaret for hinanden og læreren. I de klasser, hvor der var en fælles opsamling i begyndelsen af hver time var der en tendens til at ikke alle elever tog gruppearbejdet alvorligt. Nogle lærere er uvante med at lave eget materiale, og der er eksempler på, at elever overser vigtige definitioner, fordi de ikke er typografisk fremhævet. Der er også lærere, der er meget ambitiøse med at introducere mange af grafregnerens muligheder, og der ser det ud til, at elevernes fokus flyttes fra at forstå differentialregningen til at beherske teknikken.

Materialet omhandler introduktion af differentialkvotient, men mange af ideerne med at lade eleverne arbejde selv og opdage kan bruges til mange andre emner – svingninger, funktioner, polynomier,... Gruppearbejdsformen eller egentlig projektarbejde er givtig men krævende. Eleverne skal være motiverede og trænede i arbejdsformen, og de første gange skal selve arbejdet i gruppen også evalueres og diskuteres. Det er tydeligt i materialet, hvilke elever og lærere, der er vant til denne arbejdsform og hvilke der ikke er. Det er også vigtigt at understrege, at det bliver for anstrengende for alle, hvis denne arbejdsform benyttes hele tiden. Ind imellem skal der bruges andre arbejdsformer, f.eks. forelæsninger eller individuel opgaveregning.

Næste afsnit omhandler de mere forskningsmæssige resultater af arbejdet, selvom resultaterne selvfølgelig i realiteten er sammenvævede og afhængige.

Forskningsresultater

Matematikken i forløbet

Når vi snakker om potentialer ved brug af grafregneren i matematikundervisningen er hovedsigtet naturligvis at øge elevernes matematiklæring. Derfor må det være interessant at overveje, hvad der sker med matematikken i de 4 forløb. Spørgsmålet var lige fra begyndelsen interessant for både forsker og lærer, da ingen var interesserede i, at projektet skulle stille eleverne ringere end ellers. Som nævnt i forrige afsnit blev elevernes forståelse af begrebet differentialkvotient i langt de fleste tilfælde rigtig god i følge dels lærernes vurderinger, dels i følge de traditionelle test, som mange af lærerne valgte at afslutte forløbet med. I et enkelt tilfælde vurderede læreren, at forløbet tog for lang tid. Som udgangshypotese havde jeg og så vidt vides også lærerne, at det ville være muligt med fordel at bruge grafregneren som et undervisningsværktøj indenfor de gældende regler indenfor differentialregningen, og denne hypotese er bekræftet. I materialet blev der lagt vægt på den grafiske repræsentation af differentialkvotienten som hældningen for en tangent, mens den symbolske blev mere nedtonet end normalt. Eleverne kom hurtigt i gang med at regne opgaver af den type, de forventedes at kunne til deres afsluttende skriftlige eksamen.

Den mere formelle side af differentialregningen med definitioner og beviser optrådte ikke eksplicit i forløbet, men dukkede op i forskellige diskussioner. Behovet for en formel definition af begrebet ”at være differentiabel i x_0” opstod f.eks. i en diskussion mellem en lærer og en elev angående den numeriske værdi. Spørgsmålet i materialet lød: Hvordan ser en differentiabel funktion ud? Elevens konklusion på spørgsmålet var, at alle funktioner var differentiable, og at spørgsmålet derfor ikke gav mening. Direkte adspurgt om den numeriske værdi i 0, svarede eleven at ja, den var også differentiabel i 0. Læreren udtrykte sin tvivl, hvorefter eleven svarede: Grafregneren er enig med mig, den siger, at f`(0) er nul. Læreren prøvede efter, og det var sandt[3]. Lærerens autoritet var i denne situation mindre end grafregnerens! Læreren roste eleven for hans opfindsomhed og tog i den senere fælles opsamling eksemplet op som en begrundelse for dels ikke at stole for meget på grafregneren, dels for at der var behov for en formel definition på at være differentiabel, så de ikke behøvede diskutere den slags fremover.

I den samme klasse refererede læreren for mig en diskussion, de havde haft i opsamlingen af gruppearbejdet, om det overhovedet var nødvendigt at bevise noget som helst. Diskussionens udspring var, at grupperne forgæves havde forsøgt at gætte en formel til differentiation af et produkt, se opgave * på forrige side. Læreren deltog efter eget udsagn ikke i diskussionen, der i hendes referat ser således ud (R. havde fået til opgave at forberede beviset for differentiation af et produkt):

Da vi mødtes næste dag indrømmede J. at han havde kigget i formelsamlingen og fundet produktformlen, og fundet ud af, at den virkede, og han spørger om, hvordan man finder på sådan en formel. Så udspandt der sig en lang diskussion i klassen om (Jeg var helt koblet af) hvordan man finder på formler og hvilke, det var nødvendige at bevise. Til sidst var de ved at afskaffe beviset: ”I 10. klasse brugte vi da formlen for rødderne i 2.gradsligningen, og den virkede da meget godt, selvom vi ikke havde bevist den”, ”Babylonerne brugte jo også Pythagoras sætning inden Pythagoras beviste den, og den funker jo også udmærket, om den så var blevet bevist eller ej. Så når J. siger, at produktformlen virker, er det vel bare det. Så har vi den”. R. begyndte at se urolig ud, og jeg forberedte oppe i hovedet et forsvar for beviset, da den mest tilbageholdende pige (og den dygtigste) sagde: ”Sidste år blev vi snydt, da vi delte cirkler. Formlen virkede kun for 5. Ved 6 punkter virkede den ikke. Så enten skal man bevise formlen, eller også skal man prøve den på alle tal.” ”Jeg tror ikke, J. har prøvet den på alle produktfunktioner.” De griner og kommer i tanke om mig, og jeg fortalte dem så, at R. ville bevise den næste gang. Jeg lavede så beviset for differentialkvotienten for √x, både for at opfylde bekendtgørelsen, forberede dem på produktbeviset og omtale problemet med x=0, som ikke var kommet frem.

Der er flere eksempler på, at også den mere formelle matematik havde en god plads i dette forløb. Dette skyldes formentlig også, at eleverne gik i 2.g og allerede havde modtaget en vis skoling også i, hvad matematik er og at det bl.a. indebærer, at der lægges vægt på definitioner og beviser.

Teknik og matematik

En særlig side af matematikkens placering i forløbet er forholdet mellem matematikken og grafregnerteknikken. De 4 undervisningsmaterialer lagde forskellig vægt på de mere tekniske sider af grafregnerbrugen. Som nævnt under gode råd i undervisningsresultater ser det ud til, at hvis der i materialet lægges stor vægt på de tekniske sider og hvis der introduceres mange nye, tekniske muligheder i forløbet, som f.eks. splitscreen, manipulation med lister, egentlig programmering etc., så er der en risiko for at det tekniske fjerner elevernes opmærksomhed fra det egentlige, nemlig differentialkvotientbegrebet. I de tilfælde, hvor grafregnerens tekniske muligheder ikke ekspliciteres – hvor materialet f.eks. bare indeholder tastesekvenser, kan der være problemer for eleverne med at læse formlen og skrive den rigtigt ind. De har f.eks. ikke nogen fornemmelse af, at gåseøjnene omkring formlen, der indskrives i L_2 har nogen betydning og udelader dem ofte. Der skal findes en balance mellem at forklare

3 Grafregneren beregner tangenthældningen i x0 ved at beregne hældningen af sekanten gennem (x0-10-5,f(x0-10-5)) og (x0+10-5,f(x0+10-5)). Prøv også med funktioner som x-n.

eleverne, at sådanne mere tekniske ting kan være nødvendige, så de husker dem, og så at gøre teknikken ”gennemsigtig”, så eleverne kan se ind til matematikken bag.

Der i materialet utallige eksempler på lærer-elev-interaktioner, hvor fokus er lommeregneren. Der er elever, hvor batteriet pludselig ikke virker, hvor lister forsvinder, fordi de trykker delete i stedet for Clear-list, hvor lommeregneren bliver syg og opfører sig uforklarligt etc. I grafregnerforløb vil det være umuligt helt at undgå den slags kommunikation, som ofte stiller meget store krav til lærerens viden om grafregnerens tekniske sider. Men jo større lærerens viden er på det område, jo hurtigere kan elevens fokus igen blive matematikken. Et andet trick, som en enkelt af lærerne brugte i den situation var at have et par reserve-grafregnere med til at give eleven, mens han baksede med deres, så eleverne ikke behøvede at gå i stå i deres gruppearbejde.

Der er også mange eksempler, hvor grafregneren uden tekniske problemer bruges til at udforske matematiske problemer. Der er også enkelte eksempler, hvor de tekniske problemer giver anledning til at der læres matematik, men det er ikke mange. Se f.eks. i foregående afsnit, hvor grafregnerens ukorrekte måde at beregne differentialkvotienter på som hældningen for en sekant giver anledning til et behov for matematisk præcision.

Af spørgeskemaundersøgelsen fremgik det, at lærerne mente, at et af grafregnerens potentialer var som kontrolværktøj ved vanskelige beregninger. I interviewene viste det sig, at eleverne ikke i særlig udstrakt grad benyttede sig af denne mulighed for at kontrollere deres beregninger – de var glade, når de var færdige. Efter dette forløb så nogle af lærerne det som en af de store gevinster ved dette forløb at eleverne efterfølgende altid kontrollerede tangentligninger på deres grafregner.

Lærerrollen og kommunikationen i klasserummet

I Borba(1997) ses et af potentialerne ved at introducere teknologi i matematikundervisningen i, at teknikken kan bruges som et enzym i lærer-elev- og elev-elev-kommunikationen. Det har været interessant at iagttage på videooptagelserne, hvordan grafregneren bruges som et meget fleksibelt værktøj i lærer-elev-kommunikationen. I modsætning til traditionel opgaveregning, hvor de fleste lærere og elever efter min erfaring er meget forsigtige med at skrive på ”hinandens” papirer, er grafregneren i mange tilfælde fælles: Alle taster på den samme, den bliver sendt rundt, og der zoomes ud og ind på graferne. Både lærer og elever arbejder på samme medie, og der bliver i mange tilfælde tale om et ægte samarbejde – måske især når grafregneren opfører sig ”sært”, og både lærer og elever ikke ved hvorfor. Men også i diskussioner, hvor læreren ikke forstår, hvad eleverne har tænkt, og de begge bruger grafregneren til at diskutere elevens tankegang. I nogle tilfælde bruger læreren også muligheden for at genkalde de sidste indtastninger til at forstå, hvad eleverne har tænkt og gjort. Det er nemmere på dette medie end på et stykke papir, hvor det ”forkerte” tit er visket ud, når læreren kommer.

Der ses i materialet flere eksempler på, at lærerens rolle kan blive en anden. I eksemplet med diskussionen om den numeriske værdi sås det, hvordan lærerens autoritet bliver mindre og i nogen grad overtages af grafregneren, og denne tendens sås i flere diskussioner. Der bliver også som allerede nævnt stillet store krav til lærerens tekniske viden, og der ses mange eksempler, hvor læreren kommer til kort og ikke kan forklare en given grafregners mærkværdige opførsel. Dette medfører igen en ændret autoritet – det er ikke sædvanligt for matematiklærere i den danske gymnasieskole at komme i en situation, hvor de ikke kender svaret, og mange elever har næppe oplevet det før. I forbindelse med fejlfinding ses læreren i rollen som medudforsker, men ikke i særlig høj grad i forbindelse med matematiske diskussioner. I sådanne diskussioner er læreren snarere igangsætteren, der kommer med de kritiske eksempler.

I forløbet har læreren selv udarbejdet materialet, og da det ofte i forbindelse med introduktion af teknologi vil være nødvendigt at udarbejde eget materiale eller tilpasse eksisterende materiale, er det en vigtig kompetence at kunne lave materiale selv. Denne side af lærergerningen er ny for mange, og det ses i det udviklede materiale, at mange af lærerne ville have glæde af at vide noget om typografi og formuleringer. F.eks. viser det sig svært for eleverne at udskille det væsentlige i en tekst, hvis ikke det er typografisk fremhævet. Der er også eksempler, hvor eleverne misforstår lærerens formuleringer. I sådanne situationer er eleverne også hurtige til at placere ansvaret for misforståelsen hos læreren, der igen mister autoritet.

I forløbet ses mange forhindringer for introduktionen, som kan forklares udfra den didaktiske kontrakt (Blomhøj 1995). Eleverne er uvante med selv at skulle opdage lovmæssigheder, de søger ofte bekræftelse hos læreren, og de er utrygge ved deres egne resultater. De er ikke forvænte med lærerens nye roller, og at der er problemer, som læreren ikke umiddelbart kan hjælpe med. I 2 af klasserne er eleverne uvante med gruppearbejdsformen, og de støder derfor ind i problemer med at få gruppearbejdet til at fungere. Dette har ikke noget at gøre med at introducere teknologi, men med at introducere nye arbejdsformer. Der er ikke noget lighedstegn mellem at indføre teknologi og at indføre nye arbejdsformer, men hvis listen over mulige potentialer ved at indføre teknologi studeres ses det, at det ofte vil være nødvendigt at indføre nye arbejdsformer for at indløse potentialerne. Derfor er det, at elever og lærer er uvante med andre arbejdsformer i matematik formentlig en af de største forhindringer for at udnytte flere af grafregnerens muligheder.

En enkelt lærer problematiserer også, at eleverne ved at lære om begreberne i grupper "opfinder" deres egne måder at beskrive begrebet, som ikke er i overensstemmelse med almindelig matematisk sprogbrug. F.eks. taler de om at nDeriv´e en funktion i stedet for at differentiere den. Det er dog lærerens opfattelse, at dette problem hurtigt løses via afleveringsopgaver og præcisioner på klassen.

Elevers og lærers opfattelse af, hvordan en matematiktime skal forløbe udfordres i projektet, og reaktionerne spænder fra ubehag, manglende koncentration, sabotage af gruppearbejdet, der i stedet bliver til individuelt arbejde omkring et bord til velbehag, stolthed, spænding og entusiasme.

Der ses situationer, hvor læreren har stillet opgaver, der kan regnes på flere måder og selv omtaler det som en fejl. Dette kan forklares som et brud på den traditionelle didaktiske kontrakt, hvor der kun stilles opgaver, som eleverne kan svare på og som har en enkelt løsning. Der er også situationer, hvor eleverne forsøger at svare på opgaver, der er ment som "tænkespørgsmål". Igen er det en del af den traditionelle kontrakt at der skal svares på de stillede spørgsmål og at svaret kan angives kort.

Den skriftlige eksamens styrende rolle

Den sidste forhindring for introduktion af teknologi i matematikundervisningen er ikke den mindste. Selvom eleverne skal medbringe en grafregner til den afsluttende skriftlige eksamen, vil et nærmere studie af de stillede opgaver afsløre, at der ikke i særlig høj grad trækkes på, at eleverne medbringer teknologi. Den første time er helt uden hjælpemidler, og i de sidste 3 må eleverne bruge grafregner, men der er en del opgaver, hvor der efterspørges eksakte værdier for f. eks integraler, og der har i hvert sæt højst været en opgave, hvor det var præciseret, at der skulle bruges grafregner. Samtidig er kravene om dokumentation ved grafregnerbrug til eksamen uklare og skrappe. I forhold til at klare sig godt til den skriftlige eksamen er det derfor muligt, at det ikke er til elevernes fordel at inddrage grafregneren for meget i undervisningen. Det har været en del af dette projekt at arbejde indenfor gældende love og bekendtgørelser for at analysere, hvad der kunne lade sig gøre indenfor de givne rammer. Det er sandsynligt, at hvis det gældende matematikindhold og de gældende eksamensregler ændres, så vil inddragelsen af grafregneren være en større fordel og ske mere naturligt.

Lærernes ønske om at forberede deres elever godt til den skriftlige eksamen ses flere steder i det indsamlede materiale. De stiller, som det fremgår af undervisningsmaterialet, meget hurtigt eleverne "rigtige" eksamensopgaver, og de ser det som en pointe ved det her projekt at eleverne meget hurtigt kan komme i gang med at regne eksamensopgaver – hurtigere end "normalt", hvor differentialkvotienten først skal defineres, og så går der måneder med at udlede differentialkvotienten for en række funktioner, og det er jo i følge den didaktiske kontrakt ikke "tilladt" at stille opgaver, hvor eleverne får brug for at differentiere funktioner, de endnu ikke har lært at differentiere.

En lærer skriver f.eks. følgende til mig i et brev efter forløbet:
Til trods for at jeg havde fortalt mine kolleger, at jeg var med i dette projekt, udviste de jo ikke den store interesse for det, mens du var her. Men nu er to kolleger kommet og spurgt, fordi deres elever har spurgt dem om, hvorfor x´erne pludselig er så langt foran dem.

Med dette menes netop, at de kunne regne flere eksamensopgaver hurtigere end de andre hold, og det var kollegernes motivation for at interessere sig for projektet
.
Mange af diskussionerne mellem forsker og lærer handlede også om opgaver og eksamen. I diskussioner efter forløbet blev tit diskuteret, hvordan eleverne nu var til at regne deres afleveringsopgaver, og hvilke typer fejl de lavede. Det blev også diskuteret, hvordan de skulle forberedes til at møde kravene til den skriftlige eksamen.

Afslutning

Lærerne er af afgørende betydning for, om introduktionen af grafregneren som et undervisningsværktøj bliver gjort og om det bliver en succes. I dette projekt har lærerne ved at trække på forskeren som moralsk og praktisk støtte fået kræfter til at forny deres undervisning. Dette projekt har arbejdet med 4 lærere, og en af disse 4 lærere har efterfølgende holdt et oplæg på sin skole om projektet, hvor i hvert fald halvdelen af matematiklærerne var interesserede i at gøre noget lignende. Forskeren har holdt oplæg på mange regionalmøder, kurser og pædagogiske dage, hvor ideerne i projektet er blevet fremlagt og diskuteret, og hvor andre lærere har været meget interesseret i ideerne. Forskeren er i flere omgange efterfølgende blevet kontaktet på mail for at udlevere eller kommentere undervisningsmateriale med mange af de samme ideer. Så ideerne i dette konkrete projekt spreder sig i matematiklærerkredse. Bare denne spredningseffekt har en vis værdi, selvom det er så lille et projekt.

I august 2003 starter jeg på Amtscentret for Undervisning i Skanderborg. I de 3 år, hvor jeg skal arbejde der, vil jeg forsøge at arbejde med lærere på en lignende måde, men i en bredere kreds, formentlig faggruppevis på den enkelte skole eller eventuelt over flere skoler. Denne måde at samarbejde på vil være inspireret af resultaterne fra dette projekt, som også på denne måde vil sprede sig til anden teknologi, andre lærere, andre niveauer og andre matematiske emner.

Der springer mange nye forskningsspørgsmål fra dette projekt, f.eks.:

- Hvilke ændringer af den skriftlige eksamen kunne støtte anvendelsen af teknologi som undervisningsværktøj?
- Hvilke typer af efteruddannelse for lærere kan føre til at lærerne uden at blive styrede bliver motiverede for og støttede i at udvikle deres undervisning?
- Teknologi som kommunikationsmedie – hvad gør det ved elev-elev og elev-lærer-kommunikationen?
- I hvilken udstrækning kan indførelsen af andre arbejdsformer i matematikundervisningen øge elevernes matematiklæring?

Litteraturliste

Blomhøj, Morten (1995): Den didaktiske kontrakt i matematikundervisningen. Artikel i "Kognition og Pædagogik" 4. årgang nr. 3 marts 1995.

Borba, Marcelo, Brian Hudson, John Olive, James Fey, Rina Herschkowitz og Baruch Schwarz (1997): Working Group 16 Report. I bogen "The Role of Technology in the Mathematics Classroom. Proceedings of Working Group 16 at ICME-8, the 8th International Congress on Mathematics Education, Seville, Spain, 1996". UNESP, Brazil.

Jaworski, Barbara (1994): Investigating Mathematics Teaching. A Constructivist Enquiry. The Falmer Press.

Kaput, James J. (1992): Technology and mathematics education. I bogen "Handbook of research on Mathematical Teaching and Learning", editor Douglas A. Grouws

Kvale, Steiner (2000): InterView. En introduktion til det kvalitative forskningsinterview. Hans Reitzels Forlag.

Niss, Mogens et al (2002): Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark. KOM-arbejdsgruppen, IMFUFA, RUC

Ruthven, Kenneth (1996): Calculators in the Mathematics Curriculum: The Scope of Personal Computational Technology. Kapitel 12 i bogen "International Handbook of Mathematics Education", A. J. Bishop, Kluwer Academic Publishers

Sfard, Anna (1991): On the dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. I "Educational Studies in Mathematics" nr. 22. Kluwer Adademic Publishers

Skovsmose, Ole og Marcelo Borba: Research Methology and Critical Mathematics Education. Center for forskning i matematiklæring, hæfte nummer 17, IMFUFA, RUC.

Christer Bergsten

Christer Bergsten (e-mail chber@mai.liu.se) är universitetslektor vid Linköpings universitet, där han arbetar med lärar- och forskarutbildning i matematikdidaktik. Han var ordförande i Svensk förening för matematikdidaktisk forskning (SMDF) under dess första tre år, ordförande i organisations- och programkommittéerna för Matematikbiennalen 2002 i Norrköping och är medlem i internationella programkommittén för ICME 10. Han var projektledare och medförfattare till boken Algebra för alla (Nämnaren TEMA).

Algebra som innehåll och aktivitet

Christer Bergsten

Abstract

Det som brukar kallas skolalgebra kan innehållsmässigt delas upp i tre huvudkategorier – studiet av ekvationer, studiet av mönster och generaliseringar, samt studiet av samband mellan kvantifierbara storheter. En annan uppdelning tar fokus på typen av elevaktivitet vid arbete med skolalgebra – att utifrån en (”verklig”) situation formulera en matematiskt modell (översättning, eller matematisering), att omstrukturera matematiska symboluttryck (symbol-manipulering), samt att översätta från ett matematiskt formelspråk till en (”verklig”) situation (tolkning). Tillsammans definierar dessa två kategoriseringar nio huvudtyper av matematik-uppgifter i skolalgebran. För att kunna använda algebra som ett effektivt verktyg vid lösning av komplexa problem krävs en förtrogenhet med samtliga dessa uppgiftstyper.

Preliminära empiriska data pekar på var i detta fält elever har problem, vilket kan ge ledning för undervisningsinsatser. Genom mer övergripande teorier inom det matematik-didaktiska forskningsfältet kan det mer generella i denna lokala problematik belysas.

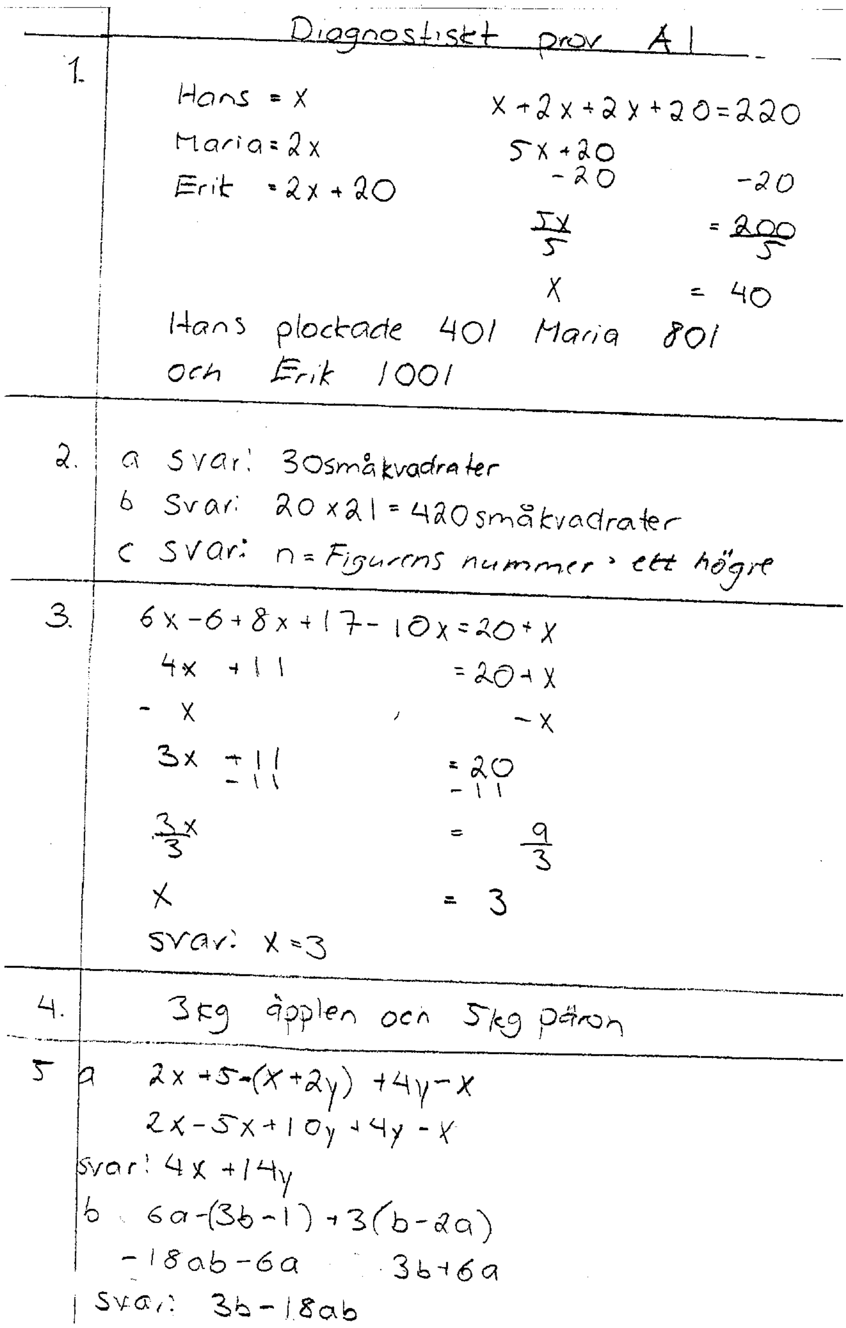
Inledning

Under många år i grundskolan består för eleven skolmatematiken av aritmetik och geometri, dominerat av kvantitativa beräkningar med givna välkända tal och storheter. När sedan bokstäver börjar användas för att beteckna okända eller generella tal är det många elever som upplever det som att dom inte längre förstår och matematiken blir tråkig och svår. Många studier om hur elever uppfattar bokstavssymboler i matematiken har visat att det finns stora svårigheter framförallt när det gäller att se en bokstav som beteckning för en variabel, som i en formel som beskriver en funktion (se t.ex. Küchemann, 1981; Kieran, 1992). Quinlan (1992) beskriver fem hierarkiskt ordnade nivåer av elevuppfattningar (se även Bergsten et al, 1997, s. 19):

1. Bokstaven ses som ett objekt som saknar mening, eller dess värde fås som bokstavens plats i alfabetet
2. Det är tillräckligt att pröva med ett tal istället för bokstaven
3. Det är nödvändigt att pröva med flera tal

4. Man uppfattar bokstaven som representant för en klass av tal. Det räcker att pröva med något av dessa tal.
5. Man uppfattar bokstaven som representant för en klass av tal. Man behöver inte pröva med något av dessa tal.

Dessa oklarheter i uppfattningar avspeglas i hur elever löser problem där algebraiskt symbolspråk måste användas. Följande exempel visar hur en och samma elev i den svenska grundskolans år 9 har löst de fem första uppgifterna på det test (se bilaga 1) som använts i några undersökningar som diskuteras längre fram i denna uppsats.



Figur 1. Exempel på elevsvar på uppgifterna 1-5 i testet i bilaga 1

På uppgift 1, som handlade om att översätta en text till en ekvation, har denna elev inga problem[1] och har även löst ekvationen trots att det inte efterfrågades. Uppgift 2 handlade om att generalisera ett mönster till godtycklig storlek, vilket inte erbjudit några problem annat än med själva den generella formeln – bokstaven *n* används inte i den mening som anges i texten och den
(i innehållslig mening korrekta) formel som ges är retorisk, inte symbolisk. Även ekvationslösningen i uppgift 3 är korrekt genomförd, uppenbarligen enligt en väl inlärd uppställning som ses även i uppgift 1. Däremot har inte denna elev kunnat tolka det algebraiska uttrycket i uppgift 4, och de algebraiska omskrivningarna i uppgift 5 tyder på att eleven försöker komma ihåg de räkneregler som behövs här, men tycks blanda ihop teckenregler för parenteser med distributiva lagen. Eleven tycks inte ha någon uppfattning om vad som kan vara ett rimligt svar på 5b, där samma ”räkneregel” som använts i uppgift 5a återkommer.

> *Sammanfattningsvis visar protokollsutdraget att denna elev har en oklar kunskapsbild inom algebra: vissa aspekter fungerar bra, andra inte alls. Många liknande exempel kunde identifieras i de undersökningar som beskrivs nedan och visar att algebra kan vara en enda röra för nybörjare. För den enskilde eleven kan svårigheterna bottna i ett dubbelt problem: man ser ingen nytta med algebran och man ser ingen ”röd tråd” som man kan binda upp sin förståelse vid.*

Att förstå dessa svårigheter och beskriva undervisningsverksamhet som minskar dom är en komplex matematikdidaktisk problematik. En direkt reflektion kan vara att en av orsakerna till de observerade svårigheterna kan vara de algebraiska symbolernas dubbla funktion att vara både *meningsbärande* och *manipulerbara*. Den förra funktionen gör uttrycken begripliga och den andra gör det möjligt att generera ny kunskap, förutsatt att den förra funktionen är stabil vid algebraiska omskrivningar. Studerar men denna problematik inom skolalgebran leds man med nödvändighet vidare till mer *generella* frågeställningar för att kunna förstå och besvara dessa *lokala*:

- Vad är kunskap i matematik?
- Hur nås kunskap i matematik?

Dessa frågor är i sin tur beroende av hur man besvarar motsvarande *globala* frågor:

- Vad är kunskap?
- Hur nås kunskap?

Att det finns i grunden olika synsätt inom den pedagogiska kunskapsteorin framgår tydligt av vilket språkbruk som används (ibland utan att medvetet reflektera över ordvalet): kunskapen *skaffas*, *fås*, *utvecklas*, *erövras*, *framväxer*, *konstrueras* …

Denna uppsats tar sin utgångspunkt i ett lokalt matematikdidaktiskt problem – att analysera och försöka få insikt i vad som kan ligga bakom dom så ofta observerade svårigheter nybörjare i algebra upplever. Sedan görs ett försök att se denna problematik i ett mer generellt perspektiv, där frågan vad algebra är i förhållande till matematiken som helhet studeras. Denna analys aktualiserar en syn på algebraiskt kunnande som en diskursiv kompetens, som leder till en aspekt av lärande och kompetens på en global didaktisk nivå. Därifrån tas sedan steget till en mer tillämpad didaktik för algebra, där olika matematikdidaktiska begrepp och teorier kommer till nytta.

[1] I uttrycket $\text{Hans} = x$ är dock enhet inte utskriven.

Vad är x ?

Det som skolelever tydligt kan se när ordet algebra dyker upp i matematiken är att även bokstäver används bredvid siffrorna. Att en och samma bokstav då kan ha olika innebörder beroende på sammanhanget och problemtypen är då (naturligtvis) inte klart från början för en elev. Tvärtom kan det bidra till att skolalgebran upplevs som en enda röra. Betrakta följande exempel som en illustration av detta:

En rektangel har omkretsen 40 cm.
a) Hur långa är sidorna om arean är 36 cm^2
b) Hur stor/liten kan arean vara?

Om man använder bokstaven x för att beteckna längden (i cm) av rektangelns bas måste rektangelns höjd vara $20 - x$ cm. För att besvara fråga a) är en möjlighet att beskriva situationen genom likheten

$$x \cdot (20 - x) = 36 \qquad (1)$$

Man finner då att likheten är sann för precis två positiva värden på talet x. Bokstaven x står alltså här för ett eller flera bestämda men (tills vidare) okända tal i en ekvation. Själva uppgiften är då också klar, det gäller att ”avslöja” vilket (vilka) tal x är. För att kunna hitta dessa ”gömda” tal kan den som lärt sig lösa andragradsekvationer börja med att göra en ”omskrivning”:

$$x \cdot (20 - x) = 20x - x^2 \qquad (2)$$

Denna likhet beskriver ett generellt samband, eller ett mönster, som gäller för alla tal x. Bokstaven x står här för ett generaliserat tal, eller vilket tal som helst. En uppgift i skol-matematiken kan då bestå av att förklara varför likheten (2) alltid är sann.

För att svara på fråga b) ovan är en möjlighet att studera hur funktionen f varierar då man låter x variera fritt i intervallet $0 < x < 20$, där f definieras av

$$f(x) = x \cdot (20 - x) \qquad (3)$$

Att x varierar innebär då för motsvarande rektangel att den görs ”smalare” eller mer kvadratisk. Här används alltså bokstaven x för att beskriva en relation mellan storheter där x är den oberoende variabeln och $f(x)$ den beroende.

Sammanfattningsvis finns alltså i skolmatematiken åtminstone följande tre olika innebörder när bokstaven x (eller annan vald bokstav) står för tal:

1. x = obekant; fix
2. x = parameter; utbytbar
3. x = variabel; rörlig, (o)beroende

Det är också viktigt att för eleverna tydliggöra de olika aktiviteterna eller faserna vid arbete med bokstäver i matematiken. Dessa hänger samman med det algebraiska symbolspråkets båda grundaspekter, dvs. att algebraiska uttryck är både *meningsbärande* och *manipulerbara*. Detta kan beskrivas med den algebraiska cykeln (se Bergsten et al, 1997, s. 15): En situation (ofta ett problem formulerat i verbal uttrycksform) kan *översättas* till ett algebraiskt uttryck (t.ex. en ekvation), som sedan kan *manipuleras* (skrivas om med hjälp av algebraiska räkneregler). Det algebraiska uttryck man då får kan sedan *tolkas* i förhållande till den ursprungliga situationen (lösningen till det ställda problemet).

Denna analys pekar på två olika dimensioner av skolalgebran, nämligen *innehåll* respektive *aktivitet*. Innehållet är relaterat till bokstavssymbolernas funktion, som kan vara att beteckna ett okänt med fixt tal i en ekvation, ett godtyckligt tal i en generalisering eller ett mönster respektive ett rörligt tal som variabel till en funktion. Aktiviteten kan handla om att översätta från ett språkligt uttryck eller figur till ett algebraiskt uttryck, att manipulera eller skriva om algebraiska uttryck, eller att tolka ett algebraiskt uttryck till ett språkligt uttryck eller en figur. Detta innebär att det finns åtminstone nio olika typer av uppgiftsaspekter i skolalgebran, enligt följande schema (figur 2):

Aktivitet Innehåll	Översättning	Manipulering	Tolkning
Ekvationer	I	II	III
Mönster/generalisering	IV	V	VI
Samband (funktioner)	VII	VIII	IX

Figur 2. Algebra som innehåll och aktivitet[2]

Se Bilaga 1 för exempel på övningar till respektive cell i denna matris. Där finns till varje cell en uppgift enligt följande fördelning (med uppgiftsnumret i bilaga 1 angivet):

I – 1, II – 3, III – 7, IV – 2, V – 8, VI – 9, VII – 6, VIII – 5, IX – 4

Utifrån denna klassificering, grundad på en kombination av de inom skolalgebran aktuella dimensionerna innehåll – aktivitet, kan flera matematikdidaktiskt intressanta frågor studeras, som till exempel följande:

1. Vilken/vilka av cellerna I – IX, om någon, erbjuder en lärande störst problem?
2. Är det innehållsområdet (dvs ekvationer, mönster eller samband) eller den algebraiska aktivitetens karaktär (dvs översättning, manipulering eller tolkning) som har störst betydelse för prestationen på algebraiska uppgifter, eller finns det inget sådant samband?
3. Är någon/några av cellerna I – IX försummade i skolans (traditionella) matematikundervisning?
4. Vilka typer av undervisningsaktiviteter kan skapas för att befrämja lärandet av uppgifter inom respektive cell, samt av den integration av dessa celler som behövs för uppgifter där hela den algebraiska cykeln måste aktiveras?
5. Vilka pre-algebraiska undervisningsaktiviteter kan skapas för att väl förbereda eleven till den bokstavsanvändande algebran enligt schemat ovan?

Som en inledning till studiet av dessa frågor diskuteras i nästa avsnitt resultatet från tre empiriska studier som alla bygger på matrisen i figur 2.

Elevers arbete med algebra

Ett test för grundskolans sista år (år 9 i svensk skola) konstruerades med nio uppgifter svarande mot de nio cellerna i figur 2 (se bilaga 1). Uppgifterna provades ut och justerades innan de användes i tre olika undersökningar A, B och C, som alla är att betrakta som förberedande pilotstudier för den problematik som beskrivits ovan. Resultaten kan därför bara användas som en indikation på vad som är att förvänta vid en mer systematisk studie och som underlag för reflektioner. Här redovisas därför ej detaljerade data utan bara en övergripande

2 Se Bergsten (2000, s. 460).

resultatdiskussion. Resultaten från undersökning B finns rapporterade och diskuterade i ett examensarbete inom lärarutbildningen (Nordström, 1997).

I undersökning A gavs testet till sammanlagt 371 elever i årskurs 9 (andra terminen) i svensk grundskola. Testet genomfördes som en fältstudie inom lärarutbildningen, dvs en grupp lärarstuderande gav uppgifterna till sina respektive praktikklasser. Uppgifterna bedömdes enligt en gemensam mall och resultaten från samtliga deltagande klasser sammanställdes sedan av författaren och analyserades. En jämförelse gjordes även med prestationerna i matematik mätt med matematikbetyget efter höstterminen i årskurs 9. De lärarstuderande som genomförde testerna diskuterade också efteråt uppgifterna med sina klasser och med klassernas ordinarie lärare.

Samma test (två uppgifter skilde sig marginellt) användes i undersökning B (Nordström, 1997), där samtliga 67 elever i årskurs 9 (särskild kurs i matematik) på en svensk högstadieskola gjorde uppgifterna. Efteråt intervjuades några av eleverna, där de fick lösa samma/liknande uppgifter och svara på frågor kring sina lösningar. De skriftliga lösningarna analyserades både kvantitativt och kvalitativt. Det senare innebar att samtliga elevsvar på varje uppgift beskrevs och diskuterades.

I undersökning C genomfördes testet i bilaga 1 i några klasser (sammanlagt 48 elever) i en svensk högstadieskola, först i slutet av årskurs 8 och sedan åter (samma elever, samma test) i slutet av årskurs 9. Avsikten var att studera om eleverna efter ytterligare ett års undervisning ökat sin säkerhet respektive ändrat sitt sätt att hantera de nio olika problemtyperna i testet. Testerna genomfördes av respektive klasslärare och resultaten analyserades av författaren.

Genomgående i de tre undersökningarna var lösningsfrekvenserna högst på uppgifterna motsvarande cellerna I, II, III och VII (se figur 2) och lägst för cellerna V, VI och VIII. Prestationen på cellerna IV och IX låg på en mellannivå. Av innehållsområdena var prestationerna högst på ekvationer och lägst på mönster, medan den aktivitetstyp som gav högst lösningsfrekvens var översättning (från situation till formel) och lägst tolkning (av formel). I de två större undersökningarna gjordes också korrelationsberäkningar och faktoranalys. Dessa kvantitativa data tillsammans med de kvalitativa av de tre undersökningarna gav följande översiktliga bild av de studerade aspekterna av algebra i åttonde och nionde skolåren:

• *Aktiviteten är mer avgörande än innehållet*
Vad man gör i skolalgebran (som att manipulera eller tolka) har större betydelse för hur eleven kan hantera det än vilket innehåll det berör (som ekvationer eller mönster)
• *Svårigheter består från år 8 till år 9*
I undersökning C noterades en mycket marginell ökning av (de relativt låga) lösningsfrekvenserna från år 8 till år 9, vilket är anmärkningsvärt då huvuddelen av algebraundervisningen normalt sker i årskurs 9.
• *Stor variation mellan klasser*
En förklaring till detta, förutom den normala variation som finns inom alla kunskapsområden, kan vara att lärare kan betona algebran olika, beroende på hur de uppfattar klassens förmåga och intresse.
• *Stor variation i svar på samma uppgift*
När man inte helt förstår eller har kontroll över hur det fungerar kan det bli ”hur som helst” i algebran. Detta tyder på en mycket oklar kunskapsbild inom området. (Se exempel i bilaga 2)

• *Uppgifter är ”svåra” då elever ej är vana*
Detta speglar det naturliga faktum att ”övning ger färdighet” men även att just algebra är svår att ”lista ut” på egen hand.
• *Många elever tyckte uppgifterna var roliga*
Flera av uppgifterna i testet liknade inte lärobokens övningar och inbjöd till eftertanke – detta uppskattades av många elever.
• *Förutfattade meningar vanliga*
Många av lärarna var tveksamma innan testet gavs och trodde uppgifterna var för svåra men blev överraskade när det visade sig att många av eleverna klarade dom bra. Detta indikerar att det kan finnas mycket att hämta genom att arbeta mer med andra typer av uppgifter än bara de ”traditionella”, som ofta befrämjar en instrumentalistisk syn på skolalgebran.

Undervisning i algebra

De preliminära resultaten ovan ger upphov till många olika reflektioner kring undervisning i skolalgebra. Vilket är att föredra, att organisera verksamheten utifrån innehåll eller aktivitet? Ur elevernas synpunkt kan det förra verka enklare i någon mening, då det då tydligare kan betonas att bokstaven (ofta x) har en viss innebörd. Det är då möjligt att koncentrera på en enda aktivitet (till exempel bara översättning) åt gången, dels för att synliggöra respektive aktivitet, dels för att göra det mindre ”rörigt”. Å andra sidan finns det inget i undersökningens preliminära resultat som har en direkt koppling till valet av undervisningsverksamhet. Det finns också generellt sett inget enkelt eller direkt samband mellan teori och praktik inom didaktiken (se t.ex. Otte i Hirst & Hirst, 1988, s. 385).

Lär man sig bäst genom att träna delar eller helhet, dvs. i detta fall se på ett steg i den algebraiska cykeln eller arbeta med uppgifter där hela cykeln aktualiseras? Attityden till matematik och motivationen att arbeta kan påverkas starkt av valet av arbetsformer. Skovsmose (2000) beskriver en i detta sammanhang intressant klassificering av *lärandemiljöer* i matematik analyserade utifrån val av undervisningsmiljö respektive undervisningsparadigm, enligt följande matris (figur 3):

Paradigm / **Miljö**	Att träna	Att undersöka
Inommatematisk	(1)	(2)
Pseudo-verklig	(3)	(4)
Verklig	(5)	(6)

Figur 3. Lärandemiljöer (efter Skovsmose, 2000, s. 8)

Exempel på (1) i figur 3 är att räkna uppgifter av typen $14 \cdot 15 =$, $23 \cdot 18 =$, osv. Att till exempel söka, beskriva och förklara mönster i en multiplikationstabell är exempel på (2). Typ (3) är mycket vanlig i läroböcker i matematik i form av textuppgifter som ser ut att handla om ”verkligheten” men som i grunden är en konstruerad verklighet som ingen behöver komma i kontakt med för att lösa uppgifterna[3] Som exempel på (4) beskriver Skovsmose (2000, s. 10-

3 Ett exempel på denna typ: I affär A kostade 0.7 kg av en ost 35 kr medan 0.4 kg av samma ost kostade 22 kr i affär B. Hur stor var skillnaden i kilopris för denna ost i de båda affärerna?

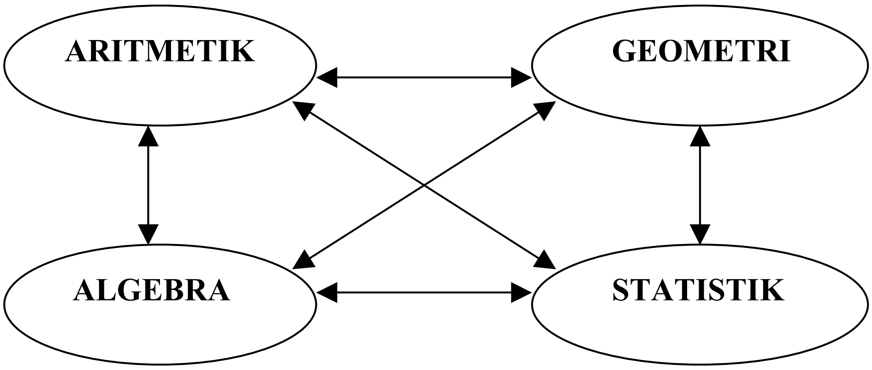
12) en simulering i ett klassrum av spel på trav med hjälp av en spelplan och två tärningar. Det matematiska innehållet är sannolikheter och risktagande. När statistiska data från verkligheten används för att öva på tolkning och analys av kvantitativa data är uppgiften lokaliserad till cell (5) i figur 3. För att beskriva vad kategori (6) innebär ger Skovsmose (2000, s. 12-14) ett exempel från ett projekt där elever besökte en bondgård för att arbeta fram en ”input-output model” för energi inom jordbruk. Skovsmose menar att en stor del av den traditionella matematikundervisningen rör sig mellan fälten (1) och (3) och att en utvidgning av de typer av lärandemiljöer man arbetar inom är nödvändig för att bryta upp den traditionella färdighetsinriktade skolmatematiken, och att då inte bara fält (6) utan även (2) och (4) är centrala.

En avgörande fråga i detta sammanhang är vad som är målet med undervisningen, i till exempel skolalgebra? Är det att kunna lösa matematikuppgifter av den eller den typen eller är det mer övergripande att utveckla en *symbolkänsla* (”symbol sense”, se t.ex. Arcavi, 1994; Bergsten, 1999) med hjälp av vilken man har en beredskap att angripa olika typer av både välkända men även nya typer av problem? En sådan symbolkänsla innebär bl.a. att uppskatta styrkan hos det matematiska symbolspråket, att ha en förmåga att både läsa och skriva om symboluttryck (flexibilitet), att kunna översätta mellan verbal/grafisk uttrycksform och algebraisk, att våga ”lita” på symboler och att de kan visa på nya aspekter, m.m. (se t.ex. Bergsten et al, 1997, s. 20).

När man reflekterar över dessa frågor är det också nödvändigt att ta ställning till både hur man lär och vad det är man lär, dvs. vad är algebra? För att kunna studera det lokala matematik-didaktiska problemet att förstå variationen av elevsvar på en viss uppgift i algebra och hur man kan lägga upp undervisningen för att förbättra lärandet på den uppgiftstypen, måste problemet bäddas in i sitt sammanhang och ses som en del av ett mer generellt matematikdidaktiskt problem (hur fungerar det algebraiska symbolspråket, hur kan man arbeta för att lära sig det?), som i sin tur är en del av vad man kan kalla globala problem i matematikdidaktiken: vad innebär det att lära, vad är algebra, vad innebär det att kunna (algebra), vad är matematik …?

Vad är algebra?

En vanlig bild av skolmatematiken är att den utgörs av ett antal (innehålls)områden. Så beskrivs till exempel målen för kurs A i matematik i den svenska gymnasieskolan utifrån en indelning av innehållet i områdena aritmetik, geometri och trigonometri, statistik, algebra och funktionslära (se t.ex. Bergsten et al, 1997, s. 159-160). Enligt denna syn är algebra ett matematiskt område som kan studeras bredvid de övriga, som också alla stöder varandra (se figur 4).



Figur 4. En bild av skolmatematik som innehåll

Distinktionen ovan mellan innehåll och aktivitet i algebran ger delvis samma bild som figur 4 av skolmatematiken (se även Usiskin, 1988; Bergsten et al, 1997). Men algebra handlar inte bara om att använda bokstavssymboler för tal (i olika aspekter), det är också vanligt att skilja *algebraiskt tänkande* från *aritmetiskt tänkande*: medan aritmetiken arbetar direkt på talen med operationer kan man med algebran studera själva operationerna, arbeta på aritmetikens struktur och på detta sätt få en djupare förståelse för hur aritmetiken fungerar (Sierpinska, 1995; se även Bergsten et al, 1997, s. 18-19). Denna ”förflyttning” av perspektiv från operationer till strukturer kan även identifieras i den historiska utvecklingen av algebran (Sfard, 1995).

Besläktat med denna metasyn på vad som konstituerar algebraiskt tänkande, men som går ett steg längre, är den bild av algebra som en generell *algebraiseringsprocess* av andra matematiska innehållsområden som Bolea et al (1999, s. 141) ger:

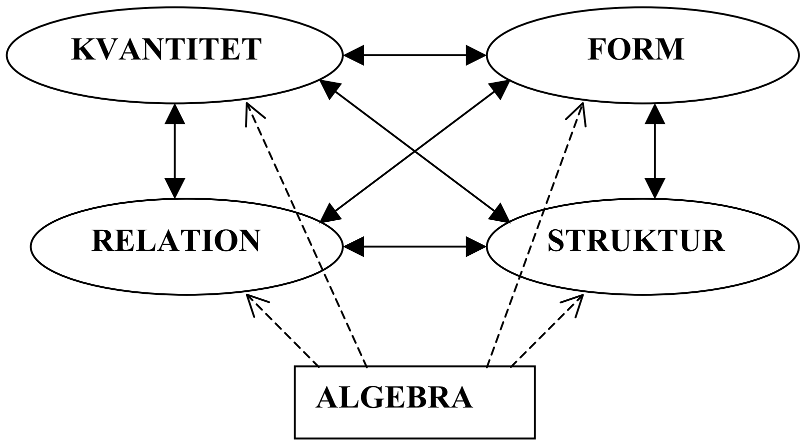
> ”Elementary algebra does not appear as a self-contained mathematical work comparable to other works studied in academic core courses (such as arithmetic, geometry, statistics, etc.), but rather as a modelling tool to be (potentially) used in all mathematical curricular works and which appears to be more or less used in them.”

Så kan t.ex. aritmetiken *algebraiseras* genom att strukturella regler för det aritmetiska ”räknandet” ges en generell form med hjälp av variabler.

> *Exempel*: ”Huvudräkningen” 15+7=20+2=22 grundar sig bl.a. på associativa lagen för addition som i algebraiska termer brukar formuleras (a+b)+c=a+(b+c).

Algebraiseringen av ett matematiskt innehållsområde fungerar enligt Bolea et al (1999) som ett *didaktiskt verktyg* som underlättar studiet av detta område som helhet
.

Med denna syn på algebra kombinerad med mer generella termer av vad olika matematiska innehållsområden studerar kan följande alternativa bild ges av matematiken (figur 5):



Figur 5. En bild av matematik och algebrans roll

Enligt figur 5 är matematiken systematiska studier av kvantiteter, former, relationer och strukturer, där algebra är ett (bland flera) verktyg som används vid dessa studier. Man studerar *kvantiteter* i sig inom aritmetiken och statistiken och använder kvantiteter vid studier av samband (*relationer*, funktioner) och *former* (geometri). Många av de objekt som studeras inom till exempel aritmetiken och funktionsläran har gemensamma underliggande *strukturer* som formuleras i den abstrakta algebran. Kopplingar finns på detta sätt mellan de fyra olika fälten i figur 5. Ofta används algebra som ett verktyg inom alla dessa fält. Då det algebraiska symbolspråket är både meningsbärande och manipulerbart kan skolalgebran utifrån figur 5 beskrivas som en verktygslåda med meningsbärande verktyg med två funktioner:

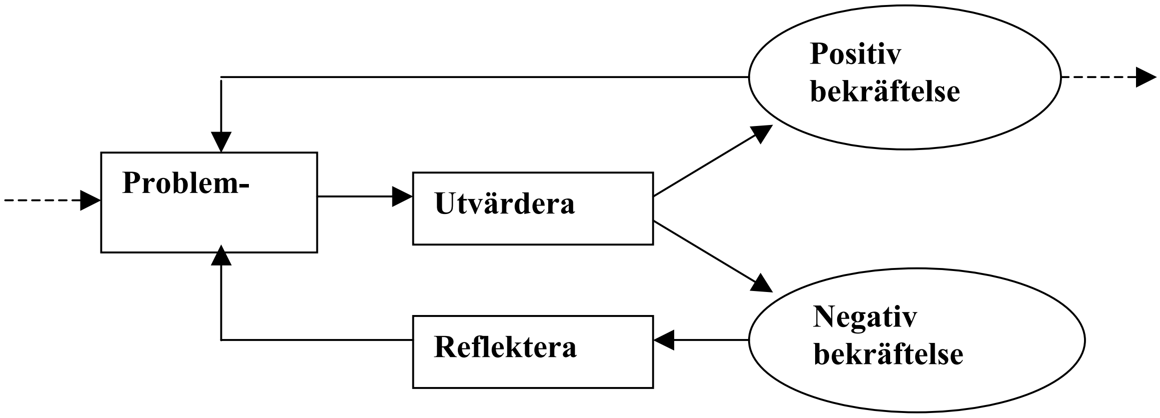
- Problemlösningsverktyg – med hjälp av algebra blir man bättre rustad att lösa matematiska problem
- Didaktiska verktyg – med hjälp av algebra kan man nå fördjupad förståelse för de matematiska innehållsområden man studerar

Utifrån dessa reflektioner är det dags att i delvis nya perspektiv fundera på frågan om lärande och undervisning i algebra.

Hur kan man lära sig algebra?

Med en syn på algebra som ett meningsbärande verktyg med dubbla funktioner, så som det beskrivits ovan, kan ett mål för undervisningen i skolalgebran vara att utveckla en förtrogenhet med detta verktyg. En sådan förtrogenhet kan formuleras med hjälp av begreppet symbolkänsla (”symbol sense”; se ovan). Förtrogenhet med ett verktyg kan bara nås genom en upprepad användning av det i situationer där man upplever att det är en hjälp för att lösa problem och nå förståelse, vilket i fallet skolalgebra innebär att inom de olika innehållsområdena (ekvationer, mönster och samband) arbeta med de algebraiska aktiviteterna i den algebraiska cykeln (översätta, manipulera, tolka). Detta kan ske i olika lärandemiljöer (figur 3), där variation är viktigt inte bara för lärandet i sig utan även för att både tydliggöra matematikens funktion och utveckla attityder till matematiken som bidrar till en ökad lust att lära.

Ökad förtrogenhet med matematiska verktyg av olika slag, som till exempel det algebraiska symbolspråket, kan nås genom ett medvetet varierat arbete inom den *läroloop* som beskrivs i figur 6:



Figur 6. En läroloop vid arbete med uppgifter i matematik.

I figur 6 ska den vänstra streckade pilen tolkas som de erfarenheter och kunskaper man bär med sig till en problemlösningssituation och den högra som de samlade erfarenheter och kunskaper man bär med sig efter en avslutad sekvens med problemlösning. Arbetet med uppgifter i det vänstra fältet kan i olika ”varv” i loopen varieras så att det spänner över en allt bredare och djupare begreppsbild (se nedan).

Ett sätt att tolka figurerna 5 och 6 är att det handlar om att utveckla en förmåga att kommunicera med matematiska termer med sig själv och andra, dvs. att utveckla en diskursiv kompetens. En liknande typ av ”kommunikationskompetence” har beskrivits i det danska KOM-projektet som en av åtta centrala ämneskompetenser i matematik (Niss och Højgaard Jensen, 2002, s. 60). Två andra av de för synen på algebra som ett meningsbärande verktyg relevanta kompetenser beskrivna där är ”repræsentionskompetence” (s. 56) och ”symbol- og formalismekompetence” (s. 58), som alla berör aspekten ”At kunne håndtere matematikkens sprog og redskaber” (s. 56). Detta senare innebär att besitta en diskursiv kompetens.

Att fokusera på en sådan diskursiv kompetens har konsekvenser beträffande synen på elevens och lärarens roller. För eleven kan det handla om ett kommunikationsspel, att växa in i en (ny) diskurs, individuellt och i grupp, tillsammans med en expert (läraren).[4] I detta spel formas också i undervisningsgruppen sociomatematiska normer för vad som t.ex. accepteras som rätt och fel i matematiken (Yackel och Cobb, 1996).

För den som deltar i ett sådant kommunikationsspel, där till exempel algebraiska symboler börjar användas, finns det enligt Sfard (2001) en inneboende cirkularitet: Man måste delta i diskussionen innan man behärskar den, använda ord/uttryck och bli bekant med objekten innan man ännu fullt ut förstått dom och kan hantera dom. Detta ifrågasätter den vanliga uppfattningen att innehållet bör komma före formen i matematikundervisning (t.ex. att man bör arbeta med begreppet ”tal” innan man skriver siffror i positionssystemet för att beteckna tal). Alternativet i ett kommunikationsspel av den typ som beskrivits ovan är att form och innehåll för eleven syns samtidigt, behandlas i ett diskursivt växelspel mot allt större förståelse och kommunikationsförmåga (diskursiv kompetens). Det är naturligtvis en didaktisk utmaning att hantera detta kommunikationsspel så att gruppen behåller intresset och

4 I litteraturen brukar detta benämnas “apprenticeship learning” eller “expert modelling”; se t.ex. Collins et al (1989).

vill fortsätta kommunicera.[5] Didaktiska medel som kan användas i denna process kan vara följande.

- Använda olika uttrycksformer (verbalt, numeriskt, visuellt, symboliskt)
- Använda för matematiken relevanta metaforer (se Lakoff och Núnes, 2000)
- Variera lärandemiljöerna (se figur 3)
- Utveckla allt rikare begreppsbilder (se t.ex. Bergsten et al, 1997, s. 139)
- Skilja mellan *perceptuell* och *proceptuell* kunskap[6] och vara medveten om de speciella problem som är förknippade med den senare typen (se Tall et al, 2000)
- Arbeta medvetet med de didaktiska faserna *Aktivitet* $\rightarrow$ *Formulering* $\rightarrow$ *Validering* i undersökande lärandemiljöer (se Brousseau, 1997)[7]
- Bygga upp lärolooper (se figur 6) som fångar in centrala aspekter av den algebraiska cykeln tillsammans med en upplevelse av matematikens form och funktion

Sammanfattning

Många elever upplever algebran i skolan som svår (Kieran, 1992). Med tanke på det komplex av aspekter inom algebran som analysen ovan visar är detta inte så underligt, då en elev som just börjar arbeta med algebra knappast kan skilja ut dessa aspekter (figur 2) isolerade från den sammansatta helhet som de bildar. På ett konkret plan kan det vara förvirrande när samma bokstav (ofta *x*) används i skilda sammanhang med olika innebörder. Viktigt för förståelsen är förstås då att kunna se syftet med det man gör, vilken roll de olika aktiviteterna spelar i en problemlösningssituation och vad som karakteriserar dessa.

Analysen ovan visar på två vägar att organisera undervisningen för att nå en ökad förståelse hos eleverna av de olika aspekterna på arbete med algebra. Genom att dessa explicit synliggörs får eleverna större möjlighet att öka sin medvetenhet om vad de egentligen gör när de arbetar med de olika matematikuppgifterna och därmed kunna känna större säkerhet.

Den ena vägen innebär att man inom ett och samma innehållsområde (ekvationer, mönster eller funktioner) medvetet belyser de olika algebraiska aktiviteterna (dvs. faserna översätta, manipulera och tolka) genom ett systematiskt val av arbetsuppgifter och arbetsformer. Den andra vägen fokuserar istället på var och en av dessa olika aktiviteter genom att medvetet belysa dessa inom de olika innehållsområdena. Man arbetar då till exempel systematiskt med översättningar från situationer, beskrivna i ord, tabeller eller figurer, till algebraiska uttryck som ekvationer eller formler som beskriver funktionssamband eller generella mönster. För båda dessa vägar kan arbetet bindas ihop av enkla inledande och avslutande mer sammansatta övningar där helheten i arbete med algebraiska verktyg måste hanteras, dvs. där hela den algebraiska cykeln aktualiseras. Genom att lösa problem man inte klarar utan algebra kan man uppleva användbarheten och effektiviteten hos algebra som problemlösningsverktyg. Ett mål är att nå förtrogenhet med algebra (symbolkänsla) som ett verktyg. Att algebran också kan ses som ett didaktiskt verktyg för att studera och nå en djupare förståelse av andra matematiska innehållsområden stärker algebrans ställning som en central del av skolmatematiken.

5 Det finns en viss parallell mellan denna typ av situation och den observation som noterats inom algebran att man till exempel vid ekvationslösning måste ”våga räkna med det okända”, dvs. använda en symbol (som x) för ett obekant tal och använda det i sina kalkyler trots att man inte vet vilket tal det är (se Bergsten et al, 1997, s. 69).

6 Perceptuell kunskap grundar sig på sinnesintryck av (geometriska) objekt, medan proceptuell kunskap handlar om att (främst inom aritmetik och algebra) matematiska symboler samtidigt kan tolkas som en operation eller som ett objekt, som t.ex. att uttrycket 2+3 kan ses som en process (att addera talen 2 och 3) eller som ett objekt (en addition som har t.ex. egenskapen att vara kommutativ, dvs. kan skrivas 3+2, osv.). Se Tall et al (2000).

7 Genom att eleverna gör något i en planerad aktivitet formulerar dom efter en stund hypoteser för hur det fungerar matematisk. Detta bör följas upp med en diskussion kring varför hypotesen är riktig, dvs. med en förklaring (validering).

Vid valet av arbetsformer och lärandemiljöer kan de sju punkterna i slutet av föregående avsnitt vara ett stöd[8], liksom en medvetenhet om den cirkularitet som är oundviklig när det gäller att utveckla den diskursiva kompetens som är nödvändig för att kunna delta i en meningsfull kommunikation med sig själv och andra med hjälp av algebraiska termer.

Avslutningsvis kan denna uppsats i sig ses som en problemlösningsverksamhet med meningsbärande symboliska verktyg, som ett försök att växa in i en diskursiv kompetens inom en del av det matematikdidaktiska kunskapsområdet – skolalgebrans *didactique*.

Referenser

Arcavi, A. (1994). Symbl sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics 14*(1), 24-35.

Bergsten, C. (1999). From sense to symbol sense. In I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education I.II*, 126-137. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematik-didaktik.

Bergsten, C. (2000). Vägar mot algebra. I K. Wallby et al (red.), *Tid för matematik. Dokumentation av 11:e Matematikbiennalen*, s. 459-461. Göteborg: Nationellt centrum för Matematikutbildning.

Bergsten, C., Häggmark, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla, Nämnaren TEMA*. Mölndal: Göteborgs universitet.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (1999). The role of algebraization in the study of a mathematical organisation. In I. Schwank (ed.), *European Research in Mathematics Education I.II*, 138-148. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations*. Dordrecht: Kluwer.

Collins, A., Brown, J.S. & Newman S.E. (1989) "Cognitive Apprenticeship: Teaching the Crafts of Reading, Writing and Mathematics". In Resnick, L. (Ed.), *Knowing, Learning, and Instruction: Essays in Honor of Robert Glaser*. Erlbaum, NJ, 453-494.

Hirst, A. & Hirst, K. (eds.) (1988). Proceedings of the sixth international congress on mathematical education. Budapest: Janos Bolyai Mathematical Society.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: John Murray.

Lakoff, G. & Núnes, R. (2000). *Where mathematics comes from: how the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Niss, M. & Højgaard Jensen, T. (red.) (2002). Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark. *Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18 – 2002*, Undervisningsministeriet.

Nordström, K. (1997). Algebra – ett begreppsmässigt svårt matematiskt område för grundskoleeleven. *LIU-ITLG-EX—97/13—SE* (Examensarbete, 10 poäng) Grundskollärarprogrammet 4-9, Linköpings universitet.

Quinlan, A. (1992). Levels of understanding of algebraic symbols and relationships with success on algebraic tasks. In A. Baturo & T. Cooper (Eds.), *New directions in algebra education*, 124-157. Red Hill, Qld: Queensland University of Technology.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior 14* (1), 15-40.

Sfard, A. (2001). "There is more to discourse than meets the ears. Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning". *Educational Studies in Mathematics 41*, 13-57.

Sierpinska, A. (1995). *Understanding in mathematics*. London: Falmer Press.

Skovsmose, O. (2000). Landscapes of investigation. Publication no. 20, Centre for Research in Learning Mathematics, Roskilde University.

Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E. & Simpson, A. (2000). "What is the Object of the Encapsulation of a Process?". *Journal of Mathematical Behavior 18*(2), 223-241.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra, K-12 (1988 Yearbook)*. Reston, VA: NCTM.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996) "Sociomathematical Norms, Argumentation and Autonomy in Mathematics". *Journal for Research in Mathematics Education,* v. 27(4), 458-477.

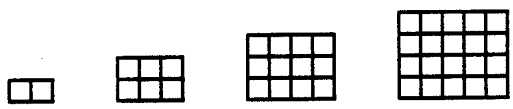
8 Se även beskrivningen av de åtta punkter som listas under rubriken Undervisa i algebra på goda grunder i Bergsten et al (1997, s. 25-29): progression, spänning och utmaning, multipla representationsformer, strukturell aritmetik, problemlösning, laborativa arbetsformer, matematisering, samt matematisk modell.

BILAGA 1 – Test på olika aspekter av skolalgebra

1) Maria, Hans och Erik plockade jordgubbar under sommarlovet. En dag plockade de 220 liter jordgubbar tillsammans. Maria plockade dubbelt så mycket som Hans. Erik plockade 20 liter mer än Maria.

Skriv en ekvation med vilken man kan bestämma hur många liter Hans plockade. (Du behöver inte lösa ekvationen)

2) Här nedan ser du de fyra första figurerna i en serie. Man kan fortsätta att bygga figurer i samma mönster hur länge som helst.



Figur nr 1 2 3 4

I figur nr 1 finns två småkvadrater. I figur nr 2 finns sex småkvadrater.

a) Hur många småkvadrater finns i figur nr 5?

b) Hur många småkvadrater finns i figur nr 20?

c) Hur många småkvadrater finns i figur nr n?
(Här kan n vara vilket nummer som helst)

3) Lös ekvationen $6x - 6 + 8x + 17 - 10x = 20 + x$

4) Ett kg äpplen kostar a kr och ett kg päron b kr.

Vad kan då uttrycket $3a + 5b$ betyda?

5) Förenkla uttrycken

a) $2x + 5 - (x + 2y) + 4y - x$

b) $6a - (3b - 1) + 3(b - 2a)$

6) Tvillingarna Eva och Peter plockar också jordgubbar på sommarlovet, men de arbetar på olika gårdar. Peter tjänar dagligen 60 kr och dessutom tjänar han 2 kr för varje liter jordgubbar han plockar. Eva har ingen dagspeng men tjänar istället 4 kr för varje liter jordgubbar hon plockar.

a) Skriv ett uttryck som beskriver hur mycket Eva tjänar under en dag om hon plockar x liter jordgubbar.

b) Skriv ett uttryck som beskriver hur mycket Peter tjänar under en dag om han plockar y liter jordgubbar.

c) Om Eva och Peter plockar lika mycket jordgubbar under en dag, hur mycket måste det då vara för att Eva ska tjäna minst lika mycket som Peter?

7) Långsidan på en simbassäng är femton meter längre än kortsidan. Följande ekvation handlar om simbassängen:

$$2x + 2(x + 15) = 150$$

Beskriv i egna ord vad x kan stå för och vad ekvationen beskriver.

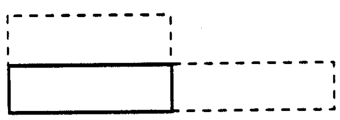
8) Anders, Jenny och Per byggde större och större figurer med småkvadrater enligt samma mönster och bestämde sedan antalet småkvadrater i figur nummer n.

Anders fick uttrycket	$1 + 2 \cdot (n - 1)$
Jenny fick uttrycket	$n + (n - 1)$
Per fick uttrycket	$2 \cdot n - 1$

Kan de tre uttrycken kan beskriva antalet småkvadrater i en och samma figur? (Förklara också varför du svarar ja eller nej)

9) Vilken av följande formler passar bäst till figuren nedan? (Ringa in den du väljer) Förklara också med egna ord varför du valde just den formeln.

$2a + b = a + 2b$ $\quad$ $a \cdot a \cdot b = a \cdot b \cdot b$ $\quad$ $a + ab = ab + b$ $\quad$ $2a \cdot b = a \cdot 2b$



BILAGA 2

Exempel på variation i elevsvar på samma uppgift på testet i bilaga 1

Uppgift 1

- $x + 2x + 2x + 20 = 220$
- $x + 2x + x + 20$
- $x + x^2 + x^2 + 20 = 220$
- $x \cdot 20 + x^2 + x = 220$

Uppgift 4

- 3 kg äpplen och 5 kg päron
- Priset för 3 kg äpplen och 5 kg päron tillsammans
- Man har köpt 3 kg äpplen och 5 kg päron
- Äpplena kostar 3 kr och pärona 5 kr
- $3a + 5b = 8c$
- Fruktsallad

Uppgift 5a)

$2x + 5 - (x + 2y) + 4y - x$	$2x + 5 - (x + 2y) + 4y - x$
$2x + 5x - 10y + 4y - x$	$2x + 5 - 5x + 10y + 4y - x$
$6x - 6y$	$-2x + 5 + 14y$

Uppgift 6a)

- E = $x \cdot 4$
- Eva = $4x$
- T = $x \cdot 4$
- $x = x \cdot 4$
- $x + 4$ kr
- $x = 4$ kr
- $x \cdot 4$
- $x = 4y$
- $x = 4$
- $4x$
- Lönen = $4 \cdot x$
- kr = $x \cdot 4$

Gudmundur Birgisson

Gudmundur Birgisson is an assistant professor of mathematics education at the Iceland University of Education. He studied philosophy and mathematics at the University of Iceland, and Mathematics Education at Indiana University. He taught mathematics, physics, and philosophy in secondary schools in Reykjavik for several years. In 1998 he was appointed Assistant Professor of Mathematics Education at the Iceland University of Education where he has taught graduate and undergraduate courses on mathematics, mathematics education and the philosphy of mathematics education. He has also organized inservice programs for mathematics teachers in many parts of the country. He has authored educational software in mathematics, and published web based materials for use with preservice teachers. Homepage: http://www.birgisson.com

Teachers´ and Preservice Teachers´ Preconceptions about Technology in Mathematics Education

Gudmundur Birgisson

Although human beings try to be rational, justifying their views, and providing evidence for what they believe, their thinking is embedded in a framework of undisputed statements, axioms of thought, or preconceptions. As teachers, our thinking about the implementation and use of technology in mathematics education, although rational and well justified for the most part, is also limited by what we believe to be true and never question, our preconceptions.

Since 1996, I have been teaching in-service courses and courses for preservice teachers on the use of information technology in mathematics education. These courses have covered topics such as algebra with spreadsheets, probability with spreadsheets, geometry with dynamic geometry software, and programming as a way to develop understanding of mathematical concepts. For the past four years, I have collected reflective papers, written by the teachers and preservice teachers, on how they believe technology can change the teaching and learning of mathematics. In these reflective papers, now from more than 200 people, I have found several statements which are common among both teachers and preservice teachers and also unjustified, taken to be true without any argument or evidence. Such views are preconceptions and will, if left unchallenged, guide the teachers´ and preservice teachers´ thinking about mathematics education and technology.
In this paper, I will give an overview of the teachers´ and preservice teachers´ preconceptions, examine whether they are true or false and discuss their implications for mathematics education.

Children and teenagers learn to use new technology more quickly than adults
Perhaps the most common of these preconceptions is the belief that children and teenagers can learn to use new technology more quickly than adults. When expressed generally, this means that anyone who is younger than I am should learn more quickly than I do. When confronted, and asked for a justification of this opinion, most people say that they have noticed how skilled the youngsters are at operating their mobile phones, playing computer games etc. When we as adults witness this, we seem to conclude that it does not take long for

the youngsters to master these skills. There seems, however, to be little hard evidence for this claim. Most adults do not try to master the techniques they have seen the youngsters demonstrate so skillfully, and therefore they don't know how long it would take them. Moreover, we don't know how much time the youngsters have spent playing with their mobile phones and computer games.

If we take for granted that children and teenagers need less time than we do to learn how to use new technologies, then we are less likely to give them sufficient time to become familiar with new technologies we want them to use in the mathematics classrooms. Also, we are more likely to be needlessly disappointed when we assess the first few lessons when a new technology is used.

Children and teenagers enjoy everything that can be done on a computer

Another common preconception is that children and teenagers like everything they do on computers. It is more difficult to explain why this is the case, and when people are asked, they usually admit that this will probably not be the case in the future, when kids have become more familiar with the use of computers, but add that in the present, surely, there is still some novelty for the children in the use of computers, and therefore they will like using them.

Obviously, this contradicts the evidence presented in the argument for the opinion that children need less time than adults to learn how to use computers. When justifying that view, people point out that children are skillful users of technology, which means that the children have already grown accustomed to the use of technology.

The opinion that children will enjoy any task presented or solved on a computer can lead us to be less careful when selecting tasks and problems for the youngsters to work on when they are supposed to use computers than we would otherwise be.

Women need more time to learn how to use technology than men do

Many of the reflective papers have contained statements asserting that most teachers are women, and that women need more time to learn how to use computers than men. This has puzzled me, although I must stress that this view is expressed in a relatively small portion of the papers I have examined. The first part is certainly true, but the latter part is not. Believing that it is, however, may lead to lowered self expectations of the female teachers. If they believe that they need more time to learn how to use new technology than the men do (and the men need more time than the youngsters), they are less likely to begin learning, and using technology. Finding this view in my students´ papers surprised me, and convinced me that there is still work to be done.

Children must learn how to do the mathematics by hand before using computers
Children must be taught to use the software before they can use it for mathematics
Teachers must become expert users of the software before using it in their classes

Most of the papers examined express beliefs about the necessary prerequisites for using technology in the mathematics classrooms. These almost always have the same form, and can best be explained by giving an example. If a teacher is thinking about having the children use spreadsheets (M.S. Excel, for example) to work on probability problems, the teacher must first make sure the children have learned to do all the necessary calculations by hand. Also, the teacher needs to make sure that the children have previously been taught how to use the spreadsheet program, preferably by someone else, and last but not least, the teacher needs to make sure he has mastered the use of the program himself.

These views are understandable. The first one is similar to the argument commonly made against the use of calculators in the early grades, and illustrates a misunderstanding of the purpose of using technology. We use technology to learn, not only to do things we have learned and no longer enjoy doing. We use technology to see things we cannot see without the technology. The spreadsheet is like a telescope. If we use it we can see things we could not see otherwise, if we are looking in the right direction.

The second view is also understandable. Many teachers feel that because software like Word and Excel is generic, that is not exclusively for use in mathematics classes, they can expect children to be taught how to use the software in other classes. The problem is, however, that by waiting for someone else to teach the youngsters to operate the software we miss many opportunities to enhance their learning of mathematics. There is, in my experience, no reason to wait. The things children need to know before being able to begin doing mathematics on a spreadsheet are easily taught by any mathematics teacher.

The third view also may prevent teachers from ever trying to use new technologies. If a teacher has decided, for example, to use Excel with her pupils, but is determined to wait until she has learned how to use every feature of the software, her adventure in technology and mathematics will never begin. Not many people know how to use every feature of Excel, and learning them will take more time than a teacher usually has available. Also, only a very limited knowledge about the software is needed to use Excel successfully with children and teenagers.

