Adresseavisens Abelkonkurranse

Lille Abel, Store Abel og instituttets nøtt

Matematiske nøtter og problemløsningsoppgaver

En oppgavesamling fra jubileumsåret 2002

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

FORORD

UKENS STORE- OG LILLE ABEL

I forbindelse med 200-årsjubileet for Niels Henrik Abels fødsel, hadde Ingvill M. Stedøy (den gang Holden) en avtale med Adresseavisa. Hver lørdag presenterte vi spennende problemløsningsoppgaver i avisa. Leserne ble oppfordret til å sende inn forslag til løsninger via internett, og hver uke trakk vi ut en "Ukas lille Abel" og en "Ukas store Abel". Oppgavene for Ukas lille Abel er laget så de er mulige å løse med grunnskolens matematikk som basis. Ukas store Abel krever litt mer kunnskap, og framfor alt evne til problemløsnig, logisk tenking og kreativitet. Et hundretalls personer leverte løsninger hver uke, og vi vet at MANGE satt rundt frokostbordene lørdag morgen og koste seg med oppgavene.

Jeg ønsker at oppgavene skal leve videre, og at mange barn, ungdom og voksne skal få gleden av å prøve seg på dem. Ved å løse slike oppgaver, blir man en bedre tenker og problemløser, noe man vil ha glede av i mange andre sammenhenger enn matematikktimene på skolen. Det er dessuten god hjernetrim, og det er ikke å kimse av!

Oppgavene kan brukes i den daglige undervisningen, man kan lage en konkurranse på skolen, en Matematikkens dag, bruke dem i bursdagsselskaper, på foreldremøter, ja overalt hvor mennesker samles!

Kos dere med oppgavene, og bli store og små "Abel-er"!

Ingvill Merete Stedøy
Faglig leder

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Faglig ansvarlig: Ingvill M. Stedøy
Heftet er redigert av Pål Erik Lauritzen Ekholm

2005©Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen
Trykk: NTNU-trykk
ISBN: 82-471-6011-0

Godt nytt Abel-år!

Innlegg fra Ingvill Stedøy (Holden)
Adresseavisen, 4. januar 2002
(Med enkelte små justeringer.)

Året er 2002. Mange norske barn synes matematikk er vanskelig. Mange synes det er flaut å si at matematikk er gøy.

Året er 1802. En liten gutt blir født på Finnøy prestegård. Han får navnet Niels Henrik, og er sønn av Anne Marie og Søren Georg Abel. Denne lille gutten skal komme til å sette så varige spor i matematikken at navnet hans nevnes med ærefrykt av alle som kjenner høyere matematikk.

Året er 1829. Niels Henrik har levd et liv fylt av en kamp for tilværelsen. Han har skapt matematikk i et slikt tempo og med så nye og geniale ideer og metoder at denne unge mannens arbeider har blitt lest med beundring av verdens største matematikere i Frankrike og Tyskland. Men i Norge er det ingen som er i stand til å forstå det han har skapt. Det er ikke funnet stilling til ham ved Universitetet i Oslo, og han må klare seg med lite mat og kummelig husvære. Han låner penger fra gode venner og støttespillere. Hans danske kjæreste og forlovede, Christine Kemp, er guvernante på Froland verk utenfor Arendal og venter på at han skal få en stilling så de kan gifte seg. Men Niels Henrik har fått tuberkulose. Han ligger på det såkalte bukkerommet på Froland verk og hoster blod - og dør den 6. april, før han er 27 år gammel. To dager senere sendes et brev til ham om at han vil få fast stilling ved universitetet i Berlin.