Taken as a set, the beliefs about the prerequisites can prove extremely hindering. They all suggest delaying the use of technology, until the children have learned what the technology was supposed to help them learn, until they have been taught to use the software no one is teaching them to use, and until the teacher has learned more than anyone can be expected to learn about a particular piece of software.

It is easier to connect the mathematics to the real world when computers are used
When computers are used in mathematics, low-achieving pupils will flourish

The people who have attended my classes seem to believe strongly that the introduction of computers will solve many persistent problems in the teaching of mathematics. The most common view is that when children and teenagers are using computers in their mathematics classes it is easier to connect the mathematics they are learning to the real world and to their own experiences. Another common view, although not as frequently expressed, is that when computers are used, the pupils who have been having trouble learning their mathematics will flourish.

Unfortunately, there is little evidence that either of these beliefs is true. Certainly, it has been the experience of many mathematics teachers that any change in their teaching, not only the introduction of computers, can change the teacher's opinion about the ability of individual pupils. I have seen no evidence, however, that the introduction of technology in mathematics classes generally makes a group of pupils less diverse in achievement. Moreover, there is little reason to believe that just because we use computers it will be easier to find interesting real world problems for our pupils.

Schools have few computers and the computer labs are always booked
Software is expensive, and it is hard to get money for mathematics software

Preconceptions about the availability and cost of technology are common. People seem to assume that there are few computers in the schools, and that the computers that are in the schools have few usable programs installed on them. People also seem to believe that where there are computer labs, they are reserved for something other than mathematics classes most of the time, and that it is very difficult to get access to them. Furthermore, many people believe that getting schools to by new software is extremely difficult, if not impossible.

The extent to which these preconceptions are true differs from school to school. Icelandic schools have been investing in computers and software quite extensively in the past few years, and it is safe to say that most mathematics teachers should be able to give their pupils some access to computers. There are, also, many examples where mathematics teachers have worked in collaboration with the teachers who teach computer classes, and this cooperation has been fruitful. Then, typically, the mathematics teacher has assigned some tasks for the pupils to work on, for example in Excel, and then time scheduled for computer lessons has been used to solve them in the computer lab.

I have tried to stay in touch with many of the teachers who have been to my in-service courses. Many of them have requested that their schools buy software, such as dynamic geometry software. I am not aware of a single case where the teachers have not been successful in convincing their school's administrators to buy the software they wanted. Based on this informal observation, I have concluded that it is simply not true that it is difficult to get money for mathematics software in Icelandic schools.

Mathematics software for Icelandic schools must be in Icelandic

Many Icelandic teachers seem to assume that software used in mathematics classes needs to be in Icelandic. When teachers are asked why they think so, they usually answer that when the software is in English (as is often the case), they will have to spend too much time translating the menu commands for their pupils.

It is probably true that using software where the commands are in Icelandic is easier, for teachers and pupils alike. However, waiting until an Icelandic version of the software becomes available can take years, and while waiting we miss many opportunities.

The internet is dangerous

The internet is on the news once in a while. Usually, the news is either that someone's credit card number was misused or that there is indecent material on the World Wide Web. This is probably the reason why many teachers feel that they should not let their pupils use the internet in mathematics classes. This worries me, because the internet now has many excellent learning opportunities in mathematics. Many Icelandic financial institutions have, for example, put calculators on their homepages. These calculators can be used to calculate loan payments, given interest rates and the rate of inflation; they can be used for calculations related to retirement savings, car loan payments, etc. By using these calculators, our pupils can begin to get familiar with important mathematical concepts, and begin to get a feeling for financial calculations even before they are expected to be able to do the calculations by hand.

Many of the preconceptions I have discussed in this paper are not true, and can be obstacles to the introduction of technology in mathematics education. Therefore, the reader may feel that I am criticizing the teachers and preservice teachers who expressed the views I have discussed. That has not been my intention. I held many of the views I have discussed myself, but when I saw how commonly they are expressed without justification I decided to reexamine my beliefs, and in many cases changed my mind. The study of the teachers´ and preservice teachers´ preconceptions has also changed how I teach my classes. Now, I make sure that the issues I have addressed in this paper are discussed, as I have realized that for many teachers, changing their preconceptions is as important as learning how technology can be used in mathematics education.

Morten Blomhøj og Mikael Skånstrøm

Morten Blomhøj, f 1959 (e-mail: Bolmhoej@ruc.dk) er lektor i matematik ved IMFUFA Roskilde Universitetscenter med matematikkens didaktik som forskningsfelt. Han er daglig leder af Center for Forskning i Matematiklæring (se http://mmf.ruc.dk/~bds/123.htm) og formand for den lokale organisationskomité for verdenskongressen ICME-10, der afholdes 4.-11. juli 2004 i København (se http://www.ICME-10.dk/).

Mikael Skånstrøm, f. 1949 (e-mail: mikael.skaanstroem@inet-spf.dk) er lærer på Statens Pædagogiske Forsøgscenter og lærebogsforfatter. Han arbejder med matematik og udvikling af undervisning i folkeskolens ældste klasser. Han samarbejder med Center for forskning i Matematiklæring.

Matematik Morgener - et udviklingsarbejde

Morten Blomhøj og Mikael Skånstrøm

Vi arbejder på et ønske om at udvikle en praksis, hvor eleverne kan blive optaget af at bruge matematik til at beskrive og forstå deres nære omverden og dermed blive motiveret for og få støtte til at lære matematik. Udviklingsarbejdet har baggrund både i en teoretisk matematikdidaktisk interesse for, hvad matematisk modellering kan betyde på folkeskolens ældste klassetrin, og i erfaringer med i praksis at bruge forskellige former for iscenesættelser i matematikundervisningen på dette niveau
(Alrø m.fl., 2000).

Som didaktisk begreb er matematisk modellering som oftest blevet knyttet til matematikundervisning på gymnasialt og universitært niveau. Begrundelsen har typisk været, at elever og studerende kan lære at anvende deres matematikviden ved at opstille, analysere og kritisere matematiske modeller. Tilegnelse af matematik kommer her forud for anvendelse i forbindelse med modellering. Kompetence til at kunne opstille, analysere og kritisere matematiske modeller er givet værdifuld i forhold til den rolle matematiske modeller spiller i samfundet i dag og kan dermed være et vigtigt sigte for matematikundervisningens bidrag til almendannelse (Blomhøj, 2001).

I forhold til matematikundervisning på børne- og ungdomstrinnet har matematisk modellering imidlertid først og fremmest sin didaktiske berettigelse ved at kunne skabe forbindelse mellem elevernes erfaringsverden og matematikkens begrebsverden og sprog. Konkret oplevede forbindelser, mellem praktiske situationer og problemer på den ene side og matematiske begreber og metoder på den anden side, kan styrke elevernes forståelse. Begreberne får mere mening og større faglig dybde for eleverne, når de kan knytte dem en til række forskellige situationer. Samtidig kan arbejdet med modellering gøre, at eleverne oplever matematik som en måde at anskue verden på og dermed på sigt bidrage til at bryde adskillelsen mellem skolematematikken og den virkelige verden. I udviklingsarbejdet ønsker vi at undersøge disse didaktiske ideers bærekraft i matematikundervisningen på 8.-10. klassetrin.

Udviklingsarbejdet har imidlertid også udgangspunkt i de problemer, man som matematiklærer kan opleve i den daglige praksis. Specielt på ungdomstrinnet har mange elever svært ved at finde meningen med den matematik, de bliver præsenteret for i skolen. For rigtigt mange bliver det overvejende instrumentelle motiver, der styrer deres deltagelse i undervisning. De søger at leve op til de krav, der stilles i undervisningen, men danner sjældent egne motiver, der knytter sig til det faglige indhold. Der er ikke noget de ønsker at blive klogere på - hverken i eller ved hjælp af faget matematik. En del elever møder endvidere alvorlige forståelsesvanskeligheder og bliver som følge heraf meget defensive i deres forhold til matematikundervisningen. Når der samtidig er meget store forskelle på elevernes faglige grundlag, når de starter i 8. klasse, tegner der sig en alvorlig pædagogisk udfordring for matematikundervisningen på ungdomstrinnet.

Med modellering og elevernes nære omverden som udgangspunkt forsøger vi at udvikle en praksis, hvor det er muligt at håndtere nogle af disse pædagogiske problemer.

Scenen sættes

Vækkeuret ringer! Din hånd rammer uret, der falder på gulvet. Du får fat i det, og slukker det med et suk ….. Du vender dig om på den anden side og prøver at forestille dig, at det er blevet lørdag. Men så mærker du den – lysten til at komme i gang, fordi der står matematik morgener på skemaet. Muntre matematik morgener med Morten & Mikael tænker du. Kl 8:00 skal du være sammen med alle de andre. En ny og spændende dag står forventningsfuld og venter på at blive taget i brug af netop dig.

Så tager du dine matematikbriller på og rejser dig fra den varme seng. Du går ud på badeværelset – tjekker måske lige elmåleren undervejs. På badeværelset smiler spejlet til dig, mens du tjekker om du er sluppet for bumser i løbet af natten.

Du børster tænder og forestiller dig, hvor sjovt det ville være at se, hvor lang en stribe man kunne lave, hvis man trykkede al tandpastaen ud på én gang…..
Du lader det varme vand pjaske ned over din krop i flere minutter – hov, hvor meget vand gik der egentlig til det?

Der er også matematik i klokken, vejret, morgenmaden, cykelturen, køreplanen, blandt andet……

Efter denne introduktion fik eleverne følgende opgave med besked om, at de meget gerne måtte inspirere og hjælpe hinanden, men at de skulle aflevere hver deres personlige produkt:

Lav nøjagtige optegnelser af det, du ser med dine matematikbriller - fra du står op til du møder i skolen. Dine notater skal så bearbejdes matematisk, og dine resultater og overvejelser skal formidles på et stykke A3-papir i et indbydende layout. Du har fire moduler til det hele.

Rammerne om forløbet

Undervisningsforløbet foregår på Statens Pædagogiske Forsøgscenter (SPF). Eleverne går i 8. klasse og er startet på skolen i august 2002 – en måned før forløbet. Der er 48 elever - 24 drenge og 24 piger - som er udtrukket ved lodtrækning blandt cirka 250 ansøgere. Lodtrækningsmodellen er konstrueret, så elevgruppen er repræsentativ både fagligt og socialt. Eleverne kommer fra forskellige kommuner, flest fra København og Rødovre, hvor skolen ligger.

Matematik Morgener var elevernes første møde med matematik på SPF. De var delt i to hold i dette forløb, som varede fire moduler (4 x 90 minutter) for hvert hold. I hele forløbet var både Morten og Mikael til stede og arbejdede parallelt som støttende, motiverende og udfordrende lærere.

Hvad kom der ud af forløbet – vores umiddelbare vurdering?

Hvis afleveringsfrekvensen er et succeskriterium, så var det en succes. I mappen med alle produkterne sidder 47 ud af 48 mulige besvarelser. På hver eneste af dem er der historier med matematisk indhold, der hører til elevernes egen morgen - fra de stod op til de mødte i skole. Næsten alle lavede repræsentationer af og udregninger med egne data, og omkring en tredjedel forklarede deres beregninger. Nogle opstillede formler og regneudtryk med enheder, men kun få reflekterede i produktet over deres resultater. Næsten alle brugte grafiske repræsentationer som tegninger, kort, grafer og cirkeldiagrammer. Rigtig mange af eleverne har tydeligvis arbejdet godt og længe med layoutet.

Ved forløbets afslutning fremlagde tre elever på hvert hold deres arbejde, og der var spørgsmål og diskussion i klassen. Ved denne lejlighed og i endnu højere grad ved samtaler undervejs i forløbet viste det sig, at de fleste elever var i stand til og interesseret i at reflektere over deres resultater og fremgangsmåder.

Om det var på trods af eller fordi dette forløb var det første møde med matematik på skolen er ikke til at sige, men alle var de med på ideen fra første øjeblik. Ingen af eleverne havde erfaringer med at tage "matematikbrillerne" på og se på verden gennem dem. Så der skulle en matematisk-mental omstilling i deres hoveder til for at sætte dem på sporet. Nogle så straks fordele og pointer, mens andre gennem hele forløbet havde tydelige vanskeligheder ved selv at skulle få øje på og selv at formulere problemstillinger. Men der var hele tiden et stort aktivitetsniveau, både i klassen og de andre steder, eleverne søgte hen for at finde oplysninger. Når matematikopgaverne ikke bare lå færdigformulerede og parate til at modtage et enkelt svar, kan der gå lang tid med rent praktisk at få styr på arbejdet. Og det praktiske tog også lang tid i forbindelse med opbygningen af produktet, A3-siden. I arbejdet med matematik har eleverne klart brug for deres logiske intelligens, hvorimod de i en traditionel matematikundervisning måske ikke har brug for særlig mange af de andre intelligenser, fx den sproglige, den kropslige osv. Ved problemorienteret undervisning kommer langt flere intelligenser i spil, noget der efter vores overbevisning er med til at styrke både udbyttet og interessen for arbejdet med tal som udgangspunkt (Ejersbo & Skånstrøm, 2002).

Der var plads til alle elever i forløbet. Både de fysisk aktive drenge, der har svært ved at sidde på stolen et helt modul, og de omhyggelige piger, der gerne vil bruge tid på at lave et æstetisk produkt. Alle elever havde mulighed for at deltage, hver med deres interesse og faglige udgangspunkt, og muligheden for samtalen var til stede hele tiden.

Eleverne var gode til at arbejde sammen og til flittigt at bruge lærerne undervejs. Overvejelser, hypoteser, afprøvninger, ræsonnementer og systematiseringer blev en naturlig og nødvendig del af arbejdet. Dette giver grundlag for, at eleverne kan tale sammen på om noget fagligt relevant. Det giver samtidig læreren god mulighed for i samtalen at få et større kendskab til den enkelte elevs opfattelse af faget, af elevens formåen og potentiale.

Hvilke emner blev der arbejdet med?

Der er en del emner, der går igen i mange af elevernes besvarelser. Dels er der nogle, der ligger lige for, og dels inspirerer eleverne hinanden vældig meget. Men først og fremmest er det lærerens korte introduktion, eleverne tager bestik af. Hermed rejser der sig et pædagogisk dilemma. Hvis man ønsker eleverne selv skal overtage styringen af deres virksomhed i undervisningen, må man som lærer lave en nøje planlægning, der muliggør dette. Eleverne tager imidlertid imod enhver mulighed for at oversætte til konkrete handlingsanvisninger med kyshånd. Åbenhed kræver nøje planlægning, også af hvad man ikke vil sige.

På Internettet - på www.krak.dk - kan eleverne finde en nøje beskrivelse af deres skolevej. De kommer til skole på forskellig måde, men især cyklisterne kan få noget ud af at beregne deres gennemsnitshastighed med tilhørende samtale om blandt andet alle de stop, de har undervejs. Hvordan kan man grafisk vise en cykelturs komplicerede forløb. Der kan tegnes grafer, der viser sammenhængen mellem kørt strækning og forbrugt tid eller der kan skrives tidspunkter på en rute indtegnet på et kort, og hvad siger sådanne repræsentationer i forhold til fx samlet strækning, tid og gennemsnitshastighed? Det er sådanne spørgsmål, det bliver muligt at stille.

Et andet hit er tidsforbruget. Langt de flest registrerer deres gøremål i forhold til klokkeslæt, så en grafisk repræsentation i form af et cirkeldiagram er oplagt. Cirkeldiagrammet kommunikerer for de fleste meget klart rent visuelt, og så kan det udformes æstetisk med farver og udsmykninger; men under hvilke omstændigheder er det egentlig en hensigtsmæssig repræsentation? Morgenmaden og forskellige former for forbrug er også repræsenteret på mange af elevernes plakater.

Åben kanal

Det var karakteristisk for forløbet, at der ind imellem opstod dialoger mellem lærer og elev, hvor det tilsyneladende var muligt for læreren på en meget effektiv måde at støtte elevernes læring. Eleverne var typisk optaget af at få løst et problem eller beskrevet en situation ved hjælp af matematik. Det var som regel eleverne, der tog initiativ til at involvere lærerne. Det var ofte forbløffende lidt lærerne behøvede at sige – nogle gang var det nok blot at stille et enkelt spørgsmål – for at bringe eleverne videre. Eleverne var imidlertid mange gange meget interesseret i en uddybende dialog efter, at deres problem var løst. Og som lærere oplevede vi, at det i sådanne situationer var muligt gennem en kort dialog på afgørende måde at støtte centrale begrebsdannelser hos eleverne.

Metaforisk har vi valgt at karakterisere disse situationer med udtrykket "åben kanal". Elev og lærer var tunet ind på én og samme kanal, der var tilstrækkeligt afskærmet for uvedkommende støj. Når eleven har behov for at lave fx et cirkeldiagram til beskrivelse af et tidsforbrug, er der i høj grad skabt "en åben kanal". Som lærer kommer man i den ønskesituation, at eleven ligefrem kræver at lære noget konkret. Og eleven ønsker at lære her og nu, fordi hun har brug for svaret for at komme videre med noget, der optager hende lige nu.

Udgangspunktet for disse situationer er typisk, at eleven har et klart perspektiv for dialogen med læreren, nemlig at få løst et konkret problem. Hvis læreren i dialogen respekterer dette perspektiv og afstemmer sin faglige støtte i forhold hertil, gives et godt udgangspunkt for en udviklende dialog (Alrø og Skovsmose, 1999).

Det er oplagt, at kanalen hurtigt kan lukkes igen. Læreren kan komme for langt væk fra udgangspunktet i sin iver efter at formidle interessante faglige sammenhænge, eleven kan blive distraheret af kommentarer fra kammeraterne, eller det kan blive for kognitivt krævende for eleven at deltage i dialogen. "Åben kanal" er altså noget der kun optræder kortvarigt og momentvis i samtalerne med eleverne.

Vi beskriver her kort nogle af de situationer, hvor der efter vores vurdering er tale om "åben kanal".

Tandpastatuben

Lærke har taget hul på tandpastatuben. Hvor mange gange tandbørstning er der egentlig til i sådan en almindelig tube - og hvor lang kan striben blive, hvis man klemmer det hele ud på en gang? Det er spørgsmål som Lærke har stillet. Hun har noteret, at der er 75 ml i en tube. Hun har lavet nogle tegninger og opskrevet noget af en beregning af rumfanget af en stribe tandpasta. Nu er hun begyndt at trykke tandpasta ud på et stykke papir. Det involverer hun begge lærerne i. Hun spørger:

Lærke: Hvad skal jeg måle?;
Læreren: Hvad er det du vil finde ud af?
Lærke: Hvor meget der er i sådan en lille stribe – til en gang?
Læreren: Hvilken form har striben?
Lærke: Form? … Den er cylinderformet.
Læreren: Hvad skal du kende for at beregne rumfanget af sådan en?
Lærke: Er det ikke noget med h gang pi og r i anden?
Læreren: Jo, men hvad er h og r i forhold til din stribe tandpasta?
Lærke: h er højden – nej det må være længden af striben og r er radius, men hvordan måler jeg den?
Læreren: Prøv med en lineal. (Læreren går)

Lærke går straks i gang med at måle. Hun måler længden af striben til 1,5 cm. Hun prøver at måle radius ved snitte lodret ned gennem midteraksen i striben. Det er svært at måle på den måde, og hun bestemmer sig for at måle diameteren. Hun måler diameteren af hullet i tuben og diameteren af striben i et lodret snit, som hun laver med linealen. Efter en del målinger bestemmer hun sig for, at diameteren af en normal stribe er 0,7 cm. Radius beregnes til 0,35 cm. Hun har skrevet formlen for volumen af en cylinder:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Ved indsættelse af de målte størrelser på en lommeregner med liniedisplay får hun:

$$\pi \cdot 0.35^2 \cdot 1.5 = 0.6\,cm^3$$

Efter at have snakket lidt med en kammerat om sagen skriver hun at 1 ml = 1 cm^3, og herefter beregner hun hvor mange tandbørstninger, der er til i tuben:

$$\frac{75\,ml}{0.6\,ml} = 125\,gange$$

Hun er overrasket over, at der er til så mange gange og kalder straks på læreren, fordi hun mener der må være en fejl. Sammen når de frem til at en familie på 4 kan bruge en tube på 15 dage, og det lyder jo meget rimeligt mener Lærke. Læreren udfordrer efterfølgende Lærke til at beregne, hvor lang en stribe, man kan lave af en hel tube. Lærke sætter 75 cm^3 ind i formlen for rumfanget, isolerer h og beregner med lommeregneren h til 195 cm. "Man kan sikkert lave en endnu længere, hvis man gør sig umage for at få en tynd stribe" – mener Lærke, der har vældig lyst til at prøve selv.

Den grønne bølge

Simon stiller tidligt i forløbet spørgsmålet om, hvordan man kan få såkaldt "grøn bølge" på Slotsherrensvej. Mickey siger, at der er en bestemt hastighed, der passer med, at man får grønt i begge kryds. "Hvad hvis man så kører med den dobbelte hastighed, passer det så også", spørger Simon. Sammen med Mickey må han ud på vejen for at se, hvad det er der sker i lyskrydsene for at konstatere, at det kan man ikke. Man kommer bare meget hurtigere hen for at holde for rødt. Mickey og Simon målte, hvor lang tid der gik fra det første kryds skiftede til grønt, til det anden kryds blev grønt. Samtidig bestemte de afstanden mellem krydsene ved hjælp af triptælleren i lærerens bil. Tilbage i klassen er det imidlertid ikke så nemt for Mickey og Simon at beregne med hvilken hastighed, man skal køre, for at få grøn bølge. De to målte størrelser (750 m og 85 sek.) kan ganges og divideres på flere måder. I løbet af meget kort tid forslår eleverne samtlige muligheder og forventer, at læreren skal afklare sagen. Simon bedyrer endda, at det med hastighed og sådan noget, kommer han aldrig til at forstå! Læreren beder eleverne skrive alle de mulige beregninger af hastigheden, som de har foreslået. Så spørger læreren: "Hvis nu der havde været lidt længere mellem krydsene og den samme tid, skulle man så køre hurtigere eller langsommere for at nå det?" Per intuition svarer begge elever: "Hurtigere". "Hvad så, hvis der havde været lidt mere tid men samme afstand?". "Så kunne man køre langsommere" lyder det synkrone svar. "Hvilken måde at beregne hastigheden er så den rigtige?" Efter lidt betænkningstid bliver de enige om 750/85 som de udregner på lommeregneren til 8,82 og ser spørgende på læreren. "Hurtigt eller langsomt?" spørger læreren. Nu er eleverne blevet optaget af sagen, og der udspænder sig en længere dialog, hvor de får sat enheder på beregningen og omregnet hastigheden fra 8,82 m/sek. til 31,8 km/time.

Det virker som om, de har fået en vigtig erfaring om betydningen af en størrelses enhed. Resultatet mener de passer fint med, at man godt lige kan nå det på cykel, hvis man får en flyvende start. Det går jo også lidt ned ad bakke, som Simon og Mickey minder hinanden om. Der bliver snakket om start og spurt og gennemsnitshastighed. Til sidst udfordrer læreren eleverne til at beregne den største og den mindste hastighed, som man kan køre med, hvis man skal over for grønt i begge kryds – på et skift naturligvis. Eleverne tager udfordringen op og laver nogle beregninger, men det kom ikke med på elevernes plakater, og læreren fik ikke fulgt op på det.

Tøjtælletræet

Stine ved ikke lige, hvordan hun skal håndtere at beskrive de mange valgmuligheder hun har, når hun skal tage tøj på om morgenen. Men det ved Louise, fordi hun har lige brugt et tælletræ til at illustrere de mange, mange muligheder, der findes for at komponere mad til madpakken - når hun altså kommer hjemme fra sin farmor. Louise lærer Stine at lave et tælletræ, mens læreren ser på. Det tager to minutter, og Stine får tilsyneladende helt styr på det. Hun tegner et tælletræ. “Hvis jeg har fire par bukser, fem bluser og tre jakker at vælge mellem, så har jeg $4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$ forskellige muligheder, og det er lig med antallet af grene i toppen af træet – så er det ikke så mærkeligt, at det tager lang tid at bestemme sig”. “Hvad hvis der er noget, der ikke passer sammen?” – spørger læreren. “Så må man stryge nogle af forgreningerne!”

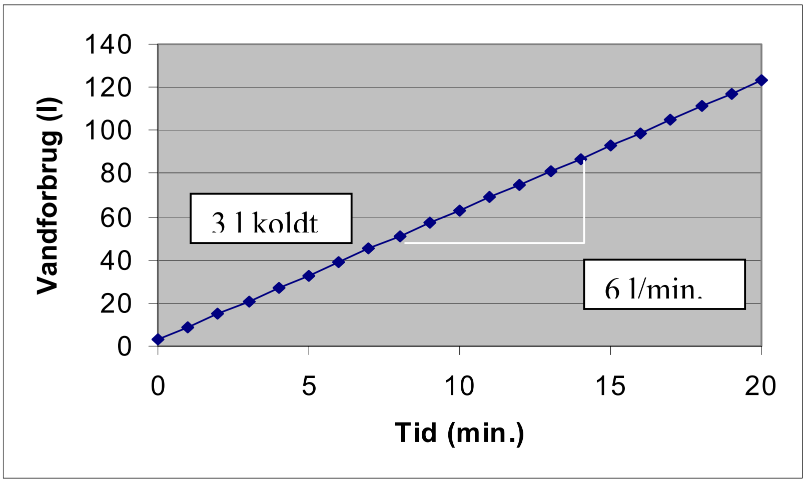
Louise arbejder med sin plakat.

Brusebadet

Der er flere af eleverne, der har beregnet hvor meget vand, de bruger til deres morgenbad. De har på forskellig måde målt, hvor meget vand der løber ud af bruseren. Morten (elev) har holdt en gulvspand ind under bruseren i et minut og bagefter målt, at der var 6 l i spanden. Han har skrevet på sit kladdepapir, at han bader i 10 min. og bruger 60 l vand. Læreren kommer forbi og de snakker om, hvordan målingen er lavet.

Læreren: Lader du ikke vandet løbe lidt, inden du går ind, så det ikke er koldt.
Morten: Jo, det tager nok omkring et halvt minut.
Læreren: Prøv at måle det også – i morgen. Men hvis du venter et halvt minut, hvor meget vand bruger du så i alt på dit bad.
Morten: 63 l.
Læreren: Kan du lave en tabel, der viser hvor meget vand du bruger, alt efter hvor lang tid du bader? (Læreren går)

Efter ca. 10 minutter har Morten lavet en tabel, der viser vandforbruget for 1-20 minutter. Morten forklarer, at han har lagt 6 til hver gang og at et bad på 1 min. kræver 9 l. Læreren udfordrer ham til også at tegne sammenhængen som en graf i et koordinatsystem. Morten laver et koordinatsystem på millimeterpapir og indtegner alle punkterne fra tabellen og en ret linie gennem dem.



Figur 1: Gengivelse i Excel af Mortens graf.

Lærer: Kan du også lave en formel, der kan beregne vandforbruget, når du indsætter hvor lang tid du vil bade?
Elev: Hvordan mener du …. man skal gange med 6 og lægge 3 til.
Lærer: Ja, det er helt rigtigt. Hvis du kalder badetiden for x og vandforbruget for y, kan du så lave en formel eller ligning for y?

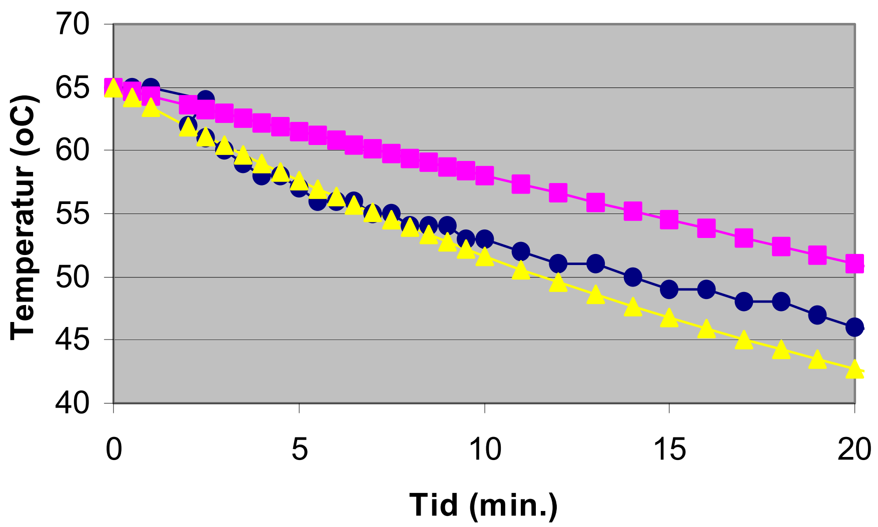
Efter nogle minutter og lidt hjælp fra læreren når Morten frem til følgende ligning:

$$y = 6 \cdot x + 3$$

Morten prøver formlen for forskellige tider – den passer! Morten er glad for formlen og meget modtagelig for en samtale med læreren om liniens ligning, hældningskoefficient og skæring med 2. aksen – det er nye begreber for Morten. Såvel tabel, graf og ligning kom med på Mortens plakat med gode forklaringer, om hvad de enkelte variable og tal betyder. Til sidst i samtalen foreslår læreren, at Morten næste gang han er i bad skal tænke på, om han vil skrue op eller ned for hældningskoefficienten. Morten griner og siger: "men så passer beregningen jo ikke mere".

Kakaoen bliver kold

Mads – der tit køber kakao i automaten – er blevet optaget af at beskrive, hvordan kakaoens temperatur ændres, efter den er kommet ud af automaten. Nogle gange kommer han til at trække en kakao for sent til, at han kan nå at drikke den inden næste time, og så brænder han tungen. Til det andet modul har Mads købt en kakao, og han måler temperaturen under afkølingen med et termometer fra fysiksamlingen. Til næste matematikmodul har Mads



indtastet sine data i et Excel regneark. Han får tegnet en graf over sine data, og viser den til læreren. Det er grafen med cirkler i figur 2.

Figur 2: Viser måledata og to modeller for kakaoens temperatur.

De taler om, hvordan kurven videre vil forløbe, og om man kan beskrive den med matematik. Mads siger, at temperaturen vil blive ved med at falde, til den har samme temperatur som rummet. Hvordan det vil ske, ved han ikke, men han viser med hånden, at han som en mulighed tænker, at den måske falder som en retliniet forlængelse af kurven for målepunkterne på skærmen. Læreren spørger, om Mads kan lave en formel i regnearket som viser, hvordan temperaturen ville ændre sig, hvis den faldt med et konstant antal grader hvert minut og gøre det, så man let kan ændre denne afkølingskonstant. Det kunne være vores første model for, hvordan afkølingen kan beskrives matematisk. Mads – der nok ikke helt ved hvad læreren forstiller sig - går ind i regnearket i en søjle ved siden af måledata (tiderne står i søjle A og temperaturene i søjle B).

Mads: Hvilken temperatur skal vi starte med?
Læreren: Den skal vel starte ved samme temperatur som kakaoen.
Mads: Ok 65 grader – Mads taster.
Læreren: Hvad så i næste celle, det er et halvt minut senere.
Mads: Der skal vi trække noget fra, men hvor meget?

Læreren: Hvis vi skriver konstanten i celle C2, og starter med at indsætte, hvor meget temperaturen ca. aftager for hvert minut, så kan du bruge denne celle i formlen. Hvad skal vi sætte den til i starten.
Mads: 1 grad per minut, det passer meget godt. Men der går jo kun et halvt minut – så det er vel kun det halve der skal trækkes fra?
Læreren: Ja, og for at det skal være den samme celle, når du kopierer formlen, skal du skrive "C4- 0,5*C2".
Mads kopierer formlen ned til 60 minutter, og ser at de beregnede temperaturer er næsten konstante fra 20 minutter, mens de målte stadig falder.
Mads: Der er noget galt. Det passer ikke.
Læreren: Hvad sker der efter 20 minutter?
Mads: Der målte jeg kun hvert 10. minut.
Læreren: Så passer formlen heller ikke. Den beregner jo faldet på et halvt minut. Prøv om du kan lave en formel, der tager hensyn til, hvor lang tid der går mellem hver måling.
Efter ca. 10 minutter har Mads fået ændret formlen til "C4 – (A5-A4)*C2" og tegnet grafen for de beregnede temperaturer sammen med de målte data. Han kalder på læreren med bemærkningen "Se det bliver en ret linie" (grafen med firkanter i figur 2).

I fællesskab prøver de at ændre på konstanten for at få den bedste overensstemmelse mellem model og måledata, men det er ikke muligt at få særlig god overensstemmelse i hele intervallet. Undervejs spørger læreren om, hvad der vil ske i modellen, når temperaturen når rumtemperaturen (som Mads har målt til 21 grader).
Mads: Den bliver ved med at falde!
Læreren: Ja, det er rigtigt. Modellen forudsiger faktisk, at kakaoen fryser til is, hvis vi venter længe nok. (Mads griner). Lad os se, om vi kan lave en model, der ikke har det problem.
Ved fælles hjælp får de opbygget en formel, hvor temperaturfaldet afhænger af forskellen mellem kakaoen's aktuelle temperatur og rumtemperaturen. Modellen bliver beregnet i søjle D og formlen kommer til at se sådan ud: "D4 – (A5-A4)*D2*(D4-D1)", hvor rumtemperaturen står i celle D1 og D2 er en modelkonstant.

Mads eksperimenterer med størrelsen af konstanten og udtegner flere grafer. Han finder ud af, det faktisk er muligt at opnå rimelig god overensstemmelse mellem målepunkterne og den anden model. Grafen med trekanter i figur 2 er et af resultaterne fra den anden model.

Oplevelser og holdningsændringer

Undervejs i forløbet oplevede vi flere gange, at eleverne gav udtryk for positive oplevelser, og nogle elever proklamerede endda en for dem ny positiv holdning til faget..

Eleverne har haft omkring 1000 matematiklektioner, når de starter i 8. klasse. Langt de fleste har en meget fast og ofte meget stereotyp opfattelse af, hvad faget er, og hvordan det praktiseres i folkeskolen. Mange er rigtig glade for og trygge ved denne undervisning, men der er også mange, som er rigtig kede af den.

Undervejs i forløbet stiller nogle elever også spørgsmålstegn ved, om det nu er godt nok - om de nu lærer nok, og om de lærer det, de skal. Og det at arbejde uden en lærebog kan da også gøre nogle utrygge. Men de fleste synes rigtig godt om arbejdsformen, om udfordringen og om mulighederne for at arbejde selvstændig og med ansvar for deres eget produkt. Tine synes ligefrem, at matematik nu er hendes bedste fag, og Rasmus mener ikke, at han nogen sinde har lavet så meget matematik. Og det har han såmænd nok ret i, tyder det på. Simon mener, at han nu bedre forstår det med hastighed, og Louise forstår bedre, hvorfor det tager hende så lang tid at tage tøj på. Stefan kan beregne rumfanget (!) af sin papegøje, og Ida vil nu begynde at cykle til skole, efter det er gået op for hende, at halvdelen af rejsetiden med de offentlige transportmidler er ventetid.

Iscenesættelse som pædagogisk virkemiddel

En iscenesættelse som Matematik Morgener muliggør et samspil mellem elevernes erfaringer, undervisningens indhold og matematisk modellering. Den kan tillige skabe en ramme omkring undervisningen, der giver plads til alle elever. Den enkelte elev kan bruge sit eget sprog til at give mening til den matematik, hun arbejder med. Iscenesættelsen giver mulighed for, at eleverne selv kan danne sig en mening med deres konkrete faglige undersøgelser, indsamling og bearbejdning af data.

Det er iscenesættelsen, der giver grundlaget for, at eleverne kan styre deres egen virksomhed. Når det sker, opstår nye pædagogiske muligheder. I samtale med elever, der er optaget af at løse et problem, som de føler er deres eget, har læreren gode muligheder for at få indsigt i elevernes tankeprocesser. Og som illustreret med eksemplerne på "åben kanal" opstår der mulighed for meget læringseffektive dialoger mellem lærer og elev og mellem eleverne indbyrdes.

Modellering som undervisningsform

Når matematik anvendes til at beskrive, beregne, forudsige, forstå eller forme forhold i den virkelige materielle verden, er der altid involveret en eller anden form for model. Hvis man i matematikundervisningen arbejder med anvendelser, arbejder man altså med matematiske modeller. Men hvis man som lærer ikke arbejder bevidst på det, vil anvendelserne ikke nødvendigvis bidrage til, at eleverne oplever relationen mellem matematikken og deres omverden.

Modellering som undervisningsform handler om at arbejde bevidst med relationen mellem matematik og den virkelige verden. Det kræver, at man tager både virkeligheden og matematikken alvorligt. En matematisk model angår en relation mellem noget matematik og en virkelig situation, og kun hvis man kan fastholde en synsvinkel, hvor man kan se både matematikken og virkeligheden, kan man erkende, kritisere eller bevidst opstille en matematisk model (Blomhøj, i tryk).

I dette forløb nåede vi ikke så langt, hvad angår elevernes bevidste arbejde med og refleksion over matematisk modellering. De fleste elever oplevede på intet tidspunkt, at de arbejdede med matematisk modellering. Men alle elever fik nogle – for manges vedkommende første – vigtige erfaringer med selv at bruge matematik til at beskrive og forstå deres nære omverden. Disse erfaringer vil der i høj grad kunne bygges videre på i arbejdet med matematisk modellering.

Afslutning

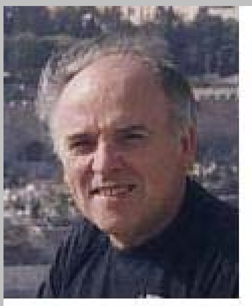
Vi iværksatte Matematik Morgener for at fokusere på begrebet modellering, og på hvordan det er muligt at arbejde med dette begreb i undervisningen. Vi kom et stykke vej, men ikke så langt, som vi havde håbet og troet. Imidlertid fortsætter samarbejdet de kommende år, og målet er, at eleverne afslutter de tre års undervisning i matematik (8.-10. klassetrin på SPF) med at være bevidst arbejdende med matematisk modellering. Vi har besluttet, at de næste emner skal være mere fastlagte og styrede, så eleverne kan få fælles oplevelser med nogle eksemplariske modelleringsforløb. Med udgangspunkt i nogle af de problemstillinger, der blev arbejdet med under matematik morgenerne, vi vil gerne skabe nogle fælles faglige oplevelser for alle eleverne. Og dermed få grundlag for at udfordre dem til at arbejde mere bevidst med matematisk modellering. Vi har allerede taget hul på et sådant forløb. Udgangspunktet er elevernes brug af begrebet hastighed, som flere af eleverne så med sine matematikbriller. Her vil vi arbejde mere systematisk med at bruge dette begreb til modellering og med kritik af modeller, der handler om hastighed. Vi har valgt hastighed som tema fordi alle elever har erfaringer med og intuitive opfattelser af dette begreb. Samtidig er modellering af forskellige hastighedsfænomener meget velegnet, når det drejer sig om at udvikle elevernes forståelse af matematiske begreber som variabel, brøk, funktion og grafisk afbildning, og når det som noget meget væsentligt i modellering handler om at indse betydningen af at regne med enheder.

Matematikundervisning handler imidlertid om andet end matematisk modellering, og der er derfor både interessante og vanskelige afvejninger at foretage i den pædagogiske tilrettelæggelse, når man ønsker at gøre matematikundervisningen mere virkelighedsnær og vedkommende for eleverne. Held og lykke med den udfordring.

Referencer

Alrø, H. og Skovsmose, O. (1999): *Samtalen som et støttende stillads*.
Center for Forskning i Matematiklæring. Danmarks Pædagogiske Universitet, Roskilde Universitetscenter og Aalborg Universitet, Tekst nr. 8.
Alrø, H., M. Blomhøj, H. Bødtkjer, O. Skovsmose og M. Skønstrøm (2000): Farlige små tal – almendannelse i et risikosamfund. *Nordisk matematikdidaktikk* 8 (4), 27-52.
Blomhøj, M. (1993): Modellerings betydning for tilegnelsen af matematiske begreber, *Nordisk matematikdidaktikk* 1 (1), 18-38.
Blomhøj, M. (2001): Hvorfor matematikundervisning? – matematik og almendannelse i et højteknologisk samfund. I Niss, M. (red.) *Matematik og verden*, 219-246, Fremad.
Blomhøj, M. (i tryk): Modellering som undervisningsform.
Skovmose, O. og Blomhøj, M. (red.) *Kan det virkelig passe – 123 matematiklæring*. L&R Uddannelse, København.
Ejersbo, L.R. og M. Skånstrøm (2002): Klip og kompetencer. *Crit* nr. 28

Trygve Breiteig



Trygve Breiteig er lærerutdannet med hovedfag i matematikk, og er tilsatt som dosent ved Høgskolen i Agder. Han arbeider med matematikk, matematikkdidaktikk og lærerutdanning. Han har veiledet til hovedfag og også ved forskeropplæring: fram til doktorgrad i mathematics education i et samarbeidsprosjekt i sørlige Afrika. Ellers er han opptatt av tilrettelegging av matematiske emner, som geometri og tallteori i lærerstudium, av mening, sammenheng og forståelse i matematikklæringen. Han har utviklet lærebøker for grunnskolens ungdomstrinn og for lærerutdanning.
Hjemmeside: http://home.hia.no/~trygvebr/

Regn med usikkerhet: Sjanse, risiko og matematikklæring

Trygve Breiteig

Det eneste vi vet med sikkerhet er at alt er usikkert. (Voltaire.)

1 I samfunnet

På en rekke livsområder i dagens samfunn gis det situasjoner der vi må regne med usikkerhet. Utfallet av situasjonen er uvisst. Vi må anslå eller kanskje beregne en risiko, en sjanse, eller en sannsynlighet. Vi møter slike situasjoner på så ulike felt som økonomi, forsikring, medisin, spill og fritid, innenfor trafikk eller kommunikasjon, prognoser og værvarsling. En tilfeldig gjennomblading av to-tre dagers aviser viste oss oppslag som disse – og det gir straks noen tanker:

***
– Færre rovviltskader på husdyr det siste året.
– Hva er risikoen for å miste sauer når en flokk sendes på beite om sommeren?

– Myndighetene varsler strengere kontroll med el-anlegg.
– Kan det redusere risikoen for brann?

– Pen kjøring på E39 ved Utrykningspolitiets kontroll ved … i går. Bare én brøt fartsgrensen.
– Hva kan vi slutte om kjøringen på denne strekningen i det store og hele? Hvor stor er risikoen for ulykker? Burde noen risikofaktorer reduseres? Hvilke?

– Kameratene på 16 og 18 år fikk enkelt tak i Rohypnol i …
– Hvilken risiko gir bruken av Rohypnol for å utføre kriminelle handlinger under ruspåvirkning, eller for å bli avhengig av slikt stoff?

– Legen mente for et år siden at symptomene hos denne kvinnen skyldtes noe annet, nå har kreften spredt seg fra livmorhals til lunger og lymfer.
– En testemetode kan være effektiv i det å oppdage en sykdom, men det kan være en usikkerhet ved at den kan også feile. Hvilke konsekvenser får det når en stiller en diagnose? Når en informerer pasienten?

– NN har vært sprøytemaler og sandblåser ved et mekanisk verksted i 30 år. Den sykdommen han har pådradd seg, er karakteriseert som løsemiddelskade. Sammen med kona kjemper han for erstatning fra forsikringsselskapet.
– Hvor sannsynlig er slik sykdom i et annet arbeidsmiljø? Hva kan vi si om årsak til ulike sykdommer? Er det mer riktig å si ”økt risiko” enn ”årsak”? Kan vi ved våre livsvaner gjøre noe selv for å redusere eller øke risikoen for en bestemt sykdom?

– Dagens langodds viser at for en bestemt fotballkamp er oddsen for de tre utfallene Hjemmeseier, Uavgjort og Borteseier henholdsvis satt til 2,45 2,60 2,20.
– Dette viser at noen eksperter anser at de tre utfallene er omtrent like sannsynlige? Hva betyr det? Hva betyr sannsynlighet når vi ikke kan etterprøve forsøket? Og hva er egentlig risikoen ved å sette penger på et bestemt resultat i denne kampen? Hva om jeg setter 500 kr på hjemmeseier?

– Prissjokk på strøm: Markedsdirektøren i kraftselskapet peker på tørken i sommer og høst som årsaken til at forbrukerne nå må blø.
– Hva er sjansen for en så nedbørfattig høst? Burde selskapene beregnet inn risikoen for tørke på et tidligere tidspunkt, redusert eksport av kraft, og holdt høyere vannstand i sine magasiner?

– Langtidsvarselet for fem dager fremover viser 8-10 mm nedbør i løpet av dag 1 og 2, og deretter tre dager med opphold.
– Hvor stor er sjansen for at dette slår til?

* * *

Et slikt lite streif, ja visst. Om enn tilfeldig, vil slike streif overbevise mange: Skal skolens matematikk kunne brukes i hverdagen på en seriøs måte, vil resonnementer og beregninger som går på usikkerhet, måtte få en sentral plass.

2 I skolen

Situasjonene er der! De må likevel bearbeides didaktisk. Forenklingene som nødvendigvis må gjøres, må være slik at målet med arbeidet beholdes. Situasjonene må lede mot en gjenoppdagelse av sentrale begreper innenfor sannsynlighet.

Den vesentlige innføringen i skolen i Norge når det gjelder beregning av usikkerhet, er lagt til ungdomstrinnet, spesielt til 9. trinn. Planen L97 formulerer dette slik på dette klassetrinnet:

I opplæringen skal elevene
- arbeide med å utvikle mer presise begreper og uttrykksmåter for sannsynlighet og med å tallfeste sannsynlighet
- gjøre erfaringer med at relativ frekvens noen ganger må brukes som et anslag for sannsynlighet
- beregne sannsynligheter ut fra situasjoner hvor alle enkeltutfall har like store sjanser
- undersøke situasjoner der det må regnes med usikkerhet, risiko og sjanse, f eks spill, forsikring, etterforsking og medisin
- prøve ut simulering av praktiske situasjoner der tilfeldighet inngår

I skolen møter vi nok ofte en tradisjon for å starte sannsynlighetsregningen i de enkle modellene: Kast med terning, mynter, uttrekk av kuler fra en boks osv. Dette kan nok fokusere på redskapene. Her ser vi for oss som et didaktisk mål en vekselvirkning mellom virkelighet og modeller.

3 Didaktisk vanskelig

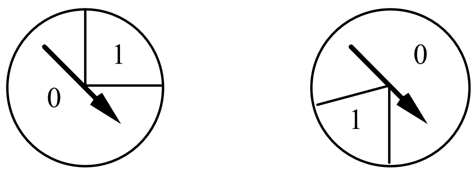
Hvorfor er sannsynlighet et vanskelig emne i opplæringen? Hvorfor oppstår det ulike typer forståelse? Kan oversikten fra forskere si noe?

Det har vist seg, hevder Borovcnik & Peard (1996), at sannsynlighetstenking omfatter vanskelige og komplekse. Emner blir vanskelig for de fleste i skolen. Forskningslitteraturen beskriver således elevers intuisjoner, forbegreper, misoppfatninger, misforståelser, strategier ved sannsynlighetsvurderinger, og ikkenormative forklaringer – og disse kategoriene av tenkemåter er til dels overlappende.

Det kan pekes ut flere årsaker til at det fins dype problemer. Her er tre slike:

** Emnet mangler en operasjonell basis.*
Ved telling og tallregning kan en etterprøve resultatet ved å konkretisere, en kan representere oppgaven ved en tegning eller på annen måte få bekrefte resultatet straks. Slik er det ikke ved sannsynlighet. En kan ikke enkelt etterprøve en sannsynlighetsvurdering for å bekreftet eller avkreftet resultatet. Si at en anslår sjansen for *Hjemmeseier* ved en bestemt fotballkamp til 30%, og 70% sjanse for uavgjort eller borteseier. En kan ikke få bekreftet dette anslaget. Hvis hjemmelaget vinner, var da anslaget feil?

Ta en elev som sier at på disse to lykkehjulene er vinnersjansen størst på hjul A.



A B

Eleven satser så en sum på A, snurrer lykkehjulet, og taper. Sammenlikn med en annen elev som satser sin lapp på hjul B, spiller så, og vinner. Kan vi da si at A valgte å satse på et feil hjul? Nei, så enkelt kan ikke dette avgjøres ved et konkret forsøk.

Når vi skal utføre *en rekke forsøk*, vil elevene lett forstå at hjul A er best, fordi det har størst sektor for gevinst. Konflikten oppstår når en elev skal velge et hjul for *ett enkeltforsøk.* Elever som vil kontrollere sitt svar ved å gjøre ett forsøk, kommer skeivt ut. De oppfatter sannsynligheten resultatorientert (outcome approach, Konold, 1994). . Sannsynlighetstenking representerer en abstrakt vurdering av hver av de ulike valgmulighetene. Muligheten til etterprøving kommer i beste fall frem ved *gjentatte forsøk* - dersom det er mulig.

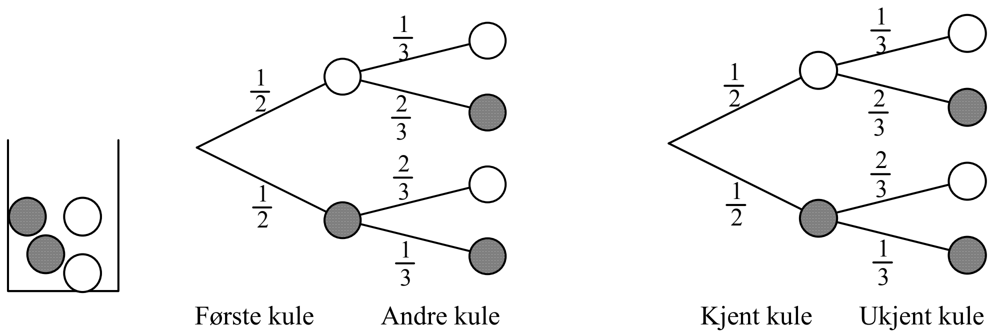
Når kvinnen fra avisreportasjen sa: ”Nå er det størst sjanse for at jeg dør av sykdommen…” så må vi oppfatte det som et subjektivt uttrykk for at hun ser svært alvorlig på sin sykdom. Det er en sjanse som ikke kan avgjøres.

** Emnet gir tidlig kontra-intuitive resultater.*
Tall, tallsystem og tallmengder viser vel først resultater som er kontra-intuitive når en møter kardinalitet av uendelige tallmengder, for eksempel at mengden av hele tall har samme kardinalitet som mengden av brøker. Dette kommer på et relativt sent stadium i

matematikkæringen. Før dette er intuisjonen stort sett pålitelig. Slik er det ikke med sannsynlighet.
I sannsynlighet fins en rekke resultater som lett oppfattes som paradokser. Intuitivt vil en anslå det og det, og så blir det egentlige resultatet noe ganske annet. En som kaster mynt-og-krone og har fått seks ganger etter hverandre K K K K K K, vil ved neste kast ha større sjanse for M.

Fødselsdagsproblemet er et annet eksempel: Hva er sannsynligheten for at det i en klasse med 30 elever er to med samme fødselsdag? Intuitiv vil en lett se 30 elever opp mot 365 mulige fødselsdager, noe som intuitivt gir små odds! Regner en derimot på det, blir sannsynligheten faktisk så høy som 0,71. En fin oppgave på regneark!

Et annet eksempel er følgende som forøvrig formuleres i flere varianter: Vi trekker ut en kule fra denne boksen (Fig 2 a), og uten å legge den tilbake trekker vi så en til.



Figur 2: *a* *b* *c*

– Hva er sannsynligheten for at andre kule er hvit, gitt at første er det? Ved et lite resonnement, f eks på et trediagram, blir de fleste elever med på at denne er 1/3.

Sett nå at vi trekker første kule og legger den i lomma uten å se den. Vi trekker andre og finner at den er hvit.
- Hva er sannsynligheten for at første kule er hvit, gitt at den andre er det? Her vil mange si at resultatet på andre kule ikke kan påvirke resultatet ved trekkingen av første kule, altså er sannsynligheten 1/2 for at første er hvit. Konflikt oppstår om en spør: Dersom både andre og tredje kule er hvite, hva er sannsynligheten for at første uttrukne kule da er hvit?

Paradokser, eller konflikter som måtte oppstå i en klasse gir en didaktisk mulighet! Det kan brukes til å lære! Det skjerper kravene til å være klar og presis, og kan bygge opp mer presise begreper, som L97 har som mål.

Det fins en rekke resultater som blir oppfattet som større eller mindre paradokser. Et eksempel er det såkalte Bertrands paradoks. I en sirkel (med radius *r*) velger vi en vilkårlig korde. Hvor sannsynlig er det at den er lengre enn siden i den innskrevne regulære trekanten, $r\sqrt{3}$? Med ulike resonnementer kan en få $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ eller $\frac{1}{2}$. [1] Hvordan kan slikt skje? Er det ikke et entydig svar?

1 Kac, M. & Ulam, S.M. (1968). Mathematics and Logic. New York: Dover Publications.
Se også: http://www.cut-the-knot.com/bertrand.html

Dette skjerper likevel kravene til å være klar og presis i resonnementet og premissene. Derfor kan paradokser, diagnostiske oppgaver og konflikter som måtte oppstå, bety en fin didaktisk mulighet. Situasjonen kan brukes til å lære!

Emnet bygger på en kvalitativt "ny" tenkemåte.
Forskere finner ved å analysere elevers resonnementer og tenkning i matematikk tre kvalitativt forskjellige typer:
- Logisk tenkning
- Årsakstenkning
- Sannsynlighetstenkning
-

Ved en *logisk tenking* erstatter en et utsagn med et likeverdig, dette igjen med et nytt, osv inntil en får et enkelt som kan tolkes. Slik er det f eks om en løser likninger. Elevene er vant til å være i denne tenkemodaliteten: logisk tenking når de arbeider med matematikk.

Ved en *årsakstenkning* finner en relasjoner mellom årsak og virkning. En resonnerer ved å peke på årsaker: Dette ligger til grunn for at resultatet ble slik. Elevene møter – og bruker - slik tenkning ikke minst i naturfag og i samfunnsfag såvel som i det daglige livet.

Ved *sannsynlighetstenkning* må en relatere resultatet til en helhet, en må se et resultatrom i forhold til et utfallsrom. En må se etter et forhold. Forskning viser i at forholdsbegrepet er i seg selv vanskelig. Forskning viser også at elevene har tendens til å velge tenkemåte i denne rekkefølge: logisk, årsak - virkning, sannsynlighet. Således vil f.eks en årsaksforklaring ofte fortrenge en sannsynlighetstenkning.

For å belyse problemer ved sannsynlighetstenkning, vil vi nedenfor gjengi noen resultater og eksempler fra en undersøkelse som ble gjennomført på sju ungdomsskoleklasser i Agder og Telemark høsten 1993, i alt på 133 elever i daværende 9. klasse, der gjennomsnittsalderen var 15,4 år.

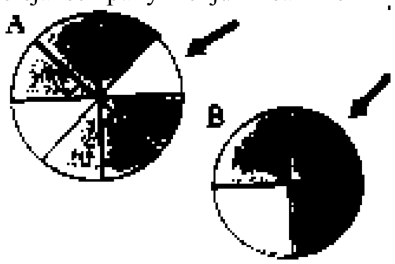
Slik finner vi det i dette eksemplet på en elevbesvarelse:

Eksempel

Dette lykkehjulet gir gevinst når viseren stanser på det hvite feltet.

A Hvor stor er vinnersjansen?

B Hva vil du si om vinnersjansen på lykkehjul B sammenliknet med A? Hvorfor mener du det?



3 a) Vinnersjansen er $\frac{2}{8}$ og $\frac{1}{4}$ (lik), 25% og 25% !

b) Vinnersjansen er størst på lykkehjul A. Det mener jeg fordi det på hjul A er delt på to hvite felt. Hjul B har ett hvitt felt, like stort som de to hvite på hjul A, derfor er det større sjanse på hjul A, selv om de hvite feltene er like store. Alsammen på hjul A og B

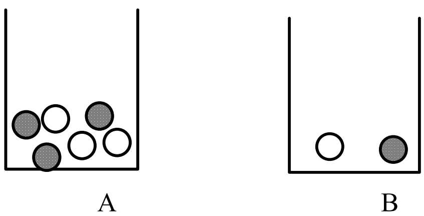
Eleven sier altså at vinnersjansen er lik på de to hjulene. På begge er den 25%. Dette kommer frem på bakgrunn av et resonnement på forhold, et sannsynlighetsresonnement. I svar **b** inntrer et skifte. Nå overtar en årsakstenkning: En årsak, mener eleven, må likevel avgjøre resultatet. Da tar eleven fatt i: På det ene hjulet er det hvite delt på to felt. *Derfor* er sjansen større, selv om de hvite feltene samlet er like på de to hjulene. Årsakstenkning kjører over sannsynlighetstenkning.

Slik årsakstenkning som overtar for sannsynlighetstenkning synes ganske vanlig hos både elever og voksne. Dette eksemplet på en diagnostisk oppgave kan antyde det:

Eksempel

Hvilken boks er det lurest å trekke fra, eller er det det samme?

Hvit kule = gevinst



…………………

Hvorfor? ………………………………………………………

Resultatet ved testen for ca 130 elever på vel 15 år ble:

Svar	Prosent
Det samme	**65,3**
A størst vinnersjanse	6,5
B størst vinnersjanse	26,6
Ubesvart	1,6

Forholdet mellom hvite og svarte kuler er det samme i de to boksene. Sannsynligheten for å trekke hvit kule er den samme, og dette er lett å sjekke for elevene. Likevel vil rundt en av fire velge boks B. Hvorfor velger så en elev B?

– Det er færre å velge mellom
– Det er lettere å få hvit når det er få å velge mellom
– Fordi det bare er en av hver, og større sjans for den som trekker

Hvorfor velger en elev boks A?

– Fordi det er flest hvite

Disse elevene gir årsaksforklaringer i stedet for sannsynlighetstenkning.

Loven om store tall

Sannsynlighet berører et forhold, og en viktig egenskap ved begrepet, er at forholdet gjerne nærmer seg en apriori beregnet verdi når forsøket gjentas. For å si noe fornuftig om en sannsynlighet, må ta hensyn til utvalgets størrelse, til antall forsøk. Har elever dette aspektet ved sannsynlighetsbegrepet? Følgende eksempel viser at det slett ikke er opplagt:

Vi vil telle barna som blir født i år 1994 på et sykehus. Følgende kan hende:

A Av de første 10 barna som blir født, er det 7 jenter

B Av de første 100 barna som blir født, er det 70 jenter

Av disse to hendelsene er

☐ **A** mest sannsynlig ☐ **B** mest sannsynlig ☐ **A** og **B** like sannsynlige

Hvorfor? ………………………………………………………………………………

Resultatet her blant de samme 15-åringene, ble:

Svar	Prosent
A mest sannsynlig	**38,7**
B mest sannsynlig	6,5
Like sannsynlig	50,8
Ubesvart	4,0

Omtrent halvparten av 15-åringene mener altså at det er like sannsynlig med 7 av 10 som 70 av 100. De tar ikke hensyn til det 50-50-forholdet mellom antallet individer av de to kjønn som kommer frem fra befolkningsstatistikk og fra biologien. De bruker en logisk forklaring: 7/10 er lik 70/100. Altså er de to utfallene like sannsynlige. Et logisk fokus overstyrer en sannsynlighetstenking.

Strategier for å bedømme sjanse

Psykologene Kahneman og Tversky og flere av deres kollegaer har undersøkt hva som kan påvirke personers vurdering av sannsynlighet. De finner at vi gjerne bruke visse intuitive *strategier* for vår tenkemåte når vi skal løse oppgaver om å estimere sannsynlighet. Deres teori gir en teoretisk forklaringsramme for noen psykologiske hindringer for å utvikle evnen til sannsynlighetstenking. Representativitet og tilgjengelighet er to slike strategier.

Representativitet: Det er velkjent at mange mennesker har en tendens til å tro at også i et lite utvalg skal sammensetningen gjenspeile foreldrepopulasjonen eller den prosessen utvalget er tatt ut ved. Også et lite utvalg skal være representativt. Strategien *representativitet* blir da avgjørende for vår tenking og våre avgjørelser.

For eksempel vil mange tro at om en serie myntkast har gitt resultatet KKK, så vil det ved neste kastet være mer sannynlig å få M enn K. Det følger av at skjevheten fra starten vil utjevne seg. Det er en form for rettferdighet innebygt i situasjonen. Resultatet skal gjenspeile symmetrien mellom K og M, at begge er like sannsynlige. I dagliglivet konkretiseres det ved utsagn som: Nå har jeg hatt min kvote av uflaks... Eller: Jeg har spilt så lenge Lotto uten gevinst, at nå er det snart min tur.

Mange personer tror at i en familie med seks barn vil rekkefølgen JGGJGJ være mer sannsynlig enn rekkefølgen JJJJGJ. De fokuserer på antallet. Den første rekkefølgen oppfattes mer representativ for *50-50-fordelingen* av gutter og jenter i store utvalg, enn den andre gjør det. Videre oppfattes rekkefølgen JGGJGJ som mer sannsynlig enn GGGJJJ. Nå fokuseres det på mønster kontra rot. Den siste viser et *mønster* og gjenspeiler ikke den *tilfeldige prosessen* kjønnsbestemmelsen skjer ved, og det at utvalget av en barnefamilie er tilfeldig. I dagliglivet blir denne strategien konkretisert for eksempel ved at mange ikke ønsker å kjøpe lodd nummer 1, og de mener at et tilfeldig lodd inni loddheftet har en større vinnersannsynlighet. Lodd nummer 1 oppfattes ikke som representativt for en tilfeldig trekking av gevinst. Hvilken rekke vil du satse på i Lotto: 1 2 3 4 5 6 7 på 2 4 6 8 10 12 14 eller på 4 9 13 14 21 29 33 ?

Falk peker på et annet fenomen som hun oberverer ved serier av forsøk: Motstand mot å tro på at en kan få lange sekvenser med samme utfall. Serier av myntkast vil ha lange sekvenser med f.eks K. Dette kan oppfattes som å kollidere mot representativitets-tanken, og oppfattes som juks, som styrt, og ikke tilfeldig. Se Green (1983) og Shuard & Williams (1982, chap 26). Noen forskere påviser en tendens til *negative recency* hos elever: Om et forsøk starter med et bestemt utfall, så tror en at det neste har større sjanse for det komplementære utfallet. Om en mynt ligger med K-siden opp, tas opp og kastes, så er sjansene større for utfallet M. (Green, 1983).

Tilgjengelighet

Det er registrert en trend til at en tillegger de eksemplene som ligger lett tilgjengelig i minnet, en for stor vekt når en skal angi en sjanse. En turist som første dagen i landet opplever to tilfeller der en bil kjører på rødt lys, kan lett slutte at slikt kjøremønster er vanlig i dette landet… En som nylig har fått et par brev fra yrkesutøvere, brev der det er grove rettskrivingsfeil, kan tenke at i denne yrkesgruppen er skrivenivået svakt…

4 Didaktiske muligheter

Ved undervisning av emnet sannsynlighet, eller usikkerhet, møter vi en rekke didaktiske utfordringer, slik vi vurderer fagområdet. Utfordringene gjelder følgende:

Å bruke tema

Tema fra virkeligheten, fra media, kan gi materiale som kan tilpasses didaktisk. Dette gir både store muligheter og vanskelige utfordringer.

Dette er gjort bl.a i diverse nyere utviklingsmateriell. Eksempler er materiell fra Freudenthal instituttet og også i enkelte norske læreverk, som dette:

– En klasse skal til Kitzbühl i vinterferien, bør de tegne reiseforsikring? Opplysninger innhentes. De finner at 7% av elever på slike turer får bruk for en forsikring, de kan bli frastjålet kamera, lommebok, de kan falle i slalåmbakken og måtte gipse beinet. Utgiftene ved slike skader beregnes etter innhentede opplysninger, i gjennomsnitt til 2300 kr for hvert tilfelle. Er da en forsikringspremie på 350 kroner rimelig? Burde elevene heller samle inn dette beløpet av hver til en felles sikkerhetskasse?
– Det kommer i gjennomsnitt 28 kunder jevnt fordelt på de sju timene frisørsalongen er åpen. Det er to frisører, som i gjennomsnitt bruker 25 min på hver kunde. Blir det ventetid for kundene? Kan vi simulere situasjonen, med tilfeldige ankomsttider og se hvor mye ventetid det kan bli?

Å bruke diagnostiske oppgaver

Oppgaver som får frem konflikter kan hjelpe til med å utvikle begreper. Her trenger vi en bunke oppgaver som kan *avdekke ulike tenkemåter*, hjelpe til med at elevene må presisere og bygge opp begreper. Eksemplene nevnt ovenfor tør ha et slikt potensiale, noen flere finner vi i litteraturen (Onstad, 2000; Shaughnessy & Bergman, 1993, Green, 1983).

Å bruke rike undervisningssekvenser

Undervisningssekvenser kan ha formen:
1) Gjett sannsynligheten. Drøft de ulike forslagene som kommer fra elevene. Hvorfor mener de det?
2) Gjør utprøvinger! Bring fram erfaringer. Bruk egnet materiell.
3) Reflekter over resultatet. Bruk verktøy som diagrammer. Formuler og presiser begreper.
4) Konsolider begreper og resultater ved arbeid med beslektede oppgaver.

Bruk konkret materiell: terninger, mynter, kuler, sannsynlighetsflasker, snurrehjul, lykkehjul etc. Simuler også ved å ta ut rekker av tilfeldige tall på regneark (på Excel brukes funksjonen = TILFELDIG().) Gjør også elevene kjent med de gode verktøyene: Trediagrammet, rutediagrammet og sannsynlighetsdiagrammet.

Eksempel

I klassen er det 13 gutter og 16 jenter. Klassen har fått to gratisbilletter til en konsert. Klassen vil trekke lodd om billettene. Hver elevs navn skrives på en lapp. Lappene legges oppi en boks, og læreren trekker ut to lapper uten å se.

b Det er størst sjanse for at de to som trekkes ut er

☐ gutt og jente

☐ to jenter

☐ to gutter

Hvorfor? ……………………………………………………

c Det er størst sjanse for at de to som trekkes ut er

☐ to av samme kjønn

☐ en elev av hvert kjønn

Hvorfor? ……………………………………………………

Hvordan gjetter elevene? Hva mener de? På **b** hørte vi følgende:

Påstand: Størst sjanse for gutt og jente

- Fordi antallet av jenter er større, men ikke dobbelt så stort
- Det er nokså likt med gutter og jenter i den klassen.

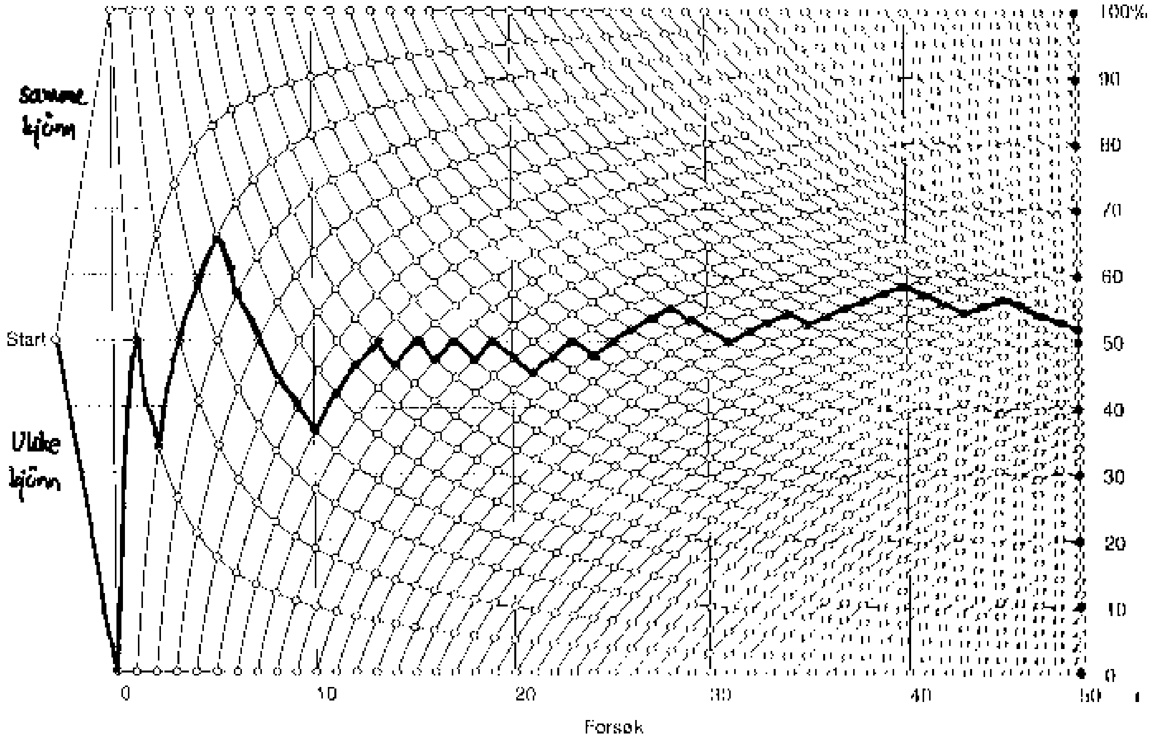
Påstand: Størst sjanse for to jenter

- Det er størst sjanse for at det blir to jenter, fordi det er tre flere jenter enn gutter. Og hvis man har trukket ut en jente, er det fremdeles to jenter fler enn det er gutter.

To ulike påstander, med begrunnelse! Spenningen er tilstede! Hvem har rett? Kan vi finne ut noe? Denne konflikten kan angripes ved at en rett og slett gjør undersøkelser, en simulerer uttrekkingen. Som et hjelpemiddel brukte vi "sannsynlighetsflasken" [2]. Med 29 kuler oppi flasken, 13 svarte (gutter) og 16 hvite kuler (jenter), trekker vi ut to, uten å registrere rekkefølgen. Kulene vippes tilbake i flasken. Vi gjentar forsøket la oss si 50 ganger. Det gir erfaringer og tanker.

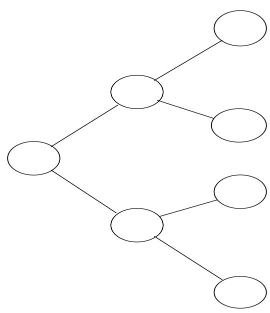
2 En sannsynlighetsflaske kan kjøpes for en billig penge i et læremiddelfirma, eller lages av en plastflaske, der korken er bygget om til en tut som kan romme noen få kuler.

På oppgave c er det er to utfall: samme kjønn – ulike kjønn. Vi prøver på å simulere oppgaven. Et *frekvensdiagram* kan illustrere noe som skjer ved mange forsøk. [3]



Denne utprøvingen indikerer at sjansen synes nokså lik, resultatet svinger rundt 50%, og antall forsøk vil gi ulik relativ frekvens. Denne synes å stabilisere seg etterhvert. Interessant! Hva skjer om vi gjør riktig mange forsøk? Om vi legger sammen tallene for alle elevene i klassen? Kan vi også regne på dette? Kan dette kontrolleres? Ja, det kan faktisk følges opp!

Trediagrammet kan hjelpe mange av oss til å forstå, og innse hvilke tall vi må bruke i en utregning:



Da gir beregninger at sjansen for to jenter er $\frac{16}{29} \cdot \frac{15}{28} = \frac{240}{812}$, og for to gutter $\frac{13}{29} \cdot \frac{12}{28} = \frac{156}{812}$.
Det betyr at sjansen for to av samme kjønn blir lik summen, nemlig $\frac{396}{812}$, eller 0,49

3 Diagrammet kan kopieres fra Matematikk 9, Lærerens bok, Aschehoug side 109, eller kjøpes hos et læremiddelfirma (Tarquin, http://www.tarquin-books.demon.co.uk/math/tarquinmathslist.html.

Sannsynligheten for en elev av hvert kjønn blir $\frac{16}{29}\cdot\frac{13}{28}+\frac{13}{29}\cdot\frac{16}{28}=\frac{416}{812}$, eller 0,51

Det er hårfint, men størst sjanse for ulike kjønn!

5 Mål

Hva er målet med undervisningen om usikkerhet i grunnskolen? Hva bør elevene ha av kunnskaper i vid betydning ved avsluttet ungdomsskole? I hvilken grad skal de kunne tenke i sannsynlighet, resonnere med usikkerhet?

Et kunnskapsmål vil vi kunne sette slik:

- Elevene skal være fortrolig med å tenke ved sannsynlighetsresonnement, med begreper som økt sjanse, redusert risiko.
- Elevene skal forstå at sannsynlighet kan angis med et tall mellom 0 og 1, eventuelt som en prosent mellom 0 og 100. 0 betyr at hendelsen umulig vil skje, 1 at den sikkert vil skje.
- De skal kjenne til at sannsynlighet (ved en symmetrisk modell) kan beregnes som et forhold mellom målet til henholdsvis et resultatrom og et utfallsrom. Sannsynlig-heten er i diskrete situasjoner ”forholdet mellom antall gunstige og antall mulige”.
- De skal kjenne til at når to hendelser A og B ikke overlapper, er sannsynligheten for A eller B, lik summen, lik p(A) + p(B).
- De skal kjenne til at når A og B er uavhengige hendelser, er sannsyligheten for hendelsen A og B lik produktet, P(A og B) = P(A)·P(B).
- De skal være fortrolige med å bruke tre-, rute- og frekvensdiagram.
- De skal gjenkjenne enkle situasjoner, og kunne kartlegge typen av sannsynlighet som inngår og vurdere slike situasjoner med fornuft og innsikt.
- Kunne bruke enkle verktøy og teknikker ved simulering.

Litteratur

Borovcnik, M. & Peard, R. (1996). Probability. In A. Bishop et al. (Eds.), International Handbook of Mathematics Education (pp. 239-287). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Borovcnik, M. & Bentz, H.-J. (1991). Empirical Research in Understanding Probability. In R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), Probability in Education (pp. 73-105). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Green, D.R. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In D.R. Grey, P. Holmes, V. Barnett & G.M. Constable (Eds), Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics (pp. 766-783). Sheffield: Teaching Statistic Trust.

Onstad, T. (2000). Tilfeldighet og sannsynlighet. I G. Gjone & T. Onstad (Red.), Mathema 2000. Festskrift til Ragnar Solvang (s. 133-147). Oslo: NKS forlaget.

Schrage, G. (1985). Statistikkundervisning i skolen. Normat **33**, 3, 101-112.

Shaughnessy, J.M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. Grouws (Ed.), Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning (pp. 465-494). New York: Macmillan.

Shaughnessy, J.M. & Bergman, B. (1993). Thinking about Uncertainty: Probability and Statistics. In P. Wilson (Ed.), Research ideas for the classroom: high school mathematics (pp. 177-197). New York: Macmillan.

Shuard, H. & Williams, E. (1982). Primary Mathematics Today. London: Longman.

Lars Burman

Lars Burman är lektor i matematikens och datateknikens didaktik vid Institutionen för lärarutbildning, Åbo Akademi i Vasa, Finland. Han arbetar med utbildning av ämnes- och klasslärare sedan över tio år tillbaka. Han har tidigare arbetat som lärare på högstadiet och gymnasiet i tio år och har inom ramen för olika projekt fortsatt att undervisa i någon mån på dessa stadier. Han har också under tjugo års tid producerat läroböcker i matematik för gymnasiet.

Effektiv matematikundervisning i gymnasiet

Lars Burman

Introduktion

I Finland finns det av flera orsaker stora förväntningar på att matematikundervisningen i gymnasiet skall vara effektiv. Gymnasiet i Finland är en teoretisk skola med stark betoning på språk. Det betyder att jämförelsevis litet tid reserverats för undervisningen i matematik. I matematik kan eleverna välja mellan lång kurs och kort kurs. Den långa kursen innehåller 10 obligatoriska kurser med ca 35 lektioner á 45 minuter och den korta kursen innehåller 6 obligatoriska kurser av samma längd. I båda fallen kan man ännu välja ett antal tilläggskurser. På den tid som finns till förfogande skall läraren hinna behandla mycket innehållsrika kurser. Redan detta faktum förutsätter en effektiv undervisning.

En kurs utvärderas i allmänhet med ett kursprov och eleven får ett kursvitsord. Skolan ger ett slutvitsord i matematik som baserar sig på vitsorden i de avlagda kurserna. Dessutom avslutas gymnasiet med ett centralt prov, studentexamen, där eleverna kan välja att skriva lång matematik, kort matematik eller att inte skriva matematik alls (vilket gör det nödvändigt att skriva realprovet i stället). I studentexamen i matematik väljer eleverna 10 av 15 uppgifter, som de besvarar inom 6 timmar. Eftersom vitsordet i studentexamen kan ha stor betydelse för om man blir antagen till universitet, är det givet att eleverna vill prestera ett gott resultat. Alltså förväntar sig också eleverna en effektiv undervisning som skall förbereda dem för studentexamen. I praktiken kommer därför också studentexamen att bli en mycket stark styrfaktor som påverkar all undervisning. Förutsättningarna för matematikundervisningen i gymnasiet i Finland redovisas utförligare i Burman (2000).

EMU-projektet

Utbildningen av svenskspråkiga matematiklärare i Finland handhas av Pedagogiska fakulteten vid Åbo Akademi i Vasa. Den största delen av övningsundervisningen sker vid Vasa övningsskola. I anslutning till mitt jobb som lektor i matematikens didaktik inom Lärarutbildningsinstitutionen och handledare vid undervisningsövningarna på Vasa övningsskola har jag sedan några år tillbaka engagerat mig i ett utvecklings- och forskningsprojekt i samarbete mellan Lärarutbildningsinstitutionen och Vasa övningsskola. Projektet har fått namnet Effektiv MatematikUndervisning eller EMU.

Inom ramen för detta projekt har jag alltså haft förmånen att agera i olika roller: lärare, lärarutbildare, utvecklare - forskare samt läromedelsproducent. Jag har då sysselsatt mig med frågan Hur effektivera undervisningen. Det är främst fyra vägar som jag har försökt gå:

1. Analysera stoffet och de grundläggande metoder som kurserna innehåller.
2. Utöka elevernas engagemang och det ansvar de tar för sin egen inlärning.
3. Utveckla arbetsmetoderna och användningen av tekniska hjälpmedel.
4. Göra elevutvärderingen mera mångsidig.

Av dessa vägar har jag kommit längst på en kombination av de två sistnämnda och det är denna kombinationsväg som jag nu valt att gå närmare in på i denna presentation. Man kunde också beskriva denna väg som en utvecklad arbetsmetod med en starkare betoning på olika former av problemlösning i förening med en mera mångsidig utvärdering. Innan jag går in på konkreta exempel vill jag kort beskriva en teoribakgrund.

Om problemlösning och utvärdering

Enligt NCTM (2000) är problemlösning en alternativ och viktig metod när läraren introducerar nytt stoff men också ett väsentligt redskap för eleverna när de löser uppgifter som kräver något utöver det som de redan behärskar. Dessutom är problemlösningen en nödvändig hjälp när eleverna löser uppgifter som kräver en kombination av flera områden inom matematiken. Studentexamensuppgifter i matematik i Finland utmärks av att de i betydligt högre grad än flertalet uppgifter i enskilda gymnasiekurser kräver just en kombination av kunskaper och färdigheter från flera av matematikens delområden. När dessutom fem uppgifter av femton i studentexamensprovet skall väljas bort, är det en nödvändighet att närmare hälften av provets uppgifter kräver ”något utöver vad de redan behärskar”, om målet är att uppnå en vettig spridning i elevernas resultat.

Charles, Lester och O’Daffer (1987) preciserar sju mål för undervisningen i problemlösning. De menar att målet är att utveckla elevernas
- förmåga att tänka
- förmåga att välja och använda lämpliga strategier
- attityd till problemlösning
- förmåga att använda relaterade kunskaper
- förmåga att exponera och utvärdera sitt tänkande
- förmåga att lösa problem genom att samarbeta
- förmåga att hitta det rätta svaret.

Deras tankar har också inspirerat mig till att betona problemlösningen inom EMU.

Utvärderingens roll är att stödja inlärningen av viktig matematik och ge både lärare och elever nyttig information. Återigen enligt NCTM (2000) borde utvärderingen göras för eleverna och inte bara med dem och därför bli en integrerad del av klassrumsaktiviteten och inte ett avbrott i den. En grundtanke inom EMU-projektet har hela tiden varit att göra utvärderingen mera mångsidig. Det är ju också sannolikt att man får en riktigare bild av vad eleverna behärskar, om man samlar information vid flera tillfällen och på flera olika sätt.

Minitesten inom EMU-projektet

En mera mångsidig utvärdering har inom EMU-projektet förekommit i form av utvärdering under kursens gång med hjälp av så kallade minitest. NCTM (2000) betonar också, i högre grad än vad som hittills gjorts i åtminstone Finland, att man i matematikundervisningen skall lägga vikt vid processer, bl. a. problemlösning. I minitesten har detta beaktats så att i testen förekommit olika former av problemuppgifter och inte enbart traditionella uppgifter eller basuppgifter. Betoningen av processer har också lett till utprövning av så kallade modelleringsprojekt inom vissa kurser. I fortsättningen beskrivs minitest och modelleringsprojekt närmare.

Ett minitest är ett litet prov som kräver 20 eller 30 minuter beroende på om det innehåller två eller tre uppgifter. Man kan också tänka sig att det inom en kurs i stället för fyra minitest med två uppgifter finns två minitest med fyra uppgifter om det är lämpligare så. Uppgifterna kan vara en eller ev. två basuppgifter och en litet mer krävande uppgift. Den senare kan med fördel innehålla speciell problemlösning eller utgöras av en metodbeskrivning. Minitestet ger eleverna övning och också en försmak av kursprovet. Om kursprovet måste hållas så tidigt att en del av kursen återstår, kan man med ett minitest efter provet täcka stoff som behandlats efter provet eller rentav ge eleverna en ny chans att klara vissa delmoment i kursen.

Följande tre exempel visar uppgifter som inte är att betrakta som traditionella uppgifter eller basuppgifter utan de kräver problemlösning i någon form.

Exempel 1: Medelvärdet av sju olika stora positiva hela tal är 23 och medianen är 20. Hur stort kan det största av de sju talen högst vara?

Det första intrycket av denna uppgift är att det inte kan vara svårt att räkna ut svaret. Trots detta kräver uppgiften en del eftertanke och behärskning av de statistiska grundbegreppen. Eftersom uppgiften inte är rutinmässig till sin karaktär kräver den en form av problemlösning.

Exempel 2: Talen m och n väljs på måfå ur mängden $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Bestäm sannolikheten att ekvationen $x^2 + mx + n^2 = 0$ har åtminstone en reell lösning.

Denna uppgift verkar vid första anblicken vara enormt jobbig. Vid närmare försök med systematisk prövning som lösningsmetod visar det sig att man med uteslutningsmetoden kan begränsa antalet möjliga lösningar så att det är rätt få möjligheter som behöver kontrolleras.

Exempel 3: Ett lag i ”Fångarna på fortet” måste för att befria en lagmedlem fördela tio vita kulor och tio svarta kulor i två askar. Sedan väljer fångvaktaren på måfå ut en av askarna och drar en kula ur den asken. Om kulan är vit blir fången fri annars inte. Hur skall laget fördela kulorna så att sannolikheten att befria lagmedlemmen blir så stor som möjligt?

I denna uppgift förefaller den största svårigheten vara förknippad med elevernas tendens att anta att det skall finnas lika många kulor i båda askarna. Om man inte låser sig till denna utgångspunkt visar det sig att man får en sannolikhet närmare 75 %.

Minitestens effekt

En möjlig sammanvägning av resultat i minitesten och kursprovet ser ut så här:

Minitest	4	4	3	2	1	1	15 p
Kursprov	6	5	4	1	1	0	17 p
Resultat	6	5	4	2	1	1	19 p

Här ordnas poängtalen i ministestet och kursprovet från högsta till lägsta. Resultatets poäng fås så att man i varje par tar med det högre poängtalet, vilket gör att ministesten ev. kommer att i någon mån kunna höja kursprovets poängtal, här från 17 p till 19 p. Naturligtvis kan man också på ett mera traditionellt sätt väga samman minitest och kursprov så att de får t. ex. vikterna 1 och 2. Denna effekt på slutresultatet kan kallas ministestens ”direkta effekt”.

För en hel del elever betyder poängen i ministesten att man är säker på att bli godkänd i kursen redan innan man går upp till kursprovet, vilket kan ha en positiv effekt på prestationerna i kursprovet. Det har också visat sig att 3-4 minitest under kursens gång gör att eleverna hänger med i kursen på ett bättre sätt. Det betyder i sin tur mindre stress sista kvällen före kursprovet (och kanske en hel natts sömn) och därmed ett bättre resultat i kursprovet. Denna effekt på slutresultatet kan kallas ”den indirekta effekten”. Det finns anledning att tro att den indirekta effekten är större än den direkta effekten! Detta kan också motivera att läraren med eleverna upprättar ett så kallat didaktiskt kontrakt, som för dem kan vara mer eller mindre medvetet.

Modelleringsprojekten inom EMU-projektet

Trots att det finns inslag av problemlösning i undervisningssituationerna och i minitest och kursprov, kommer man inte ifrån att det också kunde finnas mera verklighetsnära uppgifter. När det är knappt om tid hinner man oftast inte med annat än att undervisa de viktigaste matematiska verktygen och att använda dem i rätt korta uppgifter. Detta har lett till att det både som en form av problemlösning och som ett led i en mångsidig utvärdering finns en beställning på någon typ av modelleringsprojekt.

Ett modelleringsprojekt innehåller följande stadier:
1. Idealisering
2. Matematisering
3. Arbete inom den matematiska modellen
4. Tolkning
5. Validering

Under första punkten väljer man i våra ramar ut ett ”fenomen” som man vill undersöka och under punkt två formulerar man en matematisk hypotes som man sedan undersöker. Sedan planeras och genomförs en datainsamling och resultat tas fram och skrivs ner. I punkt fyra tolkas resultaten och i punkt fem utvärderas arbetet, dvs. den matematiska modellen. Projektarbetet utförs oftast i grupper med tre eller fyra elever. Varje punkt i arbetet avslutas med en skriftlig redovisning (som ofta inte behöver vara så lång) och läraren ger respons på denna. Det mesta arbetet sker utanför lektionerna, vilket betyder att hemuppgifterna i matematik minskas något och att hänsyn till andra ämnen bör tas.

Som jag redan antydde är det naturligtvis nödvändigt att anpassa användningen av dylika projekt till ramfaktorer i skolan. Tidsbrist och bundenhet till en bestämd kurs gör också att läraren är tvungen att antingen i början styra elevernas val av föremål för undersökningen eller senare begränsa valet av metod och därmed möjligt resultat av undersökningen.

Exempel (projektrubriker)

Vem ser mest på TV?	*Formel 1*
Vem far med bussen?	*Nivåbyten i matematik*
Vem går mot rött ljus?	*Går rökande i arv?*
Vem köper chips?	*Börskurser*
Vem får sommarjobb?	*När görs de flesta målen i ishockey?*
Har pojkar större skor?	*Gymnasisters födelsetider*

Rubrikerna till vänster har använts i en kurs i sannolikhetslära och statistik (beskrivande statistik, kort kurs), de tre översta rubrikerna till höger i en kurs i sannolikhetslära och statistik (statistisk analys, lång kurs) och de tre återstående i en kurs i differentialkalkyl (extremvärden, lång kurs).

Det är klart att ett modelleringsprojekt inte är lämpligt eller ryms in i alla våra kurser. Speciellt lämpliga kurser för projektarbete är sådana som behandlar matematiska modeller och beskrivande statistik eller statistisk analys. Dessutom finns det hos oss möjlighet att relativt fritt komponera en tilläggskurs, t. ex. med temat numeriska metoder, där ett modelleringsprojekt utgör en del. I detta skede är tanken att varje gymnasist åtminstone en gång under sin gymnasietid borde få chansen att delta i ett modelleringsprojekt.

Sammanfattning med elevresponser

Eleverna respons på minitesten är nästan odelat positiv. Någon enstaka elev kan känna sig pressad av ”många prov” men de flesta uppskattar att de tvingas följa bättre med i kursen och får ett bra tillfälle att öva sig inför kursprovet. Ett minitest som lyckats bra ger bättre självförtroende och har det inte lyckats bra vet man ju vilket avsnitt som man borde titta mera på. Elever som är ambitiösa uppskattar i hög grad möjligheten att med minitest ev. höja sina poäng i kursprovet. Dessutom finns det också elever som inser att metodbeskrivningar och problemlösning ger en bättre inlärning och bäddar för ett bättre kursprov.

Ett modelleringsprojekt är för de flesta elever ett rätt främmande sätt att arbeta inom matematiken. Trots att resultatet växer fram som processkrivning med lärarens hjälp reagerar en del elever på att det är svårt att jobba med projekt. Ibland kan det också bli stressigt om det är svårt att hitta gemensamma tider i gruppen eller när andra kurser tar mycket tid. Förhållandevis många elever både på lång och kort kurs har dock visat uppskattning för att de får en utmaning och får göra någonting som känns omväxlande och annorlunda och rentav ansvarsfullt. Andra positiva kommentarer är intressant, roligt, lärorikt och nyttigt. Den bästa kommentaren hittills är väl den att ”nu vet jag att jag vill bli matematiklärare”.

EMU-projektet genomförs inte i en så stor omfattning och med sådan tidtabell att det i detta skede finns så mycket publicerat om projektet. Minitesten har använts sedan projektstarten och de har både inom Vasa övningsskola och via lärarutbildningen fått en god spridning. Det behövs ännu mycket tid att samla information om modelleringsprojekten, eftersom de hittills genomförts endast två gånger i en enskild kurs och fem gånger sammanlagt. Både när det gäller minitest och modelleringsprojekt är erfarenheterna så goda att det känns mycket meningsfullt att fortsätta utprövningen.

Referencer:

Burman Lars (2000). Förutsättningarna för matematikundervisningen i gymnasiet i Finland. Ingår i Jan Sjöberg & Sven-Erik Hansén (red), *Kasvatus tulevaisuuteen, Pedagogik för framtiden*, ss. 193 – 203. Rapporter från Pedagogiska fakulteten vid Åbo Akademi, Vasa, Nr 22 2000. (311 s.) ISBN 952-12-0753-1

Charles Randall, Lester Frank, O'Daffer Phares (1987). *How to Evaluate Progress in Problem Solving*. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA. ISBN 0-87353-241-4

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. ISBN 0-87353-480-8

Elisabet Doverborg, Göran Emanuelsson, Lillemor Emanuelsson

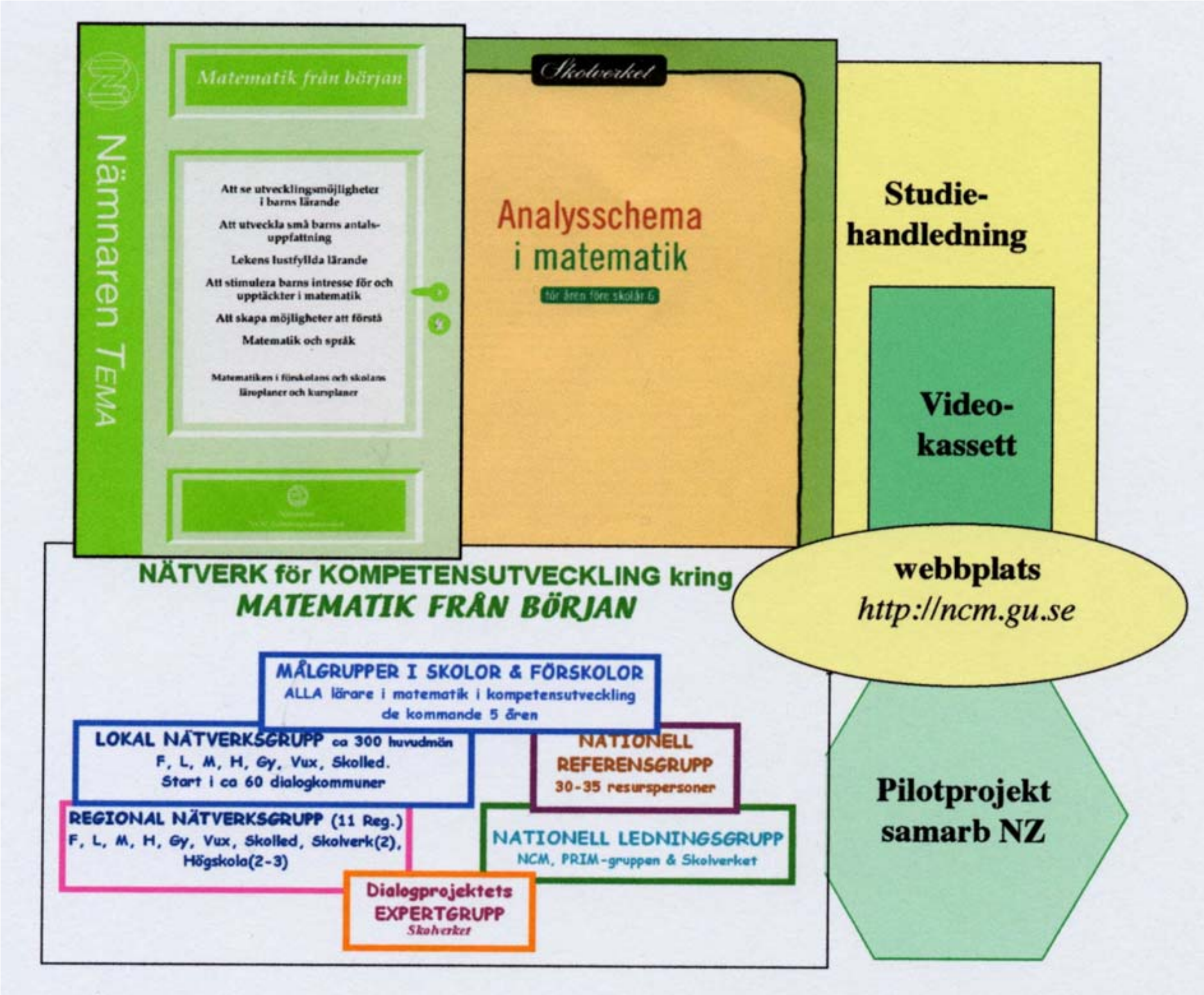
Elisabet Doverborg är universitetsadjunkt och nu verksam vid Nationellt Centrum för Matematikutbildning, NCM, Göteborgs universitet (http://ncm.gu.se). Hon arbetar med frågor som rör förskolan och förskolebarns lärande med fokus på matematik. Hon har lång erfarenhet från arbete både inom förskola, förskollärarutbildning och med uppdragsutbildning för personal inom förskolan. För tillfället håller hon på att slutföra sin avhandling som handlar om att utmana små barns matematiska lärande och tänkande i förskolan. Hon har medverkat i flera böcker som tar upp små barns lärande.

Göran Emanuelsson är universitetslektor vid Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM, Göteborgs universitet (http://ncm.gu.se) – ansv. utgivare och redaktör för Nämnaren, tidskrift för matematikundervisning sedan 1974 (utges av NCM sedan 1999). Han har arbetat med läromedel, lärarutbildning samt lokalt och nationellt utvecklingsarbete kring kursplaner, utvärdering, kompetensutveckling för skola och högskola. Han är medlem av svenska biennalrådet och var projektledare för Matematikbiennalen 2000 i Göteborg.

Lillemor Emanuelsson har varit lärare i skolår 1-3 i 30 år och är nu verksam på NCM inom Matematik från början (http://ncm.gu.se) samt har uppdrag som utbildningsinspektör i Skolverkets kvalitetsgranskning av 40 kommuner kring Lusten att lära med fokus på matematik, http://www.skolverket.se/tillsyn/kval/index.shtml. Hon har medverkat i kompetensutveckling, i tidskrifter och böcker med beskrivningar och reflektioner kring sin praktik.

Matematik från början – ett inspirationsprojekt

Matematik från början är ett inspirations- och kompetensutvecklingsprojekt i Sverige. Det är sedan 2000 ett samarbete mellan PRIM-gruppen vid Lärarhögskolan i Stockholm, Skolverket och NCM, Nationellt centrum för matematikutbildning vid Göteborgs universitet.
I vårt bidrag presenterar Göran Emanuelsson först bakgrund till och innehåll i projektet och i NämnarenTEMAboken under rubriken ***I Olika sätt att närma sig barns matematiklärande***. Elisabet Doverborg tar upp sin forskning i avsnitt ***II Lärarens delaktighet i det lustfyllda lärandet*** och Lillemor Emanuelsson sitt klassrumsarbete skolår 2-3 i avsnittet ***III Elevernas solrosmatematik*** – med olika aspekter av matematik, slöjd, språk och bild.



Figur 1. Olika komponenter i projektet Matematik från början

I. Olika sätt att närma sig barns matematiklärande

Göran Emanuelsson

Ansvaret för kompetensutveckling av skolans personal ligger i Sverige på kommuner och skolor. Vårt projekt syftar därför till att ge inspiration och stöd till lokala initiativ och söka möta de behov som dokumenteras, se t ex (Emanuelsson & Johansson, 2001; NCM, 2001a). I figuren ovan framgår de olika komponenterna i projektet. Huvudsakligt innehåll ges i NämnarenTEMA Matematik från början och i Skolverkets Analysschema för "åren före skolår 6" som tagits fram av PRIM-gruppen. Syftet med det senare materialet är att stödja lärare i att reflektera och dokumentera den begreppsbildning i matematik som barn visar i förskola och skola fram till och med skolår 5. För att underlätta kontakter mellan olika nivåer i det svenska skolsystemet bygger vi ett nätverk av intresserade och kompetenta personer (nederst till vänster i figuren) med geografisk spridning, som kan informera om och medverka i kompetensutveckling med hjälp av de resurser som finns inom projektet. Personer i nätverket ska stödja lokala initiativ, utveckla bättre kunnande för att öka intresset för och höja kvaliteten i barns matematiklärande. Arbetet är uppbyggt på att engagera personer med olika bakgrund från praktiker och skolledare till lärarutbildare och forskare. För att stimulera och utbyta erfarenheter kring olika insatser och modeller för lokal kompetensutveckling anordnas inom projektet nätverkskonferenser, se t ex rapportering på vår webbplats ncm.gu.se, där också projektplaner för olika insatser presenteras. Ett studiematerial med video ska göras klart under våren 2003. Då börjar också ett pilotprojekt för förskolor och barn i åldern 3-5 år med konkreta aktiviteter som vi tagit fram i samarbete med ett projekt i Nya Zeeland. I fortsättningen kommer vi här att koncentrera oss kring NämnarenTEMAbokens innehåll. Först några reflektioner från arbetet med Nämnaren – tidskrift för matematikundervisning.

Nämnaren – en tidskriftidé

Mina erfarenheter av att vara elev, att vara lärare, av lärarutbildning och läroboksförfattande fick mig redan på 1970-talet att fundera över brister i undervisningen i matematik. Jag var tidigt övertygad om att elever lär sig mycket mindre matematik än de har möjlighet till. Dessutom lärde de sig att matematik var svårt och obegripligt för de flesta. Undervisningen borde kunna utvecklas. Den viktigaste resursen ansåg jag var läraren och det var naturligt att fundera över vad lärare behöver kunna för att ha möjlighet att ge god matematikundervisning och stödja elevers lärande? Det gäller kunskaper i och om matematik i vid mening, hur elevers lärande stimuleras och utvecklas, hur undervisningen kan organiseras, och hur praktiken kan se ut, t ex lämpliga arbetssätt för olika innehåll för att skapa förståelse och intresse, så att barn lustfyllt lär sig meningsfull matematik enskilt och i grupp. Utan att kunna särskilt mycket om forskning och utvecklingsarbete kring matematikutbildning tog jag 1974 initiativ till en tidskrift för att vilsna och intresserade svenska lärare, lärarutbildare och konsulenter skulle ge varandra råd efter misslyckandet med "den nya matematiken" (NCM, 2001b, s 53-84). Mitt syfte var att med Nämnaren sprida och utbyta erfarenheter och kunnande kring god matematikundervisning.
Det är snart 30 år sedan Nämnaren började utges och utvecklingsarbetet pågår. Intresset för att läsa om och utbyta idéer och kunnande har sakta men säkert ökat och i november 2002 passerade vi 6 000 prenumeranter. Som jag vill se det så pågår ett "seminarium med 10-15 000 lärare från förskola till högskola", som läser, reflekterar, prövar, diskuterar, analyserar och skriver. Studenter har starkt rabatterat pris för att redan under studietiden ta del av utvecklingsidéerna. Vi som jobbar med Nämnaren vill att tidskriften ska vara en mötesplats för praktiker, studenter och forskare med inriktning på lärande och undervisning i matematik i alla åldersgrupper. En kort personlig redogörelse för hur jag uppfattat de första 25 åren med Nämnaren finns i Emanuelsson (1999b).

En mötesplats

Nämnarens innehåll är idag inte matematikdidaktisk forskning, inte lärares beprövade erfarenhet av matematikutbildning, inte informationskanal om kursplaner, inte tipskatalog och inte läromedel. Det är alltsammans eller i varje fall inslag från alla dessa områden. I Nämnaren "möts" perspektiv och aspekter, här möts lärare och forskare i matematik och matematikdidaktik. Det har varit en styrka gentemot läsarkretsen men en svårighet inom Göteborgs universitet, som gärna vill ha tydliga etiketter på publikationer. Med tanke på konferenstiteln "Utvikling av matematikkundervisning i samspill mellom praksis og forskning" så vill jag redovisa några erfarenheter kring kommunikation med olika medverkande i vårt utvecklingsarbete. När jag träffar lärare, lyssnar till bidrag eller ser utställningar från lärares parktik på t ex matematikbiennaler så blir jag ofta fascinerad och intresserad och ber om en artikel. När manus kommer så stämmer det inte alltid med berättelsen. Texten kanske saknar djup. Det finns ingen beskriven reflektion eller analys. Det handlar mera om att göra: *Först gjorde vi det och sedan det ...* Då tar jag kontakt och ställer frågor som ... *Varför gjorde du så? Hur reagerade eleverna? Har du exempel på elevlösningar eller elevarbeten? Bilder? Vad var det* *som gjorde att eleverna blev intresserade? Att de lärde sig? Hur vet du det? Hur följde du upp det? Varför? När?* Det är inte ovanligt att läraren då svarar: *Men är det intressant för andra än mig själv? Visst kan jag skriva om det!* När kommunikationen mellan redaktör och artikelförfattare är etablerad så kan den leda till en helt ny, djupare, mer spännande och rikare artikel som inspirerar och visar upp ett "tyst kunnande" som finns bland elever och lärare!

Utveckling av innehåll och språk

Olika ord i olika artiklar kan betyda samma sak. Ibland ges processer och produkter från praktikers erfarenheter namn, som om alla visste vad de stod för. Så kan t ex en metod få eget namn utan att det redogörs för vad som skiljer ut just den metoden eller avgränsar den mot andra. Det är viktigt att vi som redaktörer för Nämnaren pekar på behov av klargörande och precisering. Men vi bör inte gå för hårt fram för då kan vi utarma utvecklingen av språket kring lärande och undervisning i matematik. Vi ber artikelförfattare att först och främst fundera igenom om det inte finns andra uttryck som kan användas, som fyller samma funktion och som redan är etablerade och används. Om det inte är möjligt är det viktigt att tala om varför det införs en ny term eller beteckning och att innebörden preciseras.
Forskare som bygger sin artikel på egen eller andras studier har ett annat problem. Då beskrivs mycket ofta begrepp och termer som förädlats i relativt begränsade forsknings-miljöer. Då uppmanar vi också författare att beskriva innebörder i begrepp och termer eftersom många läsare av Nämnaren är mindre förtrogna med "forskarspråk". Det kan finnas möjligheter att ersätta det vetenskapliga språkbruket med ett enklare.
Genom Nämnaren söker vi stimulera till utvecklig av ett rikare, mera precist språk för verksamheten i skolan. Om vi får många "privata" eller "lokala" begrepp och termer försvårar det kommunikation både inom och mellan olika målgrupper för vår tidskrift och våra böcker. Med "privata" eller "lokala" avser jag både det språk som riskerar att stanna i en begränsad praktikergrupp och det som löper risk att stanna i en begränsad forskarmiljö. Det innebär inte att jag anser att forskare ska skriva enbart på praktikers villkor eller att praktiker ska skriva enbart på forskares villkor. Artiklar ska kunna bedömas och redigeras utifrån att innehållet lyfts fram på artikelförfattarens villkor. Från Nämnarenredaktionens sida inbjuder vi ofta till dialog med både författare och läsare.

Paradoxer att utmana tidigt

Ofta möter jag signaler som tyder på att våra omedvetna och oreflekterade uppfattningar av matematik, matematiklärande och matematikundervisning bidrar till att hindra barns lärande och utvecklingen av svensk matematikutbildning (Emanuelsson, 1999a). Hur är egentligen balansen mellan våra åsikter och insikter, mellan våra avsikter och utsikter? Jag har formu-lerat och presenterat mina tankar kring några skenbert motstridande påståenden som tycks fånga svenska uppfattningar. Hur är det i Norge och andra nordiska länder?

Undervisningsparadoxen
Matematik är svårt att lära sig men lätt att undervisa i.
Många som ser eller hör denna paradox säger: Precis så är det! Ämnet anses så svårt att vissa inte kan lära sig. En del saker är det meningslöst att ens försöka förklara. Matematik blir lätt en apkonst. Det ger föräldrar och lärare anledning och rätt att inte vänta sig att elever ska lära, förstå eller kunna använda matematik. Elever lär sig att de inte kan lära sig matematik. Det ger legitimitet åt den lätt-skötta matematikundervisningen – den som oreflekterat följer en lärobok och ger eleverna intryck av att matematik är en individuell, instrumentell, oengagerande, regelstyrd och obegriplig aktivitet.

Exklusivitetsparadoxen
Matematik behöver alla kunna men få kan lära sig.
Många barns självförtroende knäcks av traditionen att matematik enbart kan uttryckas i abstrakt och symbolisk form. Den formella ofta omotiverat obegripliga sidan får elever att se ämnet som irrelevant och lämna det. Skriftlig redovisning och form får avgöra om eleven förstår matematikens idéer eller inte. Detta innebär en uppenbar konflikt i liv och samhälle där allt fler människor behöver kunskaper och generella tankeverktyg i vardagslivet och där elektroniska hjälpmedel frigör tankekraft. Idéer och informella uttryck i språk, bilder, konst, formgivning, i experimenterande och undersökande arbetssätt av begrepp och metoder kan utvecklas – inte minst i multikulturella miljöer.

Innehållsparadoxen
Matematik är en del av livet men elever lär sig räkna för skolan.
Tidigt tenderar matematik att bli inlåst innanför klassrummets väggar eller räknebokens pärmar. Elever riktar sitt lärande på och för skolsammanhang. I klassen utvecklas osynliga, didaktiska kontrakt (Blomhøj, 1994; Wyndhamn, 1991). Varjedagslivet, individens och samhällets behov, kursplanens mål eller resultat från forskning och utvecklingsarbete kring matematikutbildning styr undervisningen mindre än vår oreflekterade tradition (Boaler, 1997).

NämnarenTEMA – antologier med forskare och praktiker

Det svenska Skolverket började 1993 ett arbete för att ta fram studiematerial för lärare som undervisar i matematik, med tanke på de omfattande förändringarna av matematiken i svensk skola. Syftet var att diskutera:

- Vilka är de viktigaste nyheterna i läroplaner och kursplaner?
- Vad kan behöva konkretiseras? Vad är svårt att tolka?
- Vilka matematikområden vet vi av erfarenhet är viktiga att utveckla?

Efter en konfliktfylld process fick Nämnaren möjlighet att dokumentera arbetet. 1995 kom den första *NämnarenTEMA*boken *Matematik – ett kärnämne*. Den tar upp svårigheter och möjligheter i övergången från grund- till gymnasieskola. 1996 utgavs *Matematik – ett kommunikationsämne* som diskuterar exempel på aktiviteter och arbetssätt för att nå målen i grundskolans kursplan skolår 1-9. 1997 kom *Algebra för alla* med syftet att avdramatisera algebra och visa på samband mellan olika uttrycksformer. Bakom titeln ligger tanken att alla som arbetar med matematik från förskola till högskola har glädje av innehållet och att alla elever kan möta matematikens generaliserande kraft i just algebran. 2000 utgavs så *Matematik från början* med kapitlen:

1 Att se utvecklingsmöjligheter i barns lärande
2 Att utveckla små barns taluppfattning
3 Lekens lustfyllda lärande
4 Att stimulera barns intresse för och upptäckter i matematik
5 Att skapa möjligheter att förstå
6 Matematik och språk

Varje NämnarenTEMA är framtaget av en grupp med lärare, lärarutbildare och forskare i samverkan med Nämnarenredaktionen. Vi söker gemensamt arbeta in så mycket som möjligt av allas kunnande. Böckerna kan ses som antologier där både forskning och beprövad erfarenhet kring barns lärande har plats.
Bokomslaget till *Matematik från början* visar en dörr och är tänkt att symbolisera olika ingångar till bokens innehåll. Varje kapitel inleds med en ingress som ger en kort beskrivning av kapitlets innehåll. Det följande avsnittet ska ge perspektiv, nya tankar och teori. För att

stimulera till reflektion och erfarenhetsutbyte finns elevuppgifter att pröva tillsammans med elever och studieuppgifter att diskutera med kolleger. Vissa elevaktiviteter är utförligt beskrivna, medan andra kan ge idéer eller inspiration. Kapitlen kan studeras relativt oberoende av varandra men det finns kopplingar mellan dem, så att frågor belyses utifrån olika perspektiv. En bok ska ses som en helhet, där delarna kompletterar varandra. I slutet av boken ges lästips under rubriken *Litteratur*. Svensk litteratur har prioriterats. Med hjälp av *Nämnarens databas* ger vi förslag på artiklar, böcker och rapporter för de som vill fördjupa sig i olika innehåll. I litteraturförteckningar presenteras Nämnarenartiklar först, därefter annan svensk litteratur och sedan litteratur på engelska eller skandinaviska. Tanken är att litteraturen ska kunna användas i den egen planeringen, i arbetslaget, i ämnesdiskussioner, på studiedagar, i lokalt utvecklingsarbete och i grundutbildningen.

Referenser

Blomhøj, M. (1994). Ett osynligt kontrakt mellan elever och lärare. *Nämnaren 21*(4), 36-43.

Boaler, J. (1997). Projektorientering ger bättre resultat. *Nämnaren 24*(3), 13-18.

Emanuelsson, G. (1998). Matematik är det väl lätt att undervisa i. *Nämnaren 25*(1), 42-45.

Emanuelsson, G. (1999a). Allt är av Herren utom matematiken – den är av djävulen. *Nämnaren 26*(2), 13-19.

Emanuelsson, G. (1999b). Asikter och äventyr med Nämnaren. *Nämnaren 26*(4), 1-2.

Emanuelsson, G. & Johansson, B. (2001). Hög tid för matematik. *Nämnaren 28*(3), 3-10.

NCM (2001a). *Hög tid för matematik*. Redovisning av ett regeringsuppdrag. NCM-rapport 2001:1.

NCM (2001b). *Svårt att lära – lätt att undervisa*. Om kompetensutvecklingsinsatser för lärare i matematik 1965-2000. NCM-rapport 2001:3.

Wallby, K., Emanuelsson, G., Johansson, B., Ryding, R. & Wallby, A. (Red.) (2000). *Matematik från början. NämnarenTEMA.* Mölndal: NCM.

Wyndhamn, J. (1991). Problemmiljö och miljöproblem. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red.) *Problemlösning*. (s 51-65). Lund: Studentlitteratur.

II. Lärarens delaktighet i det lustfyllda lärandet

Elisabet Doverborg

För drygt fyra år sedan fick svensk förskola en läroplan – Lpfö 98 (Utbildningsdepartementet, 1998a). I denna läroplan betonas att den pedagogiska verksamheten skall utgå från barns erfarenheter, intressen, behov och åsikter och att barns tankar och idéer skall tas tillvara för att skapa mångfald i lärandet. Vidare uttrycks i läroplanen att förskolebarnens matematiklärande och matematiktänkande skall ta sin utgångspunkt i det som är den svenska förskolans tradition, nämligen barns lek, vardagens rutiner och temaarbetet.
I skolans läroplan – Lpo 94 (Utbildningsdepartementet, 1998b) finns både strävans- och uppnåendemål, medan det i läroplanen för förskolan endast finns mål att sträva mot. Dessa uttrycker att förskolan skall sträva efter att varje barn

- utvecklar självständighet och tillit till sin egen förmåga,
- utvecklar sin förmåga att upptäcka och använda matematik i meningsfulla sammanhang,
- utvecklar sin förståelse för grundläggande egenskaper i begreppen tal, mätning och form samt sin förmåga att orientera sig i tid och rum (Utbildningsdepartementet, 1998a, s. 12-13).

Om barn skall utveckla en tillit till sin egen förmåga måste förskolans lärare ta utgångspunkt i barnens föreställningar och erfarenheter då matematiken skall göras synlig. Vilken matematik skall små barn möta i förskolan? Läroplanen talar om att barn skall upptäcka och använda matematik i meningsfulla sammanhang. Vad är meningsfulla sammanhang för barn i 2–5-årsåldern? Pramling Samuelsson och Sheridan (1999) menar att förskolans vardag med lek, rutiner och temaarbete erbjuder många meningsfulla sammanhang där barn får möta matematik så som den framstår i deras värld. Doverborg och Pramling Samuelsson (1999a) talar om vikten av att barn förstår och känner sig delaktiga i det sammanhang de är involverade i. Ett sätt att förstå sin omvärld kan vara att kunna sätta ord på denna med hjälp av matematikens språk. Alla barn som går i någon form av förskoleverksamhet skall möta lärare som ger dem möjlighet att utveckla en förståelse för tal, mätning, form, tid och rum. Barnen behöver många vardagsnära utmaningar så att de kan erfara den matematik som finns i deras värld.
En fråga som jag under många år ägnat stort intresse är vilken betydelse lärarna har för barnens lärande, och då särskilt när det gäller matematik. Vid flera tillfällen har jag gjort omfattande intervju- och enkätstudier av lärares sätt att tänka om förskolans matematik (Doverborg, 1987; Doverborg & Pramling Samuelsson 1999). Resultaten visar återkommande fyra föreställningar vad avser lärarnas uppfattningar om vikten av att synliggöra matematik i förskolan. Dessa fyra uppfattningar är:

1. Matematik hör inte till förskolan
Lärarna i denna kategori talar dels om att de själva var dåliga i matematik under sin skoltid och att de redan tidigt i livet hade bestämt sig för att matematik inte var något som de skulle syssla med fortsättningsvis, dels ser vissa av dem matematik som uppställningar av tal och sifferskrivning och anser inte att detta har någon plats i förskolan.

2. Matematik är en skolförberedande aktivitet
Dessa lärare planerar lärarstyrda aktiviteter, en eller ett par gånger per vecka, och låter barnen träna på de olika moment som finns presenterade i olika före-skolan-böcker i matematik.

3. Matematik kommer av sig själv eftersom den finns överallt
Lärarna med denna uppfattning planerar inte några inslag under dagen där matematik lyfts fram och synliggörs. De menar att då omvärlden är fylld av matematik blir den tids nog synlig för barnen, när de är intresserade och mogna för det.

4. Matematik måste lyftas fram, reflekteras över och göras synlig för barnen
Dessa lärare framhåller också att matematik finns överallt omkring oss och att matematik är en del av vår kultur. De säger dessutom att det krävs en aktiv lärare som utmanar barnen att reflektera över det de är delaktiga i så att matematiken blir synlig för barnen.

Under en femårsperiod har jag följt arbetet på ett par förskolor och jag vill visa ett exempel från en av dessa förskoleavdelningar. Lärarens syn på matematik i denna förskoleavdelning är den samma som den som lärarna i den fjärde kategorin ger uttryck för (Doverborg & Pramling Samuelsson, 1999b, 337-378).

Studiens uppläggning och genomförande

Jag har följt en och samma lärare under två år då hon har arbetat med två olika femårsgrupper och jag har där studerat hur förskolebarnen givits möjlighet att utveckla ett matematiklärande inom ramen för förskolans tradition. Läraren har i sitt arbete haft ambitionen att utveckla barnens matematiklärande och matematiktänkande genom att synliggöra matematiken i förskolans vardag och hon har dessutom låtit barnen reflektera över denna. Läraren och barnen har observerats och strukturerade samtal har genomförts i genomsnitt varannan vecka. Dessutom har barnen intervjuats vid två tillfällen vid varje läsårs slut. Vid vissa observationstillfällen har barnens dokumentation av olika matematikinslag samlats in som underlag för analys. Under båda läsåren har samma lärare i respektive grupp och läsår systematiserat måltidssituationen, speciellt delningen av den till måltiden tillhörande halva frukten. Hon har dessutom lyft fram och synliggjort matematiken i övriga rutinsituationer, i leken och i temaarbetet. Under större delen av första läsåret arbetade barnen och läraren med temat ”Höns” (Doverborg, 2000). Barnen som vistades i femårgruppen under andra läsåret arbetade med temat ”Hästar” (Doverborg & Pramling Samuelsson, 1999b, 337-378). Vid vårterminens slut har en utvärdering gjorts av respektive barngrupp (försöksgrupp) och de har dessutom jämförts med två andra grupper (jämförelsegrupper) av jämngamla barn som intervjuats och testats vid samma tidpunkt.
Lärarens arbete med matematik i försöksgruppen
Läraren i försöksgruppen har ett genuint intresse för hur barn kan utveckla ett matematiklärande och -tänkande genom lek, vardagens rutiner och temaarbete. Hon säger att i förskolan handlar det inte om något formellt räknande, utan om att skapa situationer, ta vara på olika upplevelser och aktiviteter, vilka kan problematiseras och på så sätt ge barn möjlighet att få erfarenhet av matematik. Hon tar hela tiden sin utgångspunkt i det som hon ser och upplever att barnen fascineras av. Under hela dagen, i lek, vardagens rutiner och temaarbete utgår hon ifrån det som är barnens erfarenheter, intressen, behov och åsikter när matematiken synliggörs. Hon låter även barnen dokumentera sina tankar och idéer och synliggör på så sätt den mångfald av uppfattningar som finns bland barnen då de t.ex. delar upp något, funderar över räkningens funktion eller löser problem.
Det är stor skillnad mellan försöks- och jämförelsegruppernas lärare då det gäller deras val av inriktning på arbetet med att synliggöra matematiken för barnen. Jämförelsegruppens lärare säger att hon valt att arbeta med språk och rörelse och att hon inte riktigt vet hur hon skall arbeta med matematik med barn i dessa åldrar för ”matematik finns där ju i allt som barn möter”, säger hon. Hennes uttalande visar på att hon förhåller sig till matematik som lärarna i den tredje kategorin (se s. 2). Försöksgruppens lärare har däremot en klar idé om vad matematiklärande och -tänkande skulle kunna innebära och synliggör också matematiken konsekvent

i sitt arbete med barnen. Av resultaten ser vi i tabell 1 och 2 hur lärarnas uppfattningar om matematik påverkar vad och hur de arbetar med denna men också att det får konsekvenser för barnens lärande, något som även framkommit i andra studier (Doverborg, 1987; Kihlström, 1995; Carroll, 1999).
Barnen i de båda grupperna har fått många olika uppgifter att tänka kring och lösa. Jag kommer här att visa på de skillnader som framkommit då barnen i de båda grupperna fått berätta och ge exempel på, dels hur de brukar räkna och varför det är bra att kunna räkna, dels hur de löser problemet med att dela tio bullar mellan tre barn.
Då barnen inte skiljer mellan när de räknar och varför det är bra att kunna räkna redovisar jag deras uppfattningar om detta gemensamt under uppfattningar av räknandets funktion i tabell 1 nedan.

Tabell 1. Uppfattningar av räknandets funktion.

Kategori	Försöksgrupp	Jämförelsegrupp
1. Lösa problem i vardagen	22	10
2. Någonting lustfyllt	5	-
3. Räkna upp räkneramsan	4	9
4. Känna till siffrorna	4	3
5. Ett skolämne	3	13
Antal uppfattningar[1]	37	35

I både försöksgruppen och i jämförelsegruppen ger barnen uttryck för många olika uppfattningar av räknandets funktion. Som vi ser i tabell 1 ovan är uppfattningen att det är bra att kunna ”Räkna för att lösa vardagsproblem” mer vanlig bland barnen i försöksgruppen. Att ”Räkna upp räkneramsan” uttrycks däremot oftare i jämförelsegruppen. Kategorin att ”Känna till siffrorna” förekommer nästan lika ofta i båda grupperna. Att se räkning som ”Ett skolämne” är en uppfattning som förekommer i mycket större utsträckning i jämförelsegruppen, medan kategorin att se räkning som ”Någonting lustfyllt” endast kommer till uttryck i försöksgruppen.
Eftersom barnen i försöksgruppen har fått möta matematik i meningsfulla sammanhang i leken, vardagens rutiner och temaarbetet kan vi se att de ger exempel på situationer när de löser vardagsproblem och roar sig med att räkna, etc. Det är få barn i försöksgruppen som kopplar räknandets funktion till att matematik är ett skolämne, däremot är det fler än hälften av barnen i jämförelsegruppen som gör det.
Barnen i de båda grupperna har också fått tre problem att lösa och vi skall se på ett av dessa, nämligen hur de tänker i de båda grupperna då de fått problemet: ”Det är tre barn som har fått tio bullar. Hur många bullar får var och en av dem då?” Som framgår av tabell 2 löser 96 procent av försöksgruppens barn problemet medan endast 40 procent av jämförelsegruppens barn har en tilltro till att de kan klara av att finna ut någon lösning på problemet.

Vi kan se att de barn som löser uppgiften i de båda grupperna gör det på liknande sätt. Av tabell 2 framgår att barnen antingen delar lika eller delar olika och att det finns olika delningssätt inom dessa både huvudlösningar.

1 Drygt hälften av barnen gav uttryck för fler än en uppfattning, varför det totala antalet uppfattningar är större än antalet barn. 24 barn deltog i försöksgruppen och 20 barn i jämförelsegruppen.

Tabell 2. Hur barnen delar upp de tio bullarna mellan tre barn.

	Försöks-grupp	**Jämförelse-grupp**
DELA LIKA		
a) Tre var, den sista kastas eller ges bort	4	2
b) En var, de andra sparas		2
c) Tre hela och en bit av den tionde bullen	11	1
d) Varje bulle i tre bitar, tio bitar var	1	
DELA OLIKA		
a) Nästan rättvist; 3, 3, 4	4	2
b) Olika önskemål; 2, 3, 5	2	1
c) Spara några; 2, 3, 3	1	
LÖSER EJ UPPGIFTEN	1	12
Antal barn	24	20

Det framkommer att bullarna kan delas upp på många olika sätt. Huruvida ett sätt är bättre eller mer avancerat än ett annat går jag inte in på här. Vad jag däremot vill uttrycka är att det naturligtvis är bättre eller mer avancerat att lösa problemet än att inte lösa det alls. Det är stor skillnad mellan grupperna i detta avseende. Men inte bara i detta avseende, utan även i det föregående exemplet där bara hälften av jämförelsegruppens barn anser att de har nytta av matematik i sin vardag medan alla försöksgruppens barn anser att de har nytta av matematik i vardagen eller att matematik är något som de kan syssla med för att roa sig. Som vi ser i tabell 1 uttrycker 13 av 20 barn i jämförelsegruppen att matematik är ett skolämne och man kan fråga sig hur starkt barnen kopplar samman detta med att det handlar om att avge ett ”rätt” svar på bullproblemet – inte om variation och möjligheter till lösningar.
Vad är det då som kännetecknar försöksgruppens lärare? Jag skall avslutningsvis beskriva det i följande punkter:

- Läraren tar utgångspunkt i barnens sätt att erfara olika saker,
- har en dialog med varje barn om hans eller hennes förslag till lösning, tankar och funderingar,
- låter barnen dokumentera sina lösningar i t.ex. bild,
- synliggör barnens lösningar så att mångfalden av tankar träder fram,
- har en idé om vad hon vill att barn skall utveckla förmågor och föreställningar om

och

- riktar barns medvetande mot det hon vill att barn skall lära sig om.

Referenser

Carroll, J. (1999). Discovering the story behind the snapshot: Using life histories to give a human face to statistical interpretations. Preceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Pshychology of Mathematics Education, 177-184.
Doverborg, E. (1987). Matematik i förskolan? Rapport nr 5. Göteborgs universitet: Institutionen för pedagogik.
Doverborg, E. & Pramling Samuelsson, I. (1999a). Förskolebarn i matematiken värld. Stockholm Liber.
Doverborg, E. & Pramling Samuelsson, I. (1999b). Hästar och äpplen i ett didaktiskt perspektiv. Om begynnande förståelse för grundläggande matematik. Didaktisk Tidskrift, 9(4), 337-378.
Doverborg, E. (2000). Lekens lustfyllda lärande. I Wallby, K. mfl (red). Matematik från början. NämnarenTEMA. NCM.
Kihlström, S. (1995). Att vara förskollärare. Om yrkets pedagogiska innebörder. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
Pramling Samuelsson, I. & Sheridan, S. (1999). Lärandets grogrund. Perspektiv och förhållningssätt i förskolans läroplan. Lund: Studentlitteratur.
Utbildningsdepartementet. (1998a). Läroplan för förskolan. Lpfö 98. Stockholm: Fritzes.
Utbildningsdepartementet. (1998b). Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet. Lpo 94 – anpassad till att också omfatta förskolklassen och fritidshemmet. Stockholm: Fritzes.

III. Elevernas solrosmatematik

Lillemor Emanuelsson

Ett mål för konferensen var att få en tätare dialog mellan praktik och forskning. Vad kan lärare tillföra forskningen och tvärt om? I mitt bidrag söker jag ge konkreta exempel från klassrummet med elevernas och mina funderingar och reflektioner. Arbetet är inspirerat av forskninglitteratur och studier av skilda utvecklingsarbeten men vilar främst i min beprövade erfarenhet. Jag börjar med ett konkret exempel från en del av ett arbetsområde.

Ge livet en chans!
Allt levande behöver värme,
luft, vatten och näring.
Följ vad som händer när du planterat.
Skriv om vad du upptäcker.
Tag med dina erfarenheter
den 18 augusti.

Inför sommarlovet önskade vi alla elever i tvåan trevlig sommar med uppdraget ovan. Varje elev fick en genomskinlig påse med några olika frön. Den 18 augusti kom eleverna med sina olika erfarenheter. Några hade med sig krukor med olika plantor. En del hade med stort engagemang beskrivit sina upptäckter med hjälp av text, bilder och foton. Några hade med sig krukor med solrosor av skiftande utseende. Det fanns en mångfald uttrycksformer, av olika karaktär och kvalitet. Varje elev redogjorde för sina erfarenheter inför gruppen, med hjälp av sitt material. Bland fröna i påsen fanns solrosfrön, som de flesta eleverna fått att gro. Några hade noggrant följt plantornas tillväxt och beskrivit både utseende och mätt tillväxten. Här och i fortsättningen citeras elevers autentiska texter stavningsrättade:

Jag planterade mina frön 22/6 efter några dagar kom mina solrosor upp lite grann. Fast de andra fröna hade inte kommit. Dom andra fröna var ärtor, bönor och gräs. Och sen åkte vi bort i 2-3 veckor. När vi kom hem igen hade solrosorna kommit upp en halv meter och mamma vattnade med vattenspridaren på mina solrosor och på grönsakslandet. Jag vattnade mina solrosor och dom växte och växte fast dom andra fröna syntes inte till. Och nu är mina solrosor lite över en meter. Dom andra fröna tror jag har dött och jag hoppas min solros blommar snart.

Vi använde uppgifter om hur solrosorna växt, som underlag för linjediagram. En elev kommenterade diagrammet med att det ser ut som aktiemarknaden.

Lillemors solros var 169 hög cm men Filip tog med Guiness rekordbok och vet ni vad. Den solrosen var 648 cm hög. Lillemor sa att vi skulle gå in i ljusgården och vi gjorde fingermått och den solrosen var som ljusgårdens tak. Lillemors solros hade 1375 frön. Men hur många frön finns det på den andra som var 648 cm hög och hur tjock stjälk hade den? Eller om den hade någon blomma? Och jag tog fram en miniräknare och vi knappade in 169 cm gånger 4 tills det blev 676 cm och Lillemors solros var 4 gångers mindre än världens högsta solros.

Den sommaren var, åtminstone i Göteborgstrakten, solrosornas sommar. I närområdet studerade vi en mängd solrosor och kunde konstatera att det fanns stor variation i färg, storlek och antal blomställningar. Vi såg solrosor i full prakt, men också vissna blomställningar. Precis som stora konstnärer fascinerats av denna mångfald och fångat sina intryck i målningar och text, sökte vi uttryck för våra intryck. Vi målade ”som van Gogh”. Vi skrev dikter och texter av olika slag. Blomkorgen detaljstuderades. Vi konstaterade att fröna var placerade i spiraler, både med – och motsols. När vi undersökte olika stora korgar fann vi att antalet spiraler var olika mellan olika storlekar. Vi studerade även andra objekt, snäckor, kottar, ananas och såg spiralformen. Det var svårt att räkna spiralerna på solrosor, men vi upptäckte att antalen passade in i en följd vi tidigare stiftat bekantskap med, nämligen Fibonaccis talföljd.

Vi räknade spiralerna på ena sidan var det 55 och andra hållet var det 89. Det stämde med Fibonaccis talrad som vi har på väggen i klassrummet.

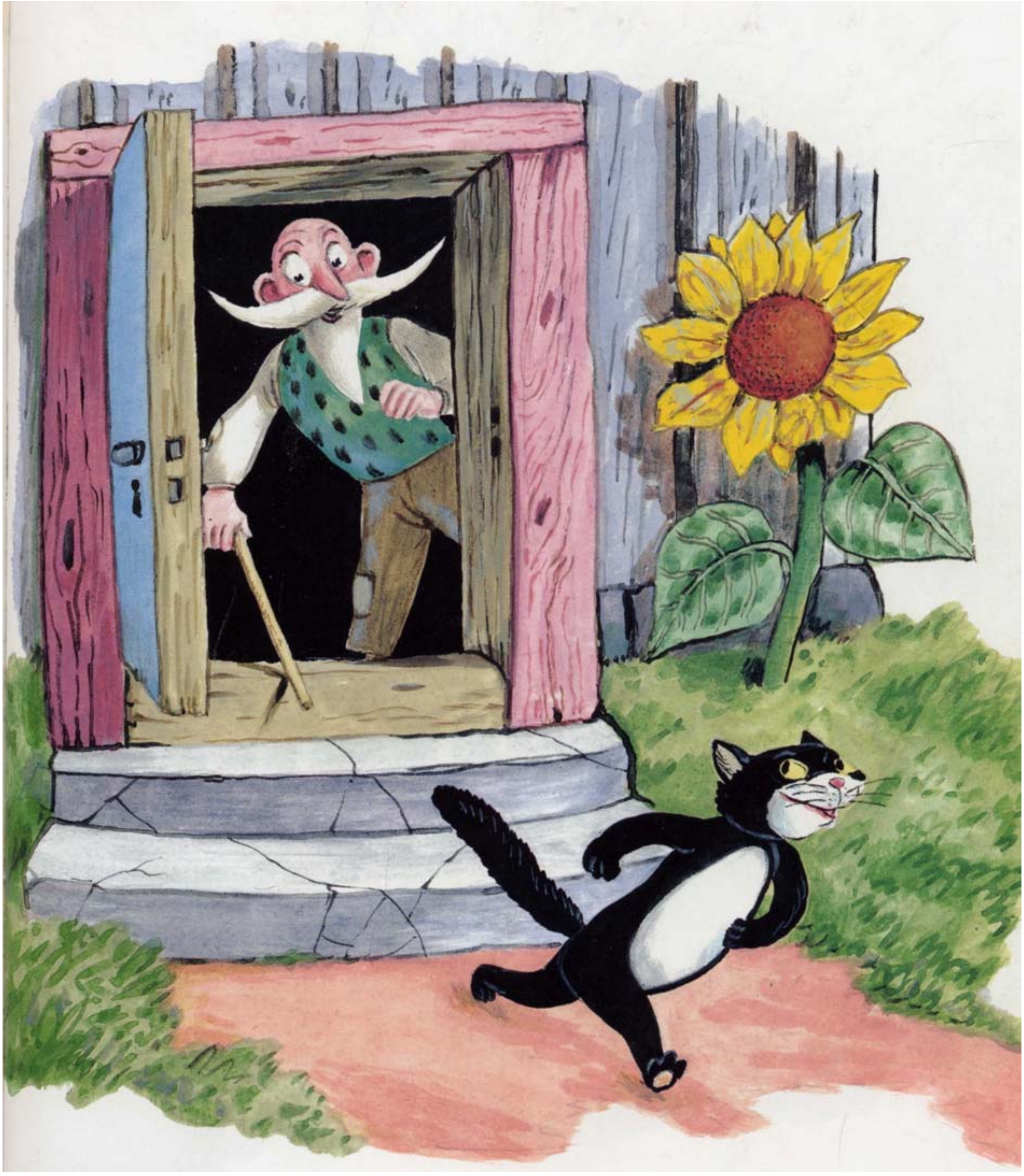
Hur många frön finns det i en korg?
Vilka strategier kan vi använda för att få reda på det?
Vi kan plocka ur alla fröna ur en korg och räkna dem.
Vi kan räkna hur många frön det finns i en spiral och multiplicera det med antalet sådana spiraler.
När vi räknade en spiral fick vi reda på att i varje spiral var det 25 frön.
Vi kom på att om man räknar fröna på en rad så kan man ta gånger. Vi tog 55x25 på en miniräknare och det blev 1375 st frön. Det tycker jag är väldigt mycket. För om vi skulle dela upp alla frön på barnen i skolan skulle dom få fyra var.
Och om vi planterat dom så skulle bara ett fåtal växa upp och bli stora och fina.
Om vi planterade alla så skulle det blivit ett helt fält.

Hur många solrosor kan leva på en kvadratmeter?
Hur stort fält behövs för alla våra solrosfrön?
Vi kopierade solrosor i olika storlekar från ett omslagspapper att arbeta med. Vi mätte upp en kvadratmeter på ett papper på golvet. Barnen ställde hypoteser om antalet. Ett villkor var att solrosorna skulle kunna leva. Det måste alltså finnas utrymme och möjligheter att växa. Förslagen låg mellan 16 och 100. Barnen kontrollerade hypoteserna och fann att det skulle kunna leva 22 solrosor på en kvadratmeter. Om alla skulle gro och växa upp hur stor area skulle de täcka? De funderade över hur de skulle gå vidare. Barnen visste att klassrummet är 48 m^2. Det var en bra referens. 22 x 48 = 1056. 1375 – 1056 = 319. Dessa 319 behöver ungefär 14 m^2. ”Vi måste använda korridoren och en del av grupprummet!” De räknade, prövade och kontrollerade med pappersmallen.

Vi har klippt ut en stor ruta som var 1 m^2 och sen så fick vi gissa hur många solrosor som skulle få plats på kvadratmetern. När vi hade tänkt och gissat ett tag så klippte vi ut papperssolrosor och la på. Det fick plats 22 st solrosor. Vi såg på ett kort med ett jättestort fält med solrosor. Vi räknade ut hur många kvadratmeter alla skulle få plats på. Det var 1375 blommor. Och efter ett långt tag så kom vi fram till att det behövs 62 kvadratmetrar.

Konstruera Petters solros – i naturlig storlek

Vem är Petter? Jo det är en gubbe i Einar Norelius bok, *Petter och hans 4 getter* som vi arbetade med i klassen. Inledningsvis diskuterade de livligt i grupper hur de skulle gå till väga, när de skulle göra en ritning som utgångspunkt. Så småningom kom de fram till att de behövde en referens. Den varierade mellan grupperna. Vi följde och dokumenterade elevernas diskussioner så mycket som var praktiskt genomförbart.



Figur 2 Petter, solros och katt ur Norelius barnbok.

Elevernas valde olika referenser:

Katten, Petters mustascher, trappan, dörren i relation till Petter, Petters ansikte

En elev hade tidigare mätt sin katt och visste att den var stor. När den sträckte på sig var den ungefär 1 m lång. Eftersom Petters katt också var stor antog gruppen att den också var 1 meter. De mätte mellan tummen och pekfingret och bestämde att solrosen var lika stor som katten. Själva blomkorgen var då en halv meter. Kronbladen var lika stora som korgen i mitten. Men 50 var svårt att dela med sa en pojke. Vi tog ett snöre och delade i tre delar. Det visade sig vara mer komplicerat än de tänkt sig. De bestämde sig för det konstruera en solroskorg av gulbrunt garn och ståltråd. De gjorde en ritning och utgick från ett kors, la två ståltrådar som ett kors och vävde över. Fann att det måste vara ett udda antal som varp, om det skulle vara möjligt att väva. De gjorde dubbla kronblad av orange filt, som de stoppade och fäste på ståltrådarna som stack ut och kompletterade antalet så att det skulle stämma med antalet i boken.

Vi utgick från katten. Sen frågade vi en kompis hur lång hans katt var. Den var cirka 1 m, sa han. Sen tog vi en penna och mätte katten i boken och jämförde den med solrosen och kom fram till att hela solrosen var 1 m.
1 cm i boken är i verkligheten 10 cm. Kronbladen var 17 cm och i boken så var kronbladen 17 mm. Vi jämförde kronbladen med korgen och den var också 17 cm. Och tvärs över hela blomman så var den en halv meter.

En annan grupp skrev så här:

Vi utgick från Petters mustasch. Vi mätte på Adam rätt över ansiktet och det var 35 cm och sedan mätte vi på korgen och den var 16 cm. Och kronlövet är 10 cm och stjälken var 35. Lövets längd var 20 cm och bredd 15 cm och stjälken var 3,5 tjock. Det var 15 kronblad men när de var klara och stoppade så var de inte lika stora. För när man stoppar ett kronblad med fylle så böjer det sig uppåt och då blir den mindre tvärsöver.

En grupp förde en livlig diskussion om tjockleken på stjälken. De mäter på bilden i boken och finner att den är 5 cm lång och 1/2 cm tjock. ”Hur tjock är den då i verkligheten?” Om den är 5 cm på bilden, för den står i gräset, och 35 i verkligheten, är det nåt med 7. För 7 x 5 = 35. Är den en halv på bilden är den 3,5 cm i verkligheten.
De mätte med linjal och fingermått på bänken. De undrade över hur de skulle kunna konstruera en cirkel och erinrade sig att vi tidigare arbetat med sambandet mellan diameter och omkrets. De letade i klassrummet och hittade ett lock som verkade lagom. Diametern var 16 cm. Precis! De sydde kronbladen i gul filt och korgen i brun.

Våran solros är 100 cm. Vi sa att stjälken var 50 för Petters trappa hade två trappsteg och då sa vi att den var 50 cm hög, Stjälken var lika lång. Därför sa vi att den var 50 cm och vi tyckte att själva rosen var lika stor, så därför blev våran solros 100 cm. Kronbladen och korgen var nästan lika. Korgen är 18 cm. Bladen är 16 cm. Sammanlagt blir det 50 cm. Vi gick ut från stjälken som var lika lång. Bladen som sitter på stjälken är på det bredaste 27 cm och på längden 27 cm. Vi har jämfört med korgen och halva kronbladet ungefär 27 cm alltså lika som stora bladet.

Den här gruppen har haft lite tur, men eleverna har tankar som är utvecklingsbara. Deras resonemang runt t ex stjälken tyder på detta. De har tagit till sig funderingar och tankar från andra grupper, men har inte riktigt kunnat göra dem till sina egna. En annan grupp utgår från sina upptäckter i omvärlden från en verklig trappa. De funderar och undrar över hur mycket av stjälken som gömmer sig i gräset. Men fullföljer inte sin tankegång. De har också problem med att dela 50 i tre delar. De gör en ritning. ”Min pappa har visat mig hur man gör cirklar. Vad heter det som är i mitten nu igen? O-o-o-origo. Du måste rita genom origo!” ”Det du ritar nu”, undrar någon, ”vad heter det?” ”Jo, diameter”. De sätter ihop flera papper till ett stort och konstruerar cirkeln med diametern 18 cm. Gör en mall till ett kronblad. Kontrollerar hur många kronblad det är på solrosen i boken och bestämmer antalet till 11. För att se om det stämmer tar en elev fingermått, går runt korgen och ser att det stämmer.
Eleverna diskuterade likheter och skillnader mellan de olika storlekarna och olika sätt att konstruera mönster och även utseendet på de färdiga solrosorna. De grupper som inte hade ”stoppat” blommorna hade naturligtvis större överensstämmelse med mönstret. I samtalen, diskussionerna och redovisningarna höll varje grupp fast vid en egen referens. Detta är vi mycket imponerade över.

När vi har arbetat med solrosen har jag lärt mig mycket t ex när vi sydde lärde jag mig sömsmån. När man skulle klippa ut bladen som man ska sy, ska man klippa lite extra för när man stoppar blir det kortare, när den sväller upp. Sen har jag lärt mig ett nytt stygn som var väldigt bra. Sen har jag lärt mig att alla solrosor har 21 spiraler år ena hållet och 34 åt andra, Som i Fibonaccis talföljd, sen har jag lärt mig att det går väldigt bra att plantera i mammas trädgårdsland och att solrosor behöver minst 5 cm mellanrum. Dom behöver inte vara vissna om dom är orange. Jag har lärt mig om diagram, när vi har tittat på solrosdiagrammet. Jag har tyckt att det varit roligt när vi konstruerade Petters solros i verkligheten eftersom jag tycker om att sy.

Utförligare beskrivning och dokumentation finns i NämnarenTEMA Matematik från början.

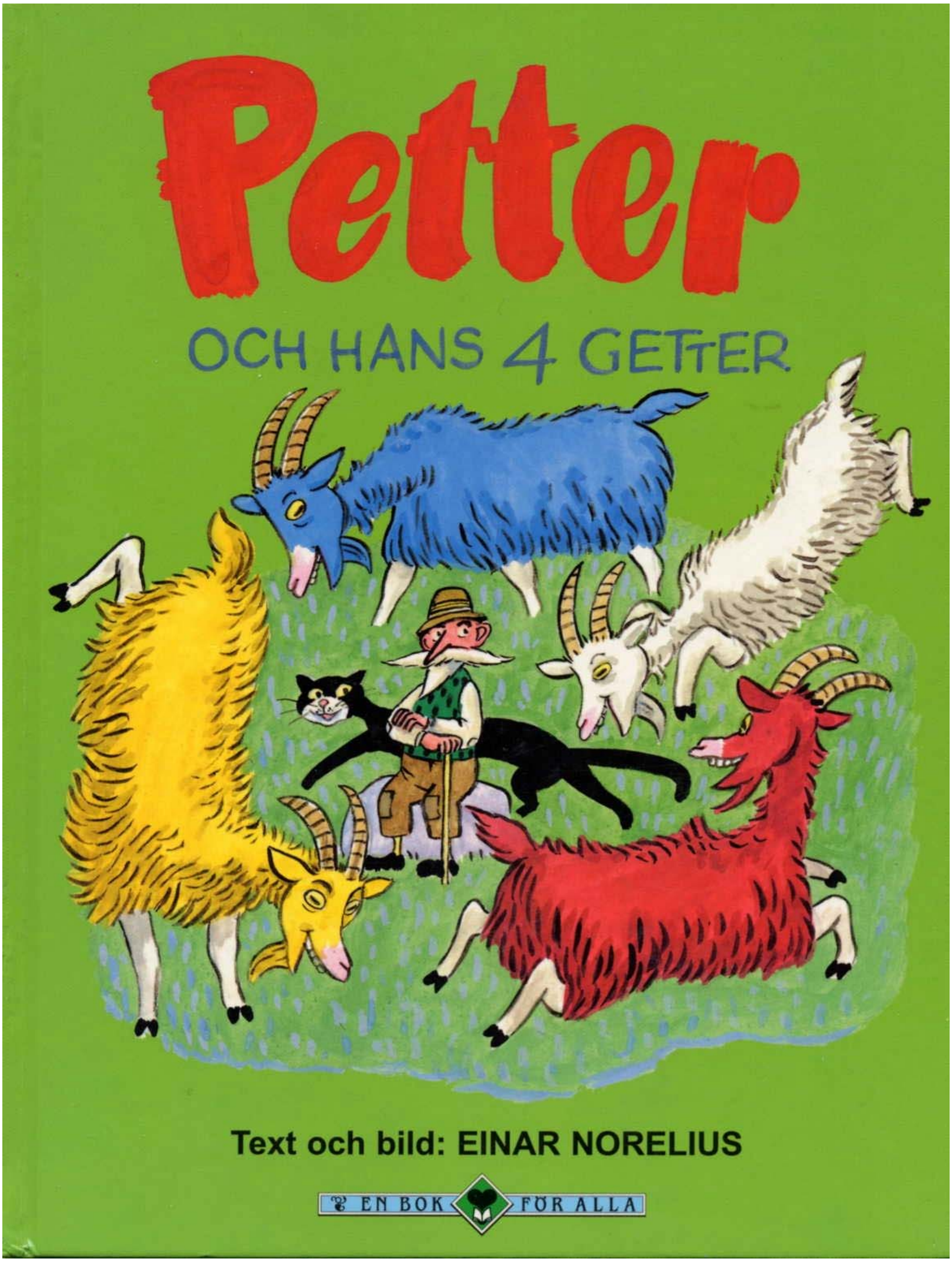
Att arbeta med en barnbok som underlag för matematik

I många år har jag intervjuat eller haft strukturerade långa samtal med barn vid skolstaten (6-7-åringar) om matematik. Vad är matematik? Vem behöver matematik? När behöver man matematik? Varför behöver man matematik? Varför är det bra att kunna matematik? Varför ska man lära sig matematik? Och liknande uppföljningsfrågor. Att söka ta reda på hur barn tänker kring matematik är ett stort äventyr.
Vid dessa samtal har jag noterat att många barn har en snäv syn på vad matematik är eller skulle kunna vara. Allt för många barn har en stark grundmurad, uppfattning om att matematik enbart eller åtminstone främst hör hemma i skolans värld. Matematik ses som en inträdesbiljett till skolan och det är något de måste tillägna sig nästan som ett tvång. De ser också en praktisk användning av matematik kopplat till vardagssituationer, men det gäller i högre grad föräldrarna än dem själva. Matematikens verktyg är inte barnens egendom utan föräldrarnas. I samtalen finns ett starkt könsbundet mönster. Det är papporna som tycks ha behov av och använder matematik. Barn har ofta få egna reflektioner eller uttrycksmedel. Likheter och olikheter inom och mellan elevernas resonemang och tankar kring matematik visar dock på variation i deras tänkande. Genom att lyssna aktivt får läraren kunskap om en elevs tankar, uttrycksformer, föreställningar och förkunskaper, som kan vägas mot mål för och planering av arbetet. Lärarens analys och slutsatser ger underlag och möjlighet för ett medvetet handlande i klassrummet. Detta bör naturligtvis få konsekvenser, när det gäller lärande, undervisning och för val av innehåll och arbetssätt. När barn kommer till skolan har de således olika förväntningar och både informellt och formellt kunnande i och om matematik, som bör tas som utgångspunkt för att möta barns uppfattningar och utveckla kunnande.

För många elever i grundskolan är dock
***matematik* det som finns mellan pärmarna i en räknebok.**

Att bygga på barns erfarenheter. Vad innebär det?

I en klass är elevers erfarenheter och utgångspunkter mycket olika. Det gäller för läraren att skapa en gemensam upplevelse och bas. Det kan tex vara en utflykt, en resa eller något annat man varit med om tillsammans. Det är viktigt att ta tillvara det som finns i omgivningen och ge barn upplevelser och upptäckter av matematik och att fundera över hur barn påverkas av den kultur de möter, när trycket från massmedia, kommersiella intressen, marknadskrafter, pryltänkande och individualism blir allt starkare. Hur kan skolan erbjuda en motkultur? Matematik är precis som litteratur, bild och annat skapande en del av vår kultur och vårt kreativa tänkande.



Figur 3. Omslagsbild *Petter och hans 4 getter*

Mitt exempel visar ett arbete med matematik utifrån ett till synes matematikfattigt sammanhang i en barnbok. Genom att utforska situationer och sammanhang i en fiktiv verklighet med en berättelse och bilder, där unga befinner sig har oväntade och oanade upptäckter gjorts. Det som utspelas i en fantasivärld, har ofta sin motsvarighet i elevernas egen verklighet. Barnen känner igen sig och identifikationen blir en del av innehållet.

Om boken

Petter och hans 4 getter av Einar Norelius (nytryckning 1996) var utgångspunkt för matematikarbetet med elever i grundskolans åk 2 och 3 i nästan fyra terminer. Boken har funnits i många år och flera av elevernas föräldrar har läst boken som barn, men i andra utgåvor. Arbetssättet är generaliserbart till andra böcker. I många länder t ex USA arbetar man med barnlitteratur, men då mest med böcker som tagits fram speciellt för ändamålet. I denna boks text finns nästan ingen påtaglig eller synlig matematik. Bara enstaka ord och begrepp som för tanken till matematik.

Antal: Ett, två, fyra
Ordningstal: Första, andra, tredje, fjärde
Siffror: Fyra i rubriken
Tid: Kvart, genast, fort, natt, dag, alltid
Lägesord: Riktning, hit, dit, mitt i, av och an, till, utför

I arbetet har inte samspelet mellan text och bild studerats. Innehållet i bilderna har gett underlag för upptäckter i och om matematik.

Helhetssyn på arbetet

I arbetet finns en strävan att i interaktion med eleverna arbeta utifrån den helhet, som verkligheten är, där ämnen som matematik, bild, slöjd, no, teknik och svenska tillsammans är byggklossar. Ämnesuppdelningen är en konstruktion och inte alltid naturlig speciellt för yngre barn. Arbetet grundar sig i en helhet där barnen hämtar erfarenheter från sin verklighet och / eller från gemensamma upplevelser. Det kan gälla både fakta och fantasi. Matematikbegrepp och olika beräkningar behandlas när de kommer naturligt in och didaktiska strategier finns för detta arbete. Det är viktigt att det har en tydlig funktion. För att få en god kunskapsuppbyggnad är det viktigt att barnen känner igen sig i uppgifterna, som dessutom måste ha en progression. I klassrummet är dessutom trygghet en förutsättning för utveckling.