Året er 1902. Abel-jubileet skal markeres. Morgenbladet trykker reportasjer og stoff under overskriften "Abeljubilæet". Fridtjov Nansen er formann i festkomiteen og vil at minnefesten skal markere Norge som kulturnasjon. Bjørnstjerne Bjørnson mottar en forespørsel fra Nansen der det står: "For mig står det som vor pligt at gjøre mest mulig ud af begivenheder som en Abels fødsel i vor nation; ved at fremhæve dette for al verden fremhæver vi vor ret til at eksistere som egen kulturstat; men dessverre har vi bare en Abel; leiligheden kommer ikke igjen på 100 år." Bjørnsons dikt ved Abel-festen slutter slik:

En vestlands-gut var han
på vel et snes aar.
Nu verden ham eier;
men gutten var vor.

Året er 2002. "Leiligheden" er kommet igjen! Vi skal få nordmenn til å forstå at matematikk er en viktig del av vår kultur. Vi skal være stolte over at Niels Henrik Abel var norsk. Alle nordmenn bør kjenne hans livshistorie og få et glimt av geniets storhet. Vi skal benytte anledningen til å vise at matematikk er spennende, morsomt og viktig på alle nivå. Alle bør få oppleve gleden ved å løse et matematisk problem som de må streve litt med å få til. I februar skal skoler over hele landet arrangere skolenes matematikkdag med spill, problemløsning og geometrisk kunst. Abel-konkurransen for elever i videregående skole og KappAbel-konkurransen for elever i ungdomsskolen skal arrangeres i Froland. Universitetet i Oslo arrangerer en stor internasjonal Abel-konferanse. Det blir etablert utdeling av en årlig Abel-pris på linje med Nobelprisen. Dagbladet skal presentere daglige matematikkoppgaver i et "Abel-hjørne" i avisa, Adresseavisen kommer med to matematikkoppgaver hver lørdag. Forhåpentligvis vil TV-kanaler og aviser over hele landet presentere matematikk og Abel-stoff som er spennende for alle. Matematikk skal være satsningsområde for mange skoler over hele landet og lærere skal kurses og skoleres. Foreldre skal ikke si til barn som kommer for å

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

få hjelp med matematikken at "jeg har aldri skjønt matematikk, men jeg har da klart meg bra allikevel", men heller si: "Kanskje vi kan klare å finne det ut sammen!" Matematikkskrekk skal erstattes med matematikkglede! Hvorfor ikke prøve en liten oppgave fra institutt for matematikk sin konkurranse i samarbeid med Adresseavisen:

> Vi definerer en relativ primtallsdag til å være en dag der dagens nummer og månedens nummer er relativt primiske tall. To tall er relativt primiske når de ikke har noen felles faktor bortsett fra 1. For eksempel er den 25/12 en slik dag, siden 25 og 12 ikke har noen felles faktor. Men 28/12 er ikke en relativ primtallsdag, siden 28 og 12 har 4 som felles faktor. Hvilken måned har det minste antall relative primtallsdager?

Oppgaven er hentet fra ”lille Abel” og er ellers å finne på side 18.