Arbetssätt och arbetsformer

Arbetssättet kan karakteriseras som problemorienterat. Val av innehåll och arbetsformer beror av det innehåll som ska behandlas och de elever som ska arbeta med detta innehåll. Ett problemorienterat arbetssätt förutsätter att yttre villkor inte begränsar processen som tex schemaläggning. I Lpo 94 beskrivs vilka mål som ska nås och som indirekt ger möjligheter och ramar för hur undervisningen kan läggas upp. Med detta synsätt blir det väsentligt att medvetet välja aktiviteter och situationer så att de bäst svarar mot matematikens syfte, mål, ideér och natur. Om eleverna inte från början har förutsättningar att engagera sig strävar vi efter att stimulera och stötta dem. Eleverna förväntas å sin sida göra vad de kan för att uppfylla de mål vi ställer upp och gör tydliga.
Blomhøj (1994) har i Nämnaren beskrivit hur en osynlig överenskommelse, ett didaktiskt kontrakt utvecklas och vilka konsekvenser detta har för arbetet i en klass. Detta är ett uttryck för att läraren tillsammans med klassen söker en balans mellan olika uppfattningar, förväntningar och krav, som bägge parter är medvetna om och försöker ge akt på.
Tillsammans med eleverna har öppna frågor ställts utifrån sammanhanget. De har fått tillfälle att göra undersökningar och upptäckter utifrån egna frågeställningar. Det utforskande arbetet har oftast skett i grupper med varierad sammansättning. Samtal, diskussioner och resonemang har inneburit att eleverna ställt hypoteser och dragit slutsatser. Elevernas interaktion har stimulerat och utvecklat innehåll och arbetssätt. Samtal mellan olika grupper har gett ytter-

ligare tillfällen till argumentation och möjligheter att vidga upptäckterna. I arbetet har vi gjort upptäckter av tex relationer mellan tal, talföljder, kombinaritorik, relationer inom och mellan objekt, geometriska grundbegrepp och mätningar, perspektiv, proportionalitet, skala diagram. Eleverna har presenterat arbetet och sina erfarenheter på olika sätt, i texter, bilder, diagram, symboler, laborativa modeller, i olika representationer. Eleverna dokumenterar sina arbeten i egna böcker. Baksidestext på en elevbok (Marianne åk 3, maj):

Min mattebok är en spännade resa igenom
matematikens värld, men inte bara matematik
det handlar också om solrosor, dikter och om symmetri
det är en lärorik och rolig resa.

Vid utvärderingen i slutet av år 3 gick vi igenom boken om Petter. Fanns det någon matematik kvar att undersöka? Jo eleverna fann mycket att arbeta vidare med. De tog fram aspekter som vi inte berört, t ex avstånd, materialåtgång, rimlighetsbedömningar, hastighet, vattenflöde. Texterna visar en ökad medvetenhet om och nyfikenhet inför matematikbegrepp. Eleverna funderar över och formulerar hur de tänkt och vad de lärt sig. Barnens texter har utvecklats till djupare reflektioner om lärandet i och om matematik. Arbetet med en cyklisk process-skrivning har gjort att skrivningen har blivit en integrerad del av arbetet och stödjer elevers lärande även i matematik genom likheterna med problemlösningsprocessen. Jag tolkar barnens reflektioner så, att de vidgat sin uppfattning om matematik och vad matematik kan användas till. De visar förståelse för och tilltro till sitt tänkande i matematik och använder matematik som verktyg att förstå sin omgivning. I en muntlig utvärdering sa elever

– Nu förstår man kanske inte att det där med Petter är matematik. Men det förstår vi se'n.
– Matematik är roligt när jag får undersöka, tänka och räkna se'n om jag behöver…

Det är viktigt att notera att eleven skiljer mellan räkning och matematik, precis som kurs-planen i matematik. Där ju fokus har ändrats från regelstyrda räknefärdigheter och regelstyrd problemlösning, till utveckling av elevers tänkande och resonerande i matematik, för att upptäcka, utforska och befästa i meningsfulla sammanhang. (Skolverket 2000).
En bärande tanke i arbetetet är

> *Eleverna utmanas att gå bortom vad och hur – till varför, hur kommer det sig och vad händer om?*
>
> (Martinez & Martinez i *Mathematics Teacher, dec 98*. s 746, min översättning)

Litteratur

Bergius, B. & Emanuelsson, L. (1998). Petter och hans 4 getter del 1. *Nämnaren 25(3),* 8-12.
Bergius, B. & Emanuelsson, L. (1998). Petter och hans 4 getter del 2. *Nämnaren 25(4)*, 12-15.
Blomhøj, M. (1994). Ett osynligt kontrakt mellan elever och lärare. *Nämnaren 21(4),* 36-43.
Carpenter, T., Moser, J. & Romberg, T. (1982). *Addition and subtraction; A cognitive perspektive.* Hillsdale, NJ. Lawrence Erlbaum.
Emanuelsson, G. m fl (Red.) (1996). *Matematik ett kommunikationsämne.* Nämnaren TEMA.
Eriksen, D. (1993). *Personlige og sociale sider ved tilegnelse af faglig viden og kunnen i folkeskolens matematikundervisning*. København: PhD-avhandling. Danmarks Lærehøjskole.
Hiebert, J. (1999). Relationships Between Research and the NCTM Standards. *Journal for Research in Mathematics Education 30(1)*, 3-19.
Kursplaner för grundskolan, Lpo 94. Utbildningsdepartementet.
Läroplan för grundskolan, Lpo 94. Utbildningsdepartementet.
NCTM (1991). *Professional Standards for teaching.* Reston Va: Author.
Norelius, E. (1996). *Petter och hans 4 getter.* Stockholm: En bok för alla.
Pettersson, A. (1994). *Hur löser elever uppgifter i matematik? Skolverkets rapport 61.* Stockholm: Liber distribution.

Skolverket (1997). Kommentarer till grundskolans kursplan och betygskriterier i matematik. Stockholm: Liber distribution.

Janne Fauskanger og Marta Vassbø

Marta Vassbø (bildet), f. 1958, er allmennlærer, adjunkt med opprykk med blant annet drama grunnfag. Hun har 20 års erfaring som lærer på alle trinn i grunnskolen. Den siste perioden har hun arbeidet mest på småskoletrinnet og i år har hun 1.klasse for fjerde gang.

Problemløsing i 1. og 2. klasse, hva kan det være?

-et samarbeidsprosjekt mellom lærerne på Lura skole og Janne Fauskanger, Høgskolen i Stavanger

Janne Fauskanger og Marta Vassbø

Starten på den skolebaserte etterutdanningen

Marta Vassbø har 20 års erfaring fra alle trinn i grunnskolen. De siste fem årene har hun arbeidet mest i første klasse. Hun syntes at tiden var inne for å fordype seg i matematikkfaget. Skolen har lenge hatt fokus på begynneropplæringen i norsk. Matematikk har derimot vært et forsømt fag, og lærerne på første og andre trinn følte behov for å videreutvikle seg her.

Figur 1: Mattis

Marta har med seg en liten medhjelper i undervisningen, ei sekkedokke som heter Mattis (fig. 1). Mattis er en tenker og grubler som stiller mange spørsmål, men som ikke alltid forstår matematikk. Han trenger derfor mye hjelp av førsteklassingene.

Janne Fauskanger har gjennom mange år holdt etterutdanningskurs for lærere på småskoletrinnet. Kursene har ofte være holdt på andre steder enn deltakernes arbeidssted, og deltakerne har ikke hatt avsatt tid til å fordype seg i litteratur eller på annen måte forberede seg til kursdagene. I tilknytning til kursrekker på 2 til 4 dager, har det vært lagt inn en eller annen form for "mellomarbeid", det vil si at deltakerne har prøvd ut ting i egen klasse som de så har presentert for andre. Disse etterutdanningsforløpene har vært det Jess og Valero (1999, 2001)[1] kaller "tradisjonelle".

1 Kristine Jess og Paola Valero har begge sitt arbeid tilknyttet matematikkdidaktikk på Danmarks Pædagogiske Universitet (DPU).

Det er forsket mye på hvordan matematikklærere utvikler kunnskaper om det å undervise i matematikk, og følgelig er det skrevet mye om hvordan lærere best kan støttes. Jess og Valero (2001) påpeker at hvis det er mulig å skape et grunnlag for felles refleksjoner på selve skolen, vil det samtidig være skapt et permanent forum for utvikling. De tradisjonelle etterutdanningskursene skaper ikke nødvendigvis slike forum, så da lærerne på Lura tok kontakt, var det ikke vanskelig å si ja til et samarbeid.

Samarbeidsprosjektet

Prosjektet består av følgende hovedpunkter:

- **Litteraturstudie**[2]**.**Lærerne kommer med ønsker og får litteraturideer i tilknytning til ulike emner. De leser stort sett felles litteratur og har følgelig et godt utgangspunkt for diskusjoner. De har avsatt noe tid til å studere litteratur.
- **3 kursdager** fordelt over skoleåret. Innholdet i kursdagene er utarbeidet i samarbeid med lærerne. Foreløpig har vi hatt to halve dager med tall i fokus. Diskusjon vektlegges på kursdagene, og når alle lærerne har lest samme litteratur og deltar i samme prosjekt, blir det mange spennende diskusjoner.
- **Veiledning**. Både faglig og didaktisk veiledning. Lærerne tar kontakt når de ønsker å diskutere egen planlegging av matematikkundervisning, og får da veiledning og hjelp til planleggingen. Deler av undervisningen observeres, slik at den kan diskuteres etterpå. Dette oppleves som svært lærerikt for alle parter.
- **Trinnplanlegging**. Siden alle både på 1. og 2. klassetrinn deltar i dette etterutdanningsprosjektet, har trinnplanleggingen på skolen langt mer fokus på matematikk enn tidligere.

For at utviklingen av matematikkundervisning skal lykkes, må den enkelte lærer jevnlig få oppfølging og støtte på sin egen skole. Jess og Valero (2001) understreker nødvendigheten av at det finnes et permanent forum for utvikling på skolen, et forum som gir matematikklærere mulighet til å utveksle erfaringer, diskutere og reflektere over egen praksis. På Lura skole har alle lærerne i 1. og 2. klasse valgt å ha fokus på egen matematikkundervisning Etter bare noen få måneder merker de at matematikk diskuteres langt oftere enn tidligere – matematikken er blitt viktigere. Matematikk har blitt en langt viktigere del av lærernes trinnplanlegging, noe også studien til Jess og Valero tyder på. De møtte alle deltakerne to år etter at prosjektet var gjennomført, og sier: ”[…] der var nu mer faglig interaktion matematiklærerne imellem på skolen, de talte mer sammen om deres matematikundervisning.” (Jess og Valero ibid.:19). Skolen Jess og Valeros prosjekt ble gjennomført på, fikk i tillegg rykte på seg for å være en skole hvor det skjedde mye innenfor matematikken, så kanskje det blir Lura skoles framtid?

---

2 Før 1. kursdag (forsommer og tidlig høst) leste lærerne følgende:

Ellingsrud, G. og Strømme, K. E. (1999): Lykkehjulet. NKS-Forlaget. Kapittel 1-5.

Fauskanger, J. (1999): 1. klasse - et glimt fra deres matematikkundervisning. Side 5 - 10 i Tangenten nr 2, 1999.

Fauskanger, J. (2001): ”Vi må jo ha bøker å skrive i!” 1. klasses arbeidsbøker i matematikk – og gjeldende planer for grunnskolen. Side 73 - 114 i Selander, S. og Skjelbred, D. (red): Fokus på pedagogiske tekster 2. Artikler om læremidler i første klasse. Notat 7/2001 i Skriftserien for Høgskolen i Vestfold.

Høines, M. J. (1998): Begynneropplæringen. Caspar Forlag, Bergen. 2. utgave.

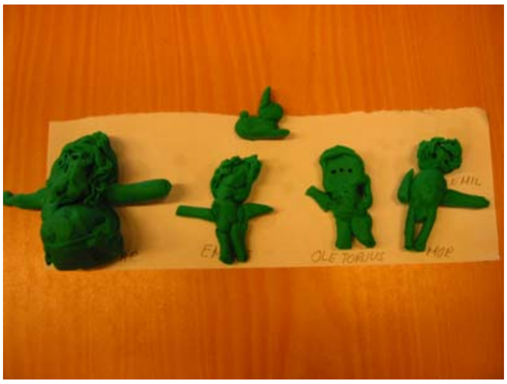
Solem, I. H. og Reikerås, E. (2001): Det matematiske barnet. Caspar Forlag, Bergen. Kapitlene 5, 6 og 10.

I tillegg har flere lest artikler som fokuserer på noe de er spesielt opptatt av. I det siste har alle arbeidet med hva en kan bruke knapper til og har i den sammenheng lest blant annet: Furness, A. (1998): Vägar till matematiken. Att arbeta med barn 5-7 år. Ekelunds Förlag, Sverige.

Problemløsing i fokus

Det var et ønske fra lærerne at problemløsning skulle settes i fokus på første kursdag. Det var derfor viktig å definere problemløsning og å diskutere hvordan en som lærer kan utfordre elevene til å bli gode problemløsere.

Problemløsing defineres ulikt, det som er problemløsing for én matematikkdidaktiker, er det ikke for en annen. Vi har ”landet” på at problemløsing for oss handler om at elevene ikke har algoritmer som vil gi løsning på det aktuelle problemet de utfordres med. Solvang (1996:135) har følgende definisjon på begrepet problem: ”En utfordring vil for en person være et problem dersom denne personen ikke har noen algoritme som vil gi løsning når personen konfronteres med utfordringen.” Problemløsing blir da å søke etter handlinger som fører til at et problem løses. Breiteig og Venheim (1999) understreker at problemløsing handler om aktiviteten å løse problemet eller oppgaven. De kommer med følgende definisjon: ”En matematisk oppgave som en person er interessert i å finne ut av, som engasjerer henne og han og der vedkommende ikke har noen umiddelbart tilgjengelig metode for å løse oppgaven, er et *problem.*” (Breiteig og Venheim ibid.:239). Denne definisjonen har blant annet den konsekvensen at en oppgave ikke er et problem for en elev før eleven har gjort problemet til sitt. I denne sammenheng forsøker vi å hjelpe elevene til å gjøre problemet til sitt eget ved å knytte det til elevenes hverdag. Arbeidet med elevenes familier, etter ide fra Høines (1998), er et eksempel på dette (fig. 2 og 3).

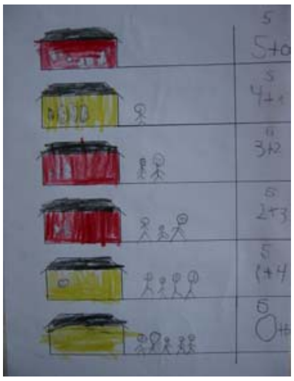


Figur 2: Plastelinafigurer

1. klassingene på Lura skole har i flere år hatt temaet ”Du og jeg og vi to” i begynnelsen av skoleåret. Her har barna presentert seg selv og familien sin og gått tur for å se hvor alle i klassen bor. I den forbindelse har barna også laget sin familie i plastelinafigurer (fig. 2). Først i år er denne oppgaven videreutviklet til å bli en matematisk aktivitet. Etter at vi hadde laget plastelinarfigurene samlet vi alle elevarbeidene og sammenlignet antall, vurderte flest og færrest og hvem som var like mange familiemedlemmer. Elevene tegnet også huset sitt med alle familiemedlemmene.

Neste gang vi tok fram figurene, lekte vi at noen familiemedlemmer gikk ut av huset og noen var hjemme. Problemet var da å finne ut hvor mange som var ute og hvor mange som var hjemme. Utfordringen for de sterkeste var å finne alle ulike kombinasjoner eller å ”låne” en annen familie og utforske den. Også her oppfordret vi elevene til å skriftliggjøre arbeidet gjennom tegning i arbeidsboka. Det ble mange flotte samtaler og forklaringer til arbeidet med figurene.

Etter dette arbeidet vi med en femmer-familie i samlet gruppe. Vi hadde laget en kopi med seks hus der elevene skulle tegne inn flere muligheter for kombinasjoner av familien ute og inne (fig. 3). Vi hadde vist hvordan vi kunne skrive tegningen vår på ”matematikkspråket”, noe som førte til at de fleste ble opptatt av siffersymbolene og skriftliggjøring av addisjon.



Figur 3: Addisjon med utgangspunkt i egen familie

I en del av problemene elevene har blitt presentert for, ser vi en viktig utfordring: Et problem for én 1. klassing er en rutineoppgave for en annen. Her er både læreren og Mattis viktig. Mattis fungerer som en hjelp til å stille gode spørsmål, til å utfordre elevenes matematikk og gi elevene som opplever et gitt problem som en rutineoppgave nye utfordringer.

Vi opplever ofte at det er godt å bruke Mattis som hjelp før vi skal i gang med et arbeid. Til en turdag hadde Mattis tatt med seg 10 kastanjenøtter pluss sin venn Ekorn, et utstoppa ekorn. I klassen får dagens ordenselev lov å trekke kalenderen, legge en kule på ”tellepinnene” (se beskrivelse senere) og løse en matematisk utfordring. Det er ofte Mattis som kommer med noe han lurer på. Denne dagen måtte Ekorn få hjelp til å dele de 10 kastanjenøttene likt på de fire ekornbarna. Ordensbarnet fant fort ut at det ble to til hvert ekornbarn og to til overs. Gjennom samtale fant de ulike løsninger på hva de skulle gjøre med de to kastanjenøttene som var til overs. Mattis lurte så på om elevene kunne hjelpe ham og Ekorn med å finne kongler og nøtter i skogen, for nå var det høst og de trengte masse mat til vinteren. Ekorn sytnes det var fint hvis de først kunne samle mange og så dele det opp i hauger slik at det ble likt til alle fire ungene. ”Men da må du Mattis og Ekorn komme ut og se på!”. Selvsagt måtte de love å bli med ut selv om det regnet og verken Mattis eller Ekorn tåler regn. ”For Mattis har ris i rumpa si”, som ungene sier. Heldigvis finnes det brødposer som kan brukes til regntøy (fig. 1). Det ble samlet, talt, sortert og fordelt. Det ble addert, dividert og multiplisert. Mattis og Ekorn var mektig imponerte over mengde- og regneferdighetene. Ingen av de to er så gode i matematikk, så de måtte stadig ha forklaring på hvordan barna hadde kommet frem til sine løsninger.

Det er alltid mer motiverende for elevene å forklare Mattis hvordan de har løst en oppgave enn å forklare det samme til oss voksne som de vet kan det fra før.

Læreren har selvfølgelig en minst like viktig rolle som Mattis, og for å støtte de sterke elevene videre i sin matematikklæring bruker vi blant annet det vi kaller ”Klassens store tall”.

Figur 4: Klassens store tall

Hver dag samler vi melkekorker. Etter hvert har det blitt en anselig mengde. En dag talte to elever alle korkene og fant ut at det ble 277. De laget tierhauger for å gjøre arbeidet lettere. En medelev lurte på hvor mange det kom til å bli hvis vi regnet med de 8 korkene som vi snart skulle hente. Da svarte lille Sindre straks at det må bli 285 for 277 + 8 er 285 og da mangler vi bare 15 så har vi 300.

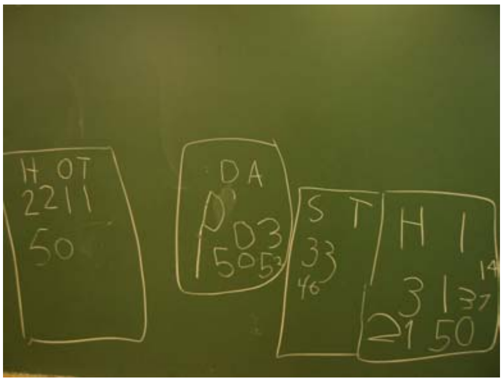
Vi har talt hvor mange føtter der er i klassen, hvor mange stavelser vi har i navnene våre og hvor mange stavelser det blir til sammen for hele klassen. Vi har talt hvor mange Jovo-brikker det er i et byggverk og hvor mange neser og fingre der er i klassen. I tillegg prøver vi å arbeide med problemer som med enkle grep kan utvides til å også utfordre de sterke.

En oppgaven fra gymnastikken er et eksempel på det. Her arbeidet vi med rokkeringer som lå på gulvet. En rokkering til hver elev. Elevene sprang rundt i salen utenom rokkeringene som forestilte hus. På signal skulle alle finne seg et hus. Når alle hadde funnet et hus, utfordret lærerne dem til å ha for eksempel tre deler av kroppen i gulvet, deretter fem deler av kroppen i gulvet. Hver gang så vi på ulike løsninger. Dette fungerte som en god måte å få oversikt over elevenes tallbegrep på.

Figur 5: Armer, bein og rokkeringer, 2+2+3 (2 føtter, 2 føtter til og 3 hender)

Vi fortsatte så med å være to eller tre i hvert hus. Nå ga vi elevene nye utfordringer der de til sammen skulle ha for eksempel fire eller syv deler av kroppen i gulvet (fig. 5). Løsningene ble nå mange og varierte. Noen grupper løste oppgaven raskt og kunne få nye utfordringer som: ”Hvor mange tær er det i ringen nå når dere har fem føtter på gulvet?” Denne aktiviteten fortsatte i klasserommet. Nå ble det viktig å skriftliggjøre det vi hadde gjort i gymnastikktimen (fig. 8). Her ble det illustrative tegninger, mye telling og sifferskriving.

En annen dag arbeidet vi med ball. En av oppgavene var at to og to skulle kaste ball til hverandre. Noen begynte å telle hvor mange ganger de klarte å kaste til hverandre uten å miste ballen i gulvet. Dette smittet, og snart var alle opptatt av å telle antall kast. De var stolte og glade for alle de store tallene og uttrykte ønske om å skrive dem ned. Dermed tok vi fram kritt og noterte på tavla. Parene skrev ned forbokstavene sine og noterte tallet i ei rute, så var de i gang igjen med ny telling. Det ble en imponerende samling tall og mye kastetrening for timen var over (fig. 6).



Figur 6: Antall ballkast

Tall – hva har vi arbeidet med?

Veien frem mot siffersymboler
Eksemplene som er nevnt viser tydelig 1. klassingenes arbeid med ulike aspekter i tilknytning til tallbegrepet. Et av hovedmålene for samarbeidsprosjektet var å hjelpe elevene til å utvikle en god tallforståelse og et trygt og solid tallbegrep.

Vi bestemte tidlig at tall skulle stå i fokus dette første semesteret. Vi har derfor arbeidet med ulike aspekt ved tallbegrepet.

- Kardinaltall (antall objekter, antall måleenheter).
  Kardinaltallsbegrep innebærer at elevene kan telle, at de kan svare på ”hvor mange” ved å angi det siste ordet de kom til i tellingen. Parkobling (en-til-en-korrespondanse) er dermed et viktig aspekt i utviklingen av kardinaltallsbegrepet. Kardinaltallsbegrep innebærer også at eleven har antallskonservering, at de har oppdaget at antall er uavhengig av type objekt, hvordan objektene er plassert, i hvilke situasjoner de forekommer, hvor tellingen starter (bare alle objekter tas med), og at antallet er det samme hver gang vi teller de samme objektene, (Solem og Reikerås 2001:117).
- Ordinaltall (objektets plassering i en serie).
  Ordinasjon dreier seg om å forstå prinsipper for å ordne elementer i rekkefølge, altså å sortere gjenstander etter størrelse eller andre egenskaper, mengder etter antall, osv. (Herbjørnsen 1998:116).
- ”Tallord” som identifikasjon, som et slags navn (”Linje 5”).
- Klassifisering og sortering etter egenskaper.
  Elevene har brukt naturmateriale i arbeidet med sortering og klassifisering.
- Siffersymboler.

> Vi har foreløpig ikke vektlagt strukturert arbeid med siffersymboler, men elevene vil gjerne skrive siffersymboler og de trener gjerne. Det har rett og slett gått sport i å skrive siffersymboler i klassen (se de ulike bildene presentert i dette paperet). Dette gjør det lett for læreren å få oversikt over hvilket forhold elevene har til sifferskriving.

Det viktigste i dette arbeidet er først å legge til rette for problemløsende aktiviteter som gjør det mulig å bli kjent med de ulike elevenes tallbegrep. Både eksempelet med elevenes familier i plastelina (fig. 2 og 3) og arbeidet med hender og føtter i rokkeringer (fig. 5) har gitt lærerne mulighet til å bli godt kjente med elevenes tallbegrep, samtidig som aktivitetene medfører at elevene utvikler sitt tallbegrep. Det er viktig å gi elevene erfaringer med at det er situasjonen vi bruker tallet i som bestemmer funksjonen, og følgelig blir det lærerens ansvar å sørge for at bruken av tallene blir så variert som mulig.

Posisjonssystemet

Vårt tallsystem er et plassverdisystem eller et *posisjonssystem*. Tallverdien avgjøres både av enkeltsymbolenes verdi og plassering og alle aspekter av ”veien frem mot siffersymboler” blir følgelig viktige.

Figur 7: Dagen i dag, ener- og tierkuler

Vi startet allerede 1. september å legge en kule på en tellepinne for hver dag (fig. 7). Tellepinnene er to blomsterpinner sitter fast i hver sin klump med plastelina. Vi hadde sørget for at det bare var plass til 9 kuler på den pinnen vi startet med. Vi hadde en skål med 9 trefargete kuler og 3 grønne kuler. Da vi kom til den 10. dagen fikk vi et problem. Vi hadde ikke flere trefargede kuler og det var ikke plass til flere kuler på pinnen. Hva skulle vi så gjøre? Var det mulig å finne på noe lurt med de grønne kulene?

Læreren lurte på om det var noen som hadde Pokemon-kort hjemme. Det var det selvsagt mange som hadde. Læreren spurte så videre om alle kortene var like mye verd. Alle elevene visste at kortene hadde ulik energi. Dermed kom det et drøss med hender i været som ville fortelle om sine kort og hvor mye energi de hadde. Via en liten omvei inn i elevenes verden ledet læreren elevene mot en løsning der vi sa at de grønne kulene hadde energi 10. Etter hvert har denne pinnen også fått navnet tierplass. Hver dag når dagens dato skal fastsettes, sammenligner vi snifferne i datoen med antall kuler på tellepinnene. ”Å, er det sånn det er. Er det derfor vi skriver 12 slik?”, utbrøt en jente gledestrålende. Hun hadde forstått noe viktig den dagen.

0 som plassholder blir viktig i denne sammenheng, og gjennom arbeidet med for eksempel dagen i dag, får elevene smått om senn erfaring med både 10, 20 og 30. Elevene utfordres samtidig til å arbeide med tall større enn 9, slik at posisjonssystemet blir viktig, noe figur 8 viser. Her har en elev regnet ut hvor mange tær det er i en rokkering når det er fire føtter i ringen.

Figur 8: Antall tær i rokkeringen

Lærerne har parallelt med dette sett på hva som skjer om base ti endres til fem, tolv eller to. Dette gir et godt innblikk i hvor vanskelig posisjonssystemet kan være og hjelper lærerne i arbeidet sammen med elevene. Lærebøkenes presentasjon av tallet 10 understreker også at posisjonsystemet er vanskelig å behandle. Noen verk venter med innføring av posisjonssystemet til elevene skal arbeide med tallet 50. Null presenteres også ulikt, i noen verk før 1 og i andre etter 5. På Lura skole kommer nullen når de skal skrive ned dagens dato og "enerplasspinnen" er tom.

Tallregning

Foreløpig har vi sett på additive strukturer,[3] på addisjon og subtraksjon. Vi har fokus på å vektlegge et mangfold av strukturer i arbeidet med tallregning og forsøker hele tiden å ha en problemløsende tilnærming til arbeidet. Elevene arbeider også med multiplikative strukturer når det blir nødvendig for dem.

Erfaringer så langt

For oss på Lura skole har det vært svært nyttig og lærerik å samarbeide med Janne. Vi har fått et nytt og spennende fokus på matematikkundervisningen. Ikke minst ser vi nå i større grad matematikken rundt oss i det daglige arbeidet og klarer bedre å synliggjøre den for elevene. Vi har også blitt mer oppmerksomme på å skriftliggjøre større deler av den praktiske matematikken.

For Janne som arbeider i lærerutdanningen, er følgende kommentar betegnende: "Samarbeidet er nyttig og ikke minst lærerikt!" Som nevnt innledningsvis understreket Jess og Valero (2001) at hvis det er mulig å skape et grunnlag for felles refleksjoner på en skole, vil det samtidig være skapt et permanent forum for utvikling. Lærerne på Lura skole har nå matematikken i fokus, og de har fokus på hvor de vil med sin matematikkundervisning. Det er spennende å være den del av dette.

3 Her har vi knyttet diskusjonen til Alseths presentasjon av strukturer (Alseth 1998, kap. 7.2).

Takk

Vi vil takke Jorunn Melberg fra Høyskolen i Stavanger for at hun laget Mattis til oss.

Litteratur

Alseth, B. (1998): *Matematikk på småskoletrinnet*. Nasjonalt Læremiddelsenter, Oslo.
Breiteig, T. og Venheim, R. (1999): *Matematikk for lærere 2*. Tano Aschehoug, Oslo. 3. utgave.
Herbjørnsen, O. (1998): *Rom, form og tall. Matematikk for barnetrinnet*. Tano Aschehoug, Oslo.
Høines, M. J. (1998): *Begynneropplæringen*. Caspar Forlag, Bergen. 2. utgave.
Jess, K. og Valero, P. (red) (1999): *MAPUFU I Projekt. Matematiklæreres professionelle udvikling gennem forskning i egen undervisning*. Skriftserie af Center for forskning i matematiklæring, København.
Jess, K. og Valero, P. (2001): Fokus på efteruddannelse: Fra kurser til professionel udvikling. Side 14-19 i *Matematik* nr 6, 2001.
Solem, I. H. og Reikerås, E. (2001): *Det matematiske barnet*. Caspar Forlag, Bergen.
Solvang, R. (1996): *Matematikkdidaktikk*. NKS Forlaget, Oslo. 2. utgave.

Anne B. Fyhn

Anne Birgitte Fyhn er høgskolelektor ved Høgskolen i Tromsø, Avdeling for lærerutdanning. Hun har hovedfag i realfagsdidaktikk fra Universitetet i Oslo og har tidligere arbeidet som sykepleier og som lærer i grunnskolen, mest på ungdomstrinnet. Her har hun arbeidet mye med elever som har ulike matematikkvansker.

Læring av geometri via erfaringer fra fysisk aktivitet og bevegelse

Anne Birgitte Fyhn

I L-97 vektlegges elevenes egne erfaringer som grunnlag for undervisningen, både for jenter og gutter fra alle sosiale lag (KUF, 1996). I praksis betyr dette at lærere må gi elevene felles erfaringer som de kan bygge sine ferdigheter og kunnskaper på. Utfordringen for læreren ligger i å gjøre bruk av varierte aktiviteter for å kunne appellere til bredest mulig erfaringsgrunnlag hos elever.

På slutten av 1990-tallet underviste jeg to ungdomsskoleelever som begge hadde vansker med å forstå matematiske begreper. Jeg gjorde mange og varierte forsøk på å la undervisninga bygge på de to elevenes erfaringsbakgrunn, noe som langt fra alltid var like vellykket.
I nært samarbeid med guttenes norsklærer begynte vi med en fast dag ute i uka. Vi hadde fokus på arbeid med ulike matematiske begreper, og norsklæreren jobbet systematisk med å utvikle guttenes skriveglede. Som avrunding på dagen skrev guttene en logg, der vi la vekt på hva vi hadde gjort, opplevd og hvordan de hadde hatt det. Etter hvert oppdaget jeg at når guttene skrev om det de hadde gjort i løpet av dagen, skrev de også om matematikken, men de var i liten grad opptatt av hva de hadde lært. (Dette høres litt rart ut – la de vekt på det de hadde erfart da?)

Mange av erfaringene fra dette prosjektet har lagt grunnlag for undervisning av studenter i allmennlærerutdanningen ved Høgskolen i Tromsø. Studentene gir positive tilbakemeldinger, og begrunnelsene knyttes til at de både lærer matematikk og fagdidaktikk av dette. Inneværende skoleår prøves undervisningsformen ut på elever i grunnskolen. Formålet med denne utprøvingen er å kartlegge hvordan elever lærer geometri når undervisningen bygger på elevenes egne erfaringer gjennom fysisk aktivitet og bevegelse.

Hva er geometri?

Et matematikkleksikon sier at geometri er:

> *"Den hovedgrenen av matematikken som behandler rommets natur og form, størrelse og andre egenskaper ved figurer"* (Thompson & Martinsson, 1997).

Hans Freudenthal uttrykker seg noe annerledes:

> *"Geometri er å begripe rommet.....det rommet som barnet lever, puster og beveger seg i. Det rommet som barnet må lære å kjenne, undersøke og erobre for å bli i stand til å leve, puste og bevege seg bedre i det." (Grouws, 1992, s 420)*

Barn må foreta seg noe - leve, puste, bevege seg – for å kunne gripe og dermed begripe rommet. Dette kan leses som en oppfordring til læring gjennom fysisk aktivitet.

Under kapitlet om kroppsøving i L-97 finner vi følgende:

"Barn lærer med alle sansar og gjennom å bruke kroppen aktivt." (KUF,96, s. 263).

Tre ulike rom

Hva ligger i begrepet *rom*? Det kan være hensiktsmessig å foreta en systematisering, her synliggjort gjennom en tredeling av elevenes opplevelse av rom i dagliglivet:

- *Mikrorommet – i boka, på pulten; der elevene vanligvis lærer skolegeometri*
- *Mesorommet – der de fleste av elevenes nære rom - interaksjoner foregår*
- *Makrorommet – den ukjente byen, fjellet, havet…*(Berthelot & Salin, 1998)

Berthelot & Salin hevder at den rom - representasjonen elevene lærer seg utenom skoletiden ikke samsvarer med elementær geometri. Videre hevder de at barneskolens omgang med geometriske figurer (tegnet) på papiret, er en av hovedkildene til lærevansker i geometri.

Elevenes erfaringer er hovedsakelig fra mesorommet. Når skolegeometrien foregår i mikrorommet, er de geometriske figurene forminsket. Elevenes erfaringer er hovedsakelig fra en tredimensjonal verden, mens skolegeometrien i stor grad handler om todimensjonale figurer. Når eleven tegner en geometrisk figur, handler det ofte om at tredimensjonalt konkret objekt både er forminsket og gjort todimensjonalt, altså to abstraksjonsprosesser på en gang. Dersom undervisningen skal bidra til at elevene får knyttet bånd mellom egne erfaringer og forståelsen av geometriske begreper, innfris intensjonene i L-97.

Muntlig matematikk

Arbeid med muntlig matematikk fører ofte til faglige diskusjoner. Utgangspunktet i dette prosjektet er utendørs *mesorom - aktiviteter*. Lærerstudentene jobbet med forståelse av begrepene parallell, vinkel, lengde, areal, omkrets, diagonal, rotasjon, speiling og symmetri. Aktivitetene foregikk i grupper for å vektlegge den muntlige matematikken, der også kroppsspråk ble brukt i tillegg til verbalt språk.

Lærerstudentene fikk i tillegg følgende oppgave: "Skisser et undervisningsopplegg for grunnskolen der dere bruker snø eller ski for å utvide elevenes begrepsforståelse i geometri. Dere velger klassetrinn selv."

Studentene uttalte i ettertid at de lærte mye av å arbeide med disse tekstene, og en årsak til det slik jeg ser det, er at dette arbeidet bygde videre på studentenes egen erfaringer fra mesorom - aktiviteter. Flere av aktivitetene blei også prøvd ut på elever i grunnskolen.

Fysisk aktivitet og bevegelse i forhold til begrepsutvikling

For at et barn skal lykkes med å gå på ski i ei løype må skiene være parallelle. Et barn kan ha erfaringer med parallellbegrepet uten å være i stand til å uttale ordet parallell. Vygotskij (1999) betegner dette som barnets spontane parallellbegrep.

> *"Mens det jobber seg langsomt oppover, rydder det spontane begrepet vei for det vitenskapelige begrepet og dets utvikling nedover. Det skaper en rekke strukturer som er nødvendige for utviklingen av et begreps primitive og elementære sider, som i sin tur gir begrepet innhold og livskraft."*
> (Ibid., s 194, min oversettelse)

Barnet kan kjenne til objektet som begrepet refererer til, uten å være bevisst sine egne tanker omkring dette. Utviklingen av barnets spontane parallellbegrep utvikler seg oppover, og må ha nådd et visst nivå for at barnet skal være i stand til å absorbere et tilsvarende vitenskapelig parallellbegrep.

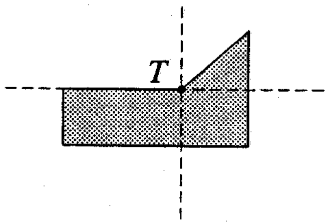
Rotasjon

I mitt hovedfagsarbeid (Fyhn, 2000) kom jeg fram til at der kunne være en mulig sammenheng mellom elevers forståelse av rotasjon og deres deltakelse i fysiske aktiviteter på fritiden.

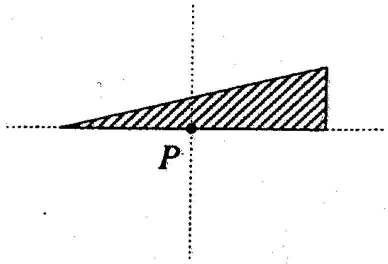
Rotasjon er et emne som ble innført i grunnskolematematikken med L-97. Det kan se ut til at elevene som gikk ut før 1997, har en mangelfull forståelse av rotasjon (ibid). Rotasjon er et element i symmetri.

I en matematikkoppgave skulle en figur roteres en halv omdreining om et gitt punkt, og elevene skulle finne ut hvordan figuren ville se ut etterpå (Se figurer nederst på arket). Dette viste seg å være forholdsvis vanskelige oppgaver for norske skoleelever. Om lag halvparten løste oppgaven riktig dersom den omhandlet figur 1 (Brekke m.fl, 1998). Dersom oppgaven omhandlet figur 2, var det færre elever som løste den riktig. Dette kan forklares ved at femkanten i figur 1 har et lett gjenkjennelig hjørne.

I min undersøkelse av norske tiendeklassinger fant jeg at 53% av de elevene som driver aktivt med snowboard og/eller skateboard her kalt *"skatere"*, hadde riktig løsning på begge disse oppgavene (Fyhn, 2000). 60% av øvrige elever løste oppgaven riktig da de ble presentert for figur 1, mens for figur 2, var det kun 39% som løste oppgaven riktig. *Skaterne* viste seg for øvrig å ha betydelig lavere gjennomsnittskarakterer i matematikk enn andre elever.



Figur 1



Figur 2

Egenskaper ved geometriske figurer

Mesorom - arbeid med geometri har fokus på van Hiele nivåene 1 – 3 (Referanse?). Antagelsen er at *skatern"* har erfaringer som gjør dem i stand til å forholde seg til egenskaper ved geometriske figurer. En mulig forklaring på at de har så mye høyere skåre på oppgaven med gjenkjenning av en rotert trekant, er at større andel *"skatere"* befinner seg på van Hiele nivå 2. Femkanten i figur 1 har et lett kjennelig hjørne som kan ha bidratt til at flere elever på van Hiele nivå 1 har klart å gjenkjenne den i rotert utgave.

> *Dette prosjektet vil videre undersøke hvordan elever på mellomtrinnet beveger seg fra et van Hiele nivå til det neste når undervisningen i geometri tar utgangspunkt i mesorom - aktiviteter.*

Litteratur

Berthelot, R. & Salin, M.H. (1998) The Role of Pupil's Spatial Knowledge in the Elementary Teaching of Geometry. I Mammana, C. & Villani, V. (Red) *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (s 71 – 78). Dordrecht, NL: Kluwer Academic Publishers.

Brekke, G m.fl (1998) *Hva i all verden kan elevene i matematikk? Oppgaver med resultater og kommentarer.* Oslo: Universitetsforlaget

Fyhn, A. (2000) *Persepsjon og læring av matematikk. En test av kunnskaper i matematikk hos norske tiendeklassinger, med spesiell fokus på: Jenters og gutters prestasjoner, elevers romforståelse, elever som driver med tegning/forming, elever som driver med snowboard/skateboard. En analyse av flervalgsoppgaver i matematikk fra TIMSS og TIMSS-Repeat. Hovedfagsoppgave i realfagsdidaktikk.* Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet og Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo.

Grouws, D.A. (Red) (1992) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan Publishing Company.

KUF (1996) *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen*. Oslo: Læringssenteret

Thompson, J & Martinsson, T (1997) Kunnskapsforlagets matematikkleksikon. Oslo: Kunnskapsforlaget.

Vygotsky, Lev (1999) Thought and language. MIT Press Cambridge, Massachusetts, London, England.

Barbro Grevholm och Ingrid Sundström

Barbro Grevholm (email barbro.grevholm@sm.luth.se) arbetar för närvarande som professor i matematik och lärande vid Luleå tekniska universitet och ska inom kort tillträda en professur i matematikdidaktik i Norge vid Högskolan i Agder, Kristiansand. Hon arbetar med undervisning, forskarhandledning och forskning. Hon är ordförande i Svensk förening för matematikdidaktisk forskning (SMDF) och vice ordförande i ledningsgruppen för forskarskolan i matematik med ämnesdidaktisk inriktning i Sverige. Hon är redaktör för och författare i ett flertal böcker inom matematikdidaktik, bland annat Matematikdidaktik - ett nordiskt perspektiv, som inom kort kommer ut på norska. Hon är medlem av den lokala organisationskommittén för ICME10 och i den Nordiska kontaktkommittén för ICME10.

Ingrid Sundström är lärare på Furuparksskolan i Luleå, Sverige. Hon har arbetat som klasslärare på mellanstadiet i nästan trettio år. Under åren har hon haft ett nära samarbete med Lärarutbildningen på Luleå tekniska universitet, med särskild inriktning på matematik och naturvetenskap. Under höstterminen 2001 medverkade hon, tillsammans med Barbro Grevholm, i en pilotstudie, som kan ses som ett matematiskt utvecklingsarbete. För tillfället innehar hon en utvecklingstjänst och ägnar stor del av tiden åt att studera relationen mellan undervisning, lärande och teori innom matematiken och det naturvetenskapliga området.

Matematisk visualisering av biologisk tillväxt

Barbro Grevholm & Ingrid Sundström

Inledning

I ett projekt på en grundskola i Luleå genomfördes inom ramen för ett tema om växande amaryllislökar tre delstudier. Vi redovisar här den studie som handlar om elevers lärarande i matematik. En klass i skolår sex, deras lärare Ingrid och forskaren Barbro samarbetade under en hösttermin. Sambandet mellan lärares undervisning och elevers lärande var i fokus liksom kritiska punkter i elevernas lärande. Resultaten visar att både läraren och forskaren överraskades av vissa av de kritiska punkter som framträdde i elevernas lärande. Vi är övertygade om att lärare och forskare genom att på detta sätt tillsammans analysera autentiska arbeten av elever kan fördjupa sina insikter om elevers lärande och förändra sin undervisning efter det.
Bilden visar två av eleverna som mäter höjden av stjälken på sin amaryllis. (Foto Ingrid Sundström)

Projektets syfte

Syftet med projektet är att undersöka relationen mellan lärares undervisning och elevers lärande avseende ett kunskapsinnehåll i matematik, kopplat till temat Opp amaryllis. Studien avser att göra det möjligt att se i vilken mån lärares framåtsyftande undervisning kan åstadkomma lärande hos eleverna när det gäller mer avancerade matematiska begrepp. Bland annat syftar vi till förförståelse av begreppen funktion och derivata. Avsikten är också att kartlägga kritiska punkter i elevernas lärande inom det studerade momentet.

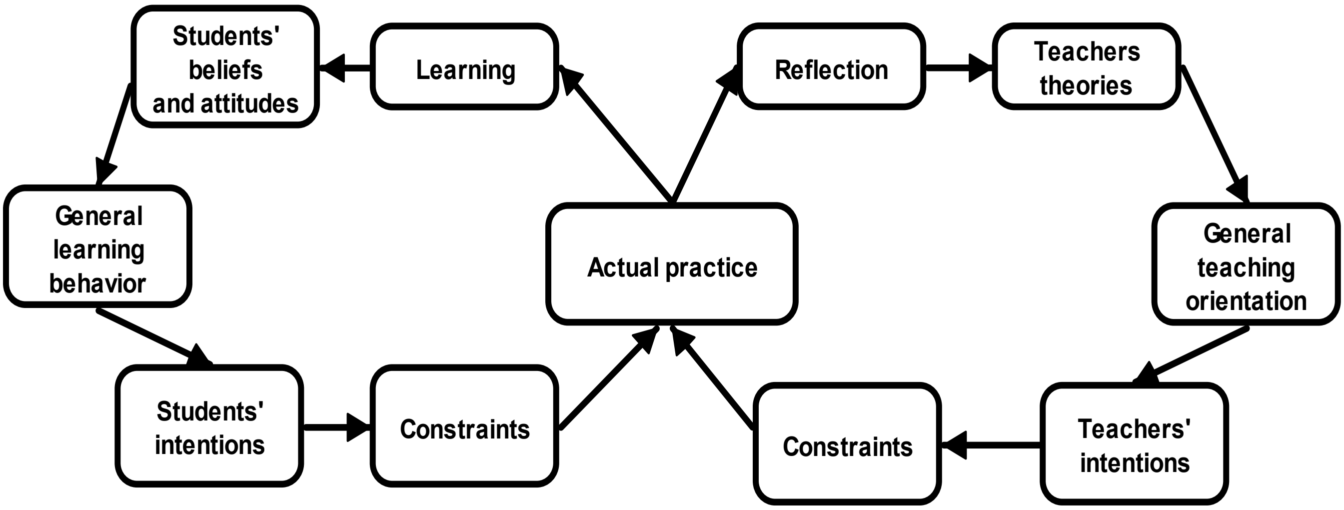
Eleverna och temat

Klassen, som deltar i undersökningen, består av 27 elever i skolår 6, med en genomsnittlig ålder på 12 år. Det är stor spridning i klassen och den innehåller många högpresterande elever. Eleverna är vana vid att arbeta med huvudräkning, överslagsräkning och att göra egna uppgifter.

Eleverna är också vana att formulera hypoteser och prata matematik. I projektet arbetar vi tematiskt med den matematik, som kan knytas till en växande amaryllislök. Temat valdes huvudsakligen för att passa de två andra delstudierna, men visade sig vara i hög grad intressant även för matematikens del. I projektets andra delar görs en koppling till partikelbegreppet och energibegreppet.

Teoretisk bakgrund

Variationsteorin betonar vikten av att läraren varierar olika aspekter i innehållet för att eleven ska kunna urskilja och upptäcka möjligheter till att bygga upp ny kunskap (Marton & Booth, 1997).
Synen på elevers lärande kan beskrivas som social konstruktivism (Björkqvist, 1998) och synen på hur kunskap byggs upp och struktureras ligger nära Novaks humana konstruktivism (1998) och lånar alltså synsätt från kognitivism.
Teorin om Cognitively Guided Instruction ger grunden för den nya kunskap om ämnet och lärande i ämnet, som erbjuds av lärarna studien (Carpenter & Fennema, 1992).
Arbetet genomförs i en "co-learning community" (lärande i en arbetsgemenskap) enligt Jaworskis modell (2002). Grevholm (2002) arbetar med en teoretisk modell av relationen mellan lärarens arbete och elevens lärande enligt bilden nedan. Den är en generalisering och utvidgning av en tidigare modell av Bennet (1999), som visar hur lärares reflektioner, teorier, inriktningen av undervisningen, avsikter och påfrestningar påverkar den faktiska undervisningspraktiken. Elevernas påverkan spelar in som en motsvarande faktor så som modellen visar. För elevernas del är det lärandet, deras uppfattningar och attityder, deras inlärningsbeteende, avsikter och påfrestningar som är de påverkande faktorerna.



Mål i matematiken
Ämnesinnehållet i studien har för matematikens del utgått från transformation av observationer (av en amaryllisstjälks tillväxt) till matematiska representationsformer såsom värdetabell, olika typer av diagram och grafer. Förståelse av vad grafer kan säga om takten i tillväxten och olika faser av växtens utveckling har fokuserats. Diagram och grafer är ofta använda matematiska visualiseringar av verkliga förlopp. Eleverna har uppmanats att formulera hypoteser om hur amaryllisens växt kan tänkas ske. Faser av snabbare eller långsammare växt har observerats. Dessa aspekter utgör viktig förförståelse för senare begrepp som funktion, graf, differenskvot och derivata av en funktion samt linjär och exponentiell tillväxt.

Forskningsmetod och analys

Data hämtas från elevernas loggböcker, lärarens löpande observationer och anteckningar samt lärarens frågor till eleverna vid olika tillfällen. Forskaren förde undervisande samtal med grupperna vid två olika tillfällen och dessa spelades in på band och transkriberades och anteckningar fördes parallellt.
Eleverna genomförde ett förtest och ett eftertest på uppgifter inom beskrivande statistik. Dataanalysen har syftat till att finna kritiska punkter i lärandet och ge insikt i hur eleverna resonerar och tänker kring det matematiska innehållet. Nivåer för elevernas utveckling har beskrivits för de kritiska punkterna.

Arbetssättet i temat Opp amaryllis

De väsentliga inslagen i arbetssättet bestod av att
- eleverna skrev loggböcker och ritade i dem
- mätningar genomfördes (både stjälk och blad mättes)
- bilder och visualisering användes (rita, tabeller, stapel- och linjediagram)
- organisera arbetet i grupper om tre (varje grupp planterar en lök)
- grupperna arbetade självständigt med mätning, tabell och diagram
- grupperna beräknade medelvärden av tillväxt, differenser i tillväxt, procentuell tillväxt och så vidare
- grupperna konstruerade uppgifter kring de växande amaryllislökarna

Elevernas inspel under projektets genomförande

Den planering läraren och forskaren förberett påverkades av att eleverna gjorde egna inspel i arbetet. Exempel på sådana inspel var

- val av objekt att mäta på och mängden mätningar
- val av diagram
- konstruktion av matematiska problem om amaryllisen
- att införa procenträkning på mätningarna
- att beräkna area och volym för de mätta objekten
- att lära sig division med liggande stolen (lång division i algoritm)

Eleverna fascinerades av mätningarna och att fylla i tabeller och gjorde detta i långt högre utsträckning än vad vi planerat. de mätte i stort sett på allt som gick att mäta. Det kan ha bidragit till att de inte fokuserade på stjälkens tillväxtförlopp i så hög grad att de kom sig för att jämföra förloppen mellan grupperna. eleverna var även ivriga att använda procenträkning som de nyligen arbetat med och beräkningar av area och volym. Det här visar att även om ett begränsat antal matematiska begrepp hade planerats in kunde eleverna finna utrymme för många flerbegrepp.

Elevernas tankar

Om projektet och lärandet
Här är några elvröster från projektet:

- Det var spännande när man kom till skolan och den hade växt eller slagit ut.
- Det var bra att jobba med amaryllisar. Det var kul att se hur den växte, för den växte ju så mycket.
- Vår amaryllis växte mest den 16/11 till 19/11.
- Gruppen fungerade bra, det var lugna personer.
- Exempel på vad jag blev bättre på: Diagram, fantasi, procent...

Om matematiken

- Vi har räknat medelvärdet av hur mycket den växt på tre dagar.
- Bästa växtperiod 23/11 till 26/11: 16,3 cm.
- Sämsta växtperiod 4/12 till 6/12: 1,3 cm.

Frågor

- Hur mycket har den växt under en vecka?
- Kommer löken att behöva byta kruka?
- Hur många procent vatten innehåller löken?

Exempel på problem konstruerat av en elev
En amaryllis har två stjälkar A och B. Stjälk A är 11 cm och stjälk B är 18 cm.
Uppgifter:
1 Hur många procent längre är stjälk B?
2 Hur många procent kortare är stjälk A?
(Uppgiften är värd att uppmärksamma. Många elever är inte medvetna om att de två frågorna ger olika resultat. Den elev som författade uppgiften var helt klar över det.)

Exempel på hypoteser
Jag tror att bladen kommer att växa mindre och mindre procent för varje dag. Stjälken kommer att öka i procent. Knoppen kommer att växa jättelite.

Vad lärde vi oss?

Eleverna blev säkra på beskrivande statistik. De övade mätningar, att göra tabeller, konstruktion och tolkning av diagram samt matematiska samtal och formulering av hypoteser.
Läraren fick de pusselbitar som fattades i sin teoretiska grund för matematikundervisning och verktyg att upptäcka kritiska punkter i elevernas lärande. Genom att lyfta fram begreppet ”matematisk visualisering av händelse” synliggörs en tydligare matematikundervisning där elevernas begreppsbildning kan följas och diagnostiseras.
Forskaren upptäckte kritiska punkter i elevernas lärande, som kan användas för att påverka lärarens undervisning nästa gång samt att eleverna klarar att använda avancerade begrepp i samtal utan att begreppen formellt införts (grafer, tillväxt och derivata).

Kritiska punkter i lärandet

- Att förstå att tidsaxeln ska vara kontinuerlig och lika indelad.
- Sifferdistraktion vid beräkningar.
- Antal observationer vid medelvärdesberäkningar.
- Att motivera var tillväxten är snabbast respektive långsammast.
- Att formulera en hypotes som är matematiskt relevant.
- Att matematik är tråkigt för en stor grupp elever även om de får arbeta fritt och tematiskt.

Det resultat som förvånade oss mest var elevernas skilda behandling av tidsaxeln. Vissa elever hoppade över de dagar då de inte de mätt (till exempel på helgerna). Andra elever markerade ett intervall för helgen men lät det vara kortare än intervallet för två dagar. En liten grupp elever lät alla dagar finnas på tidsaxeln och hade en likformig indelning för dagarna. Utförandet av tidsaxeln påverkade i hög grad resultaten då eleverna skulle avläsa när löken växte snabbast respektive långsammast. Läraren kommer i det fortsatta projektet att uppmärksamma tidsaxeln på ett annat sätt än tidigare.
Även vid medelvärdesberäkningar fick tidsaxelns behandling en avgörande betydelse. Då elever beräknade medelvärdet för en period från till exempel fredag till tisdag la de ihop ökningen vid tre mättillfällen och dividerade med tre. De glömde då bort att även lördag och söndag fanns med under perioden.
Att formulera hypoteser som verkligen rörde matematik var inte självklart. Dock klarade många elever att vid samtal uttala hypoteser, men de kunde inte skriva ner sina tankar. Många hypoteser var roliga men inte matematiskt relevanta.

Hur går vi vidare?

Läraren utvecklar sina idéer vidare i projektet Attraktiv skola och använder de nya insikterna från projektet. I en ny klass i skolår fyra baserar läraren undervisningen på de resultat som detta projekt visar. Ökad medvetenhet om de kritiska punkterna för lärandet och en ökad konkretisering i undervisningen betonas nu av Ingrid.
Luleå är en av 34 kommuner i Sverige, som blev uttagna till det nationella projektet *Attraktiv Skola* som pågår 2001 – 2006. Ett av projektets syften är att stärka kvaliteten i skolan och ett av målen att främja skolutveckling genom samarbete med högskola och näringsliv. Ingrids projekt, som ingår i Attraktiv skola, handlar om relationen mellan undervisning, lärande och teorier inom didaktik för matematik och det naturvetenskapliga området. Det bygger på erfarenheter från det här beskrivna projektet, som genomfördes 2001/2.
Forskaren vidareutvecklar formerna för samarbetet och söker medel för en mera omfattande studie. Nya medel har just tilldelats från Vetenskapsrådet för planering av fortsättningen.

Avsikten är att använda kunskaperna om elevernas lärande och de kritiska punkterna vid lärandet som utgångspunkt i kompetensutveckling för nästa grupp lärare.
Verktyg för analys av observationerna ska utvecklas och vi ska försöka skapa en teoretisk modell för betydelsen av de kritiska punkterna i lärandet och vad det innebär för relationen mellan lärares undervisning och elevers lärande.

Elever i skolår fyra väger en skiva av en färsk trädstam (som tillåts torka mer för varje dag). (Foto Ingrid Sundström)

Frågor som genereras av studien

Hur medvetna är lärare om kritiska punkter för inlärningen hos eleverna? Kan lärare själva upptäcka dessa? Kan ett nära samarbete mellan elever, lärare och forskare kring de här funna kritiska punkterna leda till ett bättre lärande? Vilken kompetensutveckling behöver lärare för att förändra sin undervisning mot bättre lärande för eleverna? I vilken mån belyser matematikböckerna det stoff som är kritiskt? I vilken mån prövar lärarhandledningens diagnoser det lärande som är väsentligt för fortsatta studier men inte betonas som ett kortsiktigt mål? Kan lärare förändra sin undervisning om de får vetskap om de för eleverna kritiska punkterna i lärandet? Kan en sådan förändring leda till ett bättre lärande? Vilka konkreta hjälpmedel kan användas i en sådan reviderad undervisning? Är konkret arbetsmaterial, kognitiva verktyg som till exempel begreppskartor, datorprogram, räknare eller något annat verktyg av värde?
Många frågor behöver och kan ställas och vi är övertygade om att klassrumsnära forskning av det slag som projektet vi beskrivit på sikt kan hjälpa till att besvara en del av frågorna.

Slutsatser

Forskning som bedrivs i nära samverkan med praktiken i skolan kan ge värdefulla resultat, som direkt kan återkopplas till undervisningen. Studien som beskrivs här får genom att vara baserad i klassrummet karaktär av både kompetensutveckling för läraren och utvecklingsarbete grundat i forskning. Effekterna av en sådan studie kommer skolan till godo direkt genom arbetet som genomförs. Resultat som verkligen visar hur lärares undervisning relateras till elevernas lärande är starkt efterfrågad av lärare, som reflekterar över sin praktik. Forskare har mycket att lära av praxisnära forskning av det slag som beskrivits här. Den kompetens och erfarenhet läraren besitter kan nyttiggöras i projektet och vidga forskarens perspektiv.

Projektet har bedrivits med forskningsmedel från Vetenskapsrådet (utbildningsvetenskapliga kommittén) och Luleå tekniska universitet.

Projektet har redovisats till rådet i rapporten Matematisk visualisering av biologisk tillväxt, 2002. (Rapporten kan erhållas från Barbro Grevholm via barbro.grevholm@hia.no)

Referenser

Bennet, N. (1999). Research on Teaching-Learning Processes. Theory into practice: Practice into Theory. Papper presenterat vid Earli konferensen i Göteborg 24-28 Aug.

Björkqvist, O. (red) (1998). Mathematics Teaching from a constructivist point of view. Åbo Akademi University: Reports from the Faculty of Education, no. 3, 1998.

Carpenter, T. & Fennema, E. (1992). Cognitively guided instruction: Building on the knowledge of students and teachers. I W. Secada (red), Curriculum reform: The case of mathematics education in the United States. Special issue of International Journal of Educational Research, (s 457-479). Elmsford, NY: Pergamon Press, Inc.

Grevholm, B. (2002). Matematisk visualisering av biologisk tillväxt. Rapport till vetenskapsrådet. Luleå: Luleå tekniska universitet.

Jaworski, B. (2002). The Student-Teacher-Educator-Researcher in the mathematics classroom - Co-learning partnerships in mathematics teaching and teaching development. (s 37-54)

I C. Bergsten, G. Dahland och B. Grevholm (red), Research and action in the mathematics classroom. Proceedings of MADIF 2. Linköping: Linköpings universitet.

Marton, F. & Booth, S. (1997). Learning and awareness. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Novak, J. D. (1998). Learning, creating and using knowledge. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Guðbjörg Pálsdóttir

Guðbjörg Pálsdóttir, (f.1956) er adjunkt i matematikundervising ved Islands Pædagogiske Universitet. Hun arbejder med at skrive undervisingsmaterialer i matematik til grundskolen i Island og har undervist på alle alderstrin i grundskolen i over 20 år.

Hvordan påvirker social-kulturel erfaring elevers matematiklæring?

Guðbjörg Pálsdóttir

Forskningsstedet er Reykjavik og forskningsfeltet er piger i 10. klasse i grundskolen. Der forsøges at analysere, hvordan social-kulturel erfaring påvirker forståelsen af matematik, og hvilke matematiske ideer virker meningsfulde for elever. Der fokuseres på, hvordan piger engagerer sig i matematiklæring, deres ideer, holdinger og opfattelse af matematikfaget.

Forskningens baggrund

Island er et lille land, og vi er ikke mange, der arbejder inden for forskningsfeltet 'matematikundervisning – matematiklæring'. Der findes ikke så mange forskningsprojekter eller forskningsrapporter om islandske forhold. Det er derfor spændende at forske i islandske elever og finde ud af, hvordan de tænker og oplever matematik og deres matematikundervisning. Nu er situationen ved at ændre sig lidt på grund af opbygning af videreuddannelse for lærere på Islands Pædagogiske Universitet. Flere og flere involverer sig, og der er interesse for at opbygge et forskningsmiljø på universitetet.

Norden har opfostret mange interessante teoretikerere, som har beskæftiget sig med matematiklæring og -undervisning. Stig Mellin-Olsen og Ole Skovsmose har jeg læst meget, og det har fået mine tanker til at flyve. Flere har fået udgivet deres tanker, mens andre diskuterer blandt kolleger og venner.
Nordiske konferancer er vigtige for os alle for at få mulighed for at formidle og snakke sammen i en større kreds. Jeg har i mange år beskæftiget mig med matematikundervisning i grundskolen og på Islands Pædagogiske Universitet. Det har været en stor glæde og motivation at få mulighed for deltage i den nordiske matematiske familie.

Hvilke tanker?

I min undervisning har jeg tit spekuleret på, hvordan undervisningsmåden påvirker eleverne. Jeg har været optaget af finde ud af, hvad får elever til at engagere sig, så at de går i dybden og får noget ud af deres læring. Jeg har tænkt på spørgsmål som:

Hvordan påvirker undervisningsmåden:

- elevers opfattelse af faget?
- elevers arbejdsmåde?
- elevers selvtillid?
- elevers arbejdsglæde?

Elever er forskellige og mange ting uden for skolen påvirker deres holdinger til læring. Der tænker jeg f.eks. på køn, klasse, status, bopæl og kultur. Det er vigtigt at være bevidst om, at når man forsker i holdninger, er man ikke på neutralt område, og det er heller ikke ønskværdigt. For at afgrænse mig har jeg valgt at se specielt på køn, eller rettere sagt piger, som et eksempel på en social-kulturel gruppe.

Teorier

Jeg har ledt efter en teoretisk ramme, som jeg kan bruge som analytisk redskab. Jeg har haft brug for at afklare, hvad der er af betydning i den sammenhæng, og hvad det er vigtigt at have i baghovedet.

I skriftserien fra *Centre for Research in Learning Mathematics*, findes der mange inspirerende skrifter. I *Ole Skovsmose og Paola Valero: Democratic Access to Powerful Mathematics Ideas (Publication 30)* fandt jeg et materiale, som jeg syntes var interessant. Jeg syntes, det var muligt at forsøge at bruge det som redskab til at analysere de sociale og de kulturelle sider, fordi jeg var interesseret i at se på dem og ikke kun de psykologiske. Skovsmose og Valero har undersøgt hvilken mening magtfulde matematiske ideer kan have logisk, psykologisk, kulturelt og socialt. De diskuterede det inden for klasseværelset, skolen og samfundet – lokalt og globalt. Det vil sige, at matematiske ideer kan give magt igennem de fire områder, men kan åbne demokratisk adgang for elever på de tre fronter. Skolen, og den opfattelse eleverne har, udvikles i klasseværelset og i hele skolesamfundet men bliver også påvirket af det ydre samfund.

Det vigtigt at tænke på matematikkens rolle i demokratiet, og på hvordan matematik bliver brugt i samfundet. Hvad betyder det, når der snakkes om magtfulde matematiske ideer:
Logisk kan man sige, at det giver magt at forstå teorier og at have kompetance til at lave forbindelser mellem teorier indbyrdes og med praksis. Det giver flere muligheder for at forstå og analysere.
Psykologisk kan man sige, at magt er forbundet med læringsmuligheder. Hvad har eleven mulighed for at forstå og få mening ud af? Hvilke holdinger har de udviklet til læring og matematik?
Kulturelt er spørgsmålet, hvad der er magtfuldt fra elevens synsvinkel. Er det mulighederne for at deltage i praksis? Eller er det et spørgmål om at analysere mulighederne for at deltage i praksis? Elevernes sociale, kulturelle, økonomiske og politiske situation påvirker hvordan de opbygger deres begrebsforståelse samt deres forståelse af deres muligheder for at deltage i en meningfuld praksis.
Socialt kan matematiske ideer blive defineret ud fra, hvor meget de kan bruges som ressourcer for aktiv deltagelse i samfundet. Matematik bliver brugt til at belyse og forudse, og det er en del af en teknologisk aktion vedrørende planlægning og beslutninger. Kritik af matematik er vigtig, hvordan bruges den, og hvilken slags matematik bliver brugt.

Demokratiet bygger på, at alle har mulighed for at have indflydelse på egne livsvilkår. Forståelse af matematik er en vigtig kompetance for at kunne deltage i diskussionen i samfundet og analysere og forstå processer i samfundet.

Forskningen

Jeg er i gang med et forskningsprojekt, hvor jeg bruger spørgeskema, diskussioner og interviews. Forskningen foretages i to 10.-klasser i Reykjavik. De har allerede svaret på eet spørgeskema og deltaget i gruppediskussioner. Der diskuterede de nogle spørgsmål fra spørgeskemaet. Klasserne blev opdelt i pigegrupper, drengegrupper og blandede grupper. Jeg har også tænkt mig at bruge dyberegående interviews med tre piger, og jeg har allerede lavet det første. Jeg har tænkt mig at interviewe de tre piger to-tre gange.

Forhold til matematik, forhold til matematikundervisning og elevernes opfattelse af sig selv som matematikstuderende, er de tre hovedelementer, jeg vil fokusere på i forskningsopgaven.

I spørgeskemaet bliver eleverne bedt om at tage stilling til en række påstande. Her følger nogle eksempler:
Forhold til matematik

- Er et kreativt fag
- Er for alle
- Er vanskeligt at forstå
- Er et vigtigt fag, kendskab – magt
- Giver mulighed for nye perspektiver
- Bruges mange steder i samfundet

Forhold til matematikundervisning

- Kan åbne nye muligheder
- Læreren og elever samarbejder
- Læreren åbner for diskussion
- Opgaver laves i klassen
- Opgaver leder til svar og nye spørgsmål
- Opgaver skal være varierende

Opfattelse af sig selv som matematikstuderende

- Jeg synes, det er spændende at kæmpe med matematikopgaver
- Mine synspunkter høres
- Diskussioner hjæper meget for forståelsen
- Jeg vil bruge matematik

I interviewene prøver jeg at gå dybere ned i/bore i:

- hvordan pigernes tanker har udviklet sig
- hvordan de ser på deres muligheder for at anvende matematik
- hvad kan være meningen med at lære matematik og udvikle matematisk kompetance.

Hvor står min forskning nu?
Jeg har fået indsamlet en del data og synes, at nu har jeg brug for at forske i det og læse teorier. Mine tanker nu vandrer rundt om spørgsmål som:

- Hvilke opstillinger er mulige?
- Hvilke diskussioner mangler jeg?
- Har jeg bevæget mig for meget på det psykologiske felt? Eller kan jeg fastholde at se på både den sociologiske og kulturelle synsvinkel?
- Hvad vil jeg med afgrænsingen – piger?

Det var godt at få mulighed for at komme ud i “den store verden” og udveksle erfaringer og diskutere med kollegaer. Jeg fik gode spørgsmål og nogle diskussioner som har hjulpet mig med at komme videre i min forskning.

Marja van den Heuvel-Panhuizen

Marja van den Heuvel-Panhuizen is a researcher at the Freudenthal Institute of Utrecht University in The Netherlands which is the Dutch national center for mathematics education. Her working area is primary school mathematics education and her specialisms are assessment in mathematics education, gender, curriculum development, and in-service teacher education.

Guides for didactical decision making in primary school mathematics education: the focus on the content domain of estimation

Marja van den Heuvel-Panhuizen

1 Introduction

What mathematics should we teach our students and how should this mathematics be taught? These questions can be considered as the key questions of mathematics education. Although the nineties can be seen as the decade of standards—in many countries documents are published that prescibe what schools should teach their students[1]— within the field of research of mathematics education more attention is paid yet to the how of the teaching than to the what. Not having an in-depth discussion about the what of teaching might probably be the main reason for the emergence of the present "Math Wars".[2]

Therefore I think the U.S. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) took a good initiative by devoting one of the issues of their discussion journal Mathematics Education Dialogues to the question "Who should determine what you teach?"[3] In the editorial introduction of this issue it is made clear that there are different ideas about the level on which decisions about the what should be made. Some people believe that teachers, who are the closest to their students and who know their local situation better than outsiders, should made these choices. Others think that these should be made more centrally, at the school level, the school-district level, state or provincial level, national level, or even at the international level.

Interesting was the contribution of William Schmidt to this issue of Dialogues, in which he refered to the lessons we can learn from the Third International Mathematics and Science Study (TIMSS). According to Schmidt (1999) one of the most salient and powerful policy implications from TIMSS is the essential role that curriculum plays in teaching and learning mathematics. Reflecting upon the disappointing results of U.S. students, he thinks these results might be caused by the highly repetitive character of the curriculum over the grade levels, by the fact that the curriculum does not not focus on rigorous content, by the lack of coherence within the curriculum and the splintered vision in the U.S. system. His concern about the latter was also expressed in the title of his contribution: "Toward a national consensus."

1 Examples of these standards are the NCTM Standards in the United States, and the National Curriculum and the Numeracy Project in the United Kingdom.

2 A good description of the mathematics war developments in the United States can be found in Becker and Jacob (1998).

3 Mathematics Education Dialogues, Volume 2, Issue 2 (April 1999).

It was only recently that I read these conclusions of Schmidt and I was struck by the emphasis he was putting on a focused and coherent curriculum. Actually, in 1997 we had the same guiding rationale for starting the development of learning-teaching trajectories for primary school mathematics, which will be the topic of my lecture. These trajectories are based on a didactical phenomenological approach[4] and give teachers a pointed overview of how children's mathematical understanding can develop from K1 through grade 6 and of how education can contribute to this development. Although these trajectories contain many concrete examples of classroom activities, they cannot be used as a recipe book for everyday teaching. In contrast with other curriculum materials the trajectory descriptions are more theoretical. They give an overview at a more conceptual level. They show how different stages in the longitudinal process are connected to each other and how new stages can evolve from previous ones. As such these learning-teaching trajectories can provide teachers with a "*mental educational map*" for didactical decision making.

In this lecture, my focus will be on the content domain of estimation, but I will start with giving some background information about the main factors that determine the content of the primary-school mathematics curriculum in the Netherlands so far.

2 The determinants of the Dutch primary-school mathematics curriculum

Unlike many other countries, at primary school[5] level the Netherlands does not have centralized decision making regarding curriculum syllabi, text books or examinations (see Mullis et al., 1997). None of these need approval by the Dutch government. For instance, the schools can decide which textbook series they use. They can even develop their own curriculum. In general, what is taught in primary schools is, for the greater part, the responsibility of teachers and school teams and the teachers are fairly free in their teaching. To give some more examples, teachers have a key to the school building, they are allowed to make changes in their timetable without asking the school director (who often teaches a class too), and, as a last example, the teacher's advice at the end of primary school, rather than a test, is the most important criterion for allocating a student to a particular level of secondary education.

Despite this freedom in educational decision making—or probably one should say thanks to the absence of centralized educational decision making—the mathematical topics taught in primary schools do not differ much between schools. In general, all schools follow roughly the same curriculum. This leads to the question: what determines this curriculum?

Until recently, there were three important determinants for macro-didactic tracking in Dutch mathematics education in primary school:

The mathematics textbooks series they use can be seen as the most important tools for guiding the teachers' teaching. If I restrict myself to the most prevailing textbooks, there are six different textbooks between which the schools can choose. All the textbooks are published by commercial publishers, and the schools have a free choice in deciding which textbook they will use. The textbook authors are independent developers of mathematics education, but they can make use of ideas for teaching activities resulting from developmental research at, for instance, the Freudenthal Institute (and its predecessors) and the SLO.

4 I will come back to this later.

5 In the Netherlands, primary school is meant for students of ages 4 to 12 and includes eight grade classes: K1-2 and Grade 1-6. In The Netherlands these classes are called "Groep 1-8".

Another main determinant of the curriculum content is a series of publications, called the "Proeve."[6] These publications which were published since the late eighties, and of which Treffers is the main author contain descriptions of the various domains of mathematics as a primary school subject. The Proeve books have been very influencial on the development of textbook series, but these in their turn also inspired the domain descriptions.

A further influential factor that determines what is taught in primary school is the list of 23 attainment targets for primary school as described by the government. This list of "core goals" was established in 1993 by the Dutch Ministry of Education and was revised in 1998 (see OC and W, 1998).

The list of attainment targets is split into six domains, including general abilities, written algorithms, ratio and percentage, fractions, measurement, and geometry. The goals describe what students have to learn by the end of their primary school career (at age twelve). Table 1 shows the core goals for general abilities and written algorithms. Core goal four explains what the students should have achieved regarding estimation.

Table 1: Part of the core goals for Dutch primary school students in mathematics

By the end of primary school, the students ...		
General abilities	1	Can count forward and backward with changing units
	2	Can do addition tables and multiplication tables up to ten
	3	Can do easy mental-arithmetic problems in a quick way with insight in the operations
	4	Can estimate by determining the answer globally, also with fractions and decimals
	5	Have insight into the structure of whole numbers and the place-value system of decimals
	6	Can use the calculator with insight
	7	Can convert simple problems which are not presented in a mathematical way into a mathematical problem
Written algorithms	8	Can apply the standard algorithms, or variations of these, to the basic operations, of addition, subtraction, multiplication and division in simple context situations

Compared to goal descriptions and programs from other countries this list is a very simple one. It means that there is a lot of freedom in interpreting the goals. At the same time, however, such a list does not give much support for educational decision making. In the years since 1993, there have been discussions about these core goals (see De Wit, 1997). Almost everybody agreed that they can never be sufficient to support improvements in classroom practice or to control the outcome of education.

For several years it was unclear which direction would be chosen for improving the core goals: either providing a more detailed list of goals for each grade, expressed in

6 The complete title of this series is "Design of a national program for mathematics education in primary schools" [Proeve van een Nationaal Programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool]. The first part of this series was published in 1989 (see Treffers, De Moor and Feijs, 1989). Note that the title refers to a "national program" although there was no government interference. The authors wanted to label this a national program in order to achieve a communal program. They have clearly succeeded in this aim.

operationalized terms, or a description which supports teaching rather than pure testing. In 1997, the Dutch Ministry of Education tentatively opted for the latter and asked the Freudenthal Institute to work out the description for mathematics. In September 1997, this decision resulted in the start of the TAL Project[7], which meant that eventually a fourth curriculum determinant would come into being.

4 Learning-teaching trajectories—new guides for didactical decision making

The aim of the TAL project

The aim of the TAL Project is to develop learning-teaching trajectories for all domains of the primary-school mathematics curriculum. In total three learning-teaching trajectories will be developed: a trajectory for whole number calculation, one for measurement and geometry, and one for fractions, decimals and percentages.

The project started with the development of a learning-teaching trajectory for whole-number calculation. This first trajectory description for the lower grades (including K1, K2, and grades 1 and 2) was published in November 1998. The definitive version was released a year later. The following year the whole-number trajectory for the higher grades of primary school (including grades 3 through 6) was published. In 2001, both learning-teaching trajectories were translated in English and published together in one book (Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), 2001).

In 1999, a start was made on the development of a learning-teaching trajectory for measurement and geometry. This will be finished (in Dutch) by the end of 2002.

What is meant by a learning-teaching trajectory?

Giving the teachers a pointed overview of how children's mathematical understanding can develop from K1 through grade 6 and of how education can contribute to this development, is the main purpose of this alternative to the traditional focus on strictly operationalized goals as the most powerful engine for enhancing classroom practice. In no way, however, is the trajectory meant as a practical recipe book. It is, rather, intended to provide teachers with a *mental educational map* which can help them, if necessary, to make adjustments to the textbook. The learning-teaching trajectory serves as *a guide at a conceptual level*. Having an overview of the process the students go through is very important for working on progress in students' understanding; see for instance Freudenthal's (1981) plea for providing teachers with experience in the long-term learning processes. To make adequate decisions about help and hints, a teacher must have a good idea of the goals, the route that can lead to these goals and the landmarks the students will pass one way or another along this route, when selecting new problems. Without this outline in mind it is difficult for the teacher to value the strategies of the students and to foresee where and when one can anticipate the students' understandings and skills that are just coming into view in the distance (see also Streefland, 1985). Without this longitudinal perspective, it is not possible to guide the students' learning.

7 The TAL Project is carried out by the Freudenthal Institute and the SLO (the Dutch Institute for Curriculum Development), in collaboration with CED (school advisory center for the city of Rotterdam). TAL is a Dutch abbreviation and stands for Intermediate Goals Annex Learning-Teaching Trajectories. Since the beginning of the project the following people have contributed to the development of the learning-teaching trajectory: Joop Bokhove (FI), Jan van den Brink (FI), Arlette Buter (FI/CED), Kees Buys (SLO), Nico Eigenhuis (CED), Erica de Goeij (FI), Marja van den Heuvel-Panhuizen (project leader) (FI), Jan Hochstenbach (FI), Christien Janssen (FI), Julie Menne (FI), Ed de Moor (FI), Jo Nelissen (FI), Anneke Noteboom (FI), Markus Nijmeijer (FI), Adri Treffers (FI), Ans Veltman (FI), Jantina Verwaal (FI). The total size of the TAL Team has been the equivalent of three fully employed persons.

Another remark has to be made about the name “trajectory”. Although a learning-teaching trajectory puts the learning process in line, it should not be seen as a linear and singular step-by-step regime in which each step is necessarily and inexorably followed by the next one. A learning-teaching trajectory should be seen as being broader than a single track and should have a particular bandwidth. It should do justice to differences in learning processes between individual students and to the different levels at which children master particular skills and concepts.

A new educational phenomenon

Compared to the goal descriptions that were traditionally supposed to guide education and support educational decision making, the learning-teaching trajectory as it is worked out in the TAL Project has some new elements that makes it a new educational phenomenon.

First of all, the trajectory is more than an assembled collection of the attainment targets of all the different grades. Instead of a checklist of isolated abilities, the trajectory clarifies how abilities are built up in connection with each other. It shows what is coming earlier and what is coming later. In other words, the most important characteristic of the learning-teaching trajectory is its *longitudinal perspective* which has a long history in the Dutch didactical (subject-matter connected) approach to mathematics education.[8]

A second characteristic is its *double perspective of attainment targets and teaching methods*. The learning-teaching trajectory does not only describe the landmarks in student learning that can be recognized en route, but it also portrays the key activities in teaching that lead to these landmarks.

The third feature is its *inherent coherence, based on the distinction of levels*. The description makes it clear that what is learned at one stage, is understood and performed on a higher level in a following stage. A recurring pattern of interlocking transitions to a higher level forms the connecting element in the trajectory. It is this level characteristic of learning processes, which is also a constitutive element of the Dutch approach to mathematics education, that brings longitudinal coherence into the learning-teaching trajectory. Another crucial implication of this level characteristic is that students can understand something on different levels. In other words, they can work on the same problems without being on the same level of understanding. The distinction of levels in understanding, which can have different appearances for different sub-domains within the whole number strand, is very fruitful for working on the progress of children’s understanding. It offers footholds for stimulating this progress.

The fourth attribute of the TAL learning-teaching trajectory is the new description format that has been chosen for it. The description is not a simple list of skills and insights to be achieved, nor a strict formulation of behavioral parameters that can be tested directly. Instead, *a sketchy and narrative description, completed with many examples*, of the continued development that takes place in the teaching-learning process is given.

The main purpose of a learning-teaching trajectory is to give the teachers a pointed overview of how children’s mathematical understanding can develop from K1 and 2 through grade 6 and of how education can contribute to this development. It is intended to provide teachers

8 This longitudinal characteristic makes that the TAL learning-teaching trajectories differ significantly from what Simon (1995) called a “hypothetical learning trajectory” which covers only a couple of lessons and which moreover refers to a teacher’s plan within the context of his or her own classroom.

with a “mental educational map” which can help them to make didactical decisions, for instance making adjustments to the textbook that they use as a daily guide.

Development of the TAL learning-teaching trajectories

In the development of the TAL learning-teaching trajectories “didactical phenomenological analyses”—as Freudenthal (1983) called them—play a crucial role. These analyses reveal what kind of mathematics is worthwhile to learn and which actual phenomena can offer possibilities to develop the intended mathematical knowledge and understanding. Important is that one tries to discover how students can come into contact with these phenomena, and how they appear to the students. This means that problems and problem situations that give students opportunities to develop insight in mathematical concepts and strategies must be identified. Therefore a team, containing all kinds of specialisms in primary school mathematics, has been formed. The group contains experience in research and development of mathematics education, assessment, teacher educating, teacher advice, and teaching mathematics in primary school. The core of the work is formed by the (almost) weekly discussions in the project team, for which input comes from a variety of sources: analyses of textbook series, analyses of research literature, investigations in classrooms, and extensive consultations of experts in mathematics education. An earlier example of such an approach, but aimed at finding the long term learning process for the domain of ratio, can be found in Streefland (1984/1985).

The TAL trajectory for whole number calculation

In the TAL trajectory for calculation with whole numbers (see Figure 1), calculation is interpreted in a broad sense, including number knowledge, number sense, mental arithmetic, estimation and algorithms. The trajectory description gives an overview of how all these number elements are related to each other.

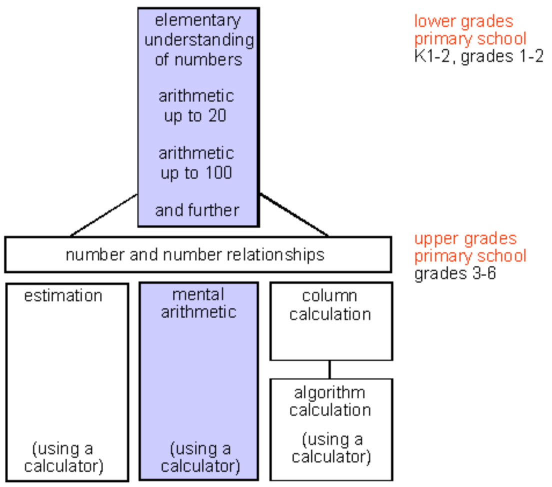


Figure 1: The TAL learning-teaching trajectory for whole number calculation in primary school.

The scheme reflects that the students gradually come from a non-differentiated way of counting-and-calculating to calculations in more specialized formats that fit particular kinds of problems in a particular number domain. Mental arithmetic is considered to play a central role in whole number calculation. It is seen as an elaboration of the arithmetic work that is rooted in the lower grades and forms the backbone for the upper grades.

5 Estimation as an example[9]

New in this trajectory is also the proposed didactics for estimation. Although estimation is now widely acknowledged as an important goal of mathematics education, in most textbooks a framework for how to learn to estimate is lacking. The textbooks at most only contain several problems on estimation, but doing a few estimation problems from time to time is not enough to develop real understanding of how an estimation works, and it is not sufficient to develop comprehension of what is ‘allowed’ and what is not when estimating.
The learning-teaching trajectory offers a first proposal for a phased structure that the students can go through for developing estimation skills. Therefore a subdivision is made into the *four sub-domains*:

rounding off numbers
estimations in addition and subtraction
estimations in multiplication and division
estimations in case of incomplete data.

The above sequence reflects, in a general sense, the trajectory followed by the children. The basis of estimation is formed by rounding off numbers, which is followed by estimating in calculation problems.
Of the four basis operations, addition and subtraction are offered first. Among other reasons, this is because the consequences of rounding off for division and multiplication are often more difficult to perceive. As long as the students are being asked to make only a very global estimate, estimation in multiplication and division is indeed comparable with estimation in addition and subtraction. This changes when a more refined estimation is involved and the students are also required to indicate the magnitude of the deviation. This difference has mainly to do with the fact that the effects of rounding off are not as clear cut in multiplication and division, because deviations and imprecision become magnified. One effect of this magnification is that it becomes more difficult to understand which type of rounding off results in the best estimates. This is especially true when multiple numbers must be rounded off in a single problem. At this point, the students have crossed over into the terrain of the more skillful practitioner of arithmetic. Learning to estimate in multiplication and division is a process that goes beyond primary school. The foregoing makes that, generally speaking, addition and multiplication take a more important place in the primary school curriculum for estimation than subtraction and division do.

Within the area of estimation *two different types of estimation problems* can be distinguished:

calculations with rounded off numbers
calculations with estimated values.

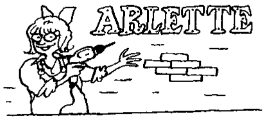
An example of the first type is the *Bread* problem (Figure 2). In this type of problems, in which only a global calculation is needed, the precisely given numbers can be rounded off followed by an exact calculation with these round numbers. The *Arlette* problem (Figure 3) is an example of the second type of estimation problem. In this type of problem the necessary data is incomplete or unavailable. To solve calculations with estimated values the students should have good insight into the number system, and they should be familiar with measures

9 This part of the paper gives a summary of my chapter on Estimation in the TAL book (Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), 2001).

and sizes from daily life. Moreover this type of problems often requires making specific assumptions as a starting point.

Loaves of raisin bread cost 1.98 euro each. Will 10 euro be enough to buy four?

Figure 2: *Bread* problem



One ornamental letter costs 3 euro and so many cents each. The exact price is not readable. How much do you think it would cost to buy all the letters to write the name ARLETTE?

Figure 3: *Arlette* problem

The central theme of the learning-teaching trajectory in estimation is characterized by three types of *key questions* that can be asked in order to elicit estimation and make this process of estimation sensible. In fact, the following types of questions are suitable for this:

Are there enough?
Could this be correct?
Approximately how much is it?

It is these questions—which in themselves can take on all kinds of different forms—that are the driving force behind learning to estimate and which, moreover, are anchored in estimation as it occurs in everyday life. Although these three questions can be asked in every grade, the first two types belong more to the initial phases of the learning process, while questions of the third type should be offered later on. As a matter of fact, the latter type of question is a direct estimation question where the children themselves must arrive at an estimation. The others are more indirect estimation questions.

The most basic structure in the learning-teaching trajectory that guides the learning process is the distinction in different phases in learning estimation:
In the informal phase the students can globally determine answers without using the standard rounding off rule.

In the rule-directed phase the students arrive at the standard rounding off rule for operating with numbers and learn to apply this rule.
In the flexible and critical phase the students are capable of applying more balanced estimation methods when operating with numbers and in which they can deal in a critical way with rounded off and exact numbers.

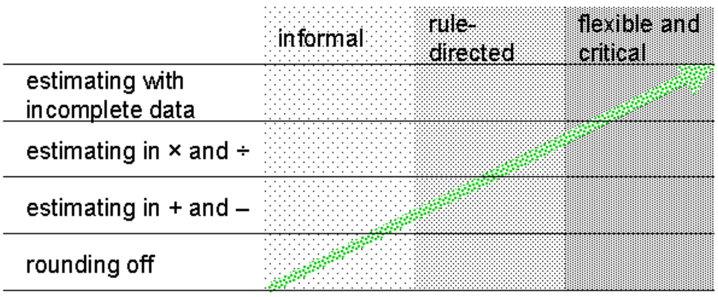


Figure 5: The conceptual didactical structure of the trajectory for estimation (grade 3-6)

These different learning phases can be found in each of the earlier mentioned sub-domains (Figure 5). The arrow indicates the global direction of the conceptual didactical structure of the trajectory for estimation from grade 3 through 6.
In the following sections I will clarify this structure a little bit further by focusing on the trajectory that has been developed for learning to estimate in addition and subtraction problems.

Estimating in addition and subtraction problems

After an initial base is created regarding rounding off numbers and understanding rounded off numbers the students start applying estimation in addition and subtraction problems. In the informal phase this means that the numbers are selected in such a way that a very global approach is sufficient. It is sufficient if the children know that the total of 2,113 and 3,389 is more than 5,000. This becomes clear even when the students only look at the value of the largest position. Instead of rounding off to the closest round number, the solution is then found by literally—or mentally—covering the other position values with one's thumb (Figure 6).

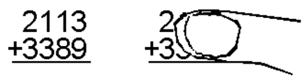


Figure 6: Rounding off by only looking at the value of the largest position

By assigning problems where the very global method can lead to incorrect conclusions, the students can arrive at the rule-directed phase. In such problems more precise rules about rounding off are needed in order to come to a sensible answer, as, for instance, is the case in the *Televisions* problem (Figure 7).

Number of televisions sold in two years: 4,896 and 5,987. Is the total more than 10,000?

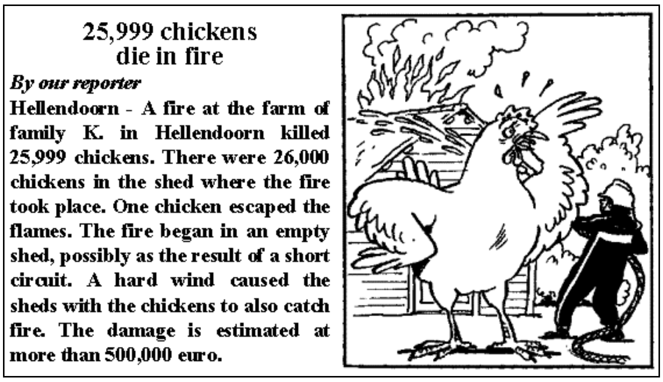
Figure 7: *Televisions* problem

By "cutting off" these numbers and only looking at the thousands, one could conclude that the total is less than 10,000. However, if one slides one's thumb to the right, then it becomes immediately obvious that this estimation is too low; 800 plus 900 is more than 1000, which would make the total more than 10,000.
The number of positions the students have to slide their thumbs to the right depends on the specific problem. In this case, the positional values of the tens and ones do not matter. After all, as one reaches the hundreds it becomes immediately clear that the total must be above 10,000.
During the phase of rule-directed rounding off, the children are expected to be able to round off numbers when estimating in addition and subtraction problems according to the standard rounding off rule.
The next step is the discovery that this rounding off rule does not always have to be applied strictly when estimating in addition and subtraction problems. Then, the students arrive in the phase of flexible and critical estimation. They realize that the standard procedure of rounding off must be modified, especially if the numbers in an addition or subtraction problem are close to the turning points of fifty, five-hundred, and so on. The *Tickets* problem (Figure 8) makes this obvious.

The following number of tickets for the championship game were sold at three different outlets in the city: 3587, 2574 and 3928. Approximately how many tickets were sold in total?

Figure 8: *Tickets* problem

If these numbers are rounded off according to the standard rule 3587 becomes 4 thousand, 2574 becomes 3 thousand, and 3928 becomes 4 thousand. The total is then 11 thousand, even though 10 thousand is a better estimation. By comparing the children's estimates and checking them against the exact answer, refinements in the rounding off method can be brought up for discussion.



25,999 chickens die in fire

By our reporter

Hellendoorn - A fire at the farm of family K. in Hellendoorn killed 25,999 chickens. There were 26,000 chickens in the shed where the fire took place. One chicken escaped the flames. The fire began in an empty shed, possibly as the result of a short circuit. A hard wind caused the sheds with the chickens to also catch fire. The damage is estimated at more than 500,000 euro.

Figure 9: Chicken problem

Another example of flexible and critical estimation is the *Chicken* problem (Figure 9). It is an striking example of what can go wrong when exact calculation is used with rounded off numbers. At first glance it may seem strange that the reporter who wrote the newspaper clipping would know exactly how many chickens had died, but it soon becomes clear how this total was arrived at. Obviously, if only one chicken escaped and there were 26,000 chickens in the shed, this means that 25,999 were killed. Nonetheless, a serious mistake has been made in this calculation. Although this is not explicitly stated in the newspaper article, the total of 26,000, of course, stands for "approximately 26,000 chickens." The number of chickens was probably rounded off to the nearest thousand. This is why it is incorrect to subtract the single escaped chicken from this total number. Children who understand how silly this calculation is will probably not have any difficulty solving the *Billion-million* problem (see Figure 10).

Explain why the following answers are correct	approximately 1 billion + 1 million = approximately 1 billion approximately 1 billion – 1 million = approximately 1 billion

Figure 10: *Billion-million* problem

In order to understand that these answers are indeed correct, a certain amount of thinking is necessary. The description "approximately 1 billion" indicates that this round number is in fact an estimate. This is still reasonably simple to understand. It is more difficult to understand that this is an estimation with a rounding off margin of one hundred million and that—for the total—it does not matter whether one million is added or subtracted from the estimate of one thousand million. A number line can help the children understand this.

Restrictions in estimating in multiplication and division problems

Once the students have acquired a lot of experience with rounding off numbers and are comfortable with estimation in addition and subtraction, it might appear that learning to estimate in multiplication and division is only a small step. However, this is only partly true. As long as the students are being asked to make only a very global estimate, estimation in multiplication and division is indeed comparable with estimation in addition and subtraction. This changes when a more refined estimation is involved and the students are also required to indicate the magnitude of the deviation. Take, for instance, the following *Seats* problem (Figure 11). The A-part of the problem is very easy to answer: 20×30 would give a close estimate. So at first glance this appears to be a simple estimation problem. The B-part, however, makes it clear that this problem actually is quite difficult. Butterworth (1999) found that this kind of problems which he called "false-compensation" problems even are difficult for university students.

A.	In the hall, there are 18 rows of 32 seats each. Approximately how many seats together?
B.	Is your estimate lower or higher than the exact calculation of 18×32?

Figure 11: *Seats* problem

The difficulty of estimating in multiplication and division problems has to do with the fact that the effects of rounding off are not as clear cut as in addition and subtraction problems. In the multiplications and divisions the deviation and imprecision become magnified which make that it becomes more difficult to understand which type of rounding off results in the best estimates. This is especially true when multiple numbers must be rounded off in a problem. At this point, the students have crossed into the terrain of the more skillful practitioner of arithmetic. Learning to estimate in multiplication and division is a process that goes beyond primary school. Therefore in the TAL learning-teaching trajectory we advise to restrict the estimating in multiplication and division problems to rule-directed rouding off and to problems in which only one number has to be rounded off. Teachers should be aware that presenting the students more complex estimation problems with numbers that "automatically" give a good estimate will in fact lead to a type of mock knowledge in the domain of estimaton.

6 TAL trajectory for estimation compared to the PPON results

To make the picture more complete I will conclude with comparing the TAL trajectory that has been developed for the domain of estimation—and that was based on a didactical phenomenological approach—with the empirically established sequence of estimation problems that resulted from the Dutch PPON study. This study is a large-scale assessment of students' performance in school subjects that is carried out by CITO (the Dutch National Institute for Educational Measurement). The latest assessment of achievements in mathematics was conducted in 1997.

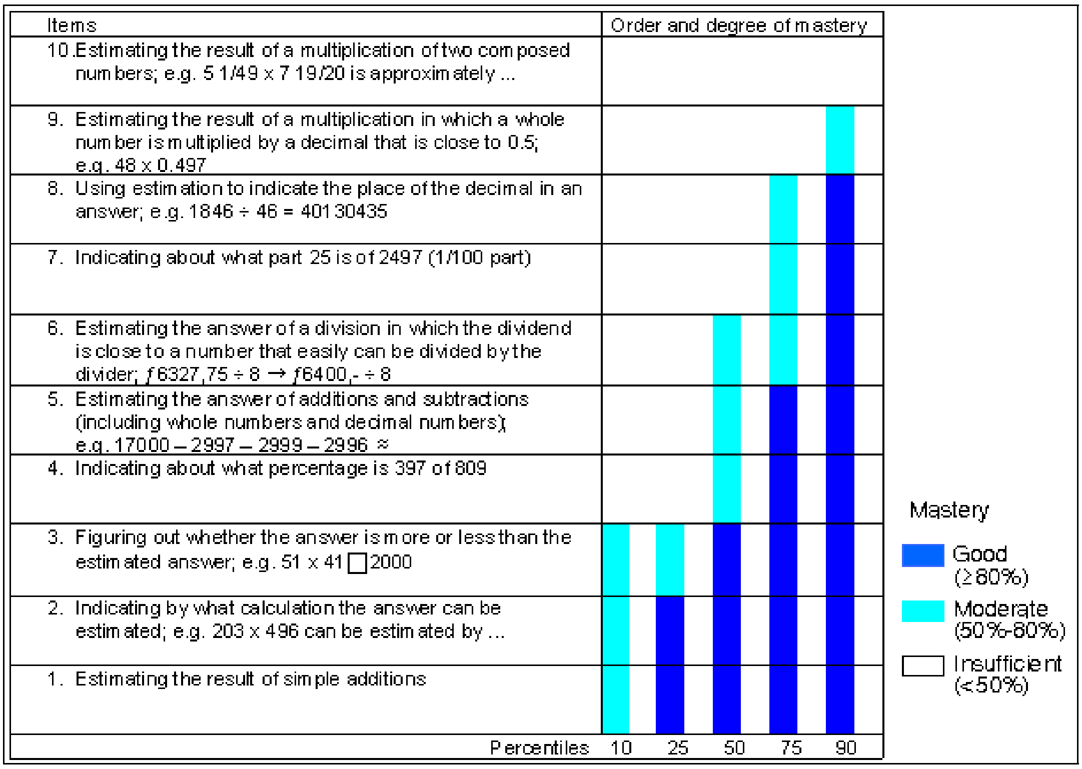


Figure 12: PPON 1997 results on the subdomain estimation

Figure 12 shows the results (taken from Janssen et al. (1999)) on estimation problems that were found at the time for sixth-grade students (twelve year old students) at different ability levels. Problems like problem 1 turned out to be most easiest ones, while problems like problem 10 were the most difficult. Even the 10% best students had an insufficient mastery of this problem, which means a chance of less than 50% to solve it correctly.

A closer look at these results reveals that some problems are identified here as easy, but actually refer to a category of problems that requires a high level understanding of estimation. This is especially true for the problems 2 and 3. Similar to the *Seats* problem, discussed earlier, it is not easy to understand whether 200×500 gives a larger or a smaller result than the precise answer of 203×496. In the same way problem 3 belongs to a more difficult category of problems than is indicated here. Changing the numbers a little bit—for instance, changing 51×41 into 52×38—would alter this problem into a tough problem.
At the other hand, problems like problem 9 might be less difficult if presented in context.

Look, for instance, at the two problems in Figure 13.

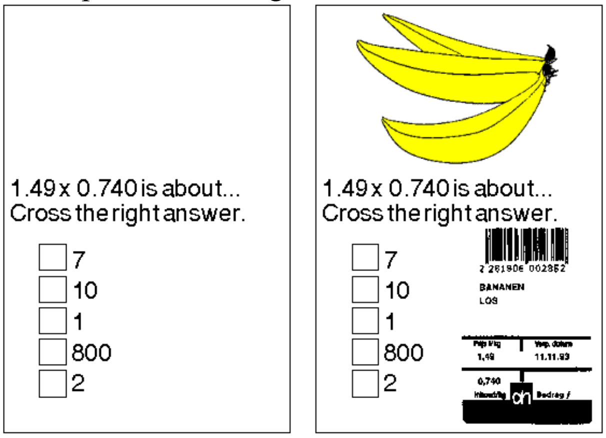


Figure 13: Two versions of the *1.49* $\times$ *0.740* problem

In both versions the students have to give an estimate of 1.49 × 0.740 which is even a more difficult problem than problem 9 that in the PPON study was administered to sixth-grade students. When I gave the two versions of the *1.49* $\times$ *0.740* problem to a class of fifth-grade students the version with only numbers was answered correctly by only 4% out of the 29 students, wheras 46% of the students came with the correct answer to the context version of the problem (Van den Heuvel-Panhuizen, 1997).

7 Concluding remark

Answering the question about what mathematics should be taught to students in primary school is a crucial one, but not an easy one to answer. A critical reflection on the results from the PPON study made clear that it is not without risks to take empirically-based results from large-scale achievement studies as a criterion to determine what students can or should learn and in what order. The empirical evidence might give teachers a flawed picture of what is attainable and what is worthwhile to achieve (the hidden message that comes from what is assessed). Scores as such cannot be translated directly into a difficulty level for the problems, and scores on their own cannot serve as a guide for making decisions about the *what* of mathematics education. Didactical-phenomenological analyses as Freudenthal proposed may not be lacking here and can open our eyes to blind spots regarding the mathematics behind problems and the *what* of our curriculum. On the other hand, learning-teaching trajectories based on a didactical phenomenological approach, as they have been developed within the TAL project, do certainly not give the final answer. For the content domain of estimation we see this as a first long-term description that might guide teachers (and textbook authors and assessment developers) when they plan a short-term lesson sequence on this topic, but this trajectory description certainly needs continuous revision based on further didactical phenomenological analyses fed by empirical evidence.

References

Becker, J.P. and Jacob, B. (1998). Math War development in the United States (California). ICMI Bulletin, 44, June.

Butterworth, B. (1999). The mathematical brain. London: Macmillan.

Freudenthal, H. (1981). Major problems of mathematics education. Educational Studies in Mathematics, 12, 133-150.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Janssen, J., van der Schoot, F., Hemker, B. & Verhelst, N. (1999). Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 3. Arnhem: Cito.
OC and W (1998). *Kerndoelen Basisonderwijs* [Core goals primary school]. The Hague: NV Sdu.
Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Beaton, A.E., Gonzalez, E.J., Kelly, D.L., and Smith, T.A. (1997). *Mathematics Achievement in the Primary School Years: IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)*. Chestnut Hill, MA: Boston College.
Schmidt, W.H. (1999). Toward a National Consensus. *Mathematics Education Dialogues, 2*, 2, 3 and 5.
Simon, M.A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 114-145.
Streefland, L. (1984/1985). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (Towards... a theory). *Educational Studies in Mathematics, 15*, 327-348 (Part I), 16, 75-94 (Part II).
Streefland, L. (1985). Vorgreifendes Lernen zum Steuern Langfristiger Lernprozesse. In W. Dörfler and R. Fischer (Eds.), *Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik. Beiträge zum 4. Internationalen Symposium für Didaktik der Mathematik in Klagenfurt in 1984* (pp. 271-285). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.
Treffers, A., E. de Moor, and E. Feijs (1989). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel I. Overzicht einddoelen* [Design of a national program for mathematics education in primary schools. Part I. Overview of goals]. Tilburg: Zwijsen.
De Wit, C.N.M. (1997). *Over tussendoelen gesproken. Tussendoelen als component van leerlijnen* [Talking about intermediate goals. Intermediate goals as a component of learning-teaching trajectories]. 's-Hertogenbosch: KPC Onderwijs Innovatie Centrum.
Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1997). *Bananentoets. een onderzoek naar het schattend vermenigvuldigen met kommagetallen* (internal publication).Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute, Utrecht University.
Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). Estimation. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics* (pp. 173-202). Utrecht/Enschede: Freudenthal Institute, Utrecht University / SLO.
Van den Heuvel-Panhuizen, M. (Ed.) (2001). *Children learn mathematics*. Utrecht/Enschede: Freudenthal Institute, Utrecht University / SLO.

Marit Johnsen Høines

Marit Johnsen Høines er førsteamanuensis ved seksjon for matematikk fagdidaktikk, Høgskolen i Bergen. Hun har bakgrunn som lærer i grunnskolen og fra lærerutdanning, også etter- og videreutdanning.. Hun var en pådriver ved stiftelsen av LAMIS (landslaget for matematikk i skolen) og er redaksjonsmedlem for TANGENTEN. Hun er forfatter av bøkene Begynneropplæringen. Fagdidaktikk for barnetrinnets matematikkundervisning, og Fleksible språkrom. Matematikklæring som tekstutvikling. Den siste er hennes avhandling for den nylig avlagte dr. philos graden.

Møte mellom lærerspørsmål og forskerspørsmål

Didaktisk forskning som bevegelse mellom teori og praksis
- fra praksisfeltet til forskningsspørsmål
- i forskningens problemfelt
- og til praksisfeltet.

Med referanse til doktorgradsarbeidet Fleksible språkrom. Matematikklæring som tekstutvikling, eksemplifiseres

- hvordan problemstillinger i undervisningssituasjoner kan generere forskningsspørsmål.
- hvordan forskningsresultat kan 'se ut' innenfor kvalitativ, tekstteoretisk studie av matematikklæring.
- hvordan denne type forskningsresultat kan inneholde virksomme problemstilling i praksisfeltet - også i et videre praksisfelt enn feltet der empirien er hentet fra.

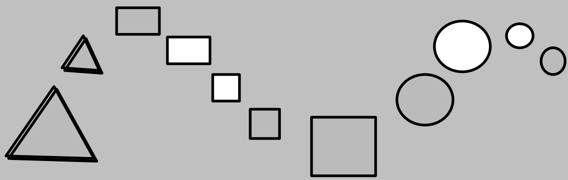
I forskningsarbeidet det henvises til er materialet hentet fra lærerstudenters arbeid med funksjonslære; lineær og eksponentiell vekstmodell. Materialet er 'lite og rikt'. Det benyttes et tekst-teoretisk og dialogisk perspektiv (Bakhtin, Lotman). Analysene fører til konklusjoner som kan gi konsekvenser for diskusjon om matematikk-undervisningens praksis. Dette kan eksemplifiseres gjennom overskrifter som:

- Det er ikke trivielt å undersøke det autoritære.

- Om å tilby matematikkens språk som måte å ordne på.

Hannele Ikäheimo

Hannele Ikäheimo er speciallärare i matematik. Hon jobbar med konsultativa uppdrag på Mattelandet, som är ett pedagogiskt center i Helsingfors stads utbildningsverk. Till Mattelandet kommer lärare från förskolan till gymnasiet och yrkesskolan. Hon jobbar också på en lågstadieskola (årskursk 1 - 6) med elever som har svårigheter i matematik och också med elever som är duktiga i matematik. e-mail: hannele.ikaheimo@edu.hel.fi, www.edu.hel.fi/matikkamaa



Nya vindar från Ungern. Utvecklingsprojekt i Mattelandet

Hannele Ikäheimo

GLÄDJE och FÖRSTÅELSE i matematiken – det har jag strävat efter under hela min tid som lärare och fortbildare. Att inspirera lärare till att jobba på ett annorlunda sätt - det påverkar arbetssättet hos en massa elever. Nu jobbar jag i Helsingfors både i Mattelandet (på finska Matikkamaa) och som speciallärare i matematik på en lågstadieskola (åk 1 - 6). På båda ställen finns en stor glädje över att både lärare och elever förstår bättre de matematiska begreppen när de har tillgång till konkret material. Självförtroendet hos de svagt presterande eleverna ökar när de lär sig att tänka. Som fortbildare är det väldigt roligt att sprida dessa idéer överallt i Finland.

Nya vindar från Ungern – varför just från Ungern?

- De har toppresultat i matematikolympiaden.
- Vi kan ju matematik också i Finland!
- Men varför behärskar inte en fjärdedel av finska elever i åk 9 de grundläggande kunskaperna i matematik?

Med dessa tankar åkte vi fyra lärare till Budapest för tre år sedan för att själv få se varför de ungerska eleverna är så framstående i matematik. Vi besökte många olika skolor och klasser tillsammans med en kunnig tolk. Svaret till vår fråga fick vi redan under de första dagarna:
- de lär barnen att TÄNKA
- de lär lärarna att undervisa så att barnen FÖRSTÅR
- de lär på ett sätt att barnen upplever GLÄDJE
- de har matematik 5 - 6 vt, vi har 3 - 4 vt
- de behandlar talområdet 0 - 20 i åk 1, hos oss 0 - 100
- de behandlar talområdet 0 - 100 i åk 2, hos oss 0 - 1000.

Vid lärarhögskolan träffade vi bl. a. professor Julianna Szendrei och docent Eszter Neményi, som berättade om en metod som professor Tamas Varga hade påbörjat på 1960-talet. De hade vidareutvecklat metoden på lärarhögskolan tillsammans med Tamas Varga under 20 år och fortsatt med utvecklingsarbetet efter hans död.

Ungerska matematikkurser i Finland

För att få grundligare kunskap om denna metod som tilltalade oss väldigt mycket, inbjöds Julianna Szendrei och Eszter Neményi till Helsingfors för att utbilda lärare i kurser om "Nya vindar från Ungern". Hundratals lärare från förskolan till gymnasiet deltog i dessa kurser vilka var arrangerade av Helsingfors universitet, Utbildningsstyrelsen och Mattelandet. Utbildarna påpekade att det finns flera metoder för matematikundervisning i Ungern. T.ex. vid Joensuu universitet är man intresserade av Hajdu-matematiken.

Intresset för ungersk matematik har också blivit stort i Jyväskylä i mellersta Finland. Orsaken till detta är sommarkurser för lärare som vill pröva på Varga-Neményi -metoden i sin klassundervisning i åk 1. Kurserna har ordnats av lektor Marjatta Näätänen som jobbar på matematiska institutionen vid Helsingfors universitet. Som utbildare på dessa sommarkurser har varit Márta Oravecz, som har skrivit läroböckerna tillsammans med Eszter Neményi. Nästa sommar ordnas en kurs i matematik för åk 4. För närvarande finns det tre klasser som har använt de ungerska läroböckerna översatta till finska för åk 1 - 3. Många fler lärare berikar sin undervisning med Varga-Neményi -metoden.

Varga-Neményi -metoden i Mattelandet

I Mattelandet i Esbo har man ordnat likadana sommarkurser som beskrivits ovan. Som utbildare har varit Eszter Neményi och kursledare Anni Lampinen från Mattelandet i Esbo. Ca 40 lärare har deltagit, varav 12 lärare är med i Mattelandets utvecklingsprojekt. Det är alltså sammanlagt 12 klasser i Esbo och Helsingfors där man undervisar matematik utgående från läroböckerna Neményi-Oravecz för åk 1-2. I många klasser används metoden som inspiration i vanlig undervisning när det gäller talbegrepp, logik och geometri. Nästa sommar ordnas en kurs i matematik för åk 3.

Det är svårt att kortfattat beskriva principerna i Varga-Neményi -metoden, men i det följande ges en sammanfattning.

Den stegvisa vägen mot abstraktion i undervisningen av begrepp

1. Att göra på riktigt med hela kroppen och flera sinnen.
2. Att använda konkret material.
3. Att använda bilder. Både betrakta bilder och skapa bilder.
4. Det abstrakta symbolstadiet: sinnesbilder och de matematiska symbolerna.

Att tala, beskriva och berätta är viktigt vid alla punkterna 1 - 4.

Metoden är mycket krävande och förutsätter regelbundna möten med lärarna. Att följa mattelektionerna i några av dessa 12 försöksklasser är en stor glädje! Målsättningen är att pröva denna metod i praktiken och möjligen utveckla en finsk-ungersk lärobok i åk 1 - 6 för lärare som är intresserade av matematik.

Denna metod är helt i linje med nya läroplansgrunder för åk 1-2 i Finland (2002):
"Eleven kan både förklara sin tankegång och framställa sina lösningar med hjälp av konkret material och bilder både muntligt och skriftligt."

Andra utvecklingsprojekt och samarbete i Mattelandet

Dessa ungerska matematikkurser har ökat lärarnas intresse för att på olika sätt utveckla elevernas logiska tänkande. Lärarna vill delta i kurser om konkretisering av olika begrepp från förskolan till gymnasiet. Att kunna låna material från Mattelandet till sin egen undervisning direkt efter kurserna har väckt stor glädje. Föräldrarkvällar där man jobbar med t.ex. bråkkakor och funktionsmaskiner har blivit populära: eleverna kan få hjälp med hemuppgifter på ett konkret sätt. Lärarna vill också skapa ett eget litet Matteland på sin skola: "Det är ju inte ens dyrt!" Men redan nu visar det sig att detta inte räcker: lärarna vill att eleverna har tillgång till de viktigaste konkreta materialen i sitt eget klassrum.

Blivande klasslärare, speciallärare och matematiklärare kommer med sina lärarutbildare på besök till Mattelandet för att bekanta sig med de nyaste idéerna. Lärare från övriga Finland kommer till Öppet Hus -studiedagar i Mattelandet i Helsingfors för att inhämta konkreta idéer till sin egen skola och kommun. Alla personer från Matteländerna i huvudstadsregionen är närvarande och presenterar sina pedagogiska tips.

Samarbetet med läromedelsproducenterna har ökat:
* företag som säljer konkret material, har varit aktiva att inhandla ungerska färgstavar, logiska block och massor med andra nyheter. Företagen har sammanställt färdiga paket med konkret material t.ex. "Första hjälpen lådan" och "Konkret material för åk 1+2". I den närmaste framtiden hoppas vi få matematikväskor för speciallärare och färdiga paket i linje med den nya läroplanen: konkret material för åk 3 - 5, 6 - 9 och gymnasiet.
* företagen producerar handledningar "Ungersk matematik" och "Logiska block", osv.
* många sk. vanliga läroböcker i matematik innehåller tips och spel som är inhämtade från kurserna i ungersk matematik, t.ex funktionsmaskinen, tallinjen, snabbläsningen osv.

Gammalt och nytt

Redan på 1970-talet fanns det i de nordiska skolorna både logiska block och Cuisenaires stavar (som nu kallas ungerska färgstavar). En del av läroböckerna byggde på dessa konkreta medel. Varför blev resultaten inte så bra som önskemålen och målsättningen var med den nya matematiken?

Finns det nu nya möjligheter att nå bättre resultat?
Kan vi nu handleda och inspirera lärarna och eleverna bättre?

Hur har man lyckats nå så bra resultat inom musik och idrott?
Finns det något att hämta där? När man tränar musiker, idrottsmän och -kvinnor jobbar man med individuella konkreta övningar samtidigt som man talar och beskriver olika faser i övningen. Kan man ens tänka sig en situation, där en violinpedagog undervisar elever utan att alla elever har en egen violin?

Kan man förstå matematik utan egna upplevelser?

Anna Jørgensen

Anna Jørgensen, f. 1945 (e-mail: annaj@image.dk) er lektor i matematik og matematikundervisning ved N. Zahles Seminarium i København. Hun har en baggrund som mangeårig lærer i folkeskolen og er cand.pæd. i matematik Hun underviser på læreruddannelsen og på efter-og viderere-uddannelsen af lærere. Hun er medforfatter til Matematik i læreruddannelsen, en serie på 5 bøger til læreruddannelsen. Hun er medlem af forretningsudvalget for Danmarks Matematikundervisningskommission (ICMI).

Fra praksis til teori og tilbage igen. Udvikling af læreruddannelsen i matematik.

Anna Jørgensen

Artiklen her er skrevet på grundlag af et oplæg med samme titel ved Nordisk konferanse i matematikk didaktikk d.18.-19. november 2002.
Artiklens udgangspunkt er, at nytænkning om læreprocesser ofte skabes i relationen mellem praksis som den udfolder sig, og visionen om "en god praksis". Og at forskning, der har som formål at ændre praksis, må foregå tæt på den.
På N. Zahles Seminarium har Iben Maj Christiansen, Ph.D. i matematikkens didaktik og lektor ved Aalborg universitet, Mette Geldmann, psykologilærer på Zahles seminarium og jeg gennemført et projekt, der er et kombineret forsknings/udviklingsarbejde , hvor vi forsøger at mindske gabet mellem praksis og forskning. Forskerens praksisobservationer kombineres med lærerens egne tanker om, hvad hun gør, og hvorfor hun gør sådan, og med studerendes syn på undervisningen. Forskerens analyser og lærerens egne analyser bruges på lige fod.
Artiklen handler om to "brudstykker" fra denne praksis og tanker om den.
Jeg vil først kort skrive lidt om projektets formål og indhold, teori og metode. Dernæst vil jeg give eksempler fra praksis, hvor lærerens rolle(r) er i centrum.
Til sidst i artiklen vil jeg generelt rejse spørgsmål om lærerens funktioner som underviser, som reflekterende lærer og som forsker i egen undervisning.
Den mundtlige form i foredraget gav mulighed for en række eksempler, associationer og tangenter, der er udeladt her.

Om projektet[1]

Formål

At beskrive matematikundervisningens praksis, visioner og samspillet her imellem på N. Zahles Seminarium (NZS) i forhold til uddannelse af 'gode' matematiklærere, og at udnytte denne beskrivelse med henblik på:

1. yderligere udvikling af den reflekterede praksis hos matematiklærerne på NZS,

---

1 Se beskrivelsen af projektet i midtvejsrapporten "Kan vi sætte ord på det, vi gør, i forhold til det, vi tænker? Forholdet mellem tanker og handling i en matematiklæreruddannelse", Christiansen, Geldmann og Jørgensen (1999)

2. almengørelse af erfaringer på NZS, så disse i fremtiden ikke udelukkende er bundet til enkeltpersoner,
3. at bidrage til udvikling og almengørelse af viden om matematikundervisning og i særdeleshed om uddannelse af matematiklærere, og
4. at give inspiration til udviklingen af praksis hos matematiklæreruddannere.

Praksis i læreruddannerens univers er kompleks. Det indeholder målovervejelser både i forhold til læreruddannelsen og i forhold til folkeskolen. Læreruddanneren må forholde sig til følgende spørgsmål:

- Hvordan er de læringssituationer, som vi ønsker at kvalificere de studerende til at varetage?
- Hvordan bliver de studerende ansvarlige for egen vækst og skabelse af egen professionskompetence?
- Hvad er en faglig, en pædagogisk-psykologisk og en didaktisk kompetence for en lærer?

Nytænkning, både i forhold til indhold og arbejdsformer, udvikles i den personlige praksis. Trods de mange diskussioner i matematiklærergruppen, er erfaringerne i høj grad personbundne. Vi ønsker at udvikle, kvalificere og almengøre den praksis og tænkning, vi er midt i, og derved bidrage til en generel kvalificering af matematikundervisning.

Udvikling af teori og metode

Projektet sætter fokus på samspillet mellem overvejelser om mål og midler til at nå disse (visioner) og forvaltning af disse overvejelser i undervisningen (praksis). Undervisningen er blevet optaget på video i perioder over et år, og vi har løbende haft samtaler om, hvad der sker, samt om hvilke formål og hensigter underviseren har med sine forskellige handlinger. Samtalerne tjener til at tydeliggøre de visioner, læreren har for sin undervisning, og hvordan disse kommer til udtryk i, såvel som formes af, hvad der sker i undervisningen.

Vi erkender problemet med blot tilnærmelsesvist at kunne indfange kompleksiteten i undervisningen. Det ligeværdige samarbejde om analyserne mellem læreren og forskeren er etableret med henblik på bedre at indfange denne kompleksitet. Derfor står dette samarbejde centralt i projektet.

To lige høje tårne. Et undervisningsforløb

De ”brudstykker" fra praksis, jeg vil beskrive, er taget fra et undervisningsforløb med et tredje årgangs linjehold. De er lige startet matematik på linje. Jeg har haft dem ét modul, hvor jeg har lagt op til studiet, og hvor de har sagt ja til at være med i dette projekt, og hvor jeg har sat dem igang med en matematisk problemstilling “byg to lige høje tårne”.
Problemstillingen med ”de lige høje tårne” er formuleret i et arbejdskort[2] på grundlag af en idé, beskrevet af Ole Einar Torkildsen i Tangenten nr. 3-4 1993.

2 Arbejdskortet er i ændret form en del af Matematik i Læreruddannelsen. Undersøge, konstruere, argumentere 1, Hans Jørgen Beck m.fl. Ggyldendaler.

Arbejdskort

Antag, du har netop et sæt klodser med længder fra 1 til 10. Kan du bygge 2 tårne, der er lige høje, når du skal bruge alle klodserne?

1. *Fjern den største klods med længden 10 cm. Kan du nu bygge 2 lige høje tårne?*
2. *Fjern nu også den klods, der er 9 cm lang, så du kun har de 8 mindste klodser. Kan du nu bygge 2 lige høje tårne?*
3. *Hvad nu, hvis du foruden de oprindelige 10 klodser havde en på 11 cm? Og på 12? Og på 13? Og på … n cm*
4. *Kan du finde et mønster, en regel?*
5. *Er din forklaring et bevis?*
6. *Kan du formulere andre problemer i tilknytning til bygningen af tårne? Og evt. løse dem?!*
7. *Ole Einar Torkildsen har i en artikel i Tangenten 1991 kommenteret løsninger til 'lige-høje-tårne'-problemet. Han bemærker i begyndelsen af artiklen at "matematisk sett går oppgaven ut på å finne ut, når summer af typen 1+2+3+…+n er partall (lige tal)". Tænk over hans kommentar. Er det nok at finde ud af, hvornår de omtalte summer er lige tal?????*
8. *Diskutér med din nabo, hvordan I har arbejdet med 'byg-to-lige høje-tårne'. Beskriv, hvad I gjorde.*

Nu er der vel ikke mange mennesker, der ville finde det uomgængeligt nødvendigt at vide, hvornår de kunne bygge lige høje tårne af tænkte klodser. Så ….

9. *Har aktiviteten nogen berettigelse for linjefagsstuderende i matematik? Eller for børn i den danske skole?*
10. *Har aktiviteten noget at gøre med noget så fint som skolens formål, fagets formål, ckf'er*[3]*?*
11. *Har den noget at gøre med skolens overordnede princip om undervisningsdifferentiering?*
12. *Har den noget at gøre med den aktuelle debat om, hvilken slags matematik, børn skal lære i skolen? (se evt. litteraturhenvisningerne)*

Arbejdskortet er opbygget af spørgsmålssekvenser, startende med spørgsmål, der lægger op til konkret aktivitet, efterfulgt af mere reflekterende, der lægger op til generalisering og kritisk vurdering af eget arbejde, og sluttende med spørgsmål der sætter opgaven i perspektiv og legitimerer, at de studerende forholder sig kritisk til relevansen af aktiviteten i forhold til deres egen uddannelse og situation.

De studerende har arbejdet med arbejdskortet og konkrete klodser i et modul, hvor jeg ikke har været der.
Nu mødes holdet så igen med mig. Rent faktisk er det altså første gang, jeg skal høre om deres arbejde.

At turde lære. Og at finde det umagen værd

Vi er nogle minutter inde i modulet. En gruppe studerende har fortalt om, hvordan de hurtigt fandt ud af, at det havde noget at gøre med summen af længden af stængerne: Hvis summen

3 Bekendtgørelsen for folkeskolens fag er formuleret i en række centrale kundskabs- og færdighedsområder, til daglig refereret til som ckf'er.

var ulige, kunne man ikke bygge to lige høje tårne. De fortæller yderligere noget om, hvordan de tror, børn vil arbejde med klodserne. Det er beskrevet i "Om at turde lære"[4]. Efter gruppens beskrivelse spørger jeg videre til, om andre grupper vil spille ind med det, de har fundet ud af. Det bliver Jeppe, der fortæller, hvad han har gjort:

Jeppe:	*Ja jeg synes også, det var lang tid siden, jeg havde haft matematik, så jeg gik bare i gang med at lege med dem (klodserne) [Anna smiler til ham fra sin plads ved bordet; der er kun èn plads ledig imellem dem]..og det var bare helt tilfældigt, jeg satte dem op. Det var nemlig det, som jeg mente. At jeg tror ikke, at man ender med en viden til sidst .. Jeg tror bare, jeg tog bare, prøvede at finde sådan et eller andet system i det., Og så dem, jeg var i gruppe sammen med, de var meget hurtige til at sidde og regne ud på papiret, hvor meget det gav i alt., Inden det gik op for mig, at Gud ja, det var da selvfølgelig smartest..så øh*
Lærer:	*Hvorfor ville det være hvorfor synes du, det ville være smartest?*
Jeppe:	*Ja altså, det giver et overblik ikke? Men det havde ikke rigtig noget med tårnene at gøre [Ser på Anna, der trækker let på skuldrene, mens hun smiler/ler].*
Lærer:	*Okay, hvad fandt du ud af eller hvad fandt I ud af i jeres gruppe?*
Jeppe:	*Jamen jeg vil sige, at jeg synes, at jeg fandt ud af at det var, det var meget vigtigt, at (man/jeg) sad og legede lidt med dem, jeg sad sådan og lavede figurer*
Lærer:	*[nikker]*
Jeppe:	*og prøvede at se, nå men hvordan .. man satte dem sammen., [viser med hænderne, hvordan de to dele af trappefiguren kan skydes sammen til at passe ind i hinanden] Det der at hvis man har dem allesammen ikke? og så bøjer dem over på midten, så passer de sammen og sådan., jeg sad sådan lidt og...[ser op mod loftet] ja det synes jeg er vigtigt., at man gør, i hvert fald med børn … at man lige giver dem tid til at...*
Lærer:	*[4 sek, nikker] Hvad siger I andre? [Laver cirkelbevægelse med finger rundt i klassen] Er der flere kommentarer til det her? [Ser rundt, 4 sec., peger på Henrik]*

Måske bør jeg slet ikke kommentere Jeppes fortælling? I min bevidsthed står den som et af de mange øjeblikke, der gør undervisning til verdens bedste job. Her bagefter, når jeg ser det videoklip, opdager jeg så meget mere i det, end jeg kunne fange, mens jeg stod i det. Men jeg husker denne følelse af, at det her var vigtigt, og bare jeg dog kunne holde de andres koncentration om Jeppes fortælling. Han sidder jo lige så stille der og fortæller. Om at de andre var "smartere", hurtigere, end han selv. Men fortæller så, hvad han selv har fundet ud af om de her tårne, indser, at hans eget arbejde kan have nogle værdier, som det smarte ikke havde, og opdager (mon det er en erkendelse, mens han sidder og fortæller? Jeg tror det, når jeg ser videoen. Jeg mærker pauserne og ser blikket, der er åbent, søgende, mens han fortæller), at ... *"ja det synes jeg er vigtigt., at man gør, i hvert fald med børn … at man lige giver dem tid til at lege med klodserne..."*

Han havde jo selv erfaret, at han lærte matematik ved det .Og han får den tid til at fortælle, hvad han har opdaget, som han netop beskriver, børn skal have. Han erkender, at hans leg med klodserne er væsentlig både for ham selv nu, hvor han er ved at lære noget matematik, og for børn engang, når de skal lære matematik med ham som matematiklærer.

4 Jørgensen, Anna: "Om at turde lære. Før-, under- og efter-tanker", Skrift nr.19, juli 2000 Center for forskning i matematiklæring

Mens jeg står i situationen, tænker jeg jo ikke en masse teoretiske tanker om, at lige nu er Jeppe ved at skabe sin læreproces både om matematik og matematikundervisning. Jeg tænker heller ikke, at her er dialogen vigtig, den dialog, der søger at få det bedste frem i den anden. Jeg tænker heller ikke bare, at det der med at bøje dem sammen, så de passer ind i hinanden kan udvikles – af Jeppe eller en anden – til et bevis for summen af de første n tal. Men jeg har alle disse ting i mig som et beredskab. De ordner sig selv, alt imens jeg tænker, at bare jeg dog magter at holde hele gruppens koncentration om Jeppes fortælling. Jeg forsøger ”at gi' min energi” til hans lange pauser, hans tøven, hans søgen efter ord for det, han er ved at finde ud af. Det, jeg er og gør og tænker, er styret af en intuitiv fornemmelse for det væsentlige i min opgave: at skabe det rum, der gør det sådan, at Jeppe og de andre også næste gang tør den sårbarhed, der følger med læreprocessen.

Lærer:	*Hvad siger I andre? Er der flere kommentarer til det her?*

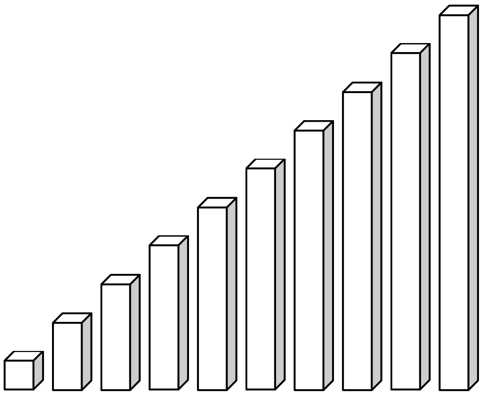
Min fortælling her er, at jeg på én gang fornemmer, at Jeppes fortælling kan bære både hans egen og holdets læring videre, hvis jeg kan fastholde ”rummet”:
Det væsentligste er at få skabt et rum, hvor de tør lære og finder det umagen værd.

At erkende gennem samtale[5]

En gruppe har sat sig for at finde summen af de første n naturlige tal. Det involverer flere og flere af de andre, efterhånden hele klassen. Samtalen er afgørende for, hvordan læringen foregår undervejs. Samtalen varer ca. 30 minutter, og jeg citerer kun korte glimt fra den.
De 30 minutter indledes med Henriks redegørelse for, hvordan han ser summen af de første n *naturlige tal.*

Henrik:	Nå, da jeg kom hjem, så jeg den der trekant for mig, og så tænkte jeg, nå ja, det er sgu da den.
Læreren:	Prøv at vise det.
Henrik:	Så tænkte jeg, vi sad og knoklede med at regne summe ud *[han lægger stængerne på overheadprojektoren]*, men det er…altså det gik bare op for mig, at det var…og det var kun fordi, jeg så - nu har vi jo 10 stænger her - det var kun fordi, jeg så den der for mig, at jeg kunne finde ud af summen. Den stiger med én hver gang. Altså jeg har 10 klodser. Så ved jeg også, at den sidste klods er 10 lang. Så ved jeg, at kvadratet delt med 2, det svarer nogenlunde til det her…og så kan jeg se, at der er en lille forskel, hvert sted, da er der lige $\frac{1}{2}$ ekstra.
Læreren:	Det der med kvadratet delt med 2…kan du ikke lige…hvordan kan det være, at kvadratet delt med to svarer nogenlunde til det der?
Henrik:	Det tænkte jeg bare på, fordi jeg kan jo beregne arealet af en trekant, ikke, hvis du lukker den sammen, ikke?

5 Dette afsnit er skrevet på grundlag af dele af kap 10 i Matematik i læreruddannelsen, teori og praksis, Hans Jørgen Beck, Hans Christian Hansen, Leif ørsted og Anna Jørgensen, Gyldendal 2003



Henrik starter sin redegørelse for, hvad han har tænkt om summen: Kvadratet delt med 2 (det tænkte kvadrat, som trekanten er det halve af) og så $\frac{1}{2}$ mere for hver stang. Læreren prøver at få Henrik til at sige noget mere om det, så de andre får mulighed for at være med. Nu kommer der en hel række korte udsagn fra flere forskellige studerende. Vi kalder dem X, Y, Z, U og V og bringer kun nogle af bemærkningerne.

10^2 eller 11^2 eller…?

Henrik:	*[siger noget uforståeligt og klør sig i håret og går hen til lærredet med stængerne]*
X:	Hvis du laver en modsat, vil du jo få en 10^2.
Henrik:	gør jeg det?
X:	Hvis du lagde stængerne på. Læg dem spejlvendt på.
Y:	Læg dem modsat på.
Henrik:	Jamen så får jeg jo ikke 10 i alt. Nej så får jeg 11^2, Ikke ?

Mange studerende taler nu i munden på hinanden.

Læreren:	Men summen bliver jo 55…den er jo ikke …50.
Z:	Jeg vil bare sige at…*[går op og begynder at lægge stavene på]*
Henrik:	Nej, det er jeg godt klar over
X *(til en anden studerende)*:	Det er jo derfor han sagde, der går den halve fra hver gang.
Henrik *[skriver på tavlen]*:	Altså hvis vi nu siger at…eh.. hvad skal vi kalde sådan en stang ... antal stænger kan vi kalde ”s i anden” eh ... divideret med 2, og så skal du lægge ½..nej..så skal du trække ½ fra. Det er minus ½ s.
Læreren:	Men hvorfor skal den trækkes fra?
Henrik:	Det kan jeg da ikke forstå det der.

Studerende er nu sammen ved at finde ud af formlen for summen af de første s *naturlige tal. De er jo lige ved at have den. De ser de* s^2 *og de ser de* $\frac{s}{2}$. *De har taget styringen, og læreren er næsten ikke med længere. Henrik, som er kommet med idéen, har den styrende funktion. Tvivlen - om de* $\frac{s}{2}$ *skal lægges til eller trækkes fra - holder læreren fast i. Der kommer nu et væld af kommentarer.*

Hvorfor skal den trækkes fra?

U: Hvorfor skal den trækkes fra, den er jo det mere?

Henrik: Nej, men ja…*[går til tavlen, er lidt forvirret, almindelig småsnak og smilen]*

V: Det må være plus de der halve til sidst

Henrik: Vi har jo en højde på 10 hertil *[holder sit ringbind op, så skyggen skærer en linje af den trappe, som stavene udgør]*
Så tager jeg og skærer de her af ... og hvad hedder det…kvadratet af det…nej hvad fanden, eh…arealet af det, det er jo det halve af…

Henrik: Vi har jo en højde på 10 hertil *[holder sit ringbind op, så skyggen skærer en linje af den trappe, som stavene udgør]*
Så tager jeg og skærer de her af ... og hvad hedder det…kvadratet af det…nej hvad fanden, eh…arealet af det, det er jo det halve af…

V: Du skærer det af, så du får en retvinklet trekant.

Almindelig småsnak, hvor mange er involveret. Det er ikke helt klart, hvad de siger.

Henrik: …af kvadratet…nej, hvad fanden…jeg så det bare for mig, og så tænkte jeg, det er sgu da let nok *[almindelig grinen]*

Henriks tvivl - om de $\frac{s}{2}$ skal lægges til eller trækkes fra - er nu i centrum. Der følger en lang periode, hvor læreren lægger op til, at der kan tegnes på tavlen, og hvor der er almindelig småsnak om det, der foregår. På et tidspunkt kommer Henriks erkendelse af, at de jo skal lægges til de der $\frac{s}{2}$:

Læreren: *[Om det tænkte kvadrat]* Det er 10 på den ene led og 10 på den anden led.

Henrik: Ja, det er ligesom vores forudsætning for de her klodser…med mindre vi starter med 2, så bliver det jo noget andet, men det gør vi ikke…for det er jo lissom…og så ved jeg at…arealet af denne her trekant, det er jo det, jeg gerne vi regne ud, det er så s^2 divideret med 2 …og så holder jeg den *[ringbindet, som han bruger til at vise trekanten med]* så længe indtil jeg ser, nåh, har jeg nu alle de halve med…men nu skal jeg da lige tænke mig om, jeg skal jo lægge de halve til selvfølgelig, undskyld ... så jeg skal lægge $\frac{s}{2}$ til … så det var … det var plus, det var bare mig, der var…

Læreren: Det er bare utroligt, jeg har slet ikke set nogen, der tænker sådan før, at se de der hakker på den facon, og så se, at nå for Søren, jeg har lige $\frac{1}{2}$ kvadrat plus de 10 halve, der ligger der.

Henrik gør her en slags *"jeg-har-vundet-bevægelse"*, og alle er optaget af, at formlen for summen af de første s naturlige tal nu er hjemme.

Idé og dialog

Jeg <u>så</u> det bare for mig, sagde Henrik. Han fik en idé og beskriver den for de andre. Læreren ser hans perspektiv og går ind på idéen. Studerende prøver at sætte sig ind i, hvad han har tænkt. Dialogen udvikler sig og bliver til en ligeværdig samtale mellem mange studerende. Samtalen resulterer i, at en række aspekter ved matematisk praksis kommer på banen. De studerende generaliserer, laver formler, anvender variable, anvender forskellige repræsentationsformer efter behov, og gør dette i et tilsyneladende indviklet mønster. De finder frem til, at summen af de første n tal er $n^2/2 + n/2$, men det varer i virkeligheden 30 minutter.

Samtalen er et eksempel på, hvordan erkendelse bliver til gennem dialog mellem flere studerende og læreren. Samtalen kan se kaotisk ud udefra, fx de mange udsagn om, hvorvidt de s/2 skal trækkes fra eller lægges til, tvivlen om, hvorvidt kvadratet er 10^2 eller 11^2, og de mange forskellige input på én gang. At læreren rejser tvivl om de s/2 i stedet for at fortælle, hvad der er rigtigt, understreger yderligere det ufærdige i situationen.

Samtidig er det tydeligt og understreges af de studerende, der deltog, at der er dyb koncentration om sagen og flere "ah-ha-oplevelser" undervejs. Der skabes et lille stykke matematik i denne praksis.
Kombinationen af tilsyneladende usammenhængende input og koncentration om sagen er central.
Det er netop den tilsyneladende usammenhængende samtale, der viser, hvordan erkendelse bygges op i denne situation.

Elementer i "erkendelsens samtale"

Hvad er det da, der holder samtalen sammen for de studerende? Hvad er det, der gør, at de tilsyneladende udvikler erkendelse sammen - ved hjælp af hinandens måder at tænke på? Jeg vil pege på følgende:

- **Alle ønsker at finde frem til, hvad summen af de første n tal er.**
  De har selv rejst problemet om at finde summen af "mange på hinanden følgende tal". De ønsker at løse det. Det er ikke bare sådan, at de ønsker at kende resultatet. De ønsker selv at finde frem til det. Deres hensigt er altså både at undersøge og at finde et resultat. De har et fælles indholdsperspektiv.

- **Alle har flere referencemuligheder end ord til at udtrykke, hvad de tænker**.
  Den kendsgerning, at ikke to tænkninger er ens, gør, at samtaler ofte smuldrer. Den tanke, som en studerende udtrykker, tænkes anderledes af den, der hører den og tager den ind. Men de to tror begge, at de tænker det samme. Det er derfor et sårbart grundlag at bygge erkendelse på, alene at have en ordforklaring. Klodserne, tegningerne, bogen, der laver en trekantet skygge, Henriks fortælling : "da jeg cyklede hjem var det , at jeg ligesom så den trekant for mig" , alle disse forskellige repræsentationsformer gør samtalen mulig.

- **De studerende spørger ind til, hvad de andre mener, og de har mulighed for at bruge en tanke, som er ny for dem, fordi de selv allerede har tænkt noget.**
  "Hvorfor skal den trækkes fra, den er jo det mere?", spørger både læreren og én af de studerende. Henriks tanke om, at der er en trekant, som er ½ kvadrat og så et "hak" for hver stang kan bruges af de andre studerende, og de kan tænke videre. Mon disse hakker skal lægges til eller trækkes fra trekanten? De kan spørge ind til sagen med egne ord og billeder: "den er jo det mere". At de selv har tænkt noget på forhånd, gør det lettere at spørge. De forholder sig undersøgende til hinandens perspektiv.

- **Koncentrationen bindes sammen af det faglige indhold .**

Læreren støtter samtalen, men hjælper den kun meget lidt på vej. De studerende er nødt til hele tiden at hjælpes ad med at holde fast i, hvad det var, de andre sagde, og hvad sagen egentlig handler om. Man kan sige, at det at undersøge, hvad de andre mener om sagen, er en nødvendighed for at løse problemet. Den faglige problemstilling kan kun løses, hvis de forholder sig til hinanden. Indholdsperspektivet og forholdsperspektivet er altså knyttet sammen.

- **Læreren har mange funktioner.**
  Både forløbet med "de lige høje tårne" og forløbet med "summen af de første n naturlige tal" viser os mange af de funktioner, en lærer har i en undervisning, hvor samtalen er central.
- Læreren prøver at se hver enkelt studerende.
- Læreren prøver at finde en balance mellem at fastholde en faglig tankerække, men ikke presse en erkendelse igennem, der ikke er bred nok basis for.
- Læreren koncentrerer sig om at samle og gemme de bemærkninger, der ikke umiddelbart bliver brugt af de studerende i den videre samtale. Ofte skal en bemærkning gemmes længe, før den kan give mening i situationen.
- Læreren rejser spørgsmål. Både til indholdet og til de studerendes tanker om det.
- Læreren prøver at fastholde relationerne mellem de forskellige måder at tænke på.

Læreren - Forskeren

Er det umuligt eller nødvendigt som lærer at være direkte involveret i forskning med udgangspunkt i egen undervisning?

I stedet for at spørge, om læreren selv bør være involveret i forskning i egen undervisning, kunne man spørge, hvad hensigten med forskning i matematikkens didaktik er. Og så bagefter se, hvilke konsekvenser det har for lærerens rolle.

Det er vel alment accepteret, at forskning i matematikkens didaktik skal bidrage til udvikling af matematikundervisning i en ønsket retning. Og det er vel lige så alment accepteret, at læreren er en nøgleperson i den sammenhæng. Derfor er det min opfattelse, at læreren skal spille en aktiv rolle i udforskning af praksis. Ellers bliver det –som det i vid udstrækning er i dag- sådan, at selv om forskning i matematikundervisning blomstrer, så har praksis, som forskningen vel i sidste ende er til for, det sværere end nogensinde. Men hvilken rolle skal læreren spille?

I vores projekt har jeg i virkeligheden 3 forskellige roller. Jeg er læreren, der underviser, med hvad dertil hører af før-, under- og eftertanker. Og jeg er den reflekterende lærer, der "tænker i" hvad-, hvordan- og hvorfor-spørgsmål, og som overvejer det nødvendige og det mulige i undervisningssituationerne. Men jeg er mere end det i det projekt, jeg har givet brudstykker fra her. Jeg er samtidig den udforskende lærer, der –her sammen med Iben og Mette- observerer undervisningen (ved hjælp af videobåndene), analyserer, tolker, udvikler tanker om praksis, sammenholder med eksisterende teori og beskriver. I fællesskab ser vi på undervisningen og uddyber, hvad vi ser. Min rolle er en anden end Ibens og en anden end Mettes. Der er ting, jeg har sværere ved end dem, fordi jeg selv er en del af den undervisning, vi ser på. Men der er også ting, jeg kan bedre end dem, netop fordi jeg er part i undervisningen. For os har været givende at arbejde med forskerens praksis og teori og lærerens praksis og teori i en sådan dialogisk proces, som man vel må kalde det, vi har været part i.

I en samtale med Barbara Jaworski i januar 2000 uddybede hun synspunkter om lærerens engagement i forskningen. Lad mig afslutte med at citere efter hukommelsen: "Hvis der skal komme bedre praksisresultater ud af forskningen, skal lærere inddrages i forskningsprojekterne –ikke blot som nogen, der leverer emperi, men som medparter i forskningsprocessen”.

Karin Kairavuo

Karin Kairavuo jobbar som lektor vid gymnasiet Lärkan i Helsingfors. Dessutom fungerar hon som konsult i matematik för de svenskspråkiga skolorna i staden. Det arbetet sköts via Mattelandet; utbildningsverkets resurscenter i matematik. Som gymnasielärare stötte hon på missuppfattningar och svårigheter angående matematiska begrepp och regler hos sina elever. Gymnasieskolorna tar emot största delen av årskullarna. Alla elever har inte förmåga till enbart abstrakt tänkande. Genom jobbet i Mattelandet och kontakten till konkretiseringsmaterial har hon fått medel att hjälpa sina elever till en god begreppsuppfattning. Hon trivs med att sätta färg på matematikundervisningen och på så sätt ge flere elever än tidigare en chans till insikt.

Konkretisering av matematikundervisningen i Mattelandet

Karin Kairavuo

Att undervisa matematik är som att bygga ett hus. Grunden bör vara stark och varje ny våning måste passa in i den föregående. När grunden är färdig och byggnaden tagit form kan man börja utsmyckningen av byggnaden. Fritt citerat var det här inledningsorden till en kurs, som två ungerska lärarutbildare, professor Julianna Szendrei och lektor Eszter Neményi, höll för lärare i Helsingfors hösten 2000. De hade båda haft förmånen att vara elever till Tamás Varga, den kända ungerska matematikern som förnyade matematikundervisningen i Ungern på 1970-talet. Han ansåg, att även små barn har rätt att lära sig riktig matematik såsom kombinatorik, sannolikhetslära och geometri för att ta några exempel.

Ett år tidigare fick jag chansen att vara med om ett stort, symboliskt husbygge. Några lärare i Helsingforsregionen resonerade så här: Om man vill förkovra sig i engelska, reser man till England. Samma sak gäller tyska. Tyskland bjuder på kunskap och inspiration för den som önskar fördjupning i det tyska språket. Den fråga vi ställde oss var: ”Vart reser den lärare eller elev som längtar efter förnyelse och inspiration i matematik?” Svaret var givet:” Till Mattelandet!”
Efter en arbetsprocess som tog ca ett halvt år hade vi skapat ett Matteland underlydande utbildningsverken i Helsingfors och Esbo. Undervisningscheferna Gunborg Gayer och Irmeli Halinen var fördomsfria då de gav projektet sitt stora stöd.

Jag arbetar som svenskspråkig, halvtidsanställd konsult i Helsingfors Matteland. Min kollega Hannele Ikäheimo, den stora drivkraften bakom projektet, skötte från första början den finskspråkiga sidan. Idag har vi ytterligare Eija Voutilainen som vår kollega. Anders Johansson fungerar som en tilläggsresurs på svenskt håll, bekostad av STV, Svenska tekniska vetenskapsakademien i Finland. I huvudstadsregionen har Esbo och Vanda numera var sina egna Matteland.

Mattelandet - en fysisk plats och en pedagogisk idé.

I Mattelandet vill vi stöda och inspirera lärare och elever till goda insikter i matematikens begreppsvärld. Vi fungerar över språk- och stadiegränser. Verksamheten riktar sig till lärare och elever från stadens svensk- och finskspråkiga skolor. Besökarna representerar alla stadier, från förskola till gymnasium. Sedan starten hösten 2000 har vi haft mer än 1000 besökare i vårt lilla, men vackra utrymme. Det är viktigt att personer från många olika instanser möts för att ta del av varandras erfarenheter angående matematikundervisning. Vi samarbetar med läromedelsförfattare, materialutvecklare inom utbildningen och forskare och skolfolk från olika sektorer. Vi har också kontakt med olika arrangörer av lärarfortbildning.

En arbetsform som väckt speciellt intresse är den centralt utbjudna kursen (CUK) för gymnasieelever, vilken ordnats i två års tid. Vi samlade gymnasieelever som var intresserade av att bekanta sig med lärarrollen. De fick teoretisk undervisning i Mattelandet omfattande tips för undervisning av matematik. Därefter fick de göra undervisningsövningar på fältet handledda av ordinarie lärare. Eleverna valde själva det skolstadium som intresserade dem. Efter avklarad kurs fick eleven sitt namn antecknat på en lista för hjälplärare i matematik. Till vår stora glädje har skolorna använt sig av eleverna i olika sammanhang. Detta år får CUK-kursen formen av en stödkurs för gymnasieelever som vill förkovra sig i skolmatematiken.

Vi tror på konkretisering av undervisningen med ord, bilder eller annat material. Inlärningsmetoderna bör leva med verkligheten i skolan. För tillfället undervisar vi i vårt land hela årskurser sammanhållna i 9 år. Efter det fortsätter större delen av eleverna i gymnasiet eller yrkesskolor. Eleverna har olika inlärningsstilar men undervisas sammanhållet. Därför bör det också finnas varierande undervisningsmetoder. Matematikens abstrakta språk och form tilltalar många, men ger problem åt andra. I Mattelandet använder vi konkret material för att föra de matematiska sanningarna närmare eleverna och deras begreppsvärld. Målet är klara matematiska begrepp för alla elever. Vägen dit ser olika ut för olika elever.

Ett kinesiskt ordspråk säger:
Det du hör glömmer du
Det du ser minns du
Det du gör förstår du.

Den pedagogiska idén i Mattelandet är starkt förknippad med konkretisering. Därför vill jag förklara vad jag avser med att konkretisera matematikundervisningen. Jag skiljer på två begrepp: *tillämpning och konkretisering.* Att tillämpa matematiken är naturligtvis en viktig del av matematikundervisningen. Läraren ger uppgifter som tangerar elevens verklighet. Eleven får en känsla av vad hon kan använda sitt matematiska kunnande till. ´

Det har hänt, att en elev, som upplevt teoretiska studier ansträngande, har frågat: ”Vad skall vi ha allt detta till?” Som lärare känner jag mig generad inför frågan. Jag upplever mig ha misslyckats i min uppgift. Eleven har inte sett att matematiken har ett egenvärde som sådan, även om vi inte tillämpar den! En gymnasieelev sade en gång, att han gillar matematik för att den övar honom i att tänka. Trots att matematikstudier har denna fantastiska dimension måste undervisningen i allmänbildande skolor ta fasta på två aspekter. Vi bör syssla med rena tillämpningsuppgifter vilket ger en naturlig konkretisering av det inlärda, men vi bör också konkretisera begrepp och regler för att göra undervisningen mångsidig och begriplig för eleverna.

För mig är konkretisering att *hjälpa eleven till förståelse av teoretiska begrepp.* Metoderna och hjälpmedlen vid konkretisering kan variera. Själv upplever jag mig konkretisera begrepp när jag använder mitt språk till att förklara samt belysa en, för eleven, ny sanning på olika sätt. Mitt jobb i Mattelandet omfattar alla skolstadier från förskola till gymnasium. Genom att arbeta med material, avsett för de lägre klasserna, fick jag upp ögonen för att det går att konkretisera matematiska begrepp med enkla hjälpmedel också i de högre klasserna.

Konkretiseringen sker i samband med introduktionen av nya begrepp och regler. När eleven använder materialet stimuleras flera sinnen. Konkretiseringen löper som en röd tråd genom inlärningssituationen. Tillämpningen däremot kommer oftast efter att begreppen och reglerna är inlärda

För en person som redan har klart för sig ett begrepp kan konkretisering ge en *härlig känsla av bekräftelse: Det stämmer!* I synnerhet för lärare, som lärt sig hela matematikens begreppsvärld med hjälp av sin ofta höga abstraktionsförmåga, kan kontakten med material för konkretisering bli en stark upplevelse. ”Äntligen får jag en möjlighet att sätta liv på min undervisning”, tänker många.
Om vi beaktar strukturförvandlingarna som våra skolor genomgått så är det klart att även vetenskapernas drottning, matematiken, måste få nya inlärningsmetoder.