Lille Abel - Innhold

OPPGAVER	DATO PUBLISERT	SIDE
Billigsalg?	- lagt ut lørdag den 16. februar 2002	7
Alder	- lagt ut lørdag den 23. februar 2002	7
Vektproblemer	- lagt ut lørdag den 2. mars 2002	7
Flaskehals	- lagt ut lørdag den 9. mars 2002	7
Hukommelsestap	- lagt ut lørdag den 16. mars 2002	8
Blyanter	- lagt ut lørdag den 23. mars 2002	8
Sprettballen	- lagt ut lørdag den 30. mars 2002	8
Trekanten	- lagt ut lørdag den 13. april 2002	8
Snekkeren	- lagt ut lørdag den 20. april 2002	8
Tosifret tall	- lagt ut lørdag den 27. april 2002	9
Engelsk bokstavregning?	- lagt ut lørdag den 4. mai 2002	9
Størst produkt	- lagt ut lørdag den 11. mai 2002	9
Utbrettet kube	- lagt ut lørdag den 18. mai 2002	9
To målebokser	- lagt ut lørdag den 25. mai 2002	10
Prosent	- lagt ut lørdag den 8. juni 2002	10
Nabotall	- lagt ut lørdag den 15. juni 2002	10
Tangram	- lagt ut lørdag den 29. juni 2002	10
Minus-trekanten	- lagt ut lørdag den 6. juli 2002	11
Avistrøbbel	- lagt ut lørdag den 13. juli 2002	11
Sum 100	- lagt ut lørdag den 20. juli 2002	11
Gult hår	- lagt ut lørdag den 27. juli 2002	11
Sykkeltur	- lagt ut lørdag den 3. august 2002	12
Terningtårn (innsendt av Morten Blomhøj)	- lagt ut lørdag den 10. august 2002	12
Hvor mange barn? (Bidrag fra Torgeir Onstad)	- lagt ut lørdag den 17. august 2002	12
Pilspill	- lagt ut lørdag den 24. august 2002	12
Fiskekonkurransen	- lagt ut onsdag den 4. september 2002	13
Sekskanter	- lagt ut lørdag den 7. september 2002	13
Fredag den 13.	- lagt ut lørdag den 14. september 2002	13
Synligfaktortall	- lagt ut lørdag den 21. september 2002	13
Magisk trekant 1	- lagt ut lørdag den 5. oktober 2002	14
Oppdeling	- lagt ut lørdag den 12. oktober 2002	14
Iskremvalg	- lagt ut mandag den 21. oktober 2002	14
Husnummer	- lagt ut lørdag den 26. oktober 2002	15
Sats på høns	- lagt ut lørdag den 2. november 2002	15
Røde og svarte kort	- lagt ut lørdag den 9. november 2002	15
Dobbelt og tredobbelt	- lagt ut lørdag den 16. november 2002	16
Pizzakveld	- lagt ut lørdag den 23. november 2002	16
Kvadrattall	- lagt ut lørdag den 30. november 2002	16
Barnestjerne	- lagt ut lørdag den 7. desember 2002	17
Julehandel	- lagt ut onsdag den 18. desember 2002	17
Skitur	- lagt ut lørdag den 21. desember 2002	17
Relative primtallsdager	- lagt ut lørdag den 28. desember 2002	18
Løsningsforslag		19-32

Billigsalg?

Hva blir billigst hvis du skal kjøpe en vare:

a. Prisen settes opp med 10%. Etterpå settes den ned med 10%.
b. Prisen settes ned med 10%. Etterpå settes den opp med 10%.
c. Prisen er den samme hele tiden.

Begrunn svaret ditt.

Alder

- Hvor gammel er du, tante Anne?
- Jeg er 40 år pluss en femdel av min egen alder.
- Hvor gammel er du da, onkel Per?
- Jeg er 20 år pluss 60% av min egen alder.

Hvor gammel er tante Anne og hvor gammel er onkel Per? Forklar hvordan du kom fram til svaret.

Vektproblemer

Ida, Ada og Oda skulle veie seg. Men den vekta de skulle bruke, kunne bare brukes for noe som var tyngre enn 100 kg. Da fant jentene ut at de kunne veie seg to og to.
Ida og Ada veide 124 kg til sammen. Ida og Oda veide 118 kg til sammen. Ada og Oda veide 130 kg til sammen.
Hvor mye veide hver av jentene? Forklar hvordan du kom fram til svaret.

Flaskehals

En flaske som rommer $^1/_3$ liter er fylt $^3/_4$ full med vann.
Vi heller ut vann så det er $^1/_5$ liter vann igjen i flasken. Hvor mange cl vann har vi helt ut? Forklar hvordan du kom fram til svaret.

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Hukommelsestap

Maria skulle besøke en ny venn, men hun hadde glemt hvilket husnummer han bodde i. Hun husket at det var større enn 100 og mindre enn 150. Hun ringte vennen på mobiltelefon, men han ville ikke si det!
Nå skal jeg teste hvor god du er i matte, sa han. Husnummeret er et partall, og det er delelig både med 3 og 11. Kan dere hjelpe Maria å finne fram?
Forklar hvordan du kom fram til svaret.

Blyanter

En lærer gir noen elever 2 blyanter hver. Hvis hun hadde gitt dem 5 blyanter hver, ville hun trenge 27 ekstra blyanter.
Hvor mange elever fikk blyanter? Forklar hvordan du kom fram til svaret.

Sprettballen

En ball spretter opp halve høyden av der den ble sluppet fra. Den slippes fra vinduet i en skyskraper, 128 meter over bakken, og fortsetter å sprette.
Hvor stor avstand har ballen tilbakelagt når den treffer bakken for 5. gang?

Trekanten

Til enhver trekant finnes tre høyder og til hver høyde hører en grunnlinje. Tegn en trekant der to av høydene er like lange som den tilhørende grunnlinja.

Snekkeren

En snekker snekret trebente stoler og firbente bord. En dag hadde han brukt 31 ben. Hvor mange stoler og hvor mange bord kan han ha brukt?
Forklar hvordan du kom fram til svaret.

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Tosifret tall

Jeg er et tosifret tall. Når jeg blir multiplisert med summen av mine sifre, blir resultatet 70. Hvilket tall er jeg?
Forklar hvordan du kom fram til løsningen.

Engelsk bokstavregning?

Nedenfor skal hver bokstav erstattes med et ensifret tall slik at regnestykket stemmer.

ONE + ONE = TWO

Like bokstaver står for samme tall. To ulike bokstaver står for ulike tall. Hvor mange løsninger finnes det?

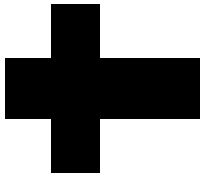
Forklar hvordan du tenker.

Størst produkt

Lag et tresifret og et tosifret tall med sifrene 9, 8, 7, 6 og 5, slik at produktet av de to tallene får størst mulig verdi. Alle sifrene skal brukes én gang.

Utbrettet kube

Nedenfor ser du en figur som består av 6 sammenhengende kvadrater. Den svarte figuren kan klippes ut i ett stykke og brettes til en kube (terning).



Hvor mange ulike kombinasjoner av seks kvadrater kan klippes ut i et stykke og brettes til en kube? (Tegn gjerne figurer!) Figurene er ulike hvis de ikke kan dekke hverandre når de klippes ut.

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

To målebokser

Du har to bokser. Den ene rommer nøyaktig 9 dl og den andre rommer 4 dl. Hvordan skal du kunne måle opp nøyaktig 6 dl vann når du bare kan bruke disse to boksene?

Prosent

Hvis A er 35% av B og C er 75% av B, hvor mange prosent av C er A? Forklar hvordan du kom fram til svaret.

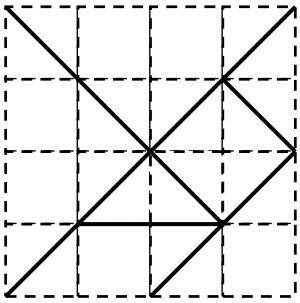
Nabotall

Plassér tallene 1 til 8 der det står X slik at to kvadrater som inneholder etterfølgende tall aldri deler en side eller et hjørne.

	X	X	
X	X	X	X
	X	X	

Tangram

Tangram er et puslespill der et kvadrat er delt opp i sju biter. Hvor mange forskjellige typer firkanter kan lages med de sju brikkene? (Bruk alle brikkene.) Forklar hvordan du kom fram til svaret.



Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Minus-trekanten

Tallene 1, 2, 3, 4, 5, 6 nedenfor er plassert i en "minus-trekant". Det betyr at differansen mellom to tall som står ved siden av hverandre, er lik tallet som står mellom dem på raden nedenfor. Plassér tallene fra 1 til 10 i en minus-trekant.

6 2 5

4 3

1

Avistrøbbel

En avis har 60 sider. Hele arket med blant annet side 7 er borte. Hvilke andre sidetall mangler?
Forklar!