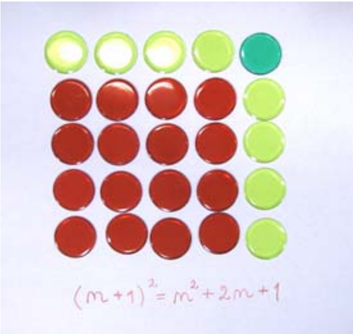
Det är tufft att undervisa MATEMATIK, medan räknekonst är betydligt lättare att lära ut. Som lärare har jag många gånger varit tvungen att köpslå med mitt samvete när tiden avsatt för undervisning ofta är knapp. Det är lätt att lära ut modeller som ger eleven möjlighet att få rätt svar på enkla uppgifter. Till det behövs ingen konkretisering. Man bara tutar och kör, förenklar och drillar. Om man däremot vill att eleverna skall få förståelse för begreppen och kunna använda dem i framtiden så måste metoderna vara noga genomtänkta. Materialet skall fram och undervisningen kräver tid för eftertanke.

Vissa elever anser att det är onödigt med konkretisering. De känner sig förolämpade när läraren tar till enkla redskap för att undervisa dem. Det är övergående, för det har visat sig att även de skickligaste har något att hämta av en undervisning med konkret material. Men läraren bör vara säker på vad hon gör och ha helt klart för sig vart hon är på väg. Annars blir det lätt fiasko. Eleverna är känsliga för stämningen i klassen. Lärarens osäkerhet sprider sig lätt i gruppen. När läraren känner sig trygg finns det plats för frågor, reflektion och diskussion.
Ibland kan man visa materialet på OH, men det är också viktigt att eleverna får röra vid det med egna händer. På så sätt kan de gå vidare och upptäcka sammanhang som läraren kanske inte själv hade tänkt på.

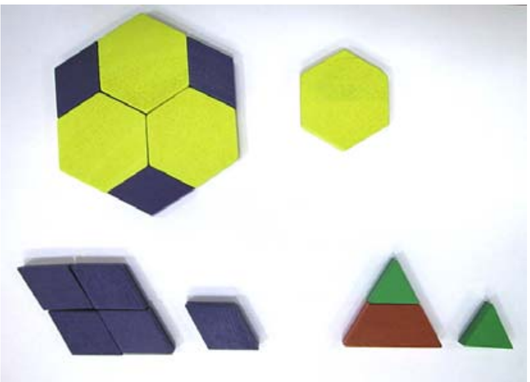
För att underlätta mitt jobb i Mattelandet har jag satt ihop ett material kallat ”Första hjälpen lådan”. Som namnet avslöjar är det avsett för lärare som ett startpaket. Lådan innehåller nio material, vilka alla kan användas för matematikundervisningen igenom hela skolan. För att kort beskriva materialet börjar jag gärna med en uppgift som definitivt öppnade mina ögon för behovet av och möjligheterna till en förändring av mina undervisningsmetoder.

”Bevisa att $n^3 - n$ är delbart med 6 då $n \geq 2$ **”,** löd uppgiften som tilldelades elever i första gymnasieklass. De klarade av att hyfsa uttrycket till n(n-1)(n+1). Därefter var det stopp eftersom de hade svårigheter med att dra slutsatser av resultatet. De saknade *erfarenheten* att vart tredje tal är delbart med 3. Den kan man låta dem få redan i tidig ålder. En talremsa rullas runt en Tobleroneask och saken är klar.

Efter det kan vi gå över till färggranna knappar för att visa mera om delbarhet. På en 100-ruta kan man förstärka erfarenheterna från ”Toblerone”-experimentet genom att rada olikfärgade knappar på vartannat respektive vart tredje tal. Mönstren väcker elevens intresse och stämmer till eftertanke! Ett begrepp som primtal går lätt att visa med samma knappar. *Kvadreringsregeln* står sedan i tur.

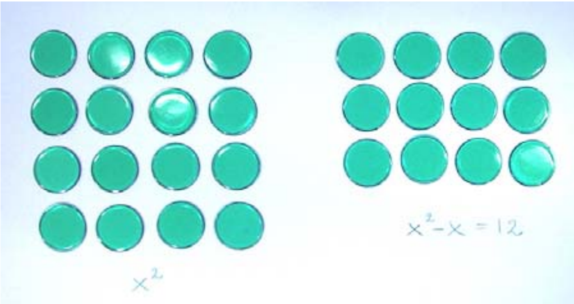


Kvadratrotsbegreppet konkretiseras på geobrädet. Likformighetsbegreppet kan göras läckert med bitar i geometriska former.



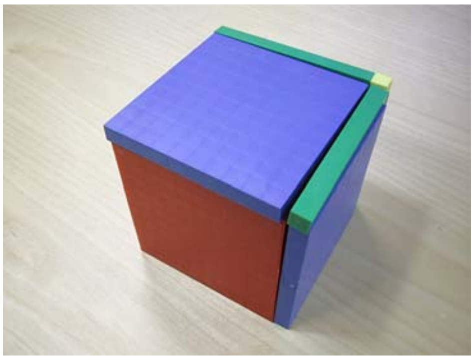
Möjligheterna är obegränsade

I början av vår verksamhet skrev en ivrig journalist :” I Mattelandet, där allt är möjligt, löser man andragradsekvationer med färggranna knappar.” Vad personen avsåg var konkretiseringen av kvadreringsregeln. Jag var en aning orolig att missförståndet skulle väcka sensation i lärarkretsar och tillströmningen till Mattelandet skulle öka ytterligare. Tack och lov kom ingen nyfiken då för att se mig lösa andragradsekvationer med färggranna knappar som hjälpmedel! Idag däremot skulle det ordna sig. Plötsligt en dag, då jag skulle lära gymnasister att lösa ekvationer av andra graden, kom jag på ett sätt att lätta upp lektionen. Vi löste ekvationer av typen $x^2 - x = 6$ respektive $x^2 - x = 12$. Materialet var faktisk de färggranna knapparna som journalisten talat om.



Konkretiseringen av ekvationerna ovan var naturligtvis avsedda att ge eleverna en bild av en i övrigt helt teoretisk uppställning. Men konkretiseringen ersätter aldrig den teoretiska undervisningen och det långsiktiga övningsarbetet. Exemplet ovan ger dessutom en bild av utbrytningen av x. Om man betraktar uppställningen syns det att $x^2 - x$ också kan uppfattas som x(x-1).

Mönstren i matematiken är som god konst. Vid konkretisering med material kommer mönstren, det allmängiltiga, ofta fram. Ibland stöter man på dem som en biprodukt. En annan gång är avsikten att plocka fram dem. Mönstren ger också eleven stöd för minnet. Som exempel pekar jag på konkretisering av ett binom upphöjt i två respektive i tre. Vi bygger $(10+1)^2$ respektive $(10+1)^3$ med tiobasmaterial.



Då vi betraktar den senare skapelsen uppifrån, ser vi den tidigare versionen konkretiserad på kubens ena sida. Den tvådimensionella versionen finns inbyggd i den tredimensionella versionen. Eleven kan på detta sätt stimuleras till tankeutflykter. ”Hur månne en fyrdimensionell version av regeln skulle se ut?”, är inte en omöjlig fråga i detta sammanhang.

Det sägs att bildning är det som blir kvar när man glömt det man lärt sig. Jag tror att det är viktigt att inlärningen ger upplevelser som berör. Man kan öva upp sitt matematiska gehör så att man känner på sig när man går vilse vid lösningen av olika uppgifter. En god taluppfattning är också oerhört viktig för att eleverna skall få ut något av matematikstudierna. Den behövs för att man skall kunna associera rätt vid val av lösningsmetoder. Jag har frapperats av att samma material kan användas i matematikundervisningen på alla stadier. Det är som om de matematiska sanningarna är så mångfasetterade att det i alla sammanhang går att visa på en sida av dem. Som lärare glömmer man lätt att eleverna vi undervisar har ett förflutet och en framtid. Var och en av oss har dem till låns en kort tid av deras liv. Det är vår uppgift att försöka ge dem en så inspirerande undervisning som möjligt under den tid de är deponerade i vårt klassrum.

Mattelandet finns i Mediecentralen vid Backasgatan 84
Hemsida: www.edu.hel.fi/Matikkamaa (välj sedan Helsingfors för svensk text)
e-mail: mattelandet@edu.hel.fi

Anna Kristjánsdóttir

Anna Kristiansdottir (ak@khi.is, Anna.Kristjansdottir@hia.no) har været professor i matematik didaktik ved Islands Pædagogiske Universitet siden 1991 men er fra 2002 ansat ved Høgskolen i Agder på grund af den opbygning af doktorgradsstudium i matematik didaktik som er begyndt ved HiA. Hun har arbejdet meget med udviklingsprogrammer for matematiklærere og var den første formand for Flötur – foreningen af islandske matematiklærere 1993-1997. Hendes arbejde nordisk og internationellt har både været inden for matematik didaktik og informationsteknologi hvor hun har styret nogle omfattende projekter. Anna var formand for det islandske udvalg for Verdensmatematikåret 2000 og hun er Islands repræsentant i Nordic Contact Committee for verdenskongressen ICME-10.

Læringsmiljøer for elever og læringsmiljøer for lærere

Anna Kristjánsdóttir

Om elever

Forskning inden for matematiklæring har under de sidste årtier i stigende grad vendt opmærksomheden mod elevers arbejde med opgaver som for dem er realistiske og miljøer hvor de får lov til selv at konstruere viden og resonnere over sine løsninger og løsningsveje.

"Klasseromsforskning" er stadig mere udbredt inden for de nordiske lande og bidrager tosidigt til forståelse af matematiklæring. På den ene side bidrager den inden for forskning af matematiklæring generelt. Og på den anden side er den til gavn for lærerens reflektion og anvendelse i det daglige arbejde i klasserne.

Man forstår bedre end før at en dialog mellem elever, om det som de forsøger at forstå og få greb på, er mere frugtbar end når de arbejder isoleret. Man forstår også bedre hvilken rolle det spiller at eleven forventes og får lov til at forklare sin forståelse og sine løsningsmetoder. Og man erfarer en mere stabil kundskab og interesse hvor eleverne har selv bygget op sin viden på en meningsfuld måde, selv formuleret spørgsmål og selv ført egne matematiske argumenter ud fra deres arbejde. Generelt kan man sige at lærere som forventer at enhver elev er en tænkende person som vil og kan lære på en meningsfuld måde og bidrage i sit miljø, har erfaret en forståelse blandt elever de ikke kendte før.

og om lærere

Lærernes rolle i dette arbejde har også fået en stor opmærksomhed, som miljøskabere, som reflekterende samarbejdspartnere med eleverne og som fagfolk der kan og nyder at fordybe sin egen forståelse af både læring og matematik.
Det er dokumenteret af mange at arbejdet i klassen er givende og lærdomsrigt for læreren. Men det er dog ikke et tilstrækkeligt læringsmiljø for en lærer. Et fælles initiativ inden for skolen anses for at være nødvendig for en reel faglig udvikling. Men det er heller ikke tilstrækkelig! Naturligvis kommer dette an på hvordan situationer benyttes og muligheder

bygges op. Men grundlæggende er at udvikling tager lang tid, må integreres i hverdagen og må være varieret sådan at en blanding af det kendte og nye udfordringer stimulerer uden at føles falmende eller truende.
Denne artikkel er ikke en teoretisk artikkel. Indholdet bliver behandlet ud fra teoritisk perspektiv senere. Men det er gjort synligt her for første gang i anledning af etableringen af det norske Nasjonal Senter for Matematikk i Oplæringen.
I artikklen skitseres meget kort et udviklingsforløb i Island som strakte sig over 15 år og var baseret på teoretisk viden inden for matematik didaktik samt et gedigent kendtskab til den islandske skole og skoleforhold.
En udvikling er ikke planlagt på forhånd men kendetegnes ved en konstant reflektion og analyse i vekselvirkning med nyskabelse og en eller anden form for støtte. I udvikling er det vigtigt at være opmærksom på hvilke "tærskler" opleves i undervisning og hvorfor de opstår eller vedligeholdes. Og det er vigtigt at finde muligheder til at fungere som om "tærsklerne" ikke eksisterede for at kunne forstå dem bedre og rydde dem af vejen eller komme uden om dem. Ordet "tærskler" bruger jeg fordi jeg mener at det belyser bedre situationer i undervisning en ordet "forhindringer".

Læringsmiljøer for lærere

De sidste snart 40 år kendetegnes af "efteruddannelse af lærere" eller helt fra "den ny matematik" gjorde et forsøg på at indtræde i skoler uden dog at nå at spille den tiltænkte rolle i matematikundervisningen. Sommerkurser, korte inspirationsmøder, gæsteforelæsere på skolerne, blanding af egne forsøg og fælles diskussion o.s.v. alt er dette eksempler på det som har været på lærernes tilbudsbord. Forskellen mellem enkelte lærere som deltager i sommerkursus over til en gruppe kollegaer som sammen deltager i kursus på egen skole er stor. Men det er dog afhængig af hvilken rolle den som holder kursus spiller. Og de tærskler den enkelte lærer på sommerkursus oplever kan de lærere som får kursus sammen med sine kollegaer på skolen også opleve. Lad os se på eksempler og på hvilken måde den udvikling som artikklen handler om tog hver gang sin udgangspunkt i tærskler som man oplever i lærergerningen.

At prøve noget nyt med egne elever

Dette opleves nogen gange som ikke enkelt, næsten som en risiko. Der er mange grunde hertil, selv om man som lærer har lyst til at prøve. Men man prøver alligevel ikke

- på grund af disiplin i klassen
- på grund af tidsmangel
- på grund af usikkerhed med hensyn til indhold
- på grund af usikkerhed med hensyn til arbejdsmetoder
- fordi man er alene om at reagere og reflektere
- fordi man ikke ved hvordan man kunne udvide opgaverne hvis nødvendigt

Det er en ond cirkel fordi værdien af "det nye" kan man ikke vurdere så længe man ikke prøver det. Så man kommer ikke uden om at prøve hvis man skal komme videre i sin udvikling som lærer. Og man kan ikke forberede dette som den "sikre" undervisningstime hvor man har bestemt hvad man skal sige og vise frem og hvor man næsten aldrig får uforventede spørgsmål. Man må ind i en prøvesituation. Men den skal give bedre mulighed for at lægge mærke til eleverne, at udfordre eleverne og at reflektere selv, end en almindelig time i egen klasse, måske har gjort.

Det var miljøet vi fokuserede på, ikke lærerne selv som individer, da vi skabte blandede kurser med lærere og elever. Det var i 1988 og gennem de næste år var der mange af den slags, både for erfarne lærere og lærerstuderende som her fik en anden type erfaring end de fik i praksisperioder. Kurserne var todelt. Om morgenen var kursus for lærerne og om eftermiddagen arbejdede de sammen med børn hvor de tilrettelagde selv programmet i små lærergrupper. En mængde reflektioner og udfordringer til sig selv i samarbejde med elever fra barnetrin eller ungdomstrin kendetegnede kurserne. Det største kursus var i sommeren 1992 med svenske og islandske lærere og 100 islandske børn i alderen 7-12 år.

Var dette ikke en kunstig erfaring som man ikke kan bygge på i den travle hverdag med sine mange elever? Ja, det er naturligt at spørge om det! Det var jo ikke den samme situation som lærerne oplever i egne klasser. Men det var et miljø som fik dem i gang til at prøve arbejdsmetoder og indhold de ikke havde gjort før i egne klasser. Og oplevelsen og reflektionen af noget som virkelig skete og i fællesskab med andre lærere som også havde været til stede, det skabte en indsigt og erfaring som de enkelte lærere tog med hjem til egne klasser og benyttede sig af i sit opbygningsarbejde.

Det er vigtigt, men ikke enkelt, at hjælpe andre lærere

Det viser sig at være besværligt at "formidle" til kollegaer egne tanker om udvikling og ændringer i klassearbejde. Og derved føler mange lærere at de ikke møder forståelse i sit nærmiljø og holder ikke længe ud med det nye de har stiftet bekendtskab med. Der er visse årsager hertil. For det første er det mest almindeligt at man formidler det som man lader eleverne gøre men ikke egne tanker som man som en voksen person har om indhold og arbejdsmåder. For det andet formidler man som oftest et planlagt forløb men ikke sine reaktioner på det uforventede eller flere og mere udfordrende muligheder materiale eller indhold kan give anledning til. Det er alt for almindeligt at man forsøger at forenkle (lige som i undervisning af algoritmer) for at få kollegaerne i gang men snyder dem derved uvilkårligt for både udfordring og selv at skabe og deltage i en stimulerende opbygning.

Vores forsøg her var at skabe mulighed for at et arbejde med andre lærere skulle være en del af et vinterlangt kursus sideløbende med deltagernes undervisning. Et af det vi gjorde var at ordne to dages kurser midt i vinteren for mange flere lærere hvor de som deltog i det lange kursus var ansvarlige for en del af undervisningen men kursus var lagt op i fællesskab mellem os og dem. Og vi diskuterede og reflekterede over vores rolle og resultat, også i fællesskab. I en dagbog som deltagerne førte forsøgte de også at analysere hvorfor nogen ændringer i matematikundervisningen var så besværlige at få op til diskussion og gennemføring.

Det er faktisk det same princip som er basis for kursus sammen med elever og kursus sammen med andre lærere. Principet om at lære af at gøre eller udføre, men under trygge og engagerende forhold. I begge tilfælde spiller gennemtænkning og reflektion en afgørende rolle. Dewey sagde nemlig: "You don't learn from experience. You learn from reflecting upon experience."

Intet nyt influerer hvis ikke det kan integreres i den daglige rytme

I en skandinavisk undersøgelse for nogle år siden af "burn-out" blandt lærere, fremkom det at en udbredt årsag til denne nedslidthed er at disse lærere oplever at så snart de kan beherske det nye, som alle absolute skal være med på, er der opstået noget endnu nyere som alle nu skal i gang med at tilegne sig, lære og mestre.

Dette er et reelt problem. Men det kan ikke løses ved at stoppe strømmen af nye tanker, værktøj, muligheder, indhold, metoder. Men man må ændre hvad man fokuserer på.

Man må holde op med at fokusere altid på det nye og lære sig at fokusere på relationen mellem det nye og det eksisterende, at fokusere på integrering af de to og at fokusere på sig selv og sit miljø i et vedvarende forændrings-forløb. Ikke bare denne uge, denne måned, denne vinter, MEN ALTID.

Det er kendt at det nye varer mens det er nyt men forsvinder det hvis ikke det integreres i den daglige rytme en har. Eller at det nye forsvinder fordi kollegaerne ikke kender det og det passer derfor ikke ind i sammenhængen. Eller at det forsvinder fordi inspektører, rektorer og andre overordnede ikke kender til det og ved ikke at det nye kræver noget mere eller anderledes. Så giver læreren op ved hele tiden at skulle påminde.

"De syv skolers projekt" begyndte som et forsøg på at skabe miljø for integrering men både på de enkelte skolers vilkår og også med mulighed for inspiration mellem skolerne. Jeg fortæller lige så kort om dette som de andre initiative.

Vi havde et team fra hver skole, repræsenterende begyndertrin, mellemtrin og ungdomstrin samt rektor eller vice-rektor og tildels skolens IKT specialist. Nogle af vores møder var for alle involverede hvor vi lagde op programmet, nogen gang med arbejde tværs på skolerne med begynderlærerne sammen, rektorerne sammen o.s.v. og nogen gang med hver skole samlet.

Andre møder var inden for de enkelte skoler hvor rektor styrede mødet og lærerne fra den skole bestemte hvad de ville præsentere fra udviklingen inden for skolen, hvad vi skulle diskutere i den sammenhæng og hvilke råd eller henvisninger de ønskede fra os. Den tredje type møder eller aktiviteter var også inden for de enkelte skoler hvor skolens team lagde op et program for de andre lærere. Men det blandede vi os ikke i hvis ikke vi blev bedt direkte om henvisninger eller råd.

"De syv skolers project" havde en levetid på mellem to og tre år. Resultatet var ikke det samme på alle skolerne og det havde vi heller ikke forventet. Men udviklingsforløbet var ikke bare der som et forløb. Det blev også fokus for opmærksomhed i nogle af skolerne. Og det havde vi faktisk håbet at ville ske.

At leve som lærer i et nær-miljø og også i et bredere miljø

Et nær-miljø er vigtigt. Men det er ikke altid nok. Som en lærer i udvikling behøver man en "soulmate" eller en sjælekollega eller flere. Og de findes måske ikke på egen skole. Det kan der være mange grunde til selv om man fungerer godt i samfundet inden for skolen. Som eksempel kan nævnes at man har læst mere om matematikundervisning end andre på skolen og har behov for at reflektere over det, få mulighed for at forstå det bedre før man føler sig i stand til at åbne en diskussion med kollegaerne på skolen.

Inden for sit nærmiljø får man opmuntring, til og med pres, til at udføre det de andre kender, det som er "fælles eje". Men man får ikke opmuntring, og slet ikke pres, til at udføre det som de andre ikke kender, som de ikke ved om. Trods dette kan det godt være at netop det kunne være værdifuld for skolen. Og da er det vigtigt at kunne vokse sig stærk nok for at åbne diskussionen og da kan det være nødvendigt at kunne udvikles inden for et bredere miljø.

Dette meget spændende problem begyndte vi at arbejde med for seks år siden. Det blev til et kursus som vi kørte to gange og deltagerne traf aldrig hinanden i virkeligheden. Kursus hed Hjernebrydning og kreativitet og gik ud på at bruge problem i matematiklæringen. Lærerne underviste i 4. til 10. klasse og hver lærer valgte en klasse som "deltog" også i kursus. Elevernes deltagelse var for at skabe en ramme om deltagelsen kring enhver lærer og hjælpe dem til ikke at give op.

En webside indeholdt de problemer vi arbejdede med, lukket mens vi brugte dem, så åbent for andre lærere og hjem at udnytte. Diskussionen var på en lukket postliste. Den var vigtig og udviklede sig meget gennem tidsperioden. Og det var ikke værre at have alle lærerne i en gruppe men de tog naturligvis også kontakt personligt hvis de ønskede at diskutere noget nærmere med een eller få. Klasserne var officielt med og introducerede sig for hinanden i begyndelsen. Jeg havde håbet at i nogen tilfælde ville klasser begynde at samarbejde ud fra dette men det skete ikke af sig selv. Dette kursus lever stadigvæk som webside og bruges af lærere, lærerstuderende og hjem, dog kun i Island. http://www.ismennt.is/vefir/heilabrot/ Ordet *Þátttakendur* åbner ind til billeder af nogen af klasserne som var med.

At åbne et vindue mellem klasser på tværs af landet

Sandsynligvis kan mange blandt læserne sætte sig ind i de situationer som er skildret i det foregående og genkende problemer og eventuelt tilsvarende miljøer for udvikling. Det vil dog knapt gælde om det sidste skridt i udviklingen. Klasserne som samarbejdede her var tre, en i Reykjavík, en anden oppe i Nordlandet og den tredje på Østlandet i Island. De var 6. klasser da de begyndte og samarbejdet gik til de sluttede 7. klasse. Tre godt uddannede og erfarne matematiklærere banede vej inden for projektet Víðátta (et navn som henviser til vidde og mange retninger). Alle klasser var udstyret med videokonference udstyr som er meget enklere end det som er kendt fra store studioer. Læreren og eleverne havde ingen teknisk hjælp inde i klasserne. Udstyret er et TV apparat med en lille kamera ovenpå og en ekstra kamera kunne bruges i specielle tilfælde lige som en ekstra lydoptager. På TV skærmen kunne hver klasse se "ind til de andre klasser".

Vi arbejdede med mange spændende opgaver som een af lærerne eller mig præsenterede. Nogle gange gik elevernes arbejde så raskt at vi holdt "vinduet" åbent hele tiden. Nogle gange åbnede vi mellem klasserne i begyndelsen og så igen da de var parate til at præsentere sine løsninger og løsningsmetoder og eventuelt spørge hinanden eller diskutere lidt.

Víðátta er et pioneer-projekt men har allerede åbnet mange muligheder m.h.p. forskning samt givet en fantastisk oplevelse af elvernes arbejde. Et åbent vindue mellem klasser med 600 km afstand, eller mere, er altså muligt nu ved udviklingen af læringsmiljøer for elever og for lærere. Men der er mange uforskede muligheder der endnu.

Ordet "vi" ovenfor betegner ikke en gruppe som har arbejdet sammen gennem de 15 år. Det henviser til at for hvert af de initiativ som skildres var der en lille gruppe. Meget sjældent deltog en person mere end en gang, med undtagelse af den som dette skriver. Hvert nyt initiativ byggede på min analyse af situationen og det var forskelligt om jeg selv bestemte at finde midler og mennesker til næste skridt eller jeg takkede ja til et åbent samarbejdsprojekt og var med til at forme det i den retning som fortalt ovenfor.

John Mason

John Mason is a professor at the Centre for Mathematics Education at the Open University in UK. His principal focus is thinking about mathematical problems, and supporting others who wish to foster and sustain their own thinking and the thinking of others. This led to the recent publication of Researching Your Own Practice: The Discipline of Noticing (Routledge Falmer) which develops a mode of working used in the Centre, which provides a foundation for practitioner research, and which can also be developed into a radical approach to 'researching from the inside'.
He has been the author of hundreds of research papers, and dozens of materials for teachers. Current projects include a book with his wife Anne Watson (Oxford) on the strategy of getting learners to construct mathematical objects for themselves, a monograph on pedagogic task design, a two-volume work on the teaching algebra in schools, and a reader on Fundamental Constructs in Mathematics Education.

Practitioner Research as an Extension of Professional Development

John Mason

Abstract

Professional development is about modifying and extending your practices so as to improve learners' experience as learners. You pick up ideas from reading, hearing, and seeing others teaching, and you try out versions of what you think was suggested in your own situation. You work at changing yourself, trying to become more sensitive to learners' needs and experiences. Throughout, you keep your hand in as a practicing mathematician by working on problems and learning new topics so that the experience of learning mathematics remains fresh for you.
As a researcher you are more systematic. You can accumulate facts and statistical summaries of facts; you can study the experience of others (researching from the outside); you can study your own experience (researching from the inside); and you can support others in studying themselves in the guise of professional development or even of research.
I shall sketch the foundations for the Discipline of Noticing which lies at the heart of all professional development and research, and outline some of the elements of a somewhat radical approach to researching 'from the inside', which provides a systematic approach to moving from 'having experiences' to researching the changing of your practice so as to improve students' experiences.
In retrospect the Discipline of Noticing can be seen as one answer to Eisner's plea:
What I believe we need if educational research is truly to inform educational practice is the construction of our own unique conceptual apparatus and research methods (Eisner 1985 p264).

Introduction

This talk is somewhat ambitious. I am attempting a complex interweaving of self-referent threads. I want to start from your experience as practitioners and researchers, and to lead gradually, via what I consider to be the core and essence of research, to a somewhat radical approach to educational research. Wherever you choose to bail out along this journey, you will I hope find something of value concerning your own activities. This in itself is ambitious in the time, but in addition, in order to be consistent with what I find is the most effective way to present ideas when working with colleagues, I shall be using my methods throughout. You will be invited to engage in what I call task-exercises, designed to afford access to immediate experience of noticing. What matters is what you notice while engaging in the tasks. So you can at least expect to experience some aspects of an approach which, I believe, conforms to what Caleb Gattegno called a *science of education* (Gattegno 1987), even if you don't, in the end, agree with all of what I propose.

Any science of education, any proposal of practices such as the Discipline of Noticing, must be based on solid theoretical foundations, yet at the same time remain intensely practical. Here I can only assert that the theoretical foundations are sound (see Mason 2002). What matters most is that you find partial fit and partial challenge to your own experience. Overall it is not enough to dwell in practice as a practitioner and work at developing that practice. As Leonardo da Vinci put it

He who loves practice without theory is like the sailor who boards ship with out a rudder and compass and never knows where he may cast. Practice always rests on good theory.

Once you start theorising, you are effectively researching, and there are important practices which come into play which are designed to address difficult issues of validity, generalisability and robustness.

Getting Started

Physiology

How were your feet placed when you started to read this paper?

Which nostril(s) were you breathing through?

Comment

There is so much about ourselves of which we are at best vaguely aware. Much of it perhaps does not matter, at least as far as professional development and research is concerned. Yet what we are sensitised to notice not only influences what we notice, but tells a good deal about us.

There are many similar questions about my presence in the classroom. For example

what are my typical posture, gestures, facial expressions, tone of voice when asking a genuine question (where I truly wish to know something I don't currently know), a teacherly question (where I discover I am looking for particular answers), disciplining someone, setting homework, intervening as they work, etc..

where is my attention when I am listening to a learner struggling to express themselves, when I am working through an example with one or more learners, when I am preparing my session, etc..

The first can be studied by watching videotapes and listening to audiotapes of sessions. The second can only be studied by careful self observation, which is where the Discipline of Noticing started (Bennett 1964).

I may, for example, be unaware that my posture, gestures and tone are sending conflicting messages, or that their subliminal message is not aligned with my words, so learners may be unclear as to what I am actually offering. Perhaps my voice tones and my intentions are not always compatible, so that I come across unintentionally as gruff or distant, or perhaps I signal teacherly questions by my tone of voice, which may trigger learners into playing "guess what is in his mind". If in pursuing posture, gesture, or tone I decide I want to make some changes, then more is required than simply knowing there is sometimes a mismatch. To make a change, to become more consistent and hence more effective, I need to become aware *in the moment* just before a habitual posture, gesture, voice-tone etc. takes over, so that I can exercise a choice. I need to notice an opportunity to act differently to an established habit, and I need an alternative to the habit to choose to activate.

There are so many aspects of ourselves to attend to, in addition to the minutiae of the learning of mathematics, that it can all quickly become overwhelming. Italo Calvino captured this nicely when he observed that

It is only after you come to know the surface of things that you venture to see what is underneath. But the surface of things is inexhaustible. (Calvino 1983 p55)

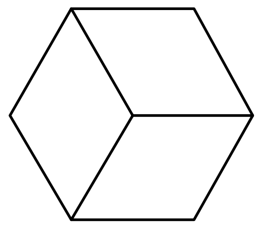
It is easy to be caught up in the multitude of surface phenomena as a displacement for probing deeply. The Discipline of Noticing provides a structure to support deep probing. Care is needed however. Any attempt to draw attention to some feature or aspect of teaching and learning mathematics, of professional practice, falls foul of the adage:

To express is to over-stress.

Experience is a complex and richly woven fabric. Selecting out some aspects immediately over-stresses them in comparison with all the others, yet it is only be selecting and stressing, by focusing attention that aspects and features can come to attention at all. Since the basis of the functioning of our senses, which is the principal input to our brain's processing, is detecting change, discerning difference, everything we notice or become aware of starts with making distinctions, that is with stressing some features and ignoring others. Gattegno (*op cit*) pointed out that this is how generalisation and abstraction come about: from stressing some features and consequently ignoring others, as you may experience in the next task.

Say What You See

When you have read these instructions, carry them out!
When you have looked at the figure,
Close your eyes and imagine it;
Describe it to yourself;
Then jot down instructions as to how to draw it which you could send by email to a colleague.



Comment

Looking at the figure, you cannot help but distinguish between black and not-black, fore-grounding the black and back-grounding the white. Hence you 'see' a shape. You also discern features of the shape as made up of sub-shapes, again, making distinctions, and seeing some black segments as belonging to more than one sub-shape. You may have found labels such as hexagon, square, cube, or rhombus coming to mind. These are abstract-generalisations which arise from stressing and ignoring. They aid recognition, but once a label comes to mind, it may make multiple interpretation harder.

What you actually see are some black line segments forming a hexagon, with the centre of the hexagon joined to three alternate vertices. You may also 'see' a cube, which includes 'seeing' three 'squares'. This is a reminder that we know that the brain does a great deal of processing of what it receives from the various senses. Nothing is perceived 'as it is', indeed it is not clear that there is a knowable 'as it is'.

If you tell someone that you saw a cube, they may form a very different image from what you recall seeing. So too with educational research, it is essential to distinguish between what you can negotiate with others as having seen, and further interpretation.

You may have noticed a considerable difference between 'describing it to yourself' and describing how to draw it to an absent colleague. This is a taste of different kinds of knowing that we all experience. It points to the pedagogic value of getting learners to talk and listen to each other, and to try to instruct someone else in how to 'do a question of this type', even of programming a machine to do 'questions of this type'. Instructing yourself, or a computer

often brings details to the fore that you might not have noticed when you were being more holistic.
This leads me to two important aspects of noticing which are core components of the Discipline of Noticing, but which are relevant to, indeed central to, all research:
distinguishing *accounts-of* and *accounting-for* phenomena
and
distinguishing *experiencing*, *intentional noticing, marking,* and *recording*
which are elaborated in the next two sections.

Accounts-Of and Accounting-For

If someone is offering a theory or explanation for some phenomenon, then it is vital to be clear what that phenomenon is, independent of the theory. If you want to agree or disagree with someone's interpretation or analysis of a situation or phenomenon, it is vital to distinguish between the phenomenon itself, and the analysis-interpretation. But if the description of the phenomenon already contains evaluative terms, already includes interpretation and theorizing, then it is at best difficult and usually impossible to disentangle the two.
For example, suppose someone reports their experience of the previous task along the following lines.
Because I was thinking about ways of drawing cubes recently, I was relieved that I immediately saw a cube. I resisted my colleague's description in terms of hexagon because I knew it was a cube. It took me a while to see it as a hexagon.
The 'because …' clauses are theorizing, whereas the 'it took me a while …' could become a phenomenon to investigate: how does one suppress the first 'reading' that comes to mind and what do you have to do with your attention in order to see something the way someone else 'sees it'? You could probe beneath the surface of this observation-turned-question. But it is only worth probing if others also recognize that it fits with their experience, that there is something to investigate. The word 'relieved' reports an emotion, which is only useful if there is some description of the state prior to 'feeling relieved', and perhaps some behavioural description of that emotion so that other observers can agree on what they saw, or could have seen.
An *account-of* an incident, an experience, an observation is a brief-but-vivid description which minimizes explanation, justification, emotional commitments, and theorising generally. *Accounting-for* an account-of an incident involves putting forward some explanation, some theorising about what has been observed.
There are emotional explanations and pre-justifications such as "I was tired; I don't like being put under pressure to answer questions; I am not good at mathematics …"; and so on, and there are reports about emotions such as "relieved". Even these can be worked on to make them more descriptive: what physical signs were there of 'relief': relaxation? Breathing changes? Softer tones of voice?
One way of casting the distinction between an account-of and accounting-for is that the account-of contains only details which could be agreed by other observers had they been present (including imaginary inner witnesses where the incident being described is internal experience of an individual). A useful account-of affords access back into the situation for the person describing it, and also affords others access to 'similar' situations in their own experience. Thus the account-of is seeking resonance in other people's experience, and if that resonance is not found, then further theorizing will not be effective. Experience suggests that collecting accounts-of, giving accounts of situations which come to mind which seem linked (resonated), and negotiating in what sense they point to similar or different phenomena leads to fruitful collective professional development and practitioner research. Among other things

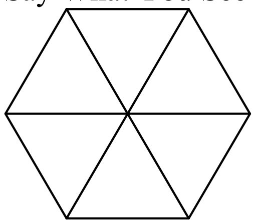
it supports the desire to ‘look out for ‘similar incidents in the future, and so to probe beneath the surface. The temptation to theorise makes this much harder to do, precisely because the conjectured theories more strongly frame ’what is noticed’.
Of course language is by its nature general and abstract, and so theorizing has to take place merely to identify and recognize constituents of a situation. But there is a huge difference between a description which others can recognize, and one which interweaves description and theorising. If someone else is to be able to agree or disagree with your analysis of some situation, with your interpretation, then they have to have access to the situation itself. There is an expectation that data comprises clean and objective facts from the situation, but as has been noted by many, data only becomes data when someone treats it as such, and data consists of selections made by an observer. Frederick Bartlett observed that
a name or label immediately shapes what is seen and what is recalled (Bartlett 1932)
and Norwood Hanson generalized this to
observation is theory laden (Hanson 1958).
Nelson Goodman suggested that we want
our theories to be as fact laden as our facts are theory laden (Goodman 1978),
while Kurt Lewin put it as
Theory without practice is sterile; practice without theory is blind
and
Nothing is so practical as a good theory (Lewin 1946).
Alfred Orage went rather further:
the observation of others is coloured by our inability to observe ourselves impartially. We can never be impartial about anything until we can be impartial about our own organism (Orage 1930),
paralleling observations made centuries earlier by Michel de Montaigne (1588/1954):
...when most people speak about themselves they are not speaking about something they actually know. What most selves seem most to know seems to have little to with the self, or anyway with the person. And when confronted with the task of self-expression, people generally feel compelled to talk about just these issues, their feelings, their thoughts, their lives, which happen also to be the most nebulous and difficult to get a handle on. But does the average self have any comprehension of these personal things? Is it reasonable to expect that the self understands the person?
Here then is support for my contention that in order to be sensitive to learners’ experience, and hence effective in interactions with them, it is vital that I work on sensitizing myself through observation of my own experience, and, returning to Leonardo da Vinci for further advice:
There is no higher or lower knowledge, but one only, flowing out of experimentation.

Intentional Noticing

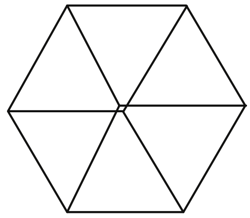
Our senses are constantly bombarded with impressions which are, fortunately, edited out. Sometimes someone can make a remark about something they noticed, and we recognise what they are describing even though it would probably not have come to mind for us. This is *ordinary noticing* or *experiencing*. Sometimes we are sufficiently struck by something we notice that we remark upon it to someone else. This is *marking*. It requires more energy than ordinary noticing, for even though we may resolve in the moment to ‘remember that’, whatever the ‘that’ was is often quickly overlaid by subsequent events and forgotten. Perhaps something someone says resonates it back for us. Temporarily we have fresh access to that experience, and we can choose to *mark* it for future reference. Sometimes we not only mark and make a *remark* but actually make some sort of a note to ourselves so that we can regain access in the future. This is *recording*. It requires even greater energy, greater commitment, but proves vital when professional development moves into research. A researcher has to keep records, which often turn into the data that is analysed and theorized. Sometimes the data even becomes the phenomenon being studied!

Here is an opportunity to recognize the difference between marking and recording, and, if you can work with a colleague, between ordinary noticing and marking:

Say What You See Now



If possible, cover up the right-hand picture, then look at the left hand picture and say to yourself what you see. Then reverse, covering the left and looking at the right. Now uncover both and try to see the right as a flat two-dimensional figure in the way you may have done with the left, and the left as a projection of a cube. What do you have to do to your attention to achieve these shifts?



Comment

You may have noticed a change in what you saw as you moved from saying to yourself, to looking at the second. There is an even stronger switch if you tell someone else how to draw what you see.

You may have caught yourself stressing some parts of the left-hand drawing in order to 'pull it up' into (the projection of) a cube. This is something we all learned to do as children.

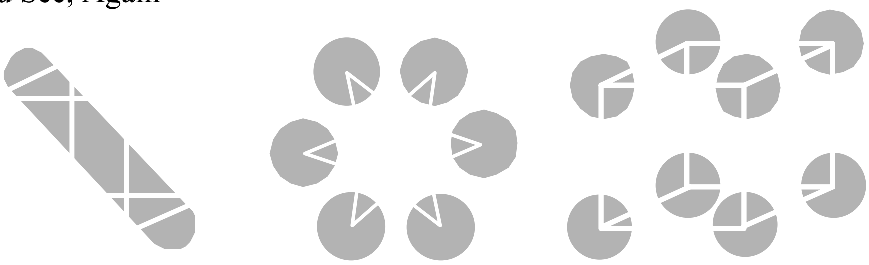
This exercise provides an opportunity to experience a shift in your attention (Mason 1989) which is necessary if you are going to learn any concept. For a concept that has proved fruitful in mathematics signals a shift in perspective in ways of thinking, in the structure of attention. Put another way it signals a change in the sensitivity to notice.

This exercise also provides a taste of what Pierre and Dina van Hiele, and subsequent authors (van Hiele 1986, Burger & Schaugnessy 1986) were pointing to in their research into 'levels' of geometric thinking. They are most usefully seen not as levels but rather as different forms or structures of attention. Sometimes we attend to the whole, sometimes we discern detail, sometimes we attend to relationships amongst those details, and sometimes we see in terms of properties: relationships which define or specify what it is we see, which is how we characterise and classify. These are far from being exclusive, often shifting rapidly from one to another and even occurring simultaneously with respect to different aspects. For example the drawing in the first task could not be the projection of a frame of cube because there were missing edges, but it could be the projection of a solid cube.

The way in which how you see one diagram can influence how you see another has resonances with the classroom, and with working on mathematics. How you see one learner's behaviour may be influenced by how you see another's, and by how you have seen and interpreted their behaviour in the past. The temptation to label, first the behaviour, then the person, is enormous. Expressions heard in staffrooms such as "children like that" or "the bright ones" signal global labelling which is very likely to colour how those people are 'seen', the form and format of interactions with them, and hence set up reactions in and between them. Some people follow the implicit expectations of 'significant others', thus reinforcing the label and the categorisation; others react and rebel, though sometimes they strike out in unexpected ways.

Noticing is not just something that human beings do automatically. You can work at sensitising yourself to notice, and the Discipline of Noticing offers a range of techniques and practices for doing this with increasing efficiency and effectiveness. Learning mathematics can be seen as becoming sensitised to notice in particular ways (to see opportunities to make sense of the world in mathematical ways, to recognize an appropriate technique in a new context or situation). Becoming sensitized to notice freshly and differently is what happens to researchers, so research can be seen as a process of sensitising oneself to notice.

Say What You See, Again



What have you noticed about yourself? Did you catch yourself interpreting?
Comment
The gestalt force to fill in details to make something familiar is very strong. Here it is hard not to see two cubes and a star, as if seen through circular holes in a white wall.
This force also operates in the more complex setting of observing yourself and others in a classroom both in teaching and in research. We 'fill in detail', we extrapolate, using theory and expectation based on abstractions from past experience. So we tend to see what we expect to see. To counteract this force, it is worthwhile developing a practice of staying with brief-but-vivid accounts-of incidents and observations in order to concentrate attention on what can be agreed by other observers.

Incidents, Situations, and Phenomena

Noticing begins with some incident having some striking features. An account-of the incident is made, perhaps refined to make it brief-but-vivid by removing un-necessary details which contribute to explanation and justification, and by trying to describe what could have been seen and agreed to having been seen by other observers had they been present.
The word *situation* already implies a generalisation, for there is something about other incidents which strikes you as being similar. 'Similarity' or relative invariance only makes sense by way of contrast with change and variation. Within a recurring situation there is then one or more phenomena, something which happens and which is recognisable by others within their own experience, and which may be recognisable in different contexts. Some of the observations made in my comments about the tasks fall into this category, where I pointed to possible resonances with experiences in teaching, professional development, and researching. Thus a phenomenon is, strictly speaking, a pattern of behaviour which has been identified in several different situations and different contexts.

Some Features of Noticing As A Discipline

I have concentrated on observation, because that is where personal and professional development, and research, all begin. Sometimes there is a question which drives observation, though that question probably arises from something noticed and marked, even if not recorded. I have offered a few tasks in order to try to ground my remarks in your experience, so what matters most is what you notice about yourself.
Pursuing some of these ideas leads to the conclusion that the person who gets the most from research is the researcher themselves (Mason 1997). Eisner appears to regret that changes in practices usually precede formal research demonstrating the effectiveness of those practices:

Many perhaps most changes in educational practice emanating from new views of the learner preceded rather than followed the findings of educational research … in short, I believe our propensity to change practice is a function of attractiveness of a set of ideas than of rigor of a body of data-based conclusions. … What I believe we need if educational research is truly to inform educational practice is the construction of our own unique conceptual apparatus and research methods (Eisner 1985,p264).

The Discipline of Noticing takes this as axiomatic and exploits it. Indeed the principal product of research is taken to be the increased sensitivity of the researcher to notice, the increased awareness of the researcher of the complexity of the phenomena being considered. Consequently, instead of trying to 'tell' other people what you find out, what you are sensitized to notice, the Discipline of Noticing, seen as a research paradigm, suggests as a sensible product of research, the use of task-exercises which are offered to others just as I have done here. So part of the Discipline of Noticing involves construction, refining, and honing of task-exercises, designed to promote noticing. This becomes a source of validation, though the issues are too complex to pursue here. But one final rather challenging consequence of this way of thinking is that while initially the *data* consist of accounts-of incidents, when you are seeking validity in the experience of others, it is other peoples' experiences which are resonated by the task-exercises in which they engage with you which become data for their enquiries. In other words, what is analysed, in a sense, is sensitisation to notice, both through making richer sense of past experiences, and noticing in the future. Of course the purpose of noticing is to make it possible to choose to act non-habitually, non-automatically.

Rather than 'telling', people are supported in experiencing for themselves and then describing what they notice. Similarities and differences detected between different people's accounts form the basis and impetus for further enquiry and for the growth of shared experience and language for talking about educational issues. This may then lead to them finding themselves noticing, or deciding to try to notice similar incidents, situations, and phenomena in their own experience.

Through describing what they notice, through negotiating ways of speaking about it and whether accounts of observations which are resonated into awareness are indeed recognized by others as being similar, leads to one form and aspect of Gattegno's *science of education*. It may provide some of Eisner's *conceptual apparatus*, and it fits both with Michele Pellerey's proposal that the didactics of mathematics could be construed and defined as a *science of practice*: relevant questions can be located and posed stemming from both pedagogical and educational domains (Pellery 1997, p141), and with Lawrence Stenhouse's view that scientific research in Mathematics Education is a systematic self-critical enquiry into the practice of education made public (Stenhouse 1981).

Who is Studying Whom?

The Discipline of Noticing itself is based on and encourages observations. One component will be observations of what others say and do, but ultimately the focus ends up at what the observer themself says and does. Rather than being overwhelmed by subjectivity, it acknowledges that all observation reveals as much about the observer as it does about the observed:

the more precisely you specify details of an observation as potential data, the more precisely your own sensitivities to notice are revealed.

This forms a kind of analogue in qualitative research to Heisenberg's uncertainty principle in observations in physics. Whereas in physics it is the product of the precisions in measurements of coupled pairs of quantities such as position and velocity which is invariant, here it is the ratio of the degrees of precision which is perhaps more or less constant.

Narrative

It is through narrative that we account-for phenomena, most especially our own behaviour. We use phrases and expressions picked up from others to justify, mollify and calm ourselves. Many people have been drawing attention to the key role of language in general, and of narrative in particular, but care must be given before going completely overboard. The stories we tell ourselves and others account-for incidents, phenomena, behaviour. But again, before someone else can judge the quality of the analysis, can decide whether they agree or disagree with the narrative, they have to be clear about what constitutes the phenomenon itself. Accounts-of incidents are not narrative (otherwise everything is narrative and it ceases to have any useful function).

Paul Broks (2002), clinical neuro-psychologist underlines the established position that there is no physical location for the mind, for the source of the endless chatter which we call our inner life. He quotes Daniel Dennett as claiming that it is language which gives coherence to our experience over extended periods. It is not so much that through language we spin stories, as that stories spin us. The self is best understood as a "centre of narrative gravity". Put another way, which is consonant with Francisco Varela & Eleanor Rosch (1991), self and stories co-emerge: as we tell stories we affirm a self which plays the central role in those stories, and affirmation of that self enables stories to be told. This idea is not new. David Hume thought that the extension of the self beyond momentary impressions was fiction, while from the Buddhist notion of *Anattavada* there emerges the challenging idea of "no self": all we can do is strip away endless layers of the onion skin of selves constructed to hide the fact that we are actually 'empty', only to find that accessing that emptiness is the most fulfilling experience possible!

Jerome Bruner (1996) has for a long time promoted the notion that human beings are narrativists; that what we most like to do is to tell stories. Even in very formal meetings a story or two is likely to leak out after the main business has been done, usually told by one of the power-possessing participants. My colleagues and I in the Centre for Mathematics Education at the Open University discovered the central role of narrative when we were making videotapes as support for professional development. Viewing videotapes of classrooms induces viewers to construct a wide range of stories to account-for what they see, and to shield them from being challenged excessively. We came to the conclusion that events consist of the stories people tell about them. These stories alter over time of course, and become hardened through re-telling especially by people who were not present!

Humberto Maturana (1988) made the enigmatic observation that

Everything that is said is said by an observer

which I take to mean that there is no preferred status as participant over observer; that the act of describing, indeed of expressing, shifts attention from participating into observing. But pursuit of the Discipline of Noticing regarding self-observation soon reveals that there can be an inner observer, an inner monitor (Mason *et al* 1982), an inner executive (Schoenfeld 1985) which is not an additional self, but rather an inner state of separation. That state is the basis for what Richard Bucke (1901) called *cosmic consciousness*, which is a very grand term. In order to make changes in the way you behave, in what you have available as a choice of what to do, it is necessary to develop this inner witness. The Discipline of Noticing was articulated precisely in order to support this development.

Learning From Experience

The basis of how I work is through experience. You could call it *experiential* learning, but then what learning is not based on and through experience? And experience alone is rarely sufficient to produce learning, for as I have often said:

> One thing we do not seem to learn from experience
> is that we do not often learn from experience alone.

Something more is required: the much vaunted and over-mentioned but frequently under-played and under-exploited *reflection*. Donald Schön distinguished between *reflection-in-action* and *reflection-on-action* (Schön 1983). Reflection-on-action is commonly thought of as 'thinking back over what happened'. In fact there is much more to such reflection, which is highly problematic until it is done carefully, systematically, and with discipline. Reflection-in-action means simultaneously participating in what is happening, and being aware of what is happening as an observer, as an inner witness or monitor. This means becoming aware of your awareness (Gattegno 1987, Mason 1998) Building such an inner witness is no small matter, and it is the end to which the Discipline of Noticing is directed.

Conclusion

So what is the Discipline of Noticing? It is a collection of practices centred on the natural but improvable act of noticing. As such it lies at the heart of any research method and working on noticing can enhance that research, not to say professional development. It is designed to enhance specific noticing in order to inform the making of choices of how to act in the future, in professional practice as well as in other domains. It can be used to turn professional development into research 'from the inside', that is, research on your own practice. It tackles issues of subjectivity and objectivity head-on, and it is notable for its stance on validity and on research products: validity lies in whether sensitivity to notice is enhanced in the future and whether choices are better informed; research products are task-exercises designed to facilitate and foster noticing of specific practices, in order to initiate further enquiry. Details can be found in Mason (2002) and fragments can be found in many earlier publications.

Bibliography

Bartlett, F. 1932, Remembering: A study in experimental and social psychology, Cambridge University Press, London.

Bennett, J. 1964, Energies: material, vital, cosmic, Coombe Springs Press, London.

Broks, P. 2002, Soul In A Bucket, Prospect, June, p52-55. see also http://www.prospect-magazine.co.uk/ArticleView.asp?accessible=yes&P_Article=11360.

Bucke, R. 1901, Cosmic Consciousness: a study in the evolution of the human mind, Innes & sons, Philadelphia.

Burger, W. & Shaughnessy J. 1986, Characterising the van Hiele levels of development in geometry, Journal for Research in Mathematics Education, 17 (1), p31-48.

Calvino, I. 1983, Mr Palomar , Harcourt, Brace & Jovanovitch, London.

Eisner, E. 1985, The Art of Educational Evaluation, Falmer, London.

Gattegno, C. 1987, The Science of Education Part I: theoretical considerations, Educational Solutions, NewYork.

Goodman, N. 1978, Ways of World Making, Harvester press, Hassocks.

Hanson, N. 1958, Patterns of Discovery: an enquiry into the conceptual foundations of science Cambridge University Press, Cambridge.

Lewin, K. (1946) Action Research and Minority Problems, Journal of Social Issues, 4 (2) p34-46.

Mason J. 1998, Enabling Teachers to be Real Teachers: necessary levels of awareness and structure of attention, Journal of Mathematics Teacher Education, 1 (3) p243-267.

Mason, J. 1989, Mathematical Abstraction Seen as a Delicate Shift of Attention, For the Learning of Mathematics 9 (2) p2-8.

Mason, J. 1997, Researching From the Inside in Mathematics Education, in A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.) Mathematics Education as a Research Domain: a search for identity, 2 vols, Kluwer, Dordrecht, Vol 2 p357-378.
Mason, J. 2002, Researching Your own Practice: The Discipline of Noticing, Routledge-Falmer, London.
Mason, J. Burton L. & Stacey K. 1982, Thinking Mathematically, Addison Wesley, London.
Maturana, H. 1988, Reality: the search for objectivity or the quest for a compelling argument, Irish Journal of Psychology, 9 (1) p25-82.
Montaigne, M. de, 1588 (1954), Essays, Manchester University Press, Manchester.
Orage, A. 1930, Psychological Exercises, Janus, New York.
Pellerey, M. 1997, Didactics of mathematics as a scientific Discipline, in N. Malara (Ed) An International View on Didactics of Mathematics a s a Scientific Discipline, University of Modena, Modena, p137-142.
Schoenfeld, A. 1985, Mathematical Problem Solving, Academic Press, New York.
Schön, D. 1983, The Reflective Practitioner: how professionals think in action, Temple Smith, London.
Stenhouse, L. 1981, What Counts as Research? British Journal of Educational Studies 29 p103-114.
van Hiele, P. 1986, Structure and Insight: a theory of mathematics education, Academic Press, Orlando.
Varela, F., Rosch, E. and Thompson, E. 1991, The Embodied Mind; cognitive science and human experience, MIT Press, Cambridge.

Hellevi Putkonen

Hellevi Putkonen är lektor vid Helsingfors universitet der hon arbetar som klasslärarutbildare med matematikundervisning som ansvarsområde.

Hemsida: http://www.malux.edu.helsinki.fi/malu/people/putkonen

Integrering av matematik och konst vid klasslärarutbildningen

Hellevi Putkonen

I läroplansgrunderna för grundskolan i Finland (1994) konstateras:

> ”För att eleverna skall få en verklighetstrogen bild av matematikens användbarhet bör den även **integreras** med andra ämnen i skolan och med världen utanför skolan. På detta sätt får eleverna erfarenhet av att använda sina matematiska kunskaper, att utnyttja matematiska modeller samt även att se deras begränsningar. Projektarbete över ämnesgränserna lämpar sig på alla årskurser.”

Den ovanstående målsättningen är mycket krävande för den blivande klassläraren. Ganska få av klasslärarstuderande har haft under sin skoltid erfarenhet av projektarbete. Därför är det speciellt viktigt att de vid lärarutbildningen får delta i aktiviteter där matematiken integreras med andra ämnen. Dessutom är det viktigt att vid lärarutbildningen studerande blir själva vana vid att planera, förverkliga och evaluera projektarbeten av olika slag. I lärarutbildningen borde studerande också lära sig att samarbeta med sina studiekamrater så att detta skall främja deras förmåga att samarbeta framgångsrikt i lärargrupper senare i deras eget arbete. Allt detta syftar till att lärarstudenterna borde ha en aktiv roll i sina studier enligt modern utbildningssyn.

Inom klasslärarutbildningen vid Helsingfors universitet är en femtedel av matematiska studier riktade mot integrering av matematik med något annat ämne. I slutet av studieåret har man en temavecka som är totalt tillägnad till kombinationen matematik och något annat ämne. Kombinationen varierar årligen. Hittills har man haft sådana kombinationer som

- matematik och science
- matematik och sport
- matematik i olika kulturer (s.k. etnomatematik)
- matematik och konst.

Förra året hade man för första gången temaveckan matematik och konst. Temaveckan var preliminärt planerad och organiserad av lektorerna i matematikens didaktik och konstundervisningens didaktik. I matematikkursen var klasslärarstudenterna delade i fem grupper med cirka 20 personer. Varje grupp blev utbildad av både matematik- och konstlektorn till specialister på något specialområde. Varje grupp hade med lektorerna två sessioner, där man behandlade integrering i allmänhet, målsättning för temaveckan och naturligtvis gruppens eget specialområde med anknytning till matematik och konst. Förra året var specialområdena följande:

- Grupp A: Symmetrin
- Grupp B: Skalan
- Grupp C: Cirkeln
- Grupp D: Spelen
- Grupp E: Problemslösningsvideon
-

Under temaveckan var en dag för symmetrin, en dag för skalan, en dag för cirkeln, o.s.v. På symmetridagen tog grupp A ansvaret för utbildningen av de andra studentgrupperna så att studenterna i grupp A delades i fyra team av 4-5 studenter. Varje team tog hand om utbildningen av någon av de fyra andra grupperna B-E. Varje team hade ganska fria händer i att välja någon egen synpunkt på temat. På förhand hade varje team modifierat sin egen målsättning, skaffat mera kunskaper om sitt specialområde, samlat material och förberett sig för sin dag på alla sätt. Studerande sporrades att använda och pröva olika arbetssätt och –metoder. Det enda kravet var att allt, vad man gjorde, måste vara också användbart med skolelever i skolan.

Under temaveckans sista dag hade man en utställning där man kunde få en överblick av allt vad man åstadkommit i olika grupper under veckan. Därtill måste varje team skriva ett sammandrag över sitt arbete på 1-2 sidor med text och bilder. Dessa sammandrag samlades i ett häfte som kopierades åt alla studenterna.

1. Symmetrin

Under ledning av grupp A blev studerande först bekanta med symmetrins matematiska grunder och olika arter av symmetrin. Sedan använde studenterna symmetrin i sin egen bildframställning. Man hade varierande konstnärliga uppgifter i olika grupper:

- En av de fyra grupperna hade som uppgift att utreda på konkret sätt med vilka geometriska figurer det är möjligt att täcka planet så att det inte blir kvar några ”hål” och med vilka figurer det är omöjligt. Sedan hade de som uppgift att skapa kakelmönster för president Halonens badrum.
- En grupp blev bekant med tesselationer och tekniken hur man kan åstadkomma en tesselation.
- De två sista grupperna utarbetade ornament, postkort m.m. i vilka symmetrin borde spela en central roll.

2. Skalan

Under ledning av grupp B blev studenterna först bekanta med skalan som matematiskt begrepp. Därefter hade studenterna varierande uppgifter i olika grupper:

- En grupp förstorade och förminskade bilder med hjälp av rutor. Tillsammans gjorde de seriebilder på väggen i enorm storlek.

- En grupp byggde med multilink klossar möblerna till Barbies dockhem. Med det
  räknade man skalor av längd, area och volym. När dockhemmet blev färdigt, gjorde man en planritning av hemmet på papper i en viss skala.
- En grupp byggde upp ett slott genom att vika kartong till koner och cylindrar av
  olika storlekar. Också i detta sammanhang räknade man skalor och gjorde en planritning.
- En grupp manipulerade en färdig bild till en surrealistiskt konstverk. En viss del av bilden förstorades så att måttförhållandena inte var desamma i alla delar av bilden.

3. Cirkeln

Under ledning av grupp C blev studenterna först bekanta med cirkeln, ellipsen och deras egenskaper. Sedan hade studenterna varierande uppgifter i olika grupper:

- En grupp gjorde sektordiagram.
- En grupp gjorde stora ellipser och färgade dem till att bli traditionella afrikanska
  sköldar.
- En grupp gjorde snurrar av kartong med färgade sektorer och granskade vilken färg blev till resultat av olika färgkombinationer, när snurran sattes i gång.
- En grupp planerade kyrkans glasfönster med cirkelformat.

4. Spelen

Under ledning av grupp D gjorde studenterna spelbräden med olika rittekniker och planerade reglerna för spelen. Spelen borde vara sådana att man kan lära matematik med dem. Idén var att man kan använda olika uppgiftskort med samma spelbräde. Så kan man använda det många gånger och också i andra ämnen. Till slut spelade studenterna sina spel för att träna den matematik som de haft under året vid lärarutbildningen.

5. Problemlösningsvideon

Under ledning av grupp E gjorde studenterna flere video. Konstlektorn hade på förhand diskuterat med studenterna de olika skeden i hur man gör en video (manuskript, animationstekniker av olika slag, teknik i filmandet, edition o.s.v.). Målet var dock att göra en video ganska snabbt och utan edition.

Meningen var att man kunde använda videon under matematiklektioner på lågstadiet när man arbetar med problemlösning. Varje videos längd borde vara 5-10 minuter. Varje video borde ha samma struktur. Först presenteras problemet med video, sedan arbetar eleverna i klassrummet i grupper med syftet att lösa problemet och till sist presenteras lösningen (eller många lösningar) på videon.

Studenterna valde till sin videos ämne traditionella matematiska eller logiska problem liksom gubben, som borde ro över ån med vargen, geten och kålhuvudet.

Litteratur

Anon. 1995. Grunderna för grundskolans läroplan 1994. Ulbildningsstyrelsen. Statens tryckericentral. Helsingfors.
Joyce, B. & Weil, M. 1980. Models of Teaching. Prentice-Hall International inc., London
Sahlberg, P. & Röj-Lindberg, A-S. (red.) 1989. Arbetsmetoder i naturvetenskapliga ämnen 1. Statens tryckericentral. Helsingfors.
Sahlberg, P. & Röj-Lindberg, A-S. (red.) 1991. Arbetsmetoder i naturvetenskapliga ämnen 2. Statens tryckericentral. Helsingfors.

Toril Eskeland Rangnes

Toril Eskeland Rangnes er høgskolelektor ved Norsk Lærerakademi Lærerhøgskolen (NLA LH). Hun har hovedfag i matematikkdidaktikk fra Høgskolen i Agder. Tidligere har hun arbeidet mange år i grunnskolen, mest i barneskolen. Ellers er hun medforfatter til et læreverk for mellomtrinnet og er redaksjonsmedlem i Tangenten.

Fra lærebokstyrt til læreplanstyrt undervisning? Hva skjer når lærere vil endre matematikkundervisningen?

Fra en casestudie av to samarbeidende lærere
Toril Eskeland Rangnes

Historisk sett har læreboka blitt sett på som et av de viktigste hjelpemidlene en har i matematikkundervisningen. Tidligere læreplaner gav gjerne gode råd til hvordan lærebøkene burde være. I tillegg ble alle lærebøker godkjent av myndighetene helt fram til august 2000. I de siste læreplanene er matematikk i hverdagen blitt styrket. Matematikk er noe en omgir seg med i dagliglivet. I L97 er det forventet at elevene og læreren sammen skal benytte seg av "her og nå"-situasjoner der matematikk dukker opp, leken er kommet inn både i småskole og mellomtrinnet, og prosjektarbeid der elevene skal være med på å formulere egne mål, er nå innført også i matematikkfaget. Læreren må dermed takle andre sider ved faget enn før, og når L97 nå legger så stor vekt på nærmiljø, elevenes interesser og aktualitet, kan en, slik jeg ser det, vanskelig drive kun lærebokstyrt undervisning og samtidig si at en driver matematikk-undervisning ut fra L97. Med lærebokstyrt undervisning menes her en undervisning der sidene i boka bestemmer hva som skal skje i timene, hvilken rekkefølge emnene kommer i og hvilke oppgaver som skal løses. Når lærebokgodkjenningen nå er borte, er ansvaret i enda større grad blitt lagt på læreren. I L97 står det klart at elevens egenaktivitet er av største betydning. Læremidler er ellers ikke nevnt i planen, med unntak av tekniske hjelpemidler som lommeregner og datamaskin. I veiledningsheftet (KUF 1998) nevnes ulike læremidler der læreverk er nevnt på linje med tidsskrifter, oppslagsverk, kunstbøker og lignende.

Hva vil det så si å drive læreplanstyrt undervisning? Slik jeg ser det kan en i læreplanstyrt undervisning gjerne bruke lærebøker, men da som et hjelpemiddel som en trekker inn i undervisningen der en ser at det kan være nyttig. Ved å gi slipp på læreboka som styringsredskap kan en få mer styring over matematikktimene selv. Innholdet i matematikktimene kan bli et felleseie som lærer og elever er med på å utvikle. I stedet for å la seg styre av lærebokas struktur og tolkning av læreplanen, går en selv aktivt inn i læreplanen og finner ut hvordan en vil tolke og legge opp undervisningen for å nå målene som står oppført der. Læreren får på denne måten en større frihet, men også et større ansvar.

I spørsmålet "Fra lærebokstyrt til læreplanstyrt undervisning?" tas det ikke stilling til om lærebøker skal brukes i matematikkundervisningen. Jeg ønsker å se på hva som skjer med

undervisningen og med lærerne når de bestemmer seg for å prøve å bruke læreplanen som styringsredskap. I læreplanstyrt undervisning kan lærebøker være aktivt i bruk, men de vil ikke styre undervisningen. På grunn av at flere lærere nå prøver å drive en undervising med mindre vekt på lærebøker og mer vekt på elevenes egenaktivitet, blir det viktig å dokumentere hva som skjer i en slik undervisning, hva elevene lærer og hvordan lærerne erfarer en slik endring. I denne artikkelen vil jeg først og fremst konsentrere meg om to læreres perspektiv på egen endring og undervisning.
I hovedfagsoppgaven min (Rangnes, 2002) undersøker jeg hvordan to lærere opplever å gå inn i en prosess med å endre matematikkundervisningen sin. Lærerne hadde to tredjeklasser (grunnskolen) som de hadde slått sammen slik at de kunne jobbe sammen. De har selv valgt å endre matematikkundervisningen sin som et treårig prosjekt. Skolen hadde et utviklingsmål: "Med fokus på læring", og lærerne skulle velge seg satsingsmål som de skulle arbeide med der de tok utgangspunkt i en problemløsningsmodell. En kan si at lærerne drev aksjonslæring som jeg igjen forsket på. (Tiller 1999, Jaworski 1994 og 2000)
På skolen var det bare Anne og Geir, som jeg kaller dem, som satset på matematikk-undervisningen, da det var her de så størst behov for forandring i egen undervisning.

Hva jeg ønsket å finne ut gjennom min undersøkelse:

I hovedfagsoppgaven min hadde jeg fokus på disse tre punktene:

- Hva er lærernes perspektiv og deres fokus i sitt eget prosjekt der de ønsker å endre undervisningen fra sine erfaringer med matematikkfaget til slik de ønsker matematikkfaget skal være for sine elever?

- Hvilken plass har ulike typer oppgaver og hva er begrunnelsene for disse etter bruddet med lærebokstyrt undervisning?

- Hvilken respons får lærerne fra elevene på sin undervisning og oppgaver?

Her vil jeg særlig legge vekten på lærernes perspektiv i endringsfasen og på egen undervisning. Da punktene henger sammen vil også ulike oppgavetyper og elevenes respons berøres.

Mitt formål har blant annet vært å dokumentere hvordan noen lærere opplever å skulle prøve å etterleve læreplanen. I en tid der L97 og fagplanen i matematikk skal evalueres, kan dokumentasjon av læreres perspektiv være viktig, også med tanke på utvikling av senere planer.

Som etterutdanner og tidligere barneskolelærer har jeg sett hvor vanskelig det er å endre matematikkundervisningen, siden det å løse oppgaver fra bok har så sterke tradisjoner. Derfor var jeg nysgjerrig på hvorfor de ville gå i gang med dette, hva som skapte dilemma og hvilke muligheter en oppdager når en bestemmer seg for å endre undervisningen sin.

Lærerne Anne og Geir var godt pedagogisk skolerte og hadde også lang fartstid i barneskolen. Men etter eget utsagn hadde de et dårlig forhold til matematikkfaget. Det var et fag de så på som vanskelig, de hadde ikke tatt utdanning i faget, og matematikken de hadde hatt på lærerhøgskolen var bare et kort kurs med et innhold de opplevde som lite relevant. De så et potensiale der de selv så at de hadde minst faglig tyngde.
Jeg ble nysgjerrig på hvilke typer oppgaver de ville komme til å gi til elevene sine. Ville de bryte tradisjonene beskrevet i *Oppgavediskursen* til Mellin-Olsen (1996) og gå inn i *undersøkelseslandskapet* slik Skovsmose (1998) beskriver det, eller ville de tradisjonelle lærebokoppgavene bli brukt i en ny setting? Og hvordan ville de begrunne valgene av oppgaver?

Jeg var også nysgjerrig på hvordan elevene responderte på lærernes undervisning. Men her tok jeg ikke elevenes ståsted, jeg lyttet til den opplevelsen lærerne formidlet om hvilke signaler elevene gav på deres undervisning.

For å få innsikt i Anne og Geirs perspektiv på egen undervisning og endring av denne, intervjuet jeg dem tre ganger i løpet av et år, var observatør på planleggingsmøte og foreldremøte der de informerte om endringene, i tillegg til at jeg observerte noen matematikktimer. En viktig kilde var også lærernes egne skriftlige notater underveis i prosessen.

<u>Hva ville lærerne?</u>

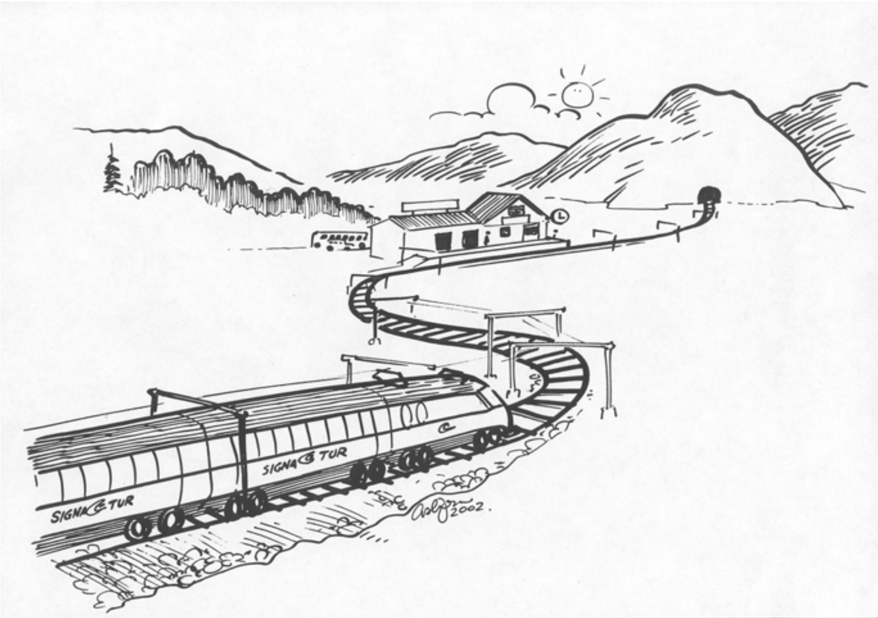
Lærerne ville endre undervisningen fordi det var noe de ikke var fornøyd med. De skrev selv ned følgende:

Hva vi ikke er fornøyd med:

- Mange elever liker ikke faget
- Noen har angst for matematikk
- Lærebokbundet
- Ikke tid til praktiske aktiviteter, da en må bli ferdig med læreboka
- Matematikktimene levde sitt eget liv, lite relevant for elevenes hverdag
- Lite knyttet til andre fag

De snakket om å være på et spor, de sa de kjørte med læreboka, det var ikke lett å hoppe av eller på. Dersom de gjorde praktiske oppgaver fikk de ikke tid til å gjøre alle oppgavene i boka. Da reagerte foreldrene og trodde de ikke hadde jobbet med emnet. De snakket om matematikkundervisningen som om de var på en togtur der de skulle nå et mål innen en viss tidsfrist og læreboka bestemte farten og sporet. Denne måten å beskrive lærebokstyrt undervisning på, er godt beskrevet i Mellin-Olsens ”Oppgavediskursen” (1996), der han tar utgangspunkt i hva lærere tenker om sin undervisning.

Læreboksporet:



Ill.: Asbjørn Tuft-Olsen

Geir: ”Så fortsatte vi i et helt annet spor i matematikkundervisningen”.... ”så der kjørte vi med læreboka.” ”Det var ikke så lett å bare hoppe av og hoppe på igjen med læreboka”

”Matematikk skal være til å ta i!”
Lærerne ønsket seg ikke bare bort fra noe, de ville noe positivt med å endre undervisningen. De hadde særlig bitt seg merke i bemerkningen i veiledningsheftet om at i småskolen skal matematikken være til å ta i. Målene de selv formulerte var:

Hva vi ønsket å få til:

- Positive holdninger til faget hos flest mulig elever
- At elevene skulle oppdage nytten ved å samarbeide
- Bygge kunnskaper gjennom egen aktivitet
- Se meningen med og praktisk nytte av det de lærer
- Utforskende og prøvende holdning til arbeidsoppgavene
- Nytte ulike måleinstrument og kalkulator

De brukte penger til utstyr som måleredskaper, ulike konkretiseringsmidler og kalkulatorer. Ellers kan en tydelig se at målsettingene deres stemmer godt med målene som står i L97, men ved å selv formulere dem, kan det være at de opplevde dem mer som sine egne mål som de selv ønsket å arbeide med fordi de så et behov for det.

Utfordringene for lærerne

Anne og Geir skrev selv en liste over utfordringene de så for å nå målene sine.

1. Lage oversikt over pensum på det aktuelle trinnet og passe på at dette blir dekket
2. Bygge opp et "handlingsrepertoar" av oppgaveformuleringer i tråd med eget læringsyn og som dekker pensum (viktigste utfordring etter egen mening)
3. Finne måter å dokumentere om elevene har lært det de skal lære
4. Passe på at elevene også kan mestre "tradisjonelle" oppgavetyper slik de gjerne vil møte senere i skolegangen.

Disse utfordringene ble skrevet tidlig i prosjektperioden deres.

Punkt 1

De brukte veiledningsheftet til L97 når de skulle planlegge undervisningen sin. De passet på at de brukte de ulike arbeidsmetodene som var beskrevet og at strekpunktene ble dekket. På mange måter gav de uttrykk for at de oppfattet endringer i arbeidsmåter som den mest vesentlige endringen i L97.

Punkt 2

Det var vanskelig å få tak i hva som var deres eget læringssyn. De er godt bevandret i pedagogikk og de kunne utrykke ulike syn i ulike sammenhenger. Men stort sett så det ut for meg at de hadde et syn som lå nært et sosialkonstruktivistisk læringssyn der dialog, samarbeid og problemløsning var viktig. Å lage gode og varierte oppgaver ut fra sitt syn på læring var noe de opplevde som en stor utfordring igjennom hele undersøkelsen min. Som Geir uttrykte det etter et år nesten uten lærebøker: *"Vi har kommet inn på et nytt spor på en måte der, utstyret vi har, og ideene vi hadde, setter begrensninger for hva vi gjør."*

Punkt 3

Å dokumentere hva elevene lærte, var noe lærerne ofte kom tilbake til. Å gjøre noe nytt der en ikke lenger kunne sjekke i elevenes bøker hva de har gjort, eller ikke gjort skapte usikkerhet. Derfor ble det viktig å prøve å finne en måte å dokumentere at elevene lærte det de "burde" ha lært.

Punkt 4

Å beherske tradisjonelle oppgaver henger på en måte sammen med punktet over. Hva skal læres? Tradisjonelle oppgaver som oppstilte oppgaver der en skulle bruke algoritmer, var viktig å beherske, mente Anne og Geir, men hvorfor var dette så viktig å kunne? Det at eleven kom til å møte denne type oppgaver i senere skolegang, var i starten et viktig argument for tradisjonelle lærebokoppgaver. En kan si at tradisjonene i skolen og andres forventninger om hva elevene skulle lære, var med på å styre innholdet i timene.

Endringer / konsekvenser av endringer for lærerne og elevene

Det er mye som skjer når en prøver å gjøre endringer. Det skjer ofte på flere nivåer. Noe skjer praktisk i klasserommet, andre endringer kan være i egen tenkning i og om faget og i elevsyn. Elevene opplever endringene på sin måte og gir respons til lærerne. Dette kan igjen gi ny tenkning som kan være kime til ny utvikling av undervisingen. For å gi en oversikt over hvordan lærerne formidlet sine perspektiv på endringene, laget jeg denne oversiktsmatrisen:

	Praktiske konsekvenser av endringer	**Matematiske/ matematikk-didaktiske konsekvenser**	**Metanivå, hvilket fagsyn utvikler en**	**Endring / konsekvens av endring for elevsyn**
For lærerne *(Slik jeg tolker deres utsagn)*	- Må tilrettelegge for ulike aktiviteter for at læring skal kunne skje. - Skaffe utstyr, tilpasse oppgaver til ulike nivåer. - Fikk mer tid til praktiske matematikk-aktiviteter enn før.	- Må sette seg inn i matematikktemaene mer aktivt enn før. - Hva betyr det som fagplanen sier vi må gjøre? - Lete etter praktiske tilknytninger til matematikkemner.	- Utvikler større helhetsforståelse i faget. - Utvikler tenkning på hva som skal måles/vurderes i faget da tradisjonelle oppgaver ikke gir svar på det de ønsker å vite.	- Lært å lytte mer til eleven. - Elevenes løsninger har verdi i seg selv. - Elevene forstår gjerne bedre hverandres forklaringer enn lærernes.
For elevene (Her framstilt slik lærerne utrykker endringene og slik jeg observerte)	- Elevene må gjøre både praktiske aktiviteter og "teoretiske" oppgaver. - Må samarbeide med andre om materiell og i problem-løsningsoppgaver.	- Matematikk knyttet mer til "her og nå"-situasjoner der en må kommunisere forståelse. - Regne mer med tall som de selv finner gjennom måling. - Ulike svar på samme oppgave gir mening. - Drilling av ferdigheter gjøres gjennom spill.	- Todeling av matematikkfaget: "stasjon" og "matematikk", der "stasjon" er det mest lystbetonte for de fleste. - Matematikk et fag med flere framgangsmåter og ulik grad av nøyaktighet. Ikke bare ett svar.	- Må lære å lytte til og ta imot innspill fra hverandre. - Elevene lærer samarbeid gjennom matematikk.

Skjemaet er ikke fullstendig, og innholdet i de ulike cellene kan henge sterkt sammen, men det gir likevel en oversikt som hjelper en til å forstå kompleksiteten.

Praktiske endringer / konsekvenser av endringer

Anne og Geir fikk mer arbeid med å legge praktisk til rette nå enn før. De måtte skaffe utstyr som de trengte og de laget utstyr. Mye av undervisningen ble organisert i stasjons-undervisning eller arbeidsprogram. Lærerne prøvde å knytte matematikk til andre fag eller temaer de arbeidet med. En stasjonsdag kunne inneholde både praktiske oppgaver, utforsking, spill og regneoppgaver på ark eller i bok. Elevene ble stadig oppmuntret til å skriftliggjøre resultatene på sin måte.
I de tverrfaglige temaene ble matematikk brukt som redskap men også til utforsking og innlæring. I starten var de redde for at matematikken kom til å gå ut over de andre fagene. De så at elevene trengte mer tid når de skulle arbeide praktisk. I slutten sa de at de hadde fått tid. Når læreboka ikke styrte undervisningen fikk de tid til praktiske aktiviteter.

Matematiske/matematikkdidaktiske konsekvenser

Lærerne fikk et mye mer aktivt forhold til faget enn det de hadde tidligere. De måtte tolke læreplanen. I starten opplevde de dette som vanskelig, da de mente den var stikkordspreget. Etter hvert fikk de trening og syntes det ikke var så vanskelig å forholde seg til planen. Der de

var usikre på hva læreplanforfatterne mente, gikk de til et par læreverk for å finne ut hvordan andre tolket planen og ikke minst hvor langt en skulle gå i de enkelte emnene. Det jeg så, var at enkelte punkt i læreplanen noen ganger er veldig innholdsmettet slik at det blir vanskelig å oppfatte hva som er det viktige poenget i strekpunktet. En leser gjerne sin forforståelse inn i planen og står dermed i fare for å ikke se behovet for å undersøke nærmere.
Anne og Geir sier de slet noe med å finne praktiske tilknytninger, særlig til øving på ”oppstilte” oppgaver. Kanskje er det ikke så mange forbilder i lærebøkene for småskoletrinnet til praktiske tilnærminger til vanlige regneoppgaver, i hvert fall ikke som hører til det ”virkelige” liv der regningen har mål og mening utover å øve seg i å regne.

Lærerne laget de fleste oppgavene selv. Mange av ideene kunne komme fra lærebøker, men de knyttet teksten til klasserommet, uteskole eller aktiviteter. I tredje klasse var det få elever som sleit med å forstå hva som stod i oppgavene, selv om disse kunne inneholde mer tekst enn dem som står i lærebøkene. Selv mente Anne og Geir at oppgavene var skrevet med et språk elevene forstod, oppgavene var knyttet til elevenes hverdag og dessuten gjerne knyttet til utstyr som elevene gjerne skulle gjøre noe praktisk med. Oppgavene ble på en måte et felleseie i klasserommet.

Metanivå

Lærerne var i starten opptatt av at det de gjorde var annerledes, og så det som sitt ansvar at elevene fikk trening i tradisjonelle oppgaver i tillegg til de praktiske oppgavene og spillene. En kan nærmest si at matematikken ble todelt. Lærerne var redd for at elevene ikke skulle få nok trening og automatisering siden de arbeidet så praktisk, selv om de drev med spill der elevene fikk masse øving i addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og plassverdisystemet. På slutten virket det som tradisjonelle oppgaver og mer praktiske oppgaver ble sett mer som komplementære, kunnskapene oppgavene kunne gi, utfylte hverandre. Det kan hende lærernes mer helhetlige syn på matematikk ble framskyndet av elevenes klare todeling av faget i det de kalte for ”stasjon” og ”matematikk”. Stasjon var for elevene de praktiske oppgavene og spillene. Matematikk var regnestykker på ark eller i lærebok. Denne delingen gjorde elevene selv om også de praktiske oppgavene og mange av spillene ble skriftliggjort av elevene. Deres forforståelse av hva matematikk er og forventninger til hva som skal læres i faget, har nok betydning for denne todelingen (Fosse 1996). Men en kan heller ikke se bort fra at forståelsen lærerne gav utrykk for i starten, der de også todelte faget mer eller mindre bevisst i tradisjonell matematikk (som også måtte gjøres) og den praktiske matematikken, hadde betydning for elevenes holdning. Likevel mente lærerne at elevene visste at begge deler var matematikk, og at de hadde utviklet et rikere syn på matematikk enn det lærerne var vant til at elevene hadde.

Elevene arbeidet med avrunding og overslagsregning med den største selvfølge. Fordi mange av oppgavene var laget slik at elevene selv måtte finne tallene de skulle regne med, ble tallene tilpasset slik at de ble lette nok til at de selv klarte å løse problemene. Mens jeg tidligere har erfaring med at elever ikke vil ”regne feil” når vi ønsker de skal lære avrunding og overslagsregning, ble de i denne klassen så vant til ulike svar og å regne med unøyaktige tall at de ikke alltid så når det i matematikken og i praktiske situasjoner var viktig å være rimelig nøyaktig. De kunne gjerne forstå ”det dobbelte” og ”halvparten” av noe som nøyaktig i en kontekst, men når de skulle vurdere i en målekontekst kunne svaret bli at det var det dobbelte dersom den ene gjenstanden bare var mye større enn den andre. Samtidig fikk elevene gjennom måling og avrundinger/overslag en positiv erfaring med at deres løsning kunne være bra selv om de ikke hadde samme svar i hele klassen. Etter lærerens mening utviklet elevene et mer positivt syn på matematikk og tro på egen evne som problemløsere gjennom den praktiske tilnærmingen.

Elevsyn

Når lærerne skulle endre arbeidsmåte og få elevene til å samarbeide og snakke matematikk, ble det viktig å lytte til elevene. Anne og Geir sier de fikk mer fokus på elevenes forklaringer og så at disse hadde stor verdi. Elevene tenkte ofte annerledes enn dem selv og de så at elevene ofte forstod hverandres forklaring bedre enn deres forklaring. De fikk større tro på eleven og elevens muligheter til selv å komme fram til svaret gjennom prosjektet sitt. Samtidig uttrykte de en konflikt: Når skal eleven få styre, når må vi som lærere ta styringen, hvor lang tid skal elevene kjempe med en oppgave når en som lærer vil at elevene skal innom alle stasjonene og gjøre mest mulig på stasjonen?

Samarbeid ble en utfordring å få til for både lærere og elever. Hvor viktig det var å samarbeide om oppgavene, ble vurdert ulikt av lærere og elever. Noen ganger arbeidet elevene parallelt. De så ikke alltid behov for samarbeid. Anne og Geir uttrykte at å lære elevene til å ta imot og gi i en samarbeidssituasjon i matematikk, kunne føre til læring både i matematikk og sosiale ferdigheter. Lærerne sa at de ønsket å lære elevene samarbeid igjennom matematikkaktiviteter i stedet for å ha egne timer med samarbeidslæring.

Kontroll over elevenes læring?

Et av momentene som lærerne stadig kom inn på var hvordan en skulle kontrollere elevenes læring når en arbeidet praktisk med matematikken. Spørsmål som ble diskutert og tatt fram var:

- Hvordan kontrollere om elevene lærer det de skal lære?
- Hva skal læres?
- Hva måler vi?
- Hva kan, og skal måles?
- Hva er viktig å lære og hvorfor?
- Hvor mye skal elevene ha kontroll over læringsmål og når skal de få det?

Lærerne nevner i starten at det var lettere i en lærebokstyrt undervisning å ha kontroll over hva eleven hadde lært, samtidig som Anne problematiserer det, en kan i regneboka se at der er feil og der er feil, men en ser ikke hva eleven har tenkt. Interessant nok fokuserer hun på feilene når det er snakk om å kontrollere læringsutbytte i lærebokstyrt undervisning.

I starten var lærerne redde for at elevene ikke skulle kunne regne oppstilte tradisjonelle oppgaver i bok. De håpet at elevene skulle lære det gjennom aktivitetene de gjorde i timene deres, men for å sikre seg gav de dem tradisjonelle oppgaver for å teste om elevene hadde lært det de burde ha lært. Men det var en uro, de mente at praktisk matematikk med mye måling var nyttig for dagliglivet, men var ikke sikker på om det var nyttig for senere skole-matematikk som elevene ville møte. Det ble en diskusjon som dreide seg om hva som var viktig å lære og hvorfor. Etter et år var lærerne helt klare: Å bruke tradisjonelle oppgaver gav ikke svar på om elevene hadde lært det lærerne hadde satt seg som mål for matematikk-undervisningen sin. Det gav svar på hvilke regneferdigheter eleven hadde oppnådd, men ikke på hvor god han/hun var til å samarbeide om og kommunisere matematikk. Heller ikke gav det svar på hvor flink eleven var til å velge praktiske måleredskap eller anvende

matematikken i praktiske sammenhenger. Men hvordan skulle dette måles? Kan det måles? Det er en form for systematisk måling jeg tror de er på jakt etter for å bli trygg på at det de driver med fører fram, slik at de kan dokumentere overfor elevene, foreldrene og seg selv hva eleven har lært.
De kommer med en god opplevelse der de fikk se noe av det de var ute etter. Elevene deres (nå 4. klassinger) var de eldste i en aldersblandet gruppe som skulle ha praktisk matematikk. Da ble disse gruppeledere og det ble viktig for dem å beherske stoffet. Samtidig var det også viktig for dem at de andre på gruppen skulle få prøve ut og gjøre erfaringer selv. Denne dagen fikk lærerne observert mye av det de ønsket å måle av kompetanser hos elevene sine. Men fremdeles uttrykker de at denne systematiske dokumentasjon på læring av ulike kompetanser er en uløst utfordring.

Et bredere spor og flere valg?

I hvor stor grad elevene skal ha kontroll over læringsmålene var også et spørsmål som ble aktuelt. Dersom lærerne hadde et klart læringsmål for en oppgave eller en time, måtte elevene følge deres vei. Læreplanen ble oppfattet som ganske innholdsmettet med alle strekpunktene som skulle arbeides med, slik at det ble begrenset hvor mye elevene kunne slippes løs på egne problemstillinger som kunne dukke opp underveis. Men noen ganger kunne lærerne stille elevene veldig fritt til å velge hvordan oppgaven skulle løses eller hvilket problem de ville arbeide med. For det meste var altså oppgavene nokså styrt, men det var en åpning innimellom for at elevene kunne bevege seg inn i undersøkelseslandskapet (Skovsmose 1998).

Ill.: Asbjørn Tuft-Olsen

Geir: "Vi har havnet på et nytt spor på en måte." " Ikke et landskap, men et bredere spor"

Illustrasjonen viser at Askeladden kan velge mange veier til målet, ikke bare ett spor. Hvilken vei han velger vil være avgjørende for erfaringene han får. Kanskje kan han lære samme matematikkferdigheter i læreboksporet som i de ulike veivalgene, men forståelsen for hva matematikk er og hvordan den kan anvendes, vil sannsynligvis bli ulik i de to "bildene" jeg har brukt.

Etter samtalene jeg hadde med Anne og Geir etter ett og et halvt år med "læreplanstyrt" undervisning, syntes jeg det trådte fram et bilde av en biltur der lærerne er sjåfører i bilen, elevene sitter i baksetet og kan, eller får innimellom, ønske seg stikkveier, men lærerne bestemmer kursen ut fra kartet der målene er tegnet inn. Kartet kan i dette tilfelle være matematikkplanen, og læreren ser de ulike veiene en kan kjøre for å komme fram til målet og velger vei ut fra hva han/hun ser som hensiktsmessig. Det er ikke sikkert dette bildet stemmer helt med deres tankegang, men de uttrykker selv at de opplever det har skjedd en dreining fra en lærerrolle som er styrt av lærebøkene til en mer autonom lærerrolle der de selv bestemmer mer ut fra fagplan og emne, hvilket læremiddel de har behov for og hvilke arbeidsmåter de skal bruke.

Veien videre?

Det har vært spennende å gå inn i et forskningssamarbeid med lærerne. Samarbeidet har gitt meg flere spørsmål enn svar. Vi ønsker å fortsette med samarbeid, men nå i et felles utviklingsarbeid der vi kommer inn med våre ulike perspektiv. Da ønsker vi blant annet å arbeide med dokumentasjon av elevenes læring i et konkret, tverrfaglig prosjekt med faglig fokus på arbeidstegning, modellbygging og målestokk i 6. klasse.Lærerne ønsker å bruke ombygging og påbygging av skolen til et matematikkprosjekt, noe som for elevene blir både nært, aktuelt og tverrfaglig.

Litteratur:

Fosse, T. (1996). Hva venter de seg – av skolens matematikk? En studie av 6-åringers sosialisering til matematikkundervisningen. I M. J. Høines. (red.) De små teller også (s. 137–143). Bergen: Caspar.

Jaworski, B. (1994). Investigating Mathematics Teaching, A Constructivist Enquiry. London: The Falmer Press.

Jaworski, B. (2000). The student-teacher-educator-researcer in the mathematics classroom: Co-learning partnerships in mathematics teaching and development. Paper framlagt på MADIF 2, 26. – 27. januar 2000, Gøteborg. (Utrykket).

Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet (KUF) (1996). Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen. (Forkortes L97). Oslo: Norsk læremiddelsenter.

Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet (KUF) (1998). Veiledning L97 (L97S) Matematikk. Oslo: Norsk læremiddelsenter.

Mellin-Olsen, S. (1996). Oppgavediskursen. Tangenten **7** (2), 9 – 15.

Rangnes, T. E. (2002). Hva skjer når lærere vil endre matematikkundervisningen? Fra lærebokstyrt til læreplanstyrt undervising? En casestudie av to samarbeidende lærere. Hovedfagsoppgave ved HiA.

Skovsmose, O. (1998). Undersøgelseslandskaber. I T. Dalvang & V. Rohde (red.) Matematikk for alle. Rapport fra Lamis 1. sommerkurs i Trondheim 6. – 7. august 1998 (s. 24 – 37). Bergen: Landslaget for matematikk i skolen.

Tiller, T. (1999). Aksjonslæring. Forskende partnerskap i skolen. Kristiansand: HøyskoleForlaget.

Ole Skovsmose: Udforskning af matematik i skolen

Ole Skovsmose, f. 1944 (e-mail: osk@dcn.auc.dk) er professor i matematikkens didaktik ved Dansk Center for Naturvidenskabsdidaktik, Aalborg Universitet. Han er formand for bestyrelsen af Center for Forskning i Matematiklæring, og han arbejder specielt med emner relateret til kritisk matematikundervisning. Sammen med Helle Alrø har han skrevet 'Dialogue and Learning in Mathematics Education: Intention, Reflection, Critique', der er under udgivelse fra Kluwer Academic Publishers.

Kritisk forskning - pædagogisk udforskning

Ole Skovsmose

I 1993 var jeg på vej til Sydafrika for første gang. Den akademiske boykot var netop blevet ophævet. Der skulle være frie valg i Sydafrika, hvor størstedelen af befolkningen aldrig havde prøvet at afgive deres stemme. Apartheidstyret var under afvikling, og et nyt demokratisk Sydafrika var på vej. Jeg skulle deltage i konferencen 'The Political Dimension of Mathematics Education', og samtidig var jeg inviteret til at holde forskellige foredrag. Jeg havde forberedt mig ganske godt til turen, men jeg var naturligvis meget spændt på, om det jeg havde planlagt at sige, nu også ville forekomme relevant i en situation, der var meget anderledes end den jeg kendte til.

Jeg blev hentet i lufthavnen og kørt til et af de mange nydelige hoteller, der ligger langs Durbans strandpromenade med udsigt over det Indiske Ocean. På en helt uforklarlig måde lykkedes det mig smække bildøren på min finger. Det gjorde ondt, og blodet løb fra fingeren. Jeg fik den dog pakket lidt til side, mens vi sad og snakkede i hotellets lobby. Jeg havde et ekstra glas isvand til rådighed, så jeg kunne køle fingeren. Mine sydafrikanske værter spurgte, om ikke de skulle bringe mig til en læge. Jeg mente ikke det var nødvendigt, men det viste sig ikke at være så vanskeligt at overtale mig.

Turen gik langs støvede veje ud til den 'township' i udkanten af Durban, hvor lægens konsultation befandt sig. Lægen var inder. I apartheid-Sydafrika havde indere mulighed for at uddanne sig til læger, fordi der var brug for læger der kunne 'røre' ved sorte. En indisk læge kunne naturligvis ikke røre ved hvide, og helt utænkeligt ville det være, at en hvid læge skulle røre ved en sort.[1]

Lægen så på min finger og spurgte om han skulle rykke neglen af. Jeg husker tydeligt spørgsmålet. Det syntes jeg nu ikke, at han behøvede at have ulejlighed med, så min finger blev pakket ind, og jeg kom tilbage til hotelværelset. Den aften ændrede jeg alle mine foredragsoplæg. Den tolkning af kritisk pædagogik, som jeg have med mig fra Danmark, var

1 Således var der hvide hospitaler og (meget færre) sorte hospitaler. Der var hvide ambulancer, og sorte ambulancer. Ved en trafikulykke ville den hvide ambulance altid være den første der ankom, og denne kunne kun tage de hvide, der var kommet til skade, med sig. Uanset hvilken kritisk tilstand en sort, der var involveret i uheldet, måtte befinde sig i, måtte vedkommende afvente ankomsten af den sorte ambulance. Og dette kunne tage lang tid, for der var ikke mange sorte ambulancer[0].

kommet til at tage sig ud som en 'kritik' der har velfærdsstaten som forudsætning. De dramatiske uligheder og dybe uretfærdigheder, som på den brutaleste måde opretholdes verden over, har ikke været kernen i den tolkning af kritisk pædagogik, som jeg havde været vant til at tænke ud fra.

Mit møde med Sydafrika betød, at jeg begyndte at tænke over pædagogiske problemstillinger på en ny måde. Jeg oplevede på en direkte måde nødvendigheden af socio-politiske overvejelser, også når man diskuterer specifikke indholdsmæssige spørgsmål. Og jeg oplevede nødvendigheden af at sammentænke forskning og forandring. Noget simplificeret kan vi skelne mellem min forståelse af kritisk pædagogik før jeg fik fingeren i klemme i bildøren, og så min forståelse efter at jeg fik fingeren ud af klemmen.

'Education after Apartheid'

Kritisk pædagogik har rødder i europæisk tradition, med en kraftig inspiration fra kritisk teori. En af de artikler, der metaforisk indrammer kritisk pædagogik, er 'Education after Auschwitz', skrevet af Theodor W. Adorno.[2] Jeg har aldrig syntes specielt godt om artiklen i sin helhed, men den starter med klart at understrege, at enhver pædagogik må fordre, at et nyt Auschwitz ikke skal opstå igen. Denne fordring kan forstås direkte og ordret, og Adorno mener klart, at pædagogik må dæmme op for brutalitet og autoritære tankegange. Men titlen på artiklen kan også forstås metaforisk, og som en generel påmindelse om pædagogikkens samfundsmæssige ansvar. En pædagogik må optræde som en del af en demokratiseringsproces. Pædagogik kan ikke stille sig op som en parentes i samfundsudviklingen, heller ikke når det gælder matematikundervisningen
I et af mine første oplæg i Sydafrika refererede jeg til 'Education after Auschwitz'. Samtidig understregende jeg (og det har jeg understreget lige siden), at pædagogiske ideer ikke kan 'importeres' fra en europæisk kontekst til Sydafrika. Jeg brugte metaforen 'Education after Apartheid' for at understrege, at situationen i Sydafrika sætter nye fordringer til pædagogikken.

Et andet vigtigt element i en nyudvikling af kritisk pædagogik, finder man i Brasilien, hvor det etnomatematiske perspektiv på mange måder udgør en parallel til Paulo Freires arbejde med 'literacy'.[3] Etnomatematikken har været med til at dokumentere, hvilken omfattende matematisk indsigt, der er indlejret i kulturelle traditioner. Den har været med til at dæmme op for den kulturimperialisme, der kan ledsage en traditionel matematikundervisning. Det er dog klart, at etnomatematik ikke uproblematisk kan importeres til Sydafrika, der til overmål har lidt under misbrugen af 'etno-argumenter'. (Det skal naturligvis fremhæves at 'etno', når det indgår i begrebet 'etnomatematik', ikke refererer til nogen form for etnicitet, men udelukkende til 'kultur'. Dette er fremhævet mange gange af Ubiratan D'Ambrosio, der har været med til at formulere det etnomatematiske forskningsprogram.)

Hele det kritiske projekt inden for pædagogikken er under kraftig omfortolkning?? Det begreb om 'kritik', der indgår i udtrykket 'kritisk pædagogik' og 'kritisk matematikundervisning' må redefineres. En drivkraft i denne udvikling er den sydafrikanske udfordring til den etnomatematiske position og den europæiske tolkning af kritisk pædagogik.[4]

2 Se kapitlet 'Erziehung nach Auschwitz' i Adorno (1971).

3 Se f.eks. Gerdes (1996), Knijnik (1998) og Powell og Frankenstein (red.) (1997); samt Freire (1972, 1974). Se også Vithal og Skovsmose (1997).

4 Det bliver afgørende at pædagogiske problemstillinger diskuteres i en politisk og samfundsmæssige kontekst. En undersøgelse af matematikundervisning og demokrati bliver essentiel. Se eksempelvis Skovsmose (1998), Skovsmose og Valero (2001, 2002a, 2002b), Valero (1999) og Vithal (1999).

Udfordring til pædagogisk forskning

Min rejse til Durban førte til etablering af Sydafrika-projektet, der omfattede et samarbejde mellem institutioner i Sydafrika og Aalborg Universitet med henblik på at etablere nogle Ph.D forløb i matematikkens didaktik.[5] Sydafrika-projektet har betydet meget for min forståelse af, hvad kritisk pædagogik kan betyde. Det spørgsmål jeg specielt vil diskutere her, handler om hvad forskning i pædagogiske problemstillinger kan betyde ud fra et kritisk perspektiv

Der har været gennemført megen pædagogiske forskning, også megen matematikdidaktisk forskning, i Sydafrika. Men denne forskning har i langt de fleste tilfælde fundet sted ved apartheidsystemets 'hvide' universiteter. Denne forskning kunne optræde helt parallel til eksempelvis amerikansk eller europæisk klasserumsforskning, hvor elevers interaktion i eksperimenterende læringssituationer undersøges, eksempelvis ud fra en radikal konstruktivisme. Det tages som givet, at man befinder sig i en 'hvid' skole. I denne kontekstblinde forskning tages apartheidsystemet som en forudsætning, der ikke engang behøver at blive omtalt, og hvor de hvide elevers favorable undervisningsbetingelser tages som en given ting. En anden form for apartheid-tilpasset forskning er 'white research in black education'. Her kan bl.a. undersøges, hvorfor det sorte barn har vanskeligheder ved eksempelvis geometriske begreber, og denne forskning kan så føre frem til en 'forståelse af' hvad der blev opfattet som det sorte barns særlige handicap i forhold til tilegnelse af matematik.[6]

De sydafrikanske Ph.D studerende, der var tilknyttet Sydafrika-projektet, ønskede naturligvis ikke at arbejde ud fra præmisser, der på den ene eller den anden måde var sat af apartheidstyret. De ønskede en didaktisk forskning uden politisk blindhed som øverste præmis, men som direkte fokuserede på den aktuelle situation i Sydafrika. Man kunne således ikke arbejde videre fra den apartheid-afstemte forskning, der allerede fandtes i Sydafrika.

Der var naturligvis mange spørgsmål, der skulle overvejes i forbindelse med Sydafrika-projektet, men lad mig fremhæve to principielle ting. For der *første* ønskede de sydafrikanske Ph.D studerende at gennemføre et stykke forskningsarbejde, der levede op til alle normale standarder for god pædagogiske forskning.[7] Dette krav var et uomgængeligt 'must'. Man ønskede på ingen måde optræde som del af et velment hjælpeprogram. Man ønskede at Ph.D studierne skulle leve op til sædvanlige krav om forskningsmæssig lødighed. Der kunne ikke blive tale om, at de Ph.D studier, der startede med en kritik af apartheidstyret, kunne blive affærdiget som videnskabeligt underlødige. Men der er mange muligheder for, at en forskning kan fremstå som mangelfuld. Data kan blive 'disrupted', eksempelvis ved at skoler lukkes, at lærere udebliver, at elever forsvinder fra skolen, osv. Ifølge mange standarder for god forskning indgår som en forudsætning, at data indsamles under 'ordnede forhold'. Men selve denne 'disruption' synes netop at være en del af den virkelighed som Ph.D studierne handlede om. Skulle man prøve at undgå en 'disruption' af data, eller skulle man snarere søge situationer hvor en sådan 'disruption' kunne finde sted?[8]

Den *anden* udfordring var, at man gerne ville undersøge nye muligheder i undervisningen, eksempelvis det multikulturelle klasseværelse. Det sydafrikanske skolesystem er baseret på, at

5 Sydafrika projektet er netop afsluttet, idet Herbert Khuzwayo, Anandhavelli Naidoo, Nomsa Dlamini og Mathume Bopape har gennemført deres Ph.D-studier og Renuka Vithal skevet en doktordisputats.

6 Khuzwayo (2000) har gennemført en kritisk analyse af 'white research in black education'.

7 Se eksempelvis Brown og Dowling (1998), Cohn og Manion (1994), Guba og Lincoln (1994), Hitchcock og Hughes (1995), LeCompte, Milroy og Preissle (red.) (1992).

8 Se Vithal (1998) og Valero og Vithal (1999).

skoler og undervisning er opdelt efter etniske tilhørsforhold. Således er der sorte, indiske, farvede og hvide skoler. Hvilken skole man kunne gå i, var ene og alene defineret ud fra den etniske klassifikation, som alle i Sydafrika var underkastet. Ens etniske klassifikation var således påstemplet i ens pas. Klassifikationen gav visse rettigheder eller mangel på samme. Eksempelvis kunne sorte ikke eje jord, fordi ejendomsretten ikke gjaldt sorte. Indere kunne eje jord, dog kun inden for visse klart afgrænsede zoner. Selv om apartheiden blev mere og mere svækket frem mod 1994, så var der ikke mange multikulturelle klasseværelser at undersøge. Det betød, at en dataindsamling let ville komme til at angå situationer, der ikke repræsenterede ens forhåbninger for fremtiden. Hvad ville dette have af konsekvenser, hvis man gerne ville gennemføre et studium, der levede op til gode og solide normer for forskning og som samtidigt var fremadrettet?

Dette problem var forbundet med, hvad man kunne kalde apartheidsystemets efterladenskaber, som Mathume Bopape (2002) refererer til som 'the sins of apartheid'. Efter 1994 fik Sydafrika en demokratisk forfatning, der er mønsterværdig. Men selv om de lovgivningsmæssige rammer er ændret (og eksempelvis almindelig valgret indført), så har apartheidstyret efterladt en række grufulde spor, eksempelvis i form af en byplanlægning, der materialiserer apartheiden. Således er Durban organiseret med en kerne af 'white neighbourhoods'. Disse kunne naturligvis ikke grænse op til 'black townships'. Derfor indskød man 'Indian bufferzones' mellem hvide og sorte bebyggelser. Dette betød, og det betyder stadig, at sorte skal rejse langt for at komme på arbejde. En demokratisering af Sydafrika betyder ikke, at de sorte townships flyttes rent fysisk. Apartheidens efterladenskaber er overalt, også i skolevæsenet.

Ideen med kritisk forskning

Hvad vil det vil sige videnskabeligt at undersøge noget som *ikke* findes? Ser man på sædvanlige beskrivelser af forskning og af forskningspraksis, så understreges det igen og igen, at man må undersøge det der findes og det der foreligger. Forskning må bygge på observation, og naturligvis på observation af det der findes

Denne fordring til videnskabelig lødighed kan naturligvis henvises til det positivistiske ideal, som fremhæver at forskning bygger på observationer, og at enhver teoretisering må etableres eller efterprøves på grundlag af sådanne observationer. At tage udgangspunkt i det positivt givne, er således definitorisk for positivismen. Ideen at videnskabelighed bygger på iagttagelser af det der foreligger, er imidlertid langt bredere accepteret end det positivistiske ideal som sådan. Ideen er således også karakteristisk for hele den 'naturalistiske' tilgang i videnskaben, også selv om denne tilgang kan stilles op i et modsætningsforhold til positivismen.[9]

9 Se Lincoln og Guba (1985).

Den mulighed vi kom til at diskutere i Sydafrika-projektet var, om forskning, i stedet for helt og holdent at koncentrere sig om det der findes, også kan bygges på analyser af det der ikke findes. Kan man forestille sig, at forskning retter sig mod noget ikke-eksisterende? Naturligvis kan man fantasere og spekulere over noget som ikke findes, men kan man undersøge noget ikke-eksisterende på en sådan måde, at man fastholder en videnskabelig lødighed i dette arbejde? Vi gav os til at spekulere over disse spørgsmål ud fra et tankeeksperiment, som optog os meget.

Et tankeeksperiment

Vi forestiller os at vi er indbyggere i et land med ganske anderledes traditioner. En karakteristisk ting i dette land er, at mænd vasker op. Sådan har det altid været. Der er faktisk ingen der bemærket dette, da det er en helt naturlig ting, at mænd vasker op.

I dette land er der imidlertid en filosof, og han (vi forestiller os at det er en mand) formulerer sætningen: 'Kvinder kan hjælpe mænd i køkkenet med at vaske op.' Ja, filosoffen tænker videre, og når frem til sætningen: 'Mænd og kvinder kan på lige vilkår, hjælpe hinanden med at vaske op i køkkenet.' Grammatisk har det altid været muligt at formulere sådanne ordsammenstillinger i landets sprog, men det er første gang ordene sættes sammen på denne måde. Og filosoffen har formuleret en mulighed, som ikke har været formuleret tidligere.

Det er ikke så sært, at han bliver glad, men også lidt bekymret. Han vil gerne undersøge, om det nu også kan lade sig gøre, at mænd og kvinder kan arbejde sammen på lige vilkår om at vaske op. Den nye ordsammenstilling åbner for nye forestillinger, men det er ikke sikkert, at disse forestillinger kan realiseres i virkelighedens verden. Der kan jo være mange grunde til, at en forestilling må forblive en fantasi, der er umulig at realisere. Filosoffen kunne tænke sig at undersøge, hvad der måtte ske, hvis kvinder og mænd faktisk arbejder sammen om opvasken. Men hvorfra skal han hente empiriske data, for der findes ingen eksempler på et sådant samarbejde? Der findes slet og ret ingen data, der kan belyse hvad der sker i et sådant samarbejde.

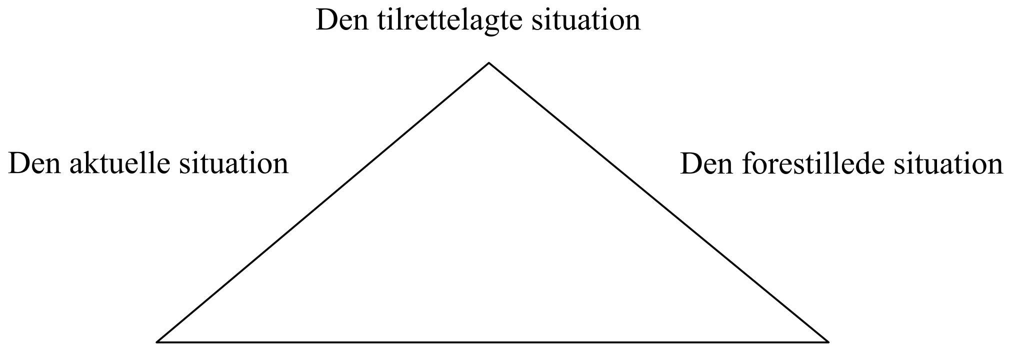
Filosoffen nævner sin forestilling til forskellige personer, både kvinder og mænd. Den mulighed han præsenterer bliver modtaget med stor forundring. Der er ingen der har tænkt denne tanke før. Umiddelbart mødes han med en hovedrysten, for det kan nu engang ikke kan lade sig gøre. Bl.a. fordi kvinder ikke ønsker at begive sig ud i køkkenet. Det er jo et velkendt fænomen, at alle der vasker op får en kraftig skægvækst.

Filosoffen insisterer imidlertid på at indsamle nogle data, der kunne belyse den situation at kvinder hjælper mænd i køkkenet med opvasken. Filosoffen prøver at overtale nogle kvinder til at bevæge sig ud i køkkenet, hvilket bliver afvist. Filosoffen udtænker imidlertid nye strategier. Således designer han nogle meget farverige og moderigtige opvaskehandsker, og disse handsker, det må kvinderne medgive ham, er meget smarte af have på. Samtidig sikrer filosoffen, at der er udskænkning af champagne til alle i køkkenet, og med sådanne virkemidler lykkes det ham virkelig af få nogle kvinder ud i køkkenet. Efter at der er drukket en del champagne og humøret er højt, bliver der faktisk også vasket op i fællesskab.

Filosoffen kan begynde at indsamle data.

Situationer i kritisk forskning

Dette eksempel diskuterede vi i detaljer, og der er flere observationer vi kan knytte til eksemplet. Analytisk set kan der skelnes mellem forskellige situationer. Som det fremgår at Figur 1, kan vi tale om den aktuelle situation, den tilrettelagte situation og den forestillede situation.



Figur 1. Tre situationer, som kritisk forskning må interessere sig for.

Den *aktuelle situation* henviser til tingene således som de oprindeligt foreligger. I eksemplet handler det om den situation som alle kender: mændene vasker op, mens kvinderne diskuterer politik eller fordriver tiden på anden måde. (I artiklen jeg har skrevet sammen med Marcelo Borba om disse overvejelser, taler vi om 'the current situation", mens der i andre fremstillinger refereres til 'the actual situation'. Det principielle knytter sig imidlertid ikke til valg af en bestemt terminologi.) Man kan tale om den *tilrettelagte situation* (eller 'the arranged situation'). Det er den hvor kvinderne overtales til at komme ud i køkkenet, og hvor de faktisk prøver at vaske op sammen med mændene, dog i løftet stemning. Den tilrettelagte situation kan indeholde elementer, der er irrelevante i forhold til det man gerne vil undersøge. Man kan endelig tale om den *forestillede situation* ('the imagined situation'). Det er den som filosoffen formulerer som en mulighed. Den forestillede situation er beskrevet i ord. Den er kun tilgængelig som en tanke.[10]

Der er naturligvis tale om en analytisk skelnen mellem disse tre situationer, selv om de dog i tankeeksperimentet kan adskilles forholdsvis skarpt. Vi kender til og kan gøre iagttagelser over the aktuelle situation. Det er imidlertid ikke denne situation der har vores interesse, ud over at være udgangspunkt for en forestilling om hvad der kunne være anderledes. Den forestillede situation har interessante kvaliteter, men den er kun tilgængelig som en forestilling, og dens nøjere kvaliteter vil gemme sig bag begrebernes tågeslør.

Her er det interessant af koble forbindelse tilbage til det begreb om kritik, som har været præsenteret af Kritisk Teori. Her er det fremhævet, at den kritiske tanke opstår, når begreber og virkelighed ikke 'passer sammen'. Vi kan beskrive en situation med begreber der passer til situationen, og det er hvad Kritisk Teori fremhæver som idealet for positivismen. (En positivstisk analyse af fænomenet 'at vaske op' i det pågældende land, må netop basere sig på en detaljeret beskrivelse af det faktum at mænd vasker op. En positivstisk forklaring på dette fænomen, må bestå i en forudsigelse af at næste gang der vaskes op, så er det mændene der gør det. I det positivistiske paradigme sidestilles netop forklaring og forudsigelse.[11]) Men Kritisk Teori fremhæver at den 'positive' beskrivelse er problematisk, i og med at den bliver

10 Se Skovsmose og Borba (i trykken), Vithal (2000) og Bopape (2002).

11 Se Ayer (red.) (1959) og Hempel (1965).

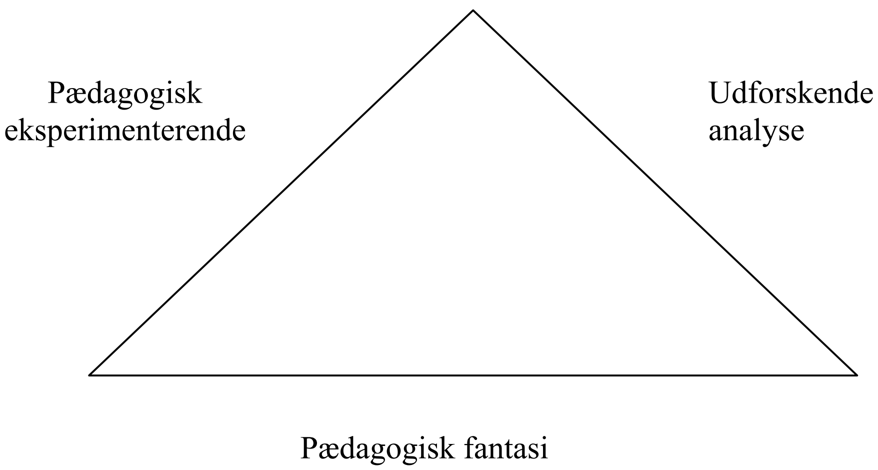
konserverende og netop fantasiløs. Den kritiske tanke opstår, når der etableres en spænding mellem begreber og virkelighed. Man kan se dette som en spænding mellem den aktuelle situation og den forestillede situation.

Den tilrettelagte situation er præget af den aktuelle situation. Det er en situation, hvor virkelighedens begrænsninger er markerede. Således er introduktionen af de moderigtige opvaskehandsker og champagnen ikke en del af den forestillede situation, hvor det ligeværdige samarbejde er formuleret som en mulighed. Men den særlige tilrettelæggelse er nødvendig for af overvinde nogle af realiteternes begrænsninger, og for at nå frem til en situation der gør det muligt at se aspekter af den forestillede situation. Gennem den tilrettelagte situation kan man afvige så meget fra den aktuelle situation, at man kan ane mere konkrete træk ved den forestillede situation. De data der indsamles i den tilrettelagte situation kan være med til at afsløre nye aspekter ved den forestillede situation.

Den første konklusion vi kan drage på grundlag af tankeeksperimentet er, at i kritisk forskning optræder tre situationer af særlig relevans, nemlig den aktuelle, den tilrettelagte og den forestillede situation. Er man interesseret i at undersøge pædagogiske muligheder, så kan forskningen ikke klistre sig til observationer af det der foreligger. Man må se på både det der foreligger, det man kunne håbe på, og de eksperimentelle muligheder, der er tilgængelige. At være opmærksom på disse tre situationer er efter min mening karakteristisk for kritisk forskning.

Processer i kritisk forskning

Hjørnerne i trekanten i Figur 1 repræsenterer de situationer som kritisk forskning interesserer sig for. Men i stedet for at koncentrere sig om disse situationer, kan vi se på de processer, der forbinder situationerne. Jeg har fremhævet tre sådanne processer på Figur 2.



Figur 2: Tre processer der indgår i en kritisk forskning

Pædagogisk fantasi refererer til den konceptuelle konstruktion, der formulerer at noget kunne være anderledes. Den pædagogiske fantasi etablerer spændingen mellem den aktuelle situation og den forestillede situation. Den pædagogiske fantasi har visse ligheder med det der i sociologien er fremhævet som en sociologisk fantasi.[12] Det er samtidig det element, som Freire inkluderer i begrebet 'literacy'. Den pædagogiske fantasi kan imidlertid netop være

12 Se Wright Mills (1959).

’fantasifuld’ - den kan derfor give et meget uklart billede af mulige alternativer. Derfor kan det være påkrævet at undersøge disse muligheder på en mere systematisk måde.

Det kan være nødvendigt at gennemføre en *pædagogisk ekperimenteren*.

Hermed tænker jeg ikke på systematiske eksperimenter, hvor forskellige variable isoleres for at danne grundlag for mere systematiske analyser. Jeg tænker slet og ret på at der gøres noget, der er ’anderledes’, og som kan hjælpe os til at opnå indblik i nye muligheder. For at bevæge sig fra den aktuelle situation til den tilrettelagte situation må der foretages en pædagogisk eksperimenteren. Denne eksperimeteren kan naturligvis være underlagt forskellige begrænsninger. I tankeeksperimentet bestod denne eksperimenteren i at få kvinderne ud i køkkenet. Ganske vist var der mange ting i den tilrettelagte situation, der var kunstige og uden relevans for den forestillede situation. Men tilrettelæggelsen udgjorde en betingelse for at man kunne nå frem til mere end en spekulativ indsigt i den forestillede situation. På samme måde vil der i mange former for pædagogisk eksperimenteren være kunstige elementer, der ikke er relevante for udforskning af fantasien, men som på grund af den aktuelle situation er indført for at realisere en eksperimenteren.

Disse overvejelser skabte nye rammer for, hvordan man kunne se på forskningsbetingelserne i Sydafrika-projektet. Først og fremmest behøvede man ikke at fortvivle over de mange og alvorlige begrænsninger som apartheidens efterladenskaber sætter for at realisere pædagogiske nyskabelser. Ph.D. studierne behøvede ikke at lade sig fange af et ’naturalistisk’ ideal, der ville have som konsekvens at man måtte indsamle data i en apartheid-defineret virkelighed. Man kunne i stedet inddrage den pædagogiske fantasi som et essentielt element i selve forskningen. Man kunne tilrettelægge situationer, der kunne være langt fra ideelle, men som alligevel kunne gøre det muligt at belyse indholdet i en pædagogisk fantasi. Man behøvede ikke at forske i den skygge som apartheidsystemet fortsat kastede over Sydafrika.

Hermed er vi fremme ved en central proces i kritisk forskning. Det handler om relationen mellem den tilrettelagte situation og den forestillede situation. Den tilrettelagte situation kan danne grundlag for en omhyggelig dataindsamling. Pointen er imidlertid, at disse data ikke blot handler om den arrangerede situation. De etablerer også et nyt vindue til den forestillede situation. Det handler om at se de nye pædagogiske muligheder klarere. Relationen mellem den tilrettelagte situation og den forestillede situation kan vi referere til som en *udforskende analyse* (’explorative reasoning’ eller ’critical reasoning’). Denne analyse tager udgangspunkt i observationerne af den tilrettelagte situation, men disse benyttes som vinduer til mulighedernes verden.

Naturligvis kan man hæfte sig ved det der faktisk skete i den tilrettelagte situation. At gøre dette ville svare til først og fremmest at koncentrere sig om at se glasset i vinduet. Man kan bemærke om det er rent eller snavset. Man kan se om det har ridser eller ej. Der er mange ting man kan hæfte sig ved i glasset i et vinduet. Men man kan også benytte glasset til at se igennem. Den udforskende analyse benytter netop den tilrettelagte situation som en vindue til den forestillede situation.

Vores næste konklusion er således, at *tre typer forskningsprocesser er involveret i kritisk forskning, nemlig en pædagogisk fantasi, en pædagogisk eksperimenteren og en udforskende analyse*. Den pædagogiske fantasi er netop ’fantasifuld’, men den kan stykkes sammen af en pædagogisk eksperimenteren efterfulgt af en udforskende analyse. Dette gør det muligt at uddybe fantasien. Naturligvis er det ikke sådan at en pædagogisk fantasi skaber et veldefineret billede af en forestillet situation. Pædagogisk fantasi er en konstruktionsproces og den forestillede situation er en konstruktion. Den pædagogiske fantasis konceptuelle konstruktion kan imidlertid udbygges og gøres meget mere nuanceret gennem en pædagogisk eksperimenteren og en udforskende analyse.

Kvalitet i kritisk forskning

Nu handler det naturligvis ikke blot om at gennemføre en forskning, men også om at gennemføre en *god* forskning. Dette betyder, at der må sikres kvalitet i processerne: pædagogisk fantasi, pædagogiske eksperimenteren samt udforskende analyse. Dette førte os frem til følgende overvejelser.

Forskningens objekt kan betragtes som netop et objekt. Objektgørelse er i mange sammenhænge set som en forudsætning for forskningens lødighed. Det er ikke så vanskeligt at se hvor denne forestilling kommer fra. En forsker kan gøre observationer i et klasseværelse, og man kan se idealbilledet af forskeren som 'fluen på væggen', hvilket er essentielt bl.a. for det positivistiske paradigme. Skal man iagttage det der foregår, forekommer det konsekvent at eliminere iagttagerens indflydelse på det der skal iagttages. Hvis man vil forske i det der findes, så handler det om netop ikke at forstyrre det der iagttages. Derfor gør forskeren bedst i at etablere sig som fluen på væggen. Forskeren kan beskrive sine iagttagelser (eksempelvis af interaktionen mellem elever og lærer) og gennemføre sine analyser. Man kan argumentere for, at de der har været genstand for analysen ikke må have indflydelse på analysens udformning. En sådan indflydelse kunne ødelægge selve analysen. Denne indflydelse kan ødelægge forskningens objektivitet. Denne tankegang fører frem til at der skelnes mellem forskningens subjekt, nemlig forskeren der gennemfører forskningen, og forskningens objekt, eksempelvis den lærer og de elever som forskningen handler om. Denne tankegang har samtidig været med til at definere centrale begreber som 'validitet' og 'reliabilitet' som god forskning må tage ad notam. Kort og godt: God forskning forudsætter en objektgørelse af det der udforskes.

Processerne pædagogiske fantasi, pædagogiske tilrettelæggelse og udforskende analyse forudsætter imidlertid ikke en skelnen mellem forskningens subjekt og forskningens objekt. Tværtimod vil der kunne opnås nye kvaliteter i disse processer gennem et samarbejde. Disse processer er i stedet med til at gøre alle (både 'subjekter' og 'objekter') til netop *subjekter* i forskningen. Man skal således ikke stræbe efter at forske *i* og *om* lærere og elever, men at forske *med* lærere og elever. Pointen er *at kvaliteten i en pædagogisk fantasi, en pædagogisk eksperimenteren og en udforskende analyse etableres og styrkes gennem samarbejde.*

Pædagogisk udforskning

I pædagogikken spiller det pædagogiske udviklingsarbejde er stor rolle som fornyer. Dette udviklingsarbejde beskrives imidlertid ofte som var der tale om et arbejde der er forskelligt fra pædagogisk forskning. Lad mig prøve at karakterisere disse to felter, som om de var forskellige.

Det *pædagogiske udviklingsarbejde* er først og fremmest karakteriseret gennem sit potentiale til at sikre forandringer. En lærer kan gennemføre et pædagogisk udviklingsarbejde, evt. i samarbejde med en forsker. Dette udviklingsarbejde kan bygge på ideen om, hvad der kunne være god og spændende undervisning. Man kan prøve at gennemføre denne undervisning, og man kan lave en form for evaluering af forløbet. Har der været tilfredshed med forløbet blandt lærere og elever, ja så kan man tale om at udviklingsarbejdet har været en succes. Succesen kan afrapporteres, og det skorter ikke på sådanne rapporter i den danske pædagogiske debat.

Man kan imidlertid med god ret hævde, at sådanne rapporter ikke kan tælle som pædagogiske forskningsrapporter. Den normale afrapportering af et pædagogiskudviklingsarbejde opfylder ikke mange af de kvalitetskrav, der normalt fremhæves om essentielle for *pædagogisk forskning*. Eksempelvis synes det at være en rimelig forudsætning, at observationer klart præsenteres, at det klart fremgår af analyserne, hvilke observationer de enkelte analyser bygger på, således at spørgsmål om 'validitet' kan blive efterprøvet. Der er en række krav, som normalt stilles i pædagogisk forskning, som afrapporteringerne fra det pædagogiske udviklingsarbejde ikke opfylder. Derfor er det med god grund, at man betragter pædagogisk udviklingsarbejde og pædagogisk forskning som to forskellige aktiviteter, der må udføres efter forskellige kriterier.

Min pointe er imidlertid, at der ikke behøver at være tale om to forskellige aktiviteter. Og for at fastholde denne ide, vælger jeg at tale om *pædagogisk udforskning*, som en aktivitet der både har forskningens og udviklingsarbejdets kvaliteter. En pædagogisk udforskning behøver ikke at gøre lærere og elever til objekter i forskningen. Jeg finder at pædagogisk udforskning kan karakteriseres på den måde, som jeg har karakteriseret kritisk forskning i det foregående. Det betyder imidlertid langt fra, at pædagogisk udviklingsarbejde, således som det sædvanligvis afrapporteres, kan regnes som pædagogisk udforskning. Pædagogisk udforskning må forudsætte kvalitet i processerne pædagogisk fantasi, pædagogisk eksperimenteren og udforskende analyse. Min pointe er imidlertid, at det at sikre en sådan kvalitet harmonerer både med krav til kritisk forskning og krav til et pædagogiske udviklingsarbejde. (Jeg bruger 'kritisk forskning' og 'pædagogisk udforskning' som delvis synonyme begreber. På engelsk har man ikke noget begreb der svarer til 'pædagogisk udforskning'. Som en fri oversættelsen af dette danske begreb vælger jeg 'critical research'. Og dette ord kan vi så igen oversætte til dansk som 'kritisk forskning'.)

En pædagogisk udforskning kan tage mange former. Den kan finde sted i et samarbejde mellem lærere, studerende og forskere, men man kan sagtens forestille sig at aktiviteterne pædagogisk fantasi, pædagogisk eksperimenteren og en udforskende analyse kan gennemføres af en lærer (måske i samarbejde med andre lærere) men henblik på at udvikle egen praksis.

Man kan spørge hvordan pædagogisk udforskning og kritisk forskning adskiller sig fra aktionsforskning.[13] Det er ikke vigtigt for mig at opretholde noget skel til aktionsforskning. Jeg ser ganske vist visse problemer i nogle af fremstillingerne af aktionsforskning, hvor det virker som om at forskeren må besidde klare visioner om hvad der skal ske og hvad der bør ske i en vis sammenhæng. Dette betyder at aktionsforskningen kommer til at omfatte en implementering af forudfattede ideer. Dette gælder naturligvis ikke for alle former for aktionsforskning, og det gælder i hvert fald ikke for det, jeg karakteriserer som kritisk forskning eller som pædagogisk udforskning. Her handler det om i fællesskab at få øje på og at skabe muligheder. Det handler om at styrke den pædagogiske fantasi, og hertil kan vi alle bidrage, og bedst bidrage i fællesskab.

13 Se f.eks. Atweh, Kemmis og Weeks (red.) (1998).

Afsluttende bemærkninger

Der er forskellige punkter jeg kan fremhæve som afslutning.

(1) Den udforskende analyse kan gennemføres i mange forskellige situationer. Et emne som jeg har været involveret i handler om ”Farlige små tal”. Dette projekt har sigtet på at belyse, hvorledes man kan tænke over og regne på de som regel ganske små sandsynligheder for at noget kan gå galt. Eksempelvis hvad er sandsynligheden for at der indtræffer en kernenedsmeltning på et bestemt atomkraftværk inden for et år? Det eksempel vi koncentrerede os om i projektet ’Farlige små tal’ var salmonellaforgiftning.[14] Projektet er også diskuteret i et kapitel i *Dialogue and Learning in Mathematics Education: Intention, Reflection, Critique*, (Alrø og Skovsmose, i trykken). De redegørelser for projektet kan læses som beskrivelser af forskellige episoder, men samtidig kan de læses som forsøg på at se nye og flere muligheder bag det der rent faktisk foregik. Disse beskrivelser kan således danne udgangspunkt for udforskende analyser.

(2) Overvejelserne over kritisk forskning og pædagogisk udforskning handler ikke specielt om matematikundervisning. Det kan lige så vel handle om alle mulige andre faglige områder. Der bliver imidlertid tale om en høj grad af specificitet, når man begynder at diskutere indholdet af den pædagogiske fantasi. Denne må i høj grad kunne bygge på konkrete former for indsigt. Således vil en diskussion af muligheder i et projekt som ’Farlige små tal’ hurtigt føre frem til overvejelser angående sandsynlighedsbegrebet. Der vil blive tale om diskussion af stikprøver og deres troværdighed. Der kan blive tale om hvad det vil sige at handle på grundlag af en indsigt i og en vurdering af forskellige beregninger. Skal sådanne overvejelser have en eksemplarisk værdi, er der stort set ingen ende på omfanget af den faglige indsigt der kan være nyttig for at bringe den pædagogiske fantasi videre.[15]

(3) Jeg er blevet spurgt mange gange, om jeg mener at al kritisk forskning må handle om en aktuel situation, en tilrettelagt situation og en forestillet situation, og om den skal omfatte processerne pædagogisk fantasi, pædagogisk tilrettelæggelse samt udforskende analyse. Jeg har altid svaret undvigende på dette spørgsmål. På en ene side synes jeg, at denne karakteristik af kritisk forskning er ganske rammende. På den anden side må man altid være opmærksom på kompleksiteten i en forskningsproces; således kan en detaljeret kortlægning af en aktuel situation være en forudsætning for at der kan tænkes i alternativer. Men tænkes der ikke i alternativer, og handler det udelukkende om at kortlægge og registrere, så er det vanskeligt for mig at kalde det kritisk forskning. Man kan imidlertid rejse spørgsmålet om al forskning *bør* være kritisk, således som jeg at prøver at definere kritisk forskning. Det mener jeg ikke. Der kan være mange situationer hvor et positivistisk forskningsideal må fremhæves som glimrende. Der er tilfældet hvor man med god mening søger efter kvaliteter i forskningen gennem de begreber om validitet og reliabilitet, som det naturalistiske ideal har fremhævet som retningsgivende. Jeg er således meget inspireret af Lincoln og Gubas (1985) præsentation af *Naturalistic Inquiry*, som ikke repræsenterer kritisk forskning i min fortolkning.

(4) Mange ting er med til at karakterisere en kritisk undervisning, også en kritisk matematikundervisning. Her har jeg imidlertid koncentreret mig om et enkelt af disse

14 Projektet ‘Farlige små tal’ er beskrevet i Alrø, Blomhøj, Bødtkjer, Skovsmose og Skånstrøm (2000a, 2000b, 2001)

15 Se eksempelvis Skovsmose (2002a) for en diskussion af ’mathematics in action’; Skovsmose (1998b, 2000) for en diskussion af ’aporia’; Skovsmose (2002b) for en diskussion af ’students foreground’; og Skovsmose (1998c og 2001) for en præsentation af ’undersøgelseslandskaber’. Se også Alrø og Skovsmose (i trykken) for en samlet diskussion af begreberne dialog, læring, intention, refleksion og kritik.

aspekter, nemlig om hvordan man kan karakterisere en kritisk forskning. Diskussionen har, som understreget, sit udspring i Sydafrika-projektet, og flere af de studerende fra dette projekt har arbejdet videre med ideerne. Dette gælder eksempelvis Renuka Vithal (2000) og Mathume Bopape (2002). Endvidere er ideerne blevet diskuteret med kolleger og Ph.D. studerende fra Brasilien, og Marcelo Borba og jeg har givet vores fremstilling af tingene i artiklen '*Research Methodology and Critical Mathematics Education'*. Dernæst er ideerne benyttet af danske Ph.D. studerende, bl.a. Dinna Balling, Kathrine Krageskov Eriksen og Tomas Højgaard Jensen. Og alle har været med til at udvikle ideerne om hvad pædagogisk udforskning og kritisk forskning kan betyde. Der er ikke tale om ideer, der skal følges, men netop om ideer, der må udvikles videre

Referencer

Adorno, T. W. (1971). Erziehung zur Mündigkeit. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Alrø, H., Blomhøj, B., Bødtkjer, H., Skovsmose, O. og Skånstrøm, M. (2000a). Farlige små tal. Kvan, 56, 17-27.

Alrø, H., Blomhøj, B., Bødtkjer, H., Skovsmose, O. og Skånstrøm, M. (2000b). Farlige små tal – almendannelse i et risikosamfund. Nordic Studies in Mathematics Education, 8(4), 27-52.

Alrø, H., Blomhøj, B., Bødtkjer, H., Skovsmose, O. og Skånstrøm, M. (2001). Farlige små tal – helt konkret. Nämnaren, 28(4), 40-46.

Alrø, H, og Skovsmose, O. (i trykken). Dialogue and Learning in Mathematics Education: Intention, Reflection, Critique. Dordrecht, Boston og London: Kluwer Academic Publishers,

Atweh, B., Kemmis, S. og Weeks, P. (red.) (1998). Action Research in Practice: Partnership for Social Justice in Education. London og New York: Routledge.

Ayer, A. (red.) (1959). Logical Positivism. New York: The Free Press.

Bopape, M. (2002). Mathematics school based in-service training [SBINSET]. A study of factors contributing towards success or failure of SBINSET in the South African schools context. Ph.D-afhandling. Aalborg: Aalborg Universitet.

Brown, A. og Dowling, P. (1998). Doing Research/ Reading Research: A Mode of Interrogation for Education. London: The Falmer Press.

Cohen, L. og Manion L. (1994). Research Methods in Education, Fourth edition. London: Routledge.

Freire, P. (1972). Pedagogy of the Oppressed. New York: Herder og Herder.

Freire, P. (1974). Cultural Action for Freedom. London: Pinguin Books.

Gerdes, P. (1996). Ethnomathematics and Mathematics. I A. J. Bishop et al. (red.) International Handbook of Mathematics Education (909-943). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Guba, E. G.og Lincoln, Y. S. (1994). Competing Paradigms in Qualitative Research. In N. K. Denzin og Y. S. Lincoln (red.). Handbook of Qualitative Research (105-117). Thousand Oaks, California: SAGE Publications.

Hempel, C. G. (1965). Aspects of Scientific Explanation. New York: The Free Press.

Hitchcock, G.og Hughes, D. (1995). Research and the Teacher: A Qualitative Introduction to School-Based Research. Second Edition. London: Routledge.

Khuzwayo, H. (2000). Selected Views and Critical Perspectives: An Account of Mathematics Education in South Africa from 1948 to 1994, Ph.D-afhandling. Aalborg: Aalborg Universitet.

Knijnik, G. (1998). Ethnomathematics and Political Struggles. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 98 (6), 188-194.

LeCompte, M. D., Millroy, W. L. og Preissle, J. (red) (1992). The Handbook of Qualitative Research in Education. San Diego: Academic Press.

Lincoln, Y. S. og Guba, E. G. (1985). Naturalistic Inquiry. Beverly Hills: Sage Publications.

Powell, A. B.og Frankenstein, M. (Eds.) (1997). Ethnomathematics: Challenging Eurocentrism in Eathematics Education. Albany, USA: State University of New York Press.

Skovsmose, O. (1998a). Linking Mathematics Education and Democracy: Citizenship, Mathematical Archaeology, Mathemacy and Deliberative Interaction', Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 98(6), 195-203.

Skovsmose, O. (1998b). Aporism: Uncertainty about Mathematics. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 98(3), 88-94.

Skovsmose, O. (1998c). Undersøgelseslandskaber. I T. Dalvang og V. Rohde (red): Matematik for alle, Landslaget for matematikk i skolen (LAMIS), Landås. 24-37.

Skovsmose, O. (2000). Aporism and Critical Mathematics Education. For the Learning of Mathematics 20(1), 2-8.
Skovsmose, O. (2001). Landscapes of Investigation. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 2001, Vol. 33 (4), 123-132.
Skovsmose, O. (2002a). Mathematics in Action: A Challenge for Social Theorising. I E. Simmt og B. Davis (red.): Proceedings: 2001 Annual Meeting, Canadian Mathematics Education Study Group, Groupe Canadien d'Étude en Didactique des Mathématique, University of Alberta, 3-17.
Skovsmose, O. (2002b). Students' Foreground and the Politics of Learning Obstacles. Second International Congress on Ethnomathematics, Ouro Preto, Minas Gerais Brazil. (Proceedings on disk.)
Skovsmose, O. og Borba, M. (i trykken). Research Methodology and Critical Mathematics Education. I R. Zevenbergen og P. Valero (red.), Researching the Socio-political Dimensions of Mathematics Education: Issues of Power in Theory and Methodology, Dordrecht, Boston og London: Kluwer Academic Publishers.
Skovsmose, O. & Valero, P. (2001). Breaking Political Neutrality: The Critical Engagement of Mathematics Education with Democracy. I B. Atweh, H. Forgasz og B. Nebres (red.). Sociocultural Research on Mathematics Education (37-55). Mahwah (New Jersey) og London: Lawrence Erlbaum Associateate.
Skovsmose, O og Valero, P. (2002a). Mathematics Edication in a World Apart – Where We Are All Together. In Valero, P og Skovsmose, O. (red.): Proceedings of the Third International Mathematics Education and Society Conference (1-9). København, Roskilde og Aalborg: Center for Forskning I Matematiklæring.
Skovsmose, O. og Valero, P. (2002b). Democratic Access to Powerful Mathematical Ideas. I L. English (red.): Handbook of International Research in Mathematics Education (383-407). Mahwah (New Jersey) og London: Lawrence Erlbaum Associates.
Valero, P. (1999). Deliberative Mathematics Education for Social Democratization in Latin America. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 98(6), 20-26.
Valero, P. og Vithal, R. (1999). Research Methods of the 'North' Revisited from the 'South'. Perspectives in Education, 18(2), 5-12.
Vithal, R. (1998). Data and Disruptions: The Politics of Doing Mathematics Education Research in South Africa. I N. A. Ogude og C. Bohlmann (red.), Proceedings of the Sixth Annual Meeting of the South African Association for Research in Mathematics and Science Education (475-481). UNISA.
Vithal, R. (1999). Democracy and Authority: A Complementarity in Mathematics Education?' Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 98(6), 27-36.
Vithal, R. (2000a). In Search of a Pedagogy of Conflict and Dialogue for Mathematics Education. Doctoral thesis. Aalborg: Aalborg University.
Vithal, R. og Skovsmose, O. (1997). The End of Innocence: A Critique of 'Ethnomathematics'? Educational Studies in Mathematics, 34, 131-157.
Wright Mills, C. (1959). The Sociological Imagination. Oxford: Oxford University Press.

Görel Sterner

Görel Sterner är förskollärare, lågstadielärare och specialpedagog och har under många år arbetat med frågor som rör elevers skriftspråksutveckling och lärande i matematik. Hon har lång erfarenhet av att arbeta med kompetensutveckling av pedagoger och lärare som undervisar barn i åldrarna 1-11 i matematik och svenska. Görel arbetar som projektledare vid NCM samt på lärarutbildningen vid Högskolan i Skövde.

Läs och- skrivsvårigheter och lärande i matematik

Görel Sterner

I vårt samhälle behöver människor kunna hantera kvantitativ information. Det kan handla om att sköta sin hushållsbudget och att utveckla den matematiska kompetens och problemlösningsförmåga som krävs i yrkeslivet. En förutsättning för ett aktivt deltagande i den demokratiska processen är också att man kan ta del av och kritiskt granska den omfattande samhällsinformation som ges med hjälp av matematik. Många elever lämnar skolan utan sådana matematiska kunskaper vilket är allvarligt. För de elever som dessutom har läs- och skrivsårigheter är problemet naturligtvis än större.

En del elever i läs- och skrivsvårigheter stöter också på problem när de ska utveckla kunnande i och om matematik. Den starka betoningen på språklig förståelse och kompetens som forskning och nationella måldokument idag anlägger på matematikämnet har bidragit till behovet av att utreda hur läs- och skrivsvårigheter påverkar elevers lärande i matematik och hur undervisningen kan utformas utifrån detta.

Likheter i läsning och grundläggande aritmetik

En massiv forskning visar på betydelsen av att elever utvecklar fonologisk medvetenhet för att läsinlärningen ska gå bra. Det är nödvändigt att lära sig uppfatta och förstå att ord går att dela upp i sina minsta byggstenar, fonemen, och att dessa går att föra samman till hela ord (Hoien & Lundberg, 2000). Nybörjarläsaren förlitar sig i första hand på den fonologiska informationen för att känna igen ord och avkodar orden genom att ljuda. Med stigande ålder och erfarenhet går läsaren över till direkta ortografiska processer för att känna igen och avkoda ord. En del ord uppfattas som helord, andra ord känner läsaren igen på grund av regelbundenheten i vår stavning. Vi har t. ex många ord i svenskan som börjar på an- (använda, anta, ange, anse m. fl.). Med mer erfarenhet av att läsa och med stigande ålder automatiseras ordavkodningen och läsaren kan ägna alla sina mentala resurser åt att bearbeta innehållet i texter.

När elever ska lära sig grundläggande matematik finns en liknande process. Elevers förmåga att observera och flexibelt handskas med de enheter som ingår i tal (att t. ex 9 = 9+0, 8+1, 7+2 osv.) är av avgörande betydelse för att utveckla grundläggande taluppfattning (Geary, 2000; Neuman, 1989). När nybörjarna i skolan ska lära sig dela upp de tio första talen använder till att börja med olika räknestrategier och tar hjälpa av laborativt material eller sina fingrar. Så småningom automatiseras sådan kunskap och de kan vid behov hämta grundläggande talfakta från långtidsminnet. Övergången från procedurstrategier till automatisering är begreppsmässigt lik övergången från fonologisk analys till ortografisk ordigenkänning vid läsning. Lärande börjar inom båda områdena med relativt ansträngande strategier, fonologisk analys vid läsning, och räkneprocedurer i aritmetik. Automatisering inom dessa områden är viktigt eftersom eleven då kan ägna sina mentala resurser år förståelse av texters innehåll vid läsning och matematisk problemlösning och för att utveckla mer komplexa matematiska kompetenser. Många elever med dyslexi har svårigheter inom båda dessa områden dvs. att effektivt handskas med språkets minsta byggstenar, att lägga grundläggande talfakta i långtidsminnet och att hämta ord ur långtidsminnet. Kognitiva studier visar att det verkar som om representationer av grundläggande talfakta i långtidsminnet stöds av samma fonologiska och semantiska minnessystem som också är kopplat till ordavkodning och läsförståelse (Geary, 2000). Det innebär att de störda fonologiska processer som bidrar till lässvårigheter också kan vara grunden till svårigheter att skapa inre representationer av tal och att hämta talfakta i långtidsminnet

Läsförståelse och problemlösning i matematik

Internationella studier visar på starka samband mellan läsförståelse och problemlösning i matematik. Den nyligen presenterade PISA-studien, som gäller läsförståelse och kunskaper i naturvetenskap och matematik bland 15-åringar i ett 30-tal länder, visar t. ex att 70 % av de felaktiga lösningarna vid problemlösning i matematik skulle kunna förklaras av bristande läsförståelse. Dessa samband kommer förhoppningsvis att ytterligare utredas när PISA i nästa omgång fokuserar på matematik. Elevernas läsförmåga är särskilt beroende av den semantiska förståelsen, dvs. förståelse av innebörder, och att de kan skapa inre föreställningar eller representationer av texters innehåll. Läsaren måste aktivera relevant bakgrundskunskap, göra inferenser och dra slutsatser, även om sådant som inte direkt står uttalat i texten, men som är nödvändigt för förståelsen. Lässvårigheter bidrar till att elever betraktar textuppgifter i matematik som isolerade räkneuppgifter som inte har något med deras tidigare erfarenheter och kunskaper att göra. En mödosam ordavkodning kan ytterligare bidra till att läsförståelsen går förlorad vilket i sin tur medför att eleven inte kan välja relevant räknesätt. Textuppgifter i matematik är ofta komprimerade och informationstäta vilket medför att varje ord måste avkodas och tolkas korrekt för att textens innehåll ska förstås.

Undervisning

God undervisning bör syfta till att elever utvecklar självförtroende och tillit till sitt lärande och att svårigheter förebyggs. På många förskolor runt om i landet har man under senare år utvecklat ett språkligt strukturerat arbete med rim och ramsor, högläsning, muntligt återberättande, stavelselekar, ljudlekar osv. Syftet är att genom lustfyllda lekar och övningar hjälpa barnen att utveckla fonologisk medvetenhet innan de börjar med den formella läsinlärningen i skolan. Undersökningar visar att barn som kan vara i riskgruppen gynnas i särskilt hög grad av sådana insatser. En intressant fråga är hur man kan utveckla en sådan verksamhet till att också omfatta matematik. I skolans undervisning i matematik betonar forskningen vikten av struktur, tydlighet, matematiska samtal, samband och mönster, att ny kunskap relateras till tidigare erfarenheter och kunskaper och att eleverna får hjälp att utveckla sin läs- och skrivförmåga i samband med matematik. Ett nära samarbete mellan specialpedagog och klasslärare kring elevers lärande är betydelsefullt. Aktuell forskning har även visat den effektivitet och framgång som kan uppnås i undervisning med en lärare och en elev, (Montis, 2000; Wasik & Slavin, 1993) men det förutsätter att både klasslärare och specialpedagoger har goda kunskaper om matematik, matematikdidaktik och om sambanden mellan läs- och skrivsvårigheter och lärande i matematik

Rudolf Strässer

Rudolf Strässer (e-mail: rudolf@sm.luth.se): In his work on Didactics of Mathematics in Austria, France and Germany, Rudolf Strässer concentrated on two domains of research: mathematics at the workplace / in vocational and technical education and computer use in learning and teaching geometry in secondary schools. Having started as professor of Didactics of Mathematics ('Matematik och lärande') at the Technical University of Luleå / Sweden in August 2002, he gets more and more involved in the co-operation of teachers and researchers (schools and university) to develop teaching and learning mathematics. Rudolf Strässer, Luleå / Sweden

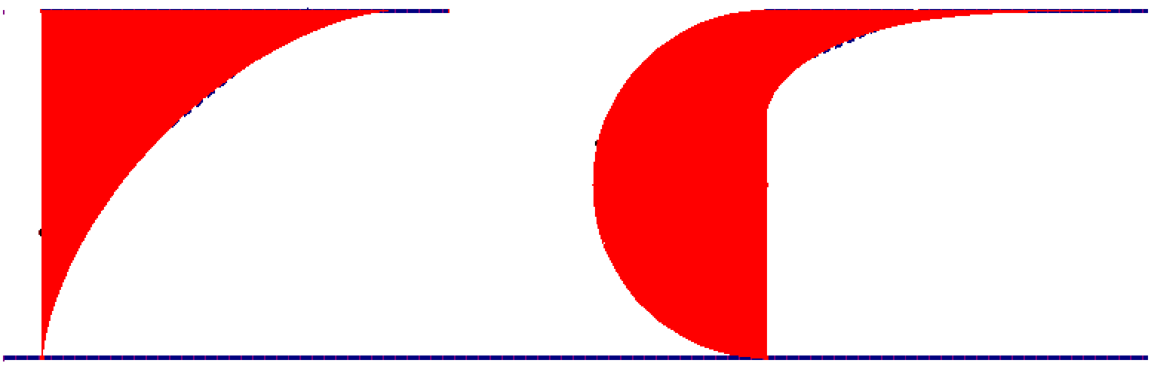
Learning elementary geometry with the help of computers: A project's plan and teachers' role in it

Rudolf Strässer

1 Geometry: Euclidean vs. Descriptive Geometry

Geometry in school is a twofold activity (for details see Sträßer 1990): On the one hand, there is *„euclidean" Geometry* with constructions and arguments incl. proofs - while on the other hand there is *„descriptive" Geometry,* the modelling and exploration of real life situations.

If you go for an exploration, an argument or a proof of the well-known statement that "the sum of the angles in a triangle adding up to 180°", you are in the middle of "euclidean" Geometry. Analysing the 'geometry' of sliding doors of a carport (see drawings below!) clearly belongs to "descriptive" Geometry. Here you look into different mechanisms of sliding doors, and the drawings below immediately tells you that with a mechanism at the left (the bottom of the sliding door moves up and down on a segment orthogonal to the ground) the car inside the garage may be in danger of being damaged by the moving sliding door. The drawing on the right tells you that this danger is drastically reduced if the bottom moves on a halve circle between the bottom and the top of the garage, but you need some space before your garage to install this type of mechanism.

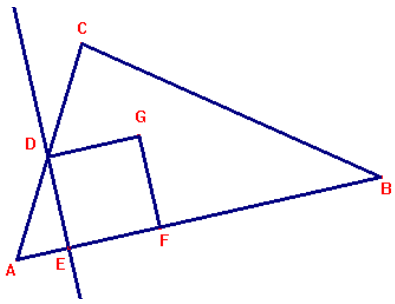


Drawing 1: Sliding doors (viewed from beside)

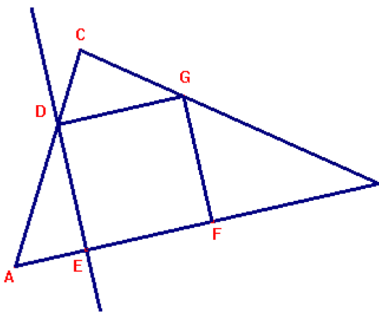
2 DGS: dragmode - macros - locus of points

'DGS' is a generic abbreviation for **D**ynamical **G**eometry **S**oftware, which is a certain type of software to be used in constructing geometrical drawings (for the difference between 'drawing' and 'figure see Parzysz 1989). A whole variety of programs of DGS type is marketed at present. I will just name the two most widely used: Cabri-géomètre (a development from the University Joseph Fourier in Grenoble/France, even available in a genuine Swedish version) and Geometer's Sketchpad (developed in the USA and - as far as I know only available in English).