Sum 100

123-45-67+89=100. Her er sifrene 1 til 9 brukt i stigende rekkefølge med færrest mulig + og – tegn mellom slik at svaret blir 100. Sett opp et tilsvarende uttrykk der du bruker sifrene fra 1 til 9 i synkende rekkefølget. Svaret skal fortsatt bli 100.

Gult hår

Av 87 personer med blå øyne har 34 gult hår og 49 er gutter. 9 gutter har gult hår. Hvor mange av jentene har ikke gult hår? Forklar hvordan du kom fram til svaret.

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Sykkeltur

Sju barn sykler på tohjuls- og trehjulssykler. Syklene har til sammen 19 hjul. Hvor mange tohjulssykler og hvor mange trehjulssykler har barna?

Terningtårn (innsendt av Morten Blomhøj)

Tenk deg at du har et stort lager av vanlige spilleterninger som du skal bygge tårn med. Du skal bygge et tårn på en slik måte at summen av øynene på sideflater som ligger mot hverandre, har en fast verdi. Hvilke verdier kan du velge, og hvor høyt tårn kan du bygge for hver verdi? Prøv gjerne med dine egne terninger.

Hvor mange barn? (Bidrag fra Torgeir Onstad)

Noen barn skal dele noen mynter. Etter å ha telt pengene, sier et av barna: ”Det går ikke an å dele likt.” Et annet barn sier: ”Hvis vi hadde vært et barn mindre, hadde det gått an å dele likt.” Et tredje barn sier: ”Hadde vi vært et barn mer, kunne vi også ha delt likt!” Et fjerde barn sier: ”Og da hadde vi fått like mange mynter som vi er antall barn.” Hvor mange barn var det som skulle dele mynter, og hvor mange mynter var det?

Pilspill

Hvert trekk i et spill består i å snu to piler som ligger ved siden av hverandre. Oppgaven går ut på å forandre pilene fra ↑↑↑↓↓↓ til ↑↓↑↓↑↓ med så få trekk som mulig. Vis trekkene.

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Fiskekonkurransen

I en fiskekonkurranse får du 10 kr for hver fisk over 1,5 kilo og du må betale 20 kr for hver fisk under 1,5 kilo. Oda fikk 12 fisk. Hun hverken tapte eller vant penger. Hvor mange av fiskene hennes veide mindre enn 1,5 kilo?

Synligfaktortall

Et synligfaktortall er et tall der alle sifrene som ikke er 0, deler tallet. For eksempel er 424 og 303 synligfaktortall, siden 4 og 2 deler 424 og 3 deler 303. Hvor mange synligfaktortall under 100 finnes det?

Fredag den 13.

I går var det fredag den 13. Finnes det alltid minst en fredag den 13. i hvert år? Hvordan kan du være sikker?

Sekskanter

En sekskant skal tegnes i et rutenett. Hver rute er en aralenhet (har areal 1). Alle hjørnene må ligge i et kryss i rutenettet. Arealet skal være 6. Tegn tre ulike sekskanter som oppfyller disse kravene. Ingen av sekskantene skal kunne dekke over hverandre hvis du klipper dem ut.

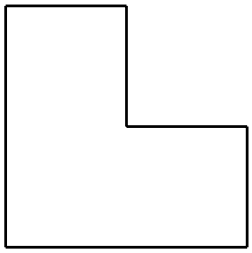
Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Magisk trekant 1

Plasser tallene 1, 2, 3, 4, 5, 6 på en likesidet trekant, med ett tall i hvert hjørne og ett tall på hver sidekant, slik at summen blir den samme uansett hvilken side du summerer langs. Hvor mange løsninger kan du finne med ulik sum? Hvordan kan du vite om du har funnet alle løsningene?

Oppdeling

Del figuren nedenfor I fire deler med nøyaktig same størrelse og form



Iskremvalg

I Janes iskrembutikk har de fem ulike smaker hver dag. I dagens utvalg er blant annet vanilje, sjokolade, bringebær og pistasj. Ved siden av kan du få hjemmelagd vaffel, iskjeks eller sukkerkringle. Hvis Petter bestiller to kuler is, hvor mange ulike typer kan han få? Det spiller ingen rolle hvilken smak som velges først.

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Husnummer

Huset mitt ligger i en vei med husnummer i rekkefølge 1, 2, 3, 4, 5, … En dag oppdaget jeg at jeg tilfeldigvis bor slik at summen av alle husnummer mindre enn mitt nummer er den samme som summen av alle husnummer større enn mitt. Kan du finne hvilket nummer jeg bor i, og hvor mange hus det er i min vei, når du får vite at husnummeret mitt er mellom 29 og 40?

Sats på høns

En bonde har griser og høner, til sammen 304 dyr. En dag bestemmer han seg for å kvitte seg med alle griser og satse på flere høner isteden. For hver gris han selger, kjøper han 17 høner. Etter dette har han 368 høner. Hvor mange griser byttet han bort?

Røde og svarte kort

Ta en kortstokk og stokk den godt. Legg 30 tilfeldige kort på bordet. Tell antall svarte kort på bordet. Tell antall røde kort på handa.
Finn differansen.
Forklar hvorfor det alltid blir samme svar.

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Dobbelt og tredobbelt

Nedenfor har vi plassert sifrene 1 til 9 slik at de danner tre tresifrede tall. Det midterste er dobbelt så stort som det øverste og det nederste er treganger så stort som det øverste. Da er også det nederste lik summen av de to over.

192
384
576

Det finnes tre andre måter å plassere 1 til 9 slik at dette skjer. Vi vil ha det STØRSTE tallet som kan stå øverst for å få til dette.

Pizzakveld

En skoleklasse med 21 elever var ute og spiste pizza sammen med matematikklæreren sin. Hun satt ved enden av bordet. Da de skulle betale, foreslo en av elevene at tilfeldighetene skulle få avgjøre hvem som skulle betale for festen: "La oss telle til 7 så mange ganger som nødvendig. Hver gang vi kommer til 7, reiser vedkommende seg og forlater bordet. Den som sitter igjen som sistemann, betaler regningen." Alle syntes dette var en morsom måte å avgjøre saken på. Det viste seg at det var læreren som ble sittende igjen til slutt og måtte betale. Da de begynte tellingen for å avgjøre hvem som skulle betale, begynte de å telle på den eleven som kom med forslaget og fortsatte å telle MED KLOKKA inntil bare én person - nemlig læreren - satt igjen. På hvilken plass satt eleven som kom med forslaget i forhold til læreren?

Kvadrattall

Plassér de hele tallene fra 1 til 15 ved siden av hverandre slik at summen av to tall som står ved siden av hverandre er et kvadrattall. Alle tallene skal brukes nøyaktig én gang.

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Barnestjerne

Den store indiske matematiker Ramanujan, kom som ung mann til England der han skulle besøke den kjente matematikeren Hardy. Den lange reisen tok hardt på Ramanujan, og han ble bragt til sykehuset før han fikk hilst på Hardy. Hardy tok en taxi til sykehuset for å besøke ham. Han hadde ikke så mye å si til den unge mannen, så samtalen begynte med at han sa:"Det var et kjedelig nummer på taxien jeg tok hit. Nummeret var 1729." Da reiste Ramanujan seg ivrig opp i senga og sa: "Mr. Hardy, det er ikke noe kjedelig tall! Det er det minste tallet som kan skrives som en sum av to kubikktall på to forskjellige måter!" Hvilke sammenhenger hadde Ramanujan sett?

Julehandel

Under julehandelen bestemte en kjøpmann seg for å senke prisen på en vare slik at prisen ble like mange prosent over nettoprisen på 100 kr som under bruttoprisen på 125 kr. Hvilken pris solgte han varen for?

Skitur

I skogen er det tre forskjellige skiløyper. Den rød løypa er 2,5 km, den grønne er 5 km og den gule er 10 km. Alle løypene er rundløyper og starter og slutter på samme sted. På hvor mange ulike måter kan du gå 15 km i disse løypene når du må gå hele runder. Det telles ikke som en ny måte hvis du går motsatt vei. Skriv opp kombinasjonene.

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Relative primtallsdager

Vi definerer en relativ primtallsdag til å være en dag der dagens nummer og månedens nummer er relativt primiske tall. To tall er relativt primiske når de ikke har noen felles faktor bortsett fra 1. For eksempel er den 25/12 en slik dag, siden 25 og 12 ikke har noen felles faktor. Men 28/12 er ikke en relativ primtallsdag, siden 28 og 12 har 4 som felles faktor. Hvilken måned har det minste antall relative primtallsdager?

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Løsninger

Lille Abel

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Billigsalg?

Anta at prisen var 100 kr. Etter 10% øking, er prisen 100kr×1,1=110kr. Når den etter på minker med 10%, er prisen 110kr×0,9=99kr. Hvis prisen først minker med 10%, så øker med 10%, blir prisen 100kr×0,9×1,1=99kr.

Alternativ *a* og *b* er altså like. Dette lønner seg framfor *c*.

Alder

Tante Anne og onkel Per er begge 50 år.

Anne er $x = 40 + (^1/_5)x$, som gir
$(^4/_5)x=40$ og $x=50$.

Per er $y=20+0{,}6y$, som gir $0{,}4y=20$ og $y=50$.

Det går også an å prøve seg fram.

Vektproblemer

Vi skriver bare forbokstavene:
$I+A=124$
$I+O=118$
Da er $2I+(A+O)=124+118=242$
Men $A+O=130$. Slik at $2I+130=242$ som gir $I=56$. Da er $O=124-56=68$. Og $A=118-56=62$.
Altså: Ida veier 56 kg, Ada veier 68 kg og Oda veier 62 kg.

Flaskehals

Det er $^3/_4$ av $^1/_3$ liter på flaska til å begynne med, det vil si $^3/_{12}$ eller $^1/_4$ liter.

Når det er $^1/_5$ liter vann i flaska, har vi helt ut $^1/_4$ - $^1/_5$ liter. Det er det samme som $^5/_{20} - ^4/_{20}$ liter som er lik $^1/_{20}$ liter. Det er 0,05 liter, eller 5 cl.

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Hukommelsestap

Et tall som skal være delelig med både 3 og 11, må være delelig med 33. Det skal være et partall mellom 100 og 150.

Ser vi på 33-gangen, har vi 33, 66, 99, 132, 165. Det må være 132.

Blyanter

Her kan vi enten sette opp tabell slik:

Elever	2 hver	5 hver	Forskjell
1	2	5	3
2	4	10	6
3	6	15	9
4	8	20	12
5	10	25	15

Nå ser vi mønsteret, slik at når det er 27 i forskjell, må det være 9 elever.

Eller vi kan løse en likning med x som antall elever.

Likningen blir: $2x + 27 = 5x$ som gir $x=9$.

Sprettballen

Ballen spretter
128 m (ned1) +
64 m (opp1) +
64 m (ned2) +
32 m (opp2) +
32 m (ned3) +
16 m (opp3) +
16 m (ned4) +
8 m (opp4) +
8 m (ned5) = 368 m.

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Trekanten

En likebeint, rettvinklet trekant vil gi riktig svar.

Snekkeren

Vi setter opp en tabell:

Stoler	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Bein	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30

Bord	1	2	3	4	5	6	7
Bein	4	8	12	16	20	24	28

Kombinasjon av bordbein og stolbein skal bli 31 til sammen. Da kan vi ha 3+28, 15+16 eller 27+4. Løsningene er at snekkeren kan ha laget: 1 stol og 7 bord, 5 stoler og 4 bord eller 9 stoler og 1 bord.

Tosifret tall

14. Vi finner løsningen ved å faktorisére 70.
$70 = 70 \times 1 = 7 \times 10 = 14 \times 5 = 35 \times 2$.
Det eneste tilfellet der summen av sifrene i den tosifrede faktoren er lik det ensifrede tallet, er 14.

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Engelsk bokstavregning?

Det finnes 16 ulike løsninger.
O må være et partall, siden det er summen av to like tall (E). O+O skal være et ensifret tall, siden svaret (TWO) er tresifret. O må derfor enten være 2 eller 4. Med dette som utgangspunkt finner du alle muligheter for N som gjør at ulike bokstaver får ulik verdi. Her er løsningene:

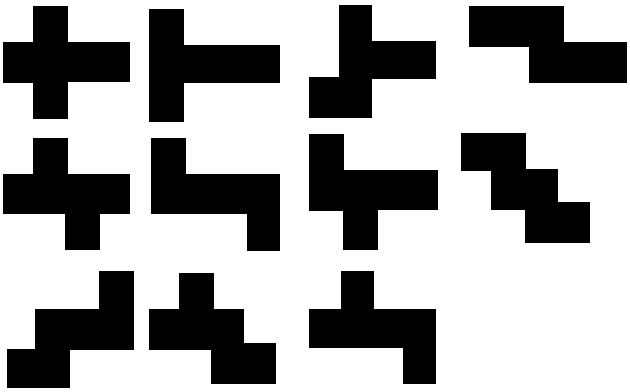
- 432 + 432 = 864
- 452 + 452 = 904
- 482 + 482 = 964
- 407 + 407 = 814
- 417 + 417 = 834
- 427 + 427 = 854
- 457 + 457 = 914
- 467 + 467 = 934
- 231 + 231 = 462
- 271 + 271 = 542
- 281 + 281 = 562
- 291 + 291 = 582
- 206 + 206 = 412
- 216 + 216 = 432
- 236 + 236 = 472
- 286 + 286 = 572

Størst produkt

875 × 96 = 84000 gir det største produktet.

Utbrettet kube

Det er 11 ulike måter å sette sammen seks kvadrater, slik at de kan klippes ut i ett stykke og brettes til en kube.



Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

To målebokser

Trinn 1:
Fyll 9 dl boksen. 4 dl boksen er tom.
Tinn 2:
Fyll vann i 4 dl boksen fra 9 dl boksen. Nå er det 5 dl i den store boksen og 4 dl i den lille.
Trinn 3:
Tøm ut vannet fra 4 dl boksen.
Trinn 4:
Fyll 4 dl boksen med vann fra den store boksen. Nå er det 1 dl i den store og 4 dl i den lille boksen.
Trinn 5:
Tøm ut vannet fra den lille boksen.
Trinn 6:
Tøm den ene del fra den store boksen over i den lille. Nå er den store boksen tom og det er 1 dl i den lille.
Trinn 7:
Fyll den store boksen med vann.
Trinn 8:
Fyll den lille boksen med vann fra den store. Nå er det 6 dl i den store boksen.

Det finnes andre måter å gjøre det på.

Prosent

46,67%.
Vi har at $A = 0{,}35 \times B$ og $C = 0{,}75 \times B$. Da er $A/C = 0{,}35:0{,}75 = 13/35 = 0{,}4667$.

Det vil si at $A = 46{,}67\% \times C$.

Nabotall

	3	5	
7	1	8	2
	4	6	

Det finnes flere løsninger.

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Tangram

Det kan lages kvadrat, parallellogram, trapes (symmetrisk og usymmetrisk) og rektangel.

Minus-trekanten

En mulig løsning er:

8 10 1 6
2 9 5
7 4
3

Avistrøbbel

Side 8, side 52 og side 53.

Siden det er 60 sider, og side 1 er en høyre-side, må side 7 være en høyre-side. På samme ark