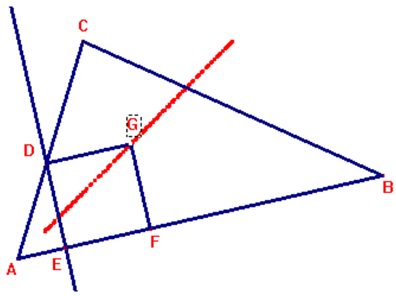
In order to illustrate the typical features of this type of software, I briefly describe the solution of a prototypic problem. We want to find the solution for the following task:
In a triangle ABC with acute angles, you have to inscribe a square, i.e. all four vertices of the square should lie on sides of the triangle.
With the help of a DGS (here: Cabri-géomètre) you could proceed in the following way:
After having constructed an appropriate triangle ABC, you place D on segment AC and draw a perpendicular from D onto segment AB with intersection E on segment AB. A macro-construction of your DGS should immediately give you a square DEFG, with - in general and unfortunately - G not being on one of the segments of triangle ABC (see drawing 2.1). Dragging D on segment AC then shows you, that there is a solution to the problem (see drawing 2.2), and asking for the 'locus of point' G even tells you that G moves on a straight line through A if D is moved on segment AB (see drawing 2.3). If you can prove that this locus of point is a straight line through A (an easy task if you know about dilatations), the solution of your problem is obvious: The intersection of a straight line through G and A and segment CB in drawing 2.1 immediately tells you about an appropriate placement of G on segment CB, the rest is so easy that it can be left to the reader.



Drawing 2.1



Drawing 2.2



Drawing 2.3

From this prototypic example, we can learn about the three characteristic features of DGS:
* **drag-mode** (variation of basic elements respecting geometrical relations, for research on this see Arzarello 2002)
* **macro-constructions** (condensing multiple operations into ***one*** construction, for research on this see Kadunz 2002)
* **trace/locus of points** (to visualise the trajectory of an element, for research on this see Jahn 2002).

At present, little is known about using in DGS in "normal" classrooms. Gawlick 2002 and Hölzl 1999 are the exceptions I know of.

3 The project

Having begun to work in August 2002 in Luleå, I am planning a project in co-operation of schools and university to make use of DGS in teaching and learning Geometry in normal Swedish classrooms. As a start, I do ***NOT*** aim at changing the curriculum, but I want to insert a new tool - namely DGS - into teaching and learning Geometry at school. The project should be documented in a way that teachers can learn from it for their everyday teaching - and researchers can learn from it in terms of research on using this type of software, more generally: using 'modern' technology in the classroom.

To give an additional example, I comment on a well-known problem of Geometry in compulsory schools: "The sum of the angles in a triangle is 180°" is at present taught by different methods like measuring the angles and adding them up - or by drawing triangles, cutting it into three pieces and putting together the angles - or by presenting the traditional (Euclidean) proof.
DGS offers an additional entry into this area by drawing one triangle, adding up the measures of the three inner angles and looking for the (non-)variation of the sum when dragging the vertices of the triangle.
Analysing the solution of tasks like the one above while using computers and DGS, the project should offer some answers to the open question whether and how the introduction of modern technology like computers and DGS changes the learning of the students.

4 The role of teachers

It is obvious - at least for me - that a project like this can only be successful in close co-operation with teachers in schools. In a project like this, teachers have to

- act as professionals for preparing lessons
- develop tasks to be used in classroom
- be creative in the use of a new tool DGS
- find solutions to organisational problems
- be responsible for the learning of their students.

I hope to find teachers for this role in Luleå.

5 Conclusion

This is not a RDD-project that follows the succession of research controlled by university people, then development (of teaching units - may-be with some help of invited teachers), then dissemination to schools of the units developed. The project starts from the assumption that - from the very beginning of the project - two types of professionals (teachers from schools & researchers from university) on an equal basis co-operate to develop ways of better teaching and learning Geometry (if not: Mathematics) in schools.

References

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34*(3), 66-72.

Gawlick, T. (2002). On Dynamic Geometry Software in the Regular Classroom. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34*(3), 85-92.

Hölzl, R. (1999). *Qualitative Unterrichtsstudien zur Verwendung dynamischer Geometrie-Software.* Unpublished Habilitation, University of Augsburg.

Jahn, A. P. (2002). "Locus" and "Trace" in Cabri-géomètre: relationships between geometric and functional aspects in a study of transformations. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34*(3), 78-84.

Kadunz, G. (2002). Macros and Modules in Geometry. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34*(3), 73-77.
Parzysz, B. (1988). «Knowing» vs «seeing». Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics, 19*(1), 79 -92.
Sträßer, R. (1990). Euklidische Geometrie versus deskriptive Geometrie. In Landesinstitut f. Schule u. Weiterbildung (Ed.), *Die Zukunft des Mathematikunterrichts* (pp. 73-76). Soest: Soester Verlagskontor.
Sträßer, R. (2001). Cabri-géomètre: Does a Dynamic Geometry Software (DGS) Change Geometry and its Teaching and Learning? *International Journal for Computers in Mathematics Learning, 6*(3), 319-333.

Bettina Dahl

Bettina Dahl (Søndergaard) er cand.scien t(Aalborg Universitet,1997) med hovedfag i matematik og sidefag i samfundsfag. Hun skrev speciale inden for matematikkens didaktik. Derefter arbejdede hun et år som årsvikar på Aalborg Katedralskole. Derefter arbejdede hun en kortere periode som forskningsassistent på Danmarks Pædadogiske Institut. Derefter fik hun et ph.d.-stipendium i matematikkens didaktik (Roskilde Universitetscenter). Delvist som en del af ph.d.-programmet tog hun M.Sc. graden i Educational Research Methodology (University of Oxford 2000)og arbejdede her som Research Officer på et projekt om den Europæiske Unions undervisningspolitik. Hun indleverede sin ph.d.-afhandling september 2002 og vil forsvare den april 2003. Hun har siden oktober 2002 arbejdet som rådgiver på Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen.

Dialogcafeen

Bettina Dahl

Som afslutning og afrunding på konferencen var der arrangeret en dialogcafé. Ideen med en dialogcafé opstod ved NCM (Nationellt Centrum för Matematikutbildning) i Sverige. Bengt Johansson og Lillemor og Göran Emanuelsson fra NCM stod for denne.

Dialogcafeen fungerede på den måde, at der i kantinen var sat ca. 40 borde op, og ved hvert bord sad 6-8 deltagere. Ved bordene var der tusch og papir til en planche, og desuden var kaffe/te og brød tilgængeligt under hele seancen. Ved alle bordene valgtes en ordstyrer og deltagerne diskuterede følgende to spørgsmål:

1. Vad är – mot bakgrund av konferensens innehåll – viktigast att utveckla i din skola/verksamhet?
2. Vad kan du/ni/vi göra redan denna vecka?

Efter ca. 40 minuter blev ordstyrene ved hvert bord siddende, mens de andre deltagere fandt sig et nyt bord. Ved alle bordene blev der nu gjort rede for og diskuteret, hvad der var blevet fundet frem til ved hvert af de oprindelige borde. Efter ca. 30 minutter vendte alle tilbage til de oprindelige borde, hvor man, på baggrund af input fra de nye borde, havde en ca. 25 minutters sammenfattende diskussion. Dette mundede ud i en dokumentation i form af en planche, hvor de vigtigste punkter blev skrevet ned. Dernæst var der en sammenfatning i plenum, hvor hvert bord kort redegjorde for, hvad de havde opfattet som det vigtigste.

De gennemgående konklusioner

Disse kan generelt deles op i to grupper: 1. Indholdet i undervisningen og rammerne omkring denne og 2. Lærernes forhold. Det må dog bemærkes, at fremstillingen ikke skal forstås som en sammentænkt rapport, men i stedet som en række punkter, der blev nævnt, og nogle er givetvis indbyrdes modstridende.

1. Indholdet i undervisningen og rammerne omkring denne

Eleverne må aktiveres, og der må være mere kommunikation mellem eleverne indbyrdes og mellem lærerne og eleverne. Matematikken må konkretiseres og være meningsfuldt. Dog er det også nødvendigt ikke at vælge arbejdsmetoder, blot fordi disse er morsomme. Det er også vigtigt at udvikle kreativitet og kompetencer. Undervisning må stimulere begrebsopbygning. Der må også være et fokus på læring, frem for undervisning. Det vigtigste er lærerens syn på eleverne og på læringen, og at lærerne giver eleverne en glæde for matematik, hvorfor de vil få en indre drivkraft for videre læring i faget. Man må også se på eleven som en person med ressourser. Hensyn til dygtige elever blev også nævnt og nogle nævnte også vigtigheden af at undervise efter kundskabsniveau og ikke alder. Af kortere kommenaterer er: tid til fordybning; få eleverne til at stille spørgsmål; reflektion; motivation vigtig; sammenhæng mellem de forskellige arbejdesformer.

Med hensyn til selve læringsmiljøet er der vægt på en balance mellem variation og ro, samt at tryghed er vigtig. Også differentiering og tilpasning er vigtige mål. Tværfaglighed bliver nævnt fra flere hold. Desuden nævnes samarbejde med forældrene som centralt.

2. Lærernes forhold

Lærerne må (have tid til at) udvikle egen tænkning, mere kommunikation, reflektion og idéudveksling mellem lærerne. Blandt andet omkring hvordan man kan løsrive sig fra lærerbøgerne, samt hvor meget kontrol man i det hele taget bør have. Herunder må der være rum for diskussion af forholdet mellem praksis i klasseværelset og pensum. Metode og didaktik skal udvikles. Lokalt netværk er også vigtigt. Det skal være muligt for lærerne at få efteruddanning, for eksempel in-service-training, og der må investeres penge heri. Også nationale kurser og konferencer er centrale samt at have kursusholdere til at rejse rundt i landet. Det er også vigtigt, at der etableres god kontakt til politikere.

Populærvitenskapelige emner – en spennende oppvarming til konferansen

Ingvill M. Holden

Deltakere som kom til konferansen innen søndag formiddag, kunne melde seg på ulike populærvitenskapelige tilbud. Det var fire ulike opplegg, lagt i to paralleller. Først på ettermiddagen, kunne man velge mellom Matematikk i hoppbakken eller Matematikk i Nidarosdomen. Senere var valget enten Matematikk i Vitensenteret eller Matematikk og musikk. Temaene ble valgt ut fra lokale ”spesialiteter” fra Trondheim. Vi er stolte over Granåsen skianlegg, Nidarosdomen, Vitensenteret og Ringve musikkhistoriske museum, og synes det er spesielt spennende å synliggjøre matematikken knyttet til disse turistattraksjonene.

Jeg er glad for å kunne inkludere artikler fra alle disse spennende foredragene og verkstedene i rapporten fra konferansen. Det vil både minne deltakerne om hva de var med på, gi alle andre et innblikk i det de ikke kunne delta på, og ikke minst, gi dere lærere gode ideer til temaer for elevprosjekter i matematikkundervisningen.

Jeg vil igjen takke bidragsyterne ved hvert av disse oppleggene for spennende innsyn i matematikk i et tverrfaglig og anvendt perspektiv.

Ingvill Holden

__Ingvill M. Holden__ er faglig leder ved Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen. Hun har bakgrunn som lærer i videregående skole, doktorgrad i algebra, og har i de siste seks årene arbeidet med forsknings- og utviklingsarbeid i matematikkdidaktikk ved NTNU. Hennes interessefelt er først og fremst motivasjon og elevers lyst til å lære, samt lærerens viktige rolle som igangsetter og inspirator. Hun har holdt en rekke kurs over hele landet for lærere i alle skoleslag, og har mange samarbeidsprosjekter med lærere i skolen. Hjemmeside: www.matematikksenteret.no/ingvill

KappAbel – fra lokal matematikkonkurranse til nordisk satsningsområde

Ingvill M. Holden

KappAbel startet på Sørlandet som en reaksjon på Norges dårlige resultater på internasjonale matematikktester. Ivar Salvesen ved Froland ungdomsskole tok initiativ til en lokal konkurranse der deltakere var 9. klasse-elever fra de to Agder-fylkene. Konkurransen var de to første årene en relativt tradisjonell, individuell konkurranse.

I forbindelse med Verdens matematikkår i 2000 ble konkurransen gjort landsomfattende og flyttet til Trondheim, der Institutt for matematiske fag ved NTNU hadde både det faglige, økonomiske og administrative ansvaret. Landslaget for matematikk i skolen (LAMIS) ble en viktig samarbeidspartner fra og med dette året, og var med på å utforme konkurranseformen slik den er i dag. Vi ville ha en konkurranse for alle. Hele klassen deltar som ett lag, og alle elevene er med på å løse oppgavene til innledende runder. Dette foregår via internett, der læreren leser ned oppgavene, og sender inn svar på åtte oppgaver i hver runde på vegne av klassen. Klassen arbeider sammen i 90 minutter i hver runde, og må da komme til enighet om svarene på hver av de åtte oppgavene. Når to runder er over, vil den klassen som har flest poeng i hvert fylke, gå videre til tredje runde, eller semifinalen. Her starter alle med ”blanke ark”. Femti prosent av semifinalen utgjøres av et felles klasseprosjekt i matematikk etter oppgitt tema. Hittil har temaene vært:

KappAbel 2000
    Matematikk i naturen eller
    Matematikk i lokale kunst- og kultur- og håndverkstradisjoner
KappAbel 2001
    Matematikk i lek og spill
KappAbel 2002
    Matematikk i sport
KappAbel 2003
    Matematikk og teknologi

Klassen sender inn et produkt til utstilling under semifinale- og finaledagene, en prosesslogg og en faglig logg. I tillegg skal de fire elevene som representerer klassen under oppgavedelen av semifinalen, presentere prosjektet for en jury og de andre deltakerne. Den andre halvdelen av semifinalen er en oppgavedel, der fire elever fra hver klasser konkurrerer på tid. Scenen er en idrettshall, med spennende og praktiske problemløsningsoppgever i beste stafettstil.

De tre beste lagene går videre til finalen, der de konkurrerer med publikum til stede. Også publikum kan være med å løse oppgavene, som er gjort meget visuelle, og baseres på samarbeid og problemløsningsevne. Alle de tre finalelagene vinner poengepremier til klassene sine.

I 2002 inviterte vi gjestelag fra de andre nordiske landene. Danmark deltok med en klasse, Island med 29 klasser. Sverige sendte to lærere som observatører, slik at de kunne inspireres til å være med i 2003. Bare Island sendte et lag til semifinalen i 2002. Takket være stor innsats fra Anna Kristjánsdóttir, er interessen for KappAbel svært stor på Island. Det islandske laget kom på andre plass i semifinalen, og fikk dermed en nordisk spesialpris.

I 2003 har vi flere lag fra Danmark, Sverige og Island, og det vil bli arrangert landsfinaler i alle de fire landene. Alle bruker de samme oppgavene. I september 2003 skal vi for første gang arrangere en nordisk finale, desverre uten Finland. Målet er å skaffe finansiering, slik at KappAbel fra og med 2004 skal bli et helnordisk arrangement, med stor nordisk finale under den internasjonale matematikkdidaktikk-kongressen ICME10 i København i juli 2004.

KappAbel som utviklings- og forskningsprosjekt

Begrunnelsen for KappAbel-konkurransen har hele tiden vært å øke interessen for matematikk blant ungdomsskoleelver ved å tilby spennende og utfordrende problemløsningsoppgaver av mer eksperimenterende karakter enn de oppgavene de vanligvis møter i skolen. Oppgavene skal stimulere til matematiske diskusjoner og samarbeid. Dette har vist seg å appellere like mye til jenter og gutter, noe som også har vært et uttalt mål for prosjektet. En annen målsetning har vært å få elevene til å oppdage matematikk i en tverrfaglig og anvendt sammenheng. Strategien for å nå et slikt mål, har vært å la et matematikkprosjekt være en viktig del av konkurransens tredje runde.

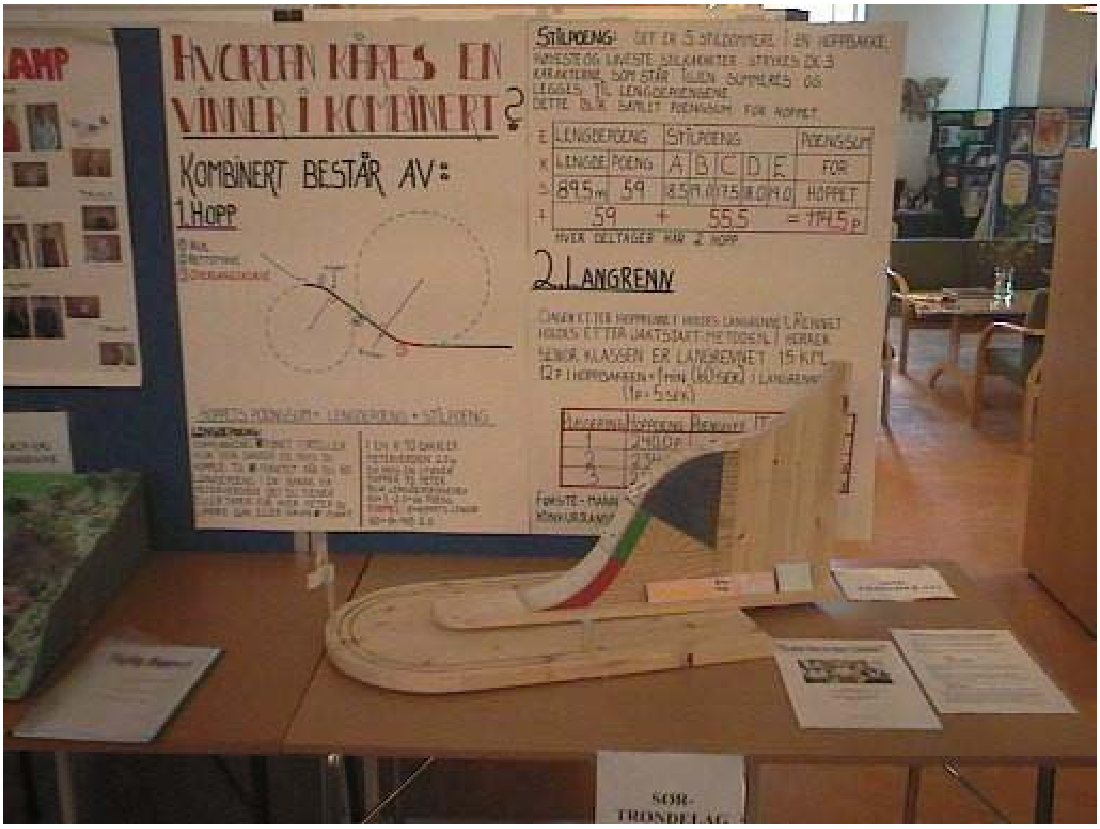
Det er på det rene at oppgavene og prosjektarbeidene har stimulert elever og lærere i arbeidet med matematikk. Deltakelse i konkurransen har gitt økt interesse og motivasjon for faget blant elevene, og også lærerne har blitt inspirert til nye arbeidsmåter i undervisningen. Mange lærere melder tilbake at de er imponert og overrasket over egne elevers evner og innsatsvilje. Det er dessuten indikasjoner på at også klasser som ikke deltar i konkurransen, bruker oppgavene i undervisningen, og finner inspirasjon på KappAbels nettsider.

Gjennom samarbeidet i Nordisk Kontakt Komite, en komitte av nordiske forskere i matematikkdidaktikk opprettet for felles nordiske forberedelser til ICME10, finnes muligheter og vilje til å utforske og dokumentere disse indikasjonene. Det er ønske om å få til et forskningsprosjekt der et av målene vil være å finne svar på i hvilken grad arbeid med oppgaver av den type som brukes i KappAbel er med på å stimulere og inspirere elever og lærere til større innsats i matematikkopplæringen. Videre vil det være viktig å få svar på om deltakelse i KappAbel setter varige spor i form av økt interesse for matematikk blent elevene, såvel som endrede arbeidsformer i skolenes matematikkopplegg. Et slikt prosjekt vil gjennomføres delvis i form av en survey-undersøkelse med spørsmål til deltakende elever og lærere, og delvis som et kvalitativt studium på noen utvalgte deltakerskoler.

Eksempel på elevprosjekt fra KappAbel 2002

Selbu ungdomsskole representerte Sør-Trøndelag fylke under semifinalen i KappAbel 2002. Det oppgitte tema for prosjektet var Matematikk og sport, som seg hør og bør i et OL-år. Elevene fra Selbu hadde valgt Matematikk i kombinertsporten som presisering av dette tema.

De fire elevene, Torgeir Aursjø Nilsen, Ingrid Otnes, Lene Stigen og Knut Magnus Nordby Gjertsen fra Selbu kom til Trondheim dagen før konferansen, sammen med sin lærer Kristen Garberg, for å presentere prosjektet for konferansedeltakerne våre. Vi fikk en flott innføring i prinsippene bak poenggiving, med demonstrasjon og dømming av gode og dårlige hopp, og eksempler på utregning av hvor lang tid det skal være mellom starttidspunktene til deltakerne når de skal gå langrenn ut fra poengene de har oppnådd i hoppkonkurransen. Vi fikk en spennende innføring i hvordan en hoppbakke er konstruert, med deler av to sirkler i unnarennet, forbundet med en rett linje som samtidig er tangent til begge sirkelene, og også parallell med ovarennet. Elevene hadde med seg en selvlaget modell av en hoppbakke, som var en del av deres utstilling under semifianlen. De viste også fram sin prosesslogg og faglogg.



Fra utstillingen under KappAbel *Foto: Nils Kr. Rossing*

Denne sesjonen under søndagens program ble avsluttet med en utflukt til hoppbakken i Granåsen i Trondheim, der alle gikk til topps i bakken, og fant igjen de geometriske fenomenene elevene hadde vist oss under presentasjonen.

Nedenfor har vi tatt med eksempler på oppgaver fra tidligere KappAbelkonkurranser.

Kvalifiseringsoppgave: Eksempel 1

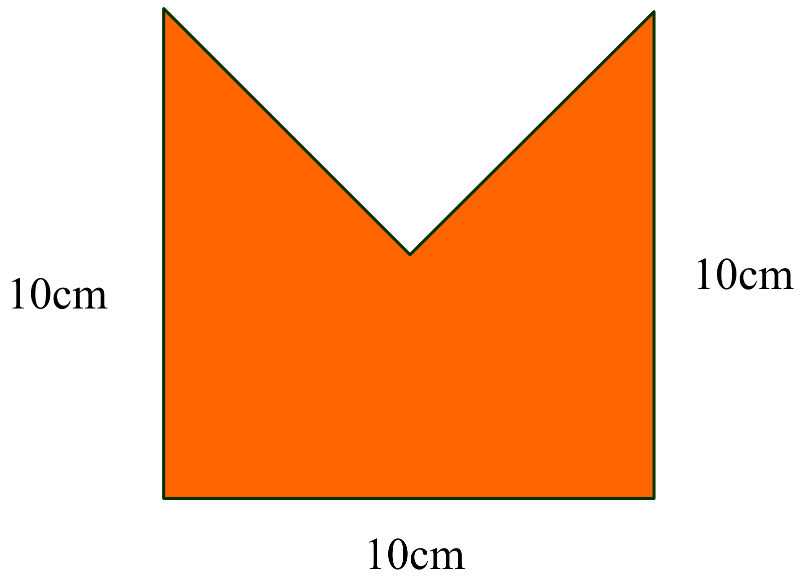
Dere skal lage to tall der dere bruker sifrene
3, 4, 5, 8 og 9 én gang.
Multiplisér de to tallene.

Eksempel: $985 \cdot 43 = 42355$

Hvor stort kan produktet bli?

Kvalifiseringsoppgave: Eksempel 2

Figuren på tegningen under kan deles opp i mindre biter med rette linjer, på en slik måte at de nye bitene er helt like (kongruente) med hverandre.

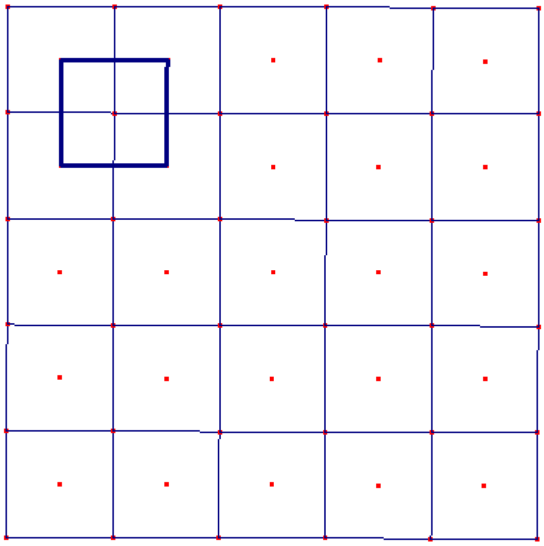


De to skrålinjene er halve diagonaler. Kryss av på lista under for de antall biter som det er mulig å dele opp figuren i slik at alle de nye bitene blir helt like (kongruente) med hverandre. Feil avkryssing gir poengreduksjon.

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Semifinaleoppgave: Eksempel

Dere får utdelt et stort prikkark. Der skal dere tegne kvadrater i forskjellige størrelser. Størrelsen er angitt som et helt tall. Dette tallet angir arealet. Hjørnene skal ligge i en prikk.



Arealet oppgis uten benevning, og vi setter arealet av det minste kvadratet som kan tegnes med alle hjørner i en prikk, lik 1 arealenhet. Se tegning over.

Tegn kvadrater på nøyaktig
2, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17 og 18 arealenheter.

Finaleoppgave: Eksempel

Dere har fått utlevert 9 filmbokser.
Én boks er litt tyngre enn de øvrige.
Dere skal finne den tyngste boksen. Den fremgangsmåten dere kommer fram til, må være slik at dere alltid vil være 100 % sikker på at dere vil finne den tyngste boksen.

1. Dere skal nå ved hjelp av skålvekta finne en måte å gjøre veiingen på slik at dere alltid er i stand til å finne den tyngste boksen, dvs *flaks gjelder ikke*.
2. Dere kan bruke så mange veiinger dere ønsker, men dere får flere poeng desto færre veiinger dere trenger.
3. Dere skal beskrive på svararket den framgangsmåten dere bruker.
4. Den valgte framgangsmåten skal demonstreres ved hjelp av vektene når svaret avgis for dommerne.

Tilleggsopplysning : Det er mulig å greie seg med bare to veiinger for med 100% sikkerhet å bestemme hvilken av boksene som er tyngst. Oppgaven skal løses på 4 minutter.

Nils Kristian Rossing

Nils Kristian Rossing er ansatt ved Vitensentereti Trondheim (40 %) og Skolelaboratoriet for matematikk, naturfag og teknologi, NTNU (60 %)

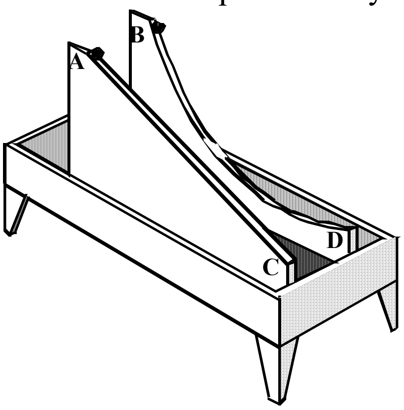
Matematikk på Vitensenteret 17. nov. 2002

Nils Kr. Rossing, Vitensenteret

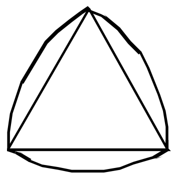
Vitensenteret spiller på undring og nysgjerrighet for å skape interesse for naturvitenskap og teknologi. Dette gjøres bl.a. gjennom en interaktiv utstilling med over 170 modeller, hvor deltagerne selv kan gjøre eksperimenter. Vitensenteret har ikke noe eget matematikkrom, men de fleste modellene har matematiske elementer ved seg.

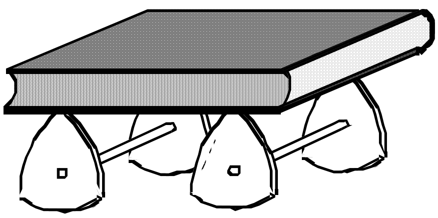
Hver modell i utstillingen kan sies å romme en hel verden av spennende kunnskap. Dette vil en oppdage bare en er villig til å stoppe opp og ta seg tid til å observere og eksperimentere. Hver modell er som en dør inn til ny kunnskap, hvor spørsmålet kan fungere som nøkkelen som åpner døra. En lettere modifisert Vitensenter-logo kan symbolisere betydningen av gode og annerledes spørsmål.

En modell som åpner for betydelig grad av matematiske beregninger er modellen: *Raskeste rullebane*. Her kan en overbevise seg om at den raskeste rullebanen fra et punkt til et lavereliggende punkt, ikke alltid er den rette linjen. I dette tilfellet er sykloiden den banen som er raskest. Dette kom både Libniz, Newton og Bernoulli fram til på 1700-tallet gjennom matematiske beregninger.



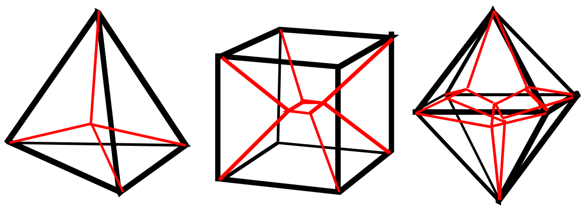
Det er også morsomt å stille nye og annerledes spørsmål om dagligdagse, kjente ting. Ta f.eks. et kumlokk. Hvorfor er nå egentlig et kumlokk alltid rundt? Normalt tenker en ikke over hvorfor en gjenstand har den formen den har. Når det gjelder kumlokk er en viktig årsak at et rundt kumlokk som er litt konisk, vil ikke kunne slippes ned i kummen. Et rektangulært er kvadratisk lokk har ikke den egenskapen. En oppfølging av dette spørsmålet er om det finnes andre former med den samme egenskapen. De færreste er kjent med at det i teorien finnes uendelig mange slike former. Den enkleste kalles Reuleaux-triangelet. Dette er like bredt på tvers uansett hvor en måler. dette kan en overbevise seg om ved å lage



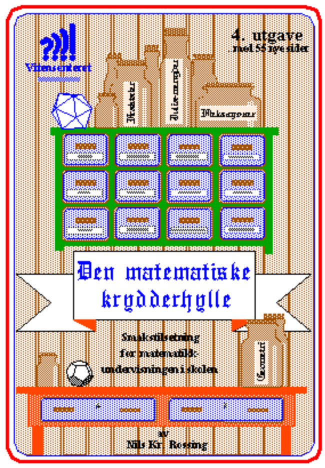


to hjulpar med slike triangler og rulle dem bortover bordet. Da ser en ganske tydelig at de har konstant bredde.

Vitensenteret har besøk av over 30 000 skolelever i året. For at disse skal få mest mulig utbytte av utstillingen, ble det i 1998-2000 laget en **veiledning til utstillingen for lærere**. Ved siden av, kryssreferanser til L97 foreslår veiledningen også en rekke forsøk og eksperimenter. Flere av disse er også matematiske og et av de mest forunderlige er å dyppe platonske legemer i såpeveske. Da oppstår de mest overraskende matematiske former.

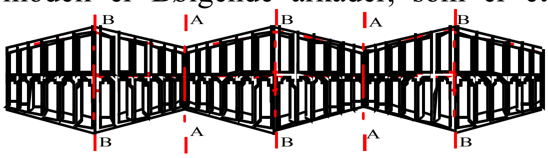


Mange lærere ønsker imidlertid fordypning i enkelte temaer. Vitensenteret startet derfor i 1999 sitt eget forlag, som i dag har nærmere 20 titler. Deriblant fire som omhandler matematikk. Boka den matematiske krydderhylle har nå kommet i fire utgaver og solgt i over 1 800 eksemplarer over hele landet.



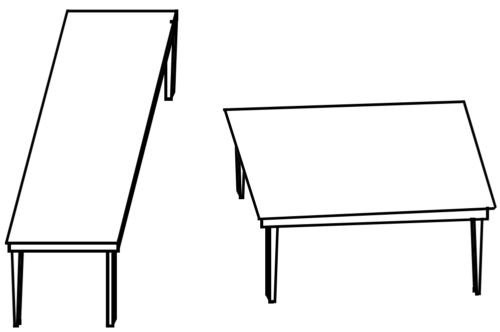
I 2002 ble det også gitt en bok om kortkunster og matematikk, som er ment å være et supplement til matematikkundervisningen. Boka beskriver 11 kortkunster, gir den matematiske forklaringen og hvordan det er mulig å variere dem. Tanken er at kortkunster kan være en måte å variere undervisningen på.

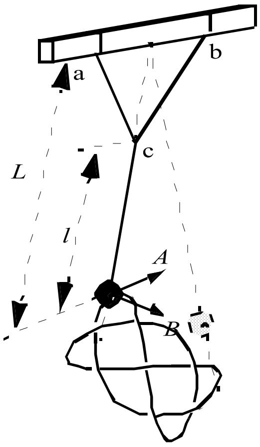
Å drive omvisning i utstillingen er vanskelig, da de besøkende ofte bare forsvinner underveis. Vi har derfor valgt å **ta grupper ut av utstillingen** og i ro og mak gi eksempler på hva de bør se etter. Videre får vi på denne måten mye bedre dialog med publikum, og kan vi fortelle om spesielle modeller som det ikke er så lett å oppdage betydningen av når en går på egen hånd. En slik modell er Bølgende arkader, som er et tredimensjonalt "bilde" som henger på veggen.



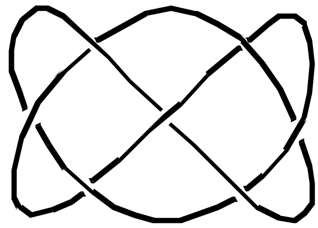
"Bildet" ser ut som et hus med hjørner som stikker ut mot en. På grunn av at perspektivet er invertert (dvs. det som fysisk er lengst borte i bildet er størst, mens det som fysisk er nærmest er minst). Når en betrakter dette bildet vil en oppleve noe forunderlig. Hele bildet ser ut til bevege seg fra side til side. Ved hjelp av denne og lignende modeller, kan vi få de besøkende til å reflektere over hvordan hjernen vår fungerer og hvordan vi kan tolke geometrier i ulike sammenhenger.

Dette kommer også tydelig fram når en studerer de to bordene på figuren til høyre. Her er bordplatene eksakt like, men den ene virker lengre enn den andre på grunn av den sammenhengen geometrien er satt inn i. Geometrier er ikke bestandig hva vi synes å tro, måling av lengder og vinkler er derfor ofte nødvendig.

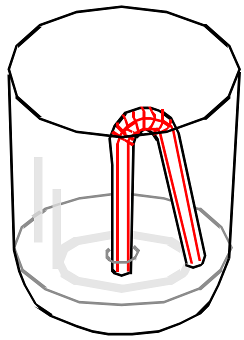




Matematikken finner vi også igjen i andre sammenhenger. F.eks. så er det en forunderlig sammenheng mellom pendelbevegelser og taumatter slik vi finner dem i den gamle sjømannstradisjonen. Dersom vi henger opp en pendel i to punkter, vil vi oppdage at dersom vi setter den i bevegelse så vil pendelen beskrive kurver som til forveksling ligner tradisjonelle taumatter. Lignende mønster finner en dessuten igjen i kulturer over hele verden. Beskriver vi disse mønstrene matematisk, vil vi oppdage at vi ved å analysere matematikken oppdage at mønstrene kan kategoriseres og gjøre oss i stand til å syntetisere nye varianter. Dvs. matematikken hjelper oss til å se ut over det kjente og oppdage nye "landskaper".

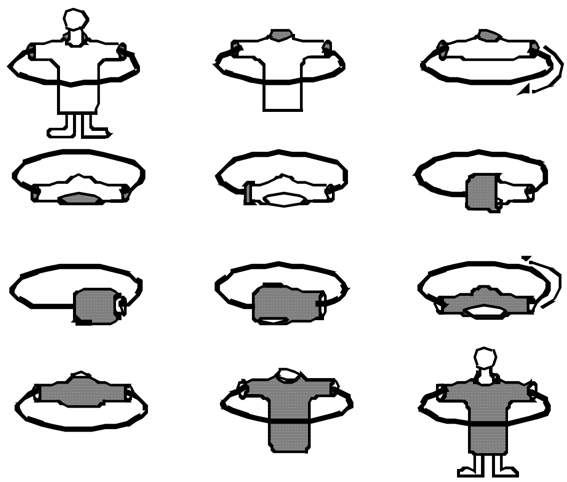


I 2002 startet Vitensenteret også opp det som i dag går under betegnelse **oppfinnerverkstedet**. Her kan besøkende og skoleelever få lov til å lage enkle modeller som viser naturvitenskapelige eller teknologiske prinsipper. Alle byggesettene er utviklet ved Vitensenteret selv om ideene ofte er hentet fra andre steder. I dag er det beskrevet et 10-talls slike byggesett. Et av dem er Pytagoras kopp som viser hevertprinsippet.



Pytagoras kopp er en flaskebunn, med hull i som det er ført et bøyelig sugerør opp gjennom. Når koppen fylles med vann, vil den, når vannet kommer over bøyen i sugerøret, tømmes fullstendig. De besøkende får med seg en artig kopp, samtidig som de får illustrert hevert-prinsippet.

Å forsøke å utfordre tanken er bestandig fascinerende. Topologien eller "gummistrikkgeometrien" er en del av matematikken som i alt for liten grad benyttes for å skape undring og nysgjerrighet i undervisningen. I februar 2003 håper vi å komme med en "ellevill" bok om "gummistrikkgeometri", hvor det er mulig å boltre seg i forunderlige øvelser og matematiske eksperimenter. Som en avslutning på foredraget ble forsamlingen utfordret til å forsøke å tenke seg til om det er mulig å vrenge en genser med sammenbundne hender. Dette krever ganske mye av den romlige forestilningsevnen. Det blir imidlertid betydelig enklere med en genser og to sammenbundne hender. Å løse dette problemet i felleskap kan være en spennende oppgave som skaper mye moro.



Det siste skuddet på Vitensenterets tilbud er våre endags **lærerkurs.** Her får lærerne anledning til å bli kjent med alle tilbudene ved Vitensenteret, primært gjennom å prøve alt selv. På denne måten håper vi at vi kan bringe nye ideer ut i skolen og kanskje friste noen til å besøke Vitensenteret.

Frode Rønning

***Frode Rønning** er professor i matematikk ved Høgskolen i Sør-Trøndelag, Avdeling for lærerutdanning og tegnspråk. Han har forskningsbakgrunn fra kompleks analyse og arbeider spesielt med geometrisk funksjonsteori. Han driver utviklingsarbeid med elevaktive arbeidsformer i matematikk og er spesielt opptatt av ulike aspekter ved geometri, bl.a. koblinger mellom matematikk og kunst. Han har også arbeidet en del med bruk av IKT i matematikkundervisning. Hjemmeside: http://www.alt.hist.no/adm/tilsattcv/froder.php*

Matematikk i Nidarosdomen

Frode Rønning

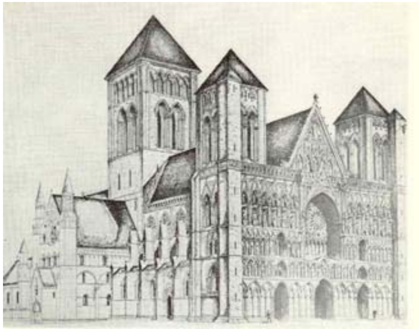
Innledning

Nidarosdomen framstår i hovedsak som en gotisk katedral, og det er klart at det ligger mye matematikk til grunn for dens konstruksjon. Dette gjelder både matematiske beregninger som var nødvendige med tanke på selve konstruksjonen, og matematikk som har mer symbolsk eller estetisk betydning. I denne lille artikkelen vil vi se på en del aspekter ved den matematikken som har symbolsk eller estetisk betydning og først og fremst konsentrere oss om katedralens vestfront.

Historisk bakgrunn

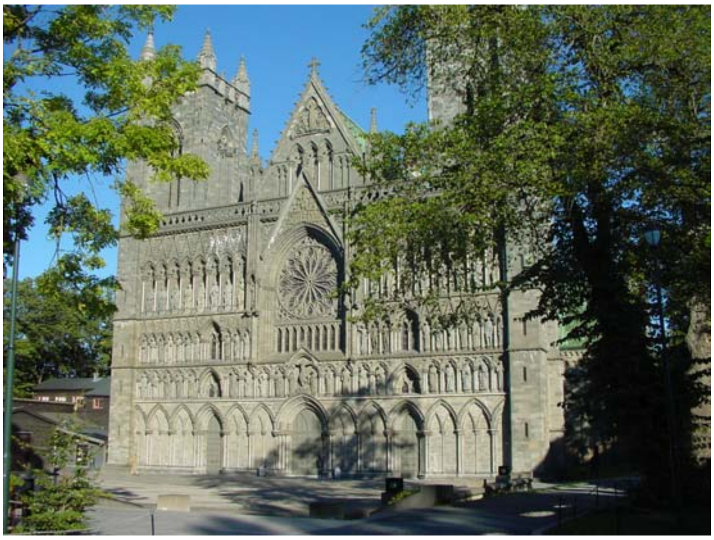
Man regner gjerne at restaureringen av Nidarosdomen pågikk i 100 år, fra 1869 til 1969. Den siste delen av kirken som ble gjort ferdig var Vestfronten med alle skulpturene. Også i den opprinnelige konstruksjonen av kirken er dette den yngste delen, og alt tyder på at Vestfronten ikke var ferdig bygget før kirken ble alvorlig skadet av brann i 1328. Dermed har nok aldri denne delen av kirken noen gang vært bygget etter de opprinnelige planene, og man vet heller ikke hvordan disse var. Det som er sikkert er at man planla en avslutning mot vest i form av en såkalt skjermfront (screenfront) etter mønster fra engelske katedraler så som de i Lincoln, Wells og Salisbury. Slike skjermfronter lages slik at de skjuler resten av kirken, og de er ofte rektangulære.

Det er lite dokumentasjon på hvor mye av Vestfronten som ble bygget opp etter brannen i 1328 og senere branner. Et stikk av Johan M. Maschius fra 1661 (Adresseavisen 1969) regnes som den eldste avbildning av Domen, og på dette ser vi to hele etasjer av Vestfronten, og deler av en tredje. Mellomrommet mellom de bevarte delene av tredje etasje kan tyde på at det har vært et vindu der. Det finnes også skriftlig dokumentasjon på at katedralen hadde et rosevindu i middelalderen.



Da restaureringen startet i 1869 hadde man ikke så mye å bygge på, hverken bokstavelig, eller av dokumentasjon på hvordan Vestfronten hadde sett ut, så man stod i utgangspunktet nokså fritt. Dermed ble det også sterk diskusjon om hvordan Vestfronten skulle se ut. Over en periode på omlag 30 år ble det lagt fram flere utkast av ulike arkitekter, og det som til slutt ble lagt til grunn for oppbyggingen var utkastet *Kongespeilet* utarbeidet av Helge Thiis i 1929 (Adresseavisen 1969).

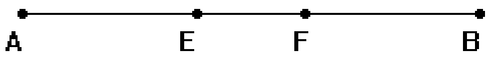
Thiis ble tilsatt som domkirkearkitekt i 1930 og hadde denne stillingen til sin død i 1972. På bildet nedenfor ser vi Vestfronten slik den tar seg ut i dag, og vi ser da at hovedtrekkene i utkastet fra 1929 er bevart.



Det gylne snitt

Sentralt i striden om utformingen av Vestfronten var påstander som ble satt fram av Henrik Macody Lund om at hele eller store deler av Nidarosdomen var konstruert etter Det gylne snitt, og at man derfor kunne bruke dette til å beskrive hvordan kirken opprinnelig var bygd, eller tenkt bygd. Disse påstandene ble avvist, men det synes allikevel klart at Vestfronten, slik den i dag framstår, er konstruert med dette bestemte forholdstallet som rettesnor. Dette skal vi nå se nærmere på. Først må vi forklare hva som menes med Det gylne snitt.

Vi kan tenke oss at vi skal dele et linjestykke AB i to deler, en lang og en kort. Dette skal vi gjøre på en slik måte at forholdet mellom den lange og den korte delen er lik forholdet mellom hele linjestykket og den lange delen. Det er klart at det må finnes to punkter på linjestykket som har denne egenskapen fordi vi kan tenke den lange delen enten fra A mot høyre eller fra B mot venstre. Punktene E og F på figuren nedenfor har denne egenskapen, dvs. at AF/FB = AB/AF og tilsvarende EB/AE = AB/EB.



Nå skal vi regne ut hva dette forholdstallet må være. Da kan vi for å gjøre det enklere si at hele linjestykket har lengde 1 og at den lange delen, AF, har lengde x. Den korte delen vil da ha lengde $1 - x$. Kravet AF/FB = AB/AF vil da ta form av følgende likning

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}.$$

Den kan skrives

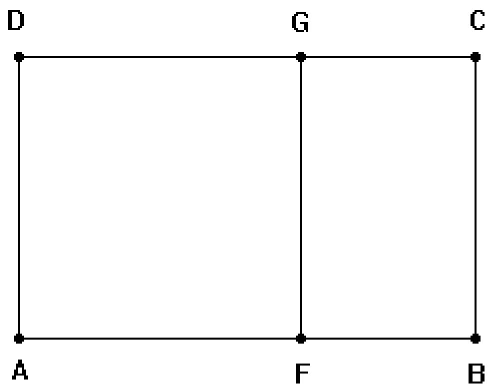
$$x^2 = 1 - x$$

eller

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Her får vi en andregradslikning å løse, og gjør vi det finner vi den positive løsningen $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$. Dette er altså forholdet mellom den lange delen og hele linjestykket når linjestykket er delt i Det gylne snitt. For å få forholdet mellom den lange og den korte delen må vi finne tallet $1/x$, og med litt regning finner vi at $\frac{1}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$. Dette tallet har altså den spesielle egenskapen at $1/x = x + 1$. Ofte er det tallet $1/x$ som kalles Det gylne snitts forholdstall, og det betegnes også ofte med den greske bokstaven φ. Vi ser av dette at sammenhengen mellom x og φ er slik at $x = \varphi - 1$.

Hvis vi lager et rektangel der forholdet mellom langside og kortside er Det gylne snitt (tallet φ), får vi det som kalles *et gyllent rektangel*. Det er vist på figuren nedenfor, og der har vi også delt av et kvadrat AFGD som har sidekant lik kortsida i rektanglet ABCD.

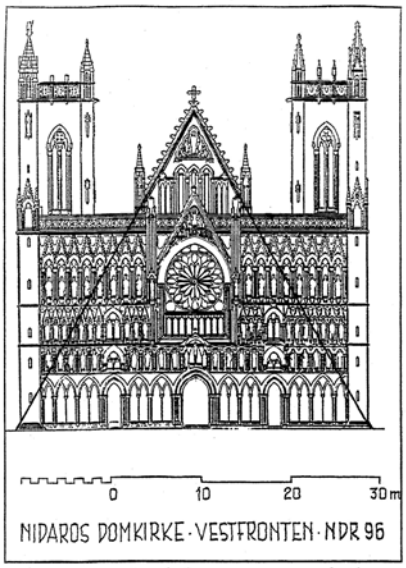


Hvis vi i dette rektanglet setter AD = 1, så er altså AB = φ, og siden AF = AD = 1, så må FB = $\varphi - 1$. Nå får vi altså for forholdet mellom langsida og kortsida i det lille rektanglet FBCG at

$$\frac{BC}{FB} = \frac{1}{\varphi - 1} = \frac{1}{x} = \varphi.$$

Dette viser at rektanglet FBCG også er et gyllent rektangel, og dermed har vi vist en viktig egenskap ved slike rektangler: Hvis vi starter med et gyllent rektangel og deler av et størst mulig kvadrat, så vil det rektanglet som blir igjen også være et gyllent rektangel.

Vestfrontens utforming



Enerett: Nidaros Domkirkes Restaureringsarbeider.

Det synes ganske åpenbart at selve den rektangulære skjermfronten er et gyllent rektangel. Hvis vi dessuten deler inn grunnlinja i dette rektanglet i Det gylne snitt og trekker de loddrette linjene opp fra disse delepunktene, så ser vi at disse linjene spiller en viktig rolle i utformingen. De utgjøres nemlig av de to markerte søylene på hver sin side av rosevinduet. Vi kan også dele kortsida i vestfrontrektanglet i Det gylne snitt og se om vi finner noe interessant. Også da ser det ut til at de to delepunktene vi får spiller en rolle. De horisontale linjene som vi kan trekke ut fra disse delepunktene svarer til etasjedelerne som er lett synlig på selve veggen og særlig på de to sidetårnene, mellom 2. og 3. og mellom 3. og 4. vindusåpning. Det synes derfor klart at geometrien knyttet til Det gylne snitt har vært underliggende i utformingen av Vestfronten.

Dette er imidlertid ikke det eneste som er geometrisk interessant på Vestfronten. I tillegg til rektanglet ser vi også trekanten som en sentral figur. (Se figuren ovenfor, hentet fra Gunnarsjaa 1986). Mellom de to sidetårnene stikker det opp en trekant, og denne trekantens toppunkt ligger rett over midtpunktet på grunnlinja. Hvis vi forlenger trekantens sider, ser vi at disse treffer bakken akkurat i ytterpunktene på den rektangulære veggens grunnlinje, og vi ser også at den trekanten vi får er likesidet. Vi kan derfor betrakte Vestfronten som bygd opp av en likesidet trekant og et gyllent rektangel med samme grunnlinje. Den likesidete trekanten finner vi også på katedralene i Lincoln og Salisbury.

Inne i denne trekanten finner vi så rosevinduet som er sirkelformet. Denne konstruksjonen med en sirkel inne i en likesidet trekant har en viktig symbolsk betydning i det den ofte kalles Guds øye. Selve rosen er bygd opp omkring en åttefoldsymmetri som deler seg slik at rosen får 16 blad. Tallet åtte og formen åttekant finner vi igjen flere steder i både Nidarosdomen og andre kirker. Nidarosdomen har flere mindre rosevinduer med forskjellige symmetrier. Over inngangen på nordre tverrskip finner vi en fembladet rose, og på søndre vegg av langskipet finner vi både 4-bladete og 6-bladete roser.

Tallet åtte finner vi altså i det største rosevinduet og i oktogonen som er bygd opp omkring høyalteret. Hvorfor er åttetallet og åttekanten (oktogonen) så viktig? Det hevdes av og til at det er fordi tallsymbolet 8 representerer det uendelige; det som ikke har noen begynnelse eller slutt. Det er lite trolig at dette er forklaringen, fordi vårt 8-tall kommer fra India via den arabiske (islamske) kulturen og var ikke i vanlig bruk i Europa i kristen kultur før godt inn i middelalderen. Nidarosdomens oktogon ble påbegynt på erkebiskop Eysteins tid, på 1180-tallet, og da var i hvert fall ikke de arabiske tallene akseptert i den kristne kulturen.

Forklaringen må trolig finnes i den åttekantede formen. Åttekanten symboliserer overgangen mellom det jordiske og det himmelske. Tallet fire er det jordiske tallet, og firkanten den jordiske formen (de fire verdenshjørner), mens sirkelen er den himmelske formen (det uendelige, det perfekte). Åttekanten representerer en slags mellomform mellom firkant og sirkel og symboliserer her ”himmelriket på jorden”. At høyalteret omkranses av en åttekant symboliserer da at dette er det stedet i kirken (eller på jorden) hvor vi kommer så nært himmelen som mulig. Døpefonter er også ofte åttekantede, og i det ligger det at dåpen også representerer et møte mellom det jordiske og det himmelske.

Referanser

Adresseavisen (1969), Nidaros katedralens gjenreisning, en hundreårig prosess, særtrykk av Adresseavisen 4/10 1969

Gunnar Danbolt (1997), Nidarosdomen, fra Kristkirke til nasjonalmonument, Andresen og Butenschøn, Oslo

Arne Gunnarsjaa (1986), Nidaros Domkirke og dens arkitektoniske symbolspråk, Religion og livssyn nr. 4, s. 5 - 11

Anders Kirkhusmo, red. (1972), Trondheim i 1000 år, F. Bruns Bokhandels forlag, Trondheim

Swingende kurver og matematisk rytmikk

Carl Haakon Waadeland
Institutt for musikk, Olavskvartalet
NTNU, 7491 Trondheim
carl.haakon.waadeland@hf.ntnu.no

Swingende kurver og matematisk rytmikk

Carl Haakon Waadeland

Innledning: Pythagoras og tonende tall:

For mange kan matematikk og musikk oppfattes som to svært forskjellige disipliner eller fagfelt. Noen vil kanskje til og med si at musikk og matematikk er *komplementære* i den forstand at musikk gjerne regnes som et estetisk fag mens matematikk i større grad er beslektet med logikk og naturvitenskapelig tenkning. Imidlertid kan vi også i matematiske resonnement og resultat finne estetiske trekk og i produksjon, kommunikasjon og analyse/ syntese av musikk anvendes naturvitenskapelig kompetanse. Slik sett oppdager vi et fruktbart og gjensidig *"avhengighetsforhold"* mellom matematikk og musikk.

En oppfatning av en nær forbindelse mellom musikk og matematikk er en grunnleggende bestanddel i den greske antikke virkelighetsforståelse. Ikke minst gjelder dette for filosofen, matematikeren og musikkforskeren *Pythagoras* (ca. 570-500 f.Kr.) og hans disipler, pythagoreerne.- Gjennom studier av rettvinklete trekanter og undersøkelser av strengelengde og tonehøyde, fant Pythagoras at så vel geometriske som musikalske kvaliteter lar seg uttrykke ved tall. Musikk er "tonende tall" mente han. Mer generelt så pythagoreerne et studium av tall og tallforhold som en nøkkel til en forståelse og erkjennelse av "det værende" i vid forstand. Pythagoras hevdet at Gud har ordnet kosmos – universet – etter tall, og matematikk ble således en sentral del av pythagoreernes religion. Det er også i lys av denne oppfatningen vi kan forstå at Pythagoras en gang skal ha uttalt: "Alt er tall!" (Jfr. Brun, 1981 og Sundberg, 1980.) Uten på noen måte å ta stilling til pythagoreernes religiøse overbevisning synes det riktig å si at Pythagoras' utsagn på mange måter har aktualisert gyldighet i dag. Det er for eksempel et grunnleggende utgangspunkt for all anvendelse av datateknologi og internett at bilde- og lydinformasjon blir *oversatt til tall* (dvs. blir "digitalisert" = blir "representert med *siffer*" (´siffer´ = ´digit´ på engelsk)). Moderne informasjonsteknologi kan slik betraktet ses som grunnleggende basert på antikke pythagoreiske idéer. I utvidet forstand har dermed begrepet ´tonende tall´ mening også i dag.

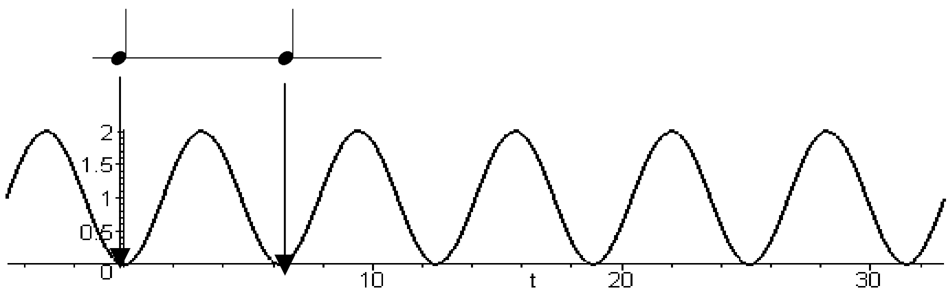
Swingende kurver:

´Tonende tall´ viser til antikke idéer som forbinder musikalske tonehøyder med tall og også mer generelt til digitalisering som en sentral bestanddel i dagens informasjonsutveksling og kommunikasjon.- En annen forbindelse mellom musikk og matematikk vil komme til syne idet vi nå presenterer en ny matematisk modell for *rytmeframføring*. Derigjennom vil vi også gi mening til begrepet ***swingende kurver***. (Denne modellen er mer utførlig beskrevet i Waadeland, 1999, 2000 og 2001.)

Jeg er musiker med slagverk som mitt hovedinstrument. Når jeg spiller trommer, kan det (av og til) ***swinge*** ! For en tilhører vil en opplevelse av swingende musikk ofte komme til uttrykk ved at hun eller han får lyst til *å bevege seg til musikken*,- kanskje trampe med foten, klappe, knipse, bevege hodet eller danse med hele kroppen! Slik sett kan rytme *generere bevegelse*. På den annen side er det klart at intimt knyttet til mitt trommespill inngår en, for meg, indre rytmisk intensjon eller impuls (hva nå dette måtte være!) som blir fysisk artikulert gjennom en kroppslig bevegelse, og har som mulig resultat at trommestikka treffer tromma og en hørbar rytme skapes. Således kan man si at forskjellige former for kroppslig bevegelse er *en forutsetning* for rytmisk trommespill.- Bevegelse og rytme er altså nært beslektete fenomen. Om vi ønsker å konstruere en modell for musikalsk rytmeframføring, synes det derfor naturlig å utvikle modellen på en slik måte at sentrale *bevegelsesaspekt* ved utøvelsen er ivaretatt. Vi starter da med følgende enkle betraktning:

Dersom jeg slår hånda mot bordet på en slik måte at slagene er synkrone med en metronom, kan følgende kurve være en mulig grafisk framstilling av håndbevegelsen:

s_1 s_2 s_i *(slag nr. i)*



En matematisk beskrivelse av denne *bevegelseskurven* er:

$$\boldsymbol{p_f(t) = A[1 - \cos(ft)]}.$$

A : *amplitude, f* : *frekvens, t* : *tid*

Amplituden gir et uttrykk for håndas avstand til bordplata (maksimal avstand er $2A$), mens frekvensen er relatert til slaghastighet (og dermed noteverdi). Legg merke til at i den grafiske framstillingen ovenfor er $A = 1$, $f = 1$, og slagframføringen betraktes som en metronomisk framføring av fjerdedelsnoter.

Om $\boldsymbol{p_f}$ ovenfor angir en metronomisk framføring av fjerdedelsnoter, vil funksjonen

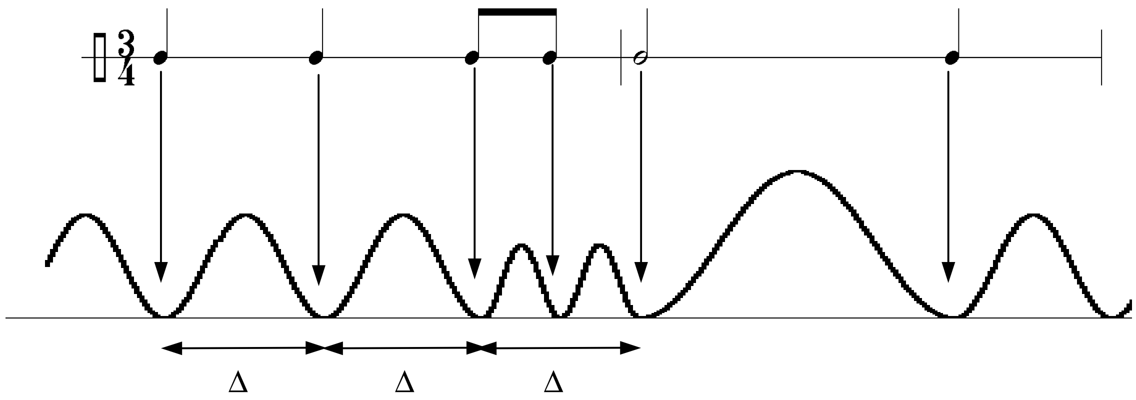
$\boldsymbol{p_{2f}(t) = A[1 - \cos(2ft)]}$, med dobbel frekvens, representere åttendelsnoter, mens

$\boldsymbol{p_{(1/2)f}(t) = A[1 - \cos(ft/2)]}$ vil representere halvnoter.

Dermed ser vi at vi har en enkel sammenheng mellom noteverdier og frekvenser for metronomiske bevegelseskurver.

Ved å *kombinere* forskjellige slike bevegelseskurver (dvs. ved å *sette sammen* forskjellige funksjoner $p_f(t)$), kan vi nå lage **modeller** av mer **sammensatte rytmefigurer**.

Eksempel 1:



Merk:

- Denne sammensatte bevegelseskurven er konstruert ved å bruke en kombinasjon av funksjoner av form $p_f(t) = A[1 - \cos(ft)]$.

- *Amplitudene* i bevegelseskurven er blitt justerte for å reflektere håndas varierende avstand til bordplata (evt. til tromma) når rytmen ovenfor trommes med én hånd. (For eksempel: Når åttendeler spilles, har du ikke *tid* til å løfte hånda så høyt fra bordplata som når fjerdedeler spilles.)

- Avstanden mellom to påhverandre følgende fjerdedelsslag er konstant (= Δ). Videre har en åttendelsnote i bevegelseskurven en varighet som er nøyaktig lik halvparten av varigheten av en fjerdedelsnote, mens en halvnote har en varighet lik det dobbelte av en fjerdedelsnote.

> På liknende måte som i eksemplet ovenfor kan *enhver* rytmefigur notert i henhold til vanlig musikknotasjon framstilles ved hjelp av funksjoner $p_f(t)$. Dermed har vi nå laget (eller i det minste skissert) en **matematisk modell** for **metronomisk rytmeframføring**.

Det er imidlertid både allment opplevd og observert og empirisk dokumentert gjennom målinger at *levende rytmeutøvelser er karakterisert ved forskjellig grad av* ***avvik*** *fra metronom*. Om jeg, som trommeslager, spiller rytmefiguren i eksempel 1, vil åttendelsnotene sjelden (for ikke å si aldri) ha en varighet som er *nøyaktig lik* halvparten av varigheten til en fjerdedelsnote. Slike avvik fra metronomisk rytmeframføring kan være så vel *individuelt* betinget, avhengig av den enkelte musiker, som *stilistisk* karakteriserende, typisk for spesielle spillestiler. For eksempel er det typisk at i wienervals akkompagnement blir gjerne 1-eren i hver takt spilt noe *kort*, 2-eren *lang*, mens 3-eren er *middels lang*. Dette avviker åpenbart fra en metronomisk framføring hvor 1-er, 2-er og 3-er er like lange. (Empiriske studier av wienervals akkompagnement er gjennomført og beskrevet av Bengtsson & Gabrielsson, 1977, 1983; og omtales også av Waadeland, 1999, 2000, 2001)

Mange vil hevde (og jeg er en av dem) at det er nettopp de forskjellige *avvikene* fra metronomisk framføring som ”gir liv til” musikken og gjør at musikk *swinger*. Et naturlig spørsmål blir derfor:

> Kan vi utvide den matematiske modellen vår på en slik måte at også *ikke-metronomiske*, *levende*, ***”swingende”*** utøvelser av rytme lar seg simulere?

I letingen etter et mulig bekreftende svar på dette spørsmålet, vil vi etterprøve følgende idérekke:

1. I vår modell av metronomisk rytmeframføring er *noteverdier* representert ved *frekvenser til bevegelseskurver*.
2. Dersom vi ønsker å simulere *avvik* fra metronomisk framføring, synes det derfor naturlig å forsøke å knytte disse avvikene til en eller annen operasjon der *frekvenser blir ”forandret” eller ”manipulert”*.
3. Når jeg spiller tromme, er det *flere* kroppslige bevegelser som påvirker hverandre og til sammen innvirker på min rytmeframføring.
4. På bakgrunn av (2) og (3) vil vi modellere avvik fra metronomisk framføring ved at *én bevegelseskurve påvirker frekvensen til en annen bevegelseskurve*.
5. En velkjent teknikk for *lyd*syntese er frekvensmodulasjon (FM), der én eller flere oscillatorer påvirker frekvensen til en ”bærebølge” (engelsk: ”carrier”) (se Chowning, 1973). I vår modellkonstruksjon vil vi overføre denne kjente teknikken for lydsyntese til en ny teknikk for *rytmesyntese*. Altså lar vi (4) ovenfor få betydningen: ***Rytmisk frekvensmodulasjon (RFM)***.

Matematisk uttrykt innebærer rytmisk frekvensmodulasjon følgende:

$$\text{(RFM)} \quad \boxed{r(t) = A[1 - \cos[ft + d\,\underbrace{\sin(f't + \phi)}]]}$$

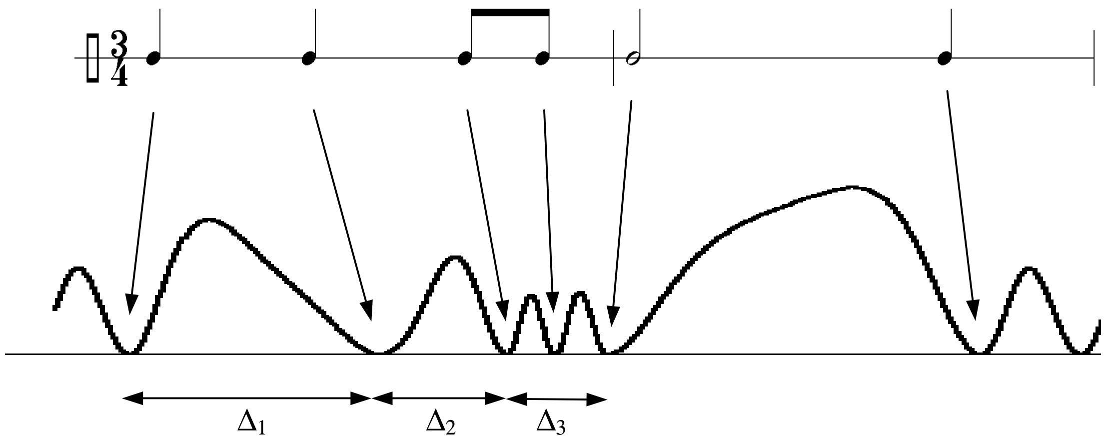
”modulerende bevegelse”

d: angir *grad* av modulasjon

Legg merke til at dersom $d = 0$, gir RFM: $r(t) = A[1 - \cos(ft)] = p_f(t)$, altså en *umodulert, metronomisk* framføring.

La oss nå se på noen eksempler på rytmisk frekvensmodulasjon:

<u>Eksempel 2:</u> (En frekvensmodulasjon av eksempel 1)



Legg merke til at i dette eksemplet er *ikke* lenger avstanden mellom påhverandre følgende fjerdedelsslag konstant. Her er $\Delta_1 > \Delta_2 > \Delta_3$ og åttendelsnotene har varigheter som *i forskjellig grad* avviker fra halvparten av varigheten til fjerdedelsnotene.

Som eksempel 2 anskueliggjør, er vi nå istand til å lage forskjellige synteser av *ikke-metronomiske* framføringer av rytme. Ved passende valg av modulasjonsparametre (f'', ϕ, d) kan (muligens) noen av disse syntesene også **simulere levende, swingende utøvelser av rytme**. Slik ser vi hvordan rytmisk frekvensmodulasjon kan anvendes i en matematisk modell for levende rytmeframføring der ”metronomiske bevegelseskurver” blir omdannet til ***swingende kurver***.

<u>Eksempel 3: Rytmisk modulasjon av Kjerringa med staven:</u>

I boka ”Fanitullen” (Aksdal & Nyhus (red.), 1993) beskriver Jan-Petter Blom rytme og frasering i norsk folkemusikk (s. 161-184). Her kan vi blant annet lese at *springar/pols* i 3-delt takt i enkelte ”dialekter” framføres på en ”asymmetrisk” måte, det vil si at de tre taktslagene sjelden har lik eller tilnærmet lik varighet. Framføringspraksis i for eksempel Telemark er at 1-er er lang (L), 2-er middels lang (M), 3-er er kort (K), mens i Valdres er 1-er K, 2-er L, 3-er M. Blom påpeker at empiriske undersøkelser viser at for så vel Telemark- som Valdresdialekten gir forholdstallene L:M:K = 7:6:5 et godt uttrykk for asymmetrien.

Ved passende valg av modulasjonsparametre kan disse forskjellige springardialektene simuleres ved hjelp av rytmisk frekvensmodulasjon. Dette er utførlig beskrevet av Waadeland (2000).

Fra swingende kurver til klingende musikk:

Ved hjelp av rytmisk frekvensmodulasjon er vi nå istand til å konstruere bevegelses-kurver som simulerer et stort antall ikke-metronomiske framføringer av rytme. Imidlertid eksisterer våre synteser, så langt, på et *teoretisk* nivå hvor matematiske funksjoner og grafiske illustrasjoner tolkes som forskjellige representasjoner av rytmisk musikkframføring.- Det ville vært ytterst interessant om vi i tillegg kunne "oversette" våre matematiske modeller til *klingende* musikk! Sagt på en annen måte skulle vi gjerne finne svar på spørsmålet: **Hvordan *låter* disse swingende kurvene** ?

For å oppnå et svar på dette spørsmålet er det konstruert et dataprogram som er istand til å utføre rytmisk frekvensmodulasjon på innspilt musikk. Konstruksjonen av dette programmet er blitt til i et samarbeid mellom Sigurd Saue, Institutt for teleteknikk, akustikk, NTNU, som har utført computer programmeringen, og forfatteren av denne artikkelen. Programmet beskrives på en generell, ikke-teknisk måte av Waadeland (1999, 2000, kap.6, 2001), Waadeland & Saue (1999) og gis en teknisk, mer detaljert forklaring av Saue (2000). De grunnleggende egenskapene ved dataprogrammet er:

- Musikkinformasjon (MIDI) importeres inn i datamaskinen.
- Datamaskinen konstruerer bevegelseskurver og utfører rytmisk frekvensmodulasjon på disse kurvene.
- MIDI informasjon sendes ut i hvert kurve-bunnpunkt og lyd skapes fra en (hvilken som helst) MIDI lydmodul (for eksempel synthesizer eller sampler).

Ved hjelp av dette dataprogrammet kan vi, i tillegg til de teoretiske syntesene som er presentert her, også lage *klingende* etterlikninger av levende rytmeframføring. Klingende utgaver av rytmiske modulasjoner av "Kjerringa med staven", samt flere andre eksempler, er gitt på en CD som er vedlagt Waadeland (2000).

Referanser:

Aksdal, B. & Nyhus, S. (red.) (1993). *Fanitullen. Innføring i norsk og samisk folkemusikk.* Oslo: Universitetsforlaget.

Bengtsson, I. & Gabrielsson, A. (1977). Rhythm research in Uppsala. I *Music, room, acoustics* (19-56). Stockholm: Publications issued by the Royal Swedish Academy of Music, No.17.

Bengtsson, I. & Gabrielsson, A. (1983). Analysis and synthesis of musical rhythm. I J. Sundberg (Ed.), *Studies of music performance* (27-59). Stockholm: Publications issued by the Royal Swedish Academy of Music, No.39.

Brun, V. (1981). *Alt er tall. Matematikkens historie fra oldtid til renessanse.* Oslo: Universitetsforlaget.

Chowning, J.M. (1973). The Synthesis of Complex Audio Spectra by Means of Frequency Modulation. *Journal of the Audio Engineering Society, 21 (7)*, 526-534.

Saue, S. (2000). Implementing Rhythmic Frequency Modulation. I C.H. Waadeland, *Rhythmic Movements and Moveable Rhythms*, Appendix II (252-276). Trondheim: Department of Musicology, Norwegian University of Science and Technology.

Sunberg, O.K. (1980). *Pythagoras og de tonende tall.* Idé og tanke. Oslo: Forlaget Tanum-Norli A/S.

Waadeland, C.H. (1999). Rhythmic Frequency Modulation – A New Synthesis of Rhythmic Expression in Music. In Feichtinger & Dörfler (Eds.), *DIDEROT FORUM on Mathematics and Music. Computational and Mathematical Methods in Music* (335-350). Vienna: Österreichische Computer Gesellschaft.

Waadeland, C.H. (2000). *Rhythmic Movements and Moveable Rhythms – Syntheses of Expressive Timing by Means of Rhythmic Frequency Modulation.* Dissertation. Trondheim: Department of Musicology, Norwegian University of Science and Technology.

Waadeland, C.H. (2001). ”It Don’t Mean a Thing If It Ain’t Got That Swing” – Simulating Expressive Timing by Modulated Movements. *Journal of New Music Research 30*(1), 23-37.

Waadeland, C.H. & Saue, S. (1999). Computer Implementation of Rhythmic Frequency Modulation in Music. In J. Tro & M. Larsson (Eds.), *Proceedings 99 Digital Audio Effects Workshop, Trondheim, December 9-11, 1999* (185). Trondheim: Department of Telecommunications, Acoustic Group, Norwegian University of Science and Technology.

Programkomitéen

Gudmundur Birgisson is an assistant professor of mathematics education at the Iceland University of Education. He studied philosophy and mathematics at the University of Iceland, and Mathematics Education at Indiana University. He taught mathematics, physics, and philosophy in secondary schools in Reykjavik for several years. In 1998 he was appointed Assistant Professor of Mathematics Education at the Iceland University of Education where he has taught graduate and undergraduate courses on mathematics, mathematics education and the philosphy of mathematics education. He has authored educational software in mathematics, and published web based materials for use with preservice teachers. Homepage: http://www.birgisson.com

Morten Blomhøj, f 1959 er lektor i matematik ved IMFUFA Roskilde Universitetscenter med matematikkens didaktik som forskningsfelt. Han er daglig leder af Center for Forskning i Matematiklæring (se http://mmf.ruc.dk/~bds/123.htm) og formand for den lokale organisationskomité for verdenskongressen ICME-10, der afholdes 4.-11. juli 2004 i København (se http://www.ICME-10.dk/). Hjemmeside: http://mmf.ruc.dk/~bds/hvemervi.htm#morten

Lisen Häggblom är lektor i matematikdidaktik vid Institutionen för lärarutbildning i Vasa, Finland. Hon har lett utvecklingsarbete inom förskola och grundskola och medverkat vid nationellt lärolansarbete. Skriver läromedel i Finland och Sverige och är aktiv inom fortbildningen i de båda länderna. Hon disputerade våren 2000 med avhandlingen Räknespår- Barns matematiska utveckling från 6 till 15 års ålder.

Ingvill M. Holden er faglig leder ved Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen. Hun har bakgrunn som lærer i videregående skole, doktorgrad i algebra, og har i de siste seks årene arbeidet med forsknings- og utviklingsarbeid i matematikkdidaktikk ved NTNU. Hennes interessefelt er først og fremst motivasjon og elevers lyst til å lære, samt lærerens viktige rolle som igangsetter og inspirator. Hun har holdt en rekke kurs over hele landet for lærere i alle skoleslag, og har mange samarbeidsprosjekter med lærere i skolen. Hjemmeside: www.matematikksenteret.no/ingvill

Bengt Johansson er föreståndare för Nationellt Centrum för Matematikutbildning (www.ncm.gu.se) vid Göteborgs Universitet i Sverige.

Frode Rønning er professor i matematikk ved Høgskolen i Sør-Trøndelag, Avdeling for lærerutdanning og tegnspråk. Han har forskningsbakgrunn fra kompleks analyse og arbeider spesielt med geometrisk funksjonsteori. Han driver utviklingsarbeid med elevaktive arbeidsformer i matematikk og er spesielt opptatt av ulike aspekter ved geometri, bl.a. koblinger mellom matematikk og kunst. Han har også arbeidet en del med bruk av IKT i matematikkundervisning. Hjemmeside: http://www.alt.hist.no/adm/tilsattcv/froder.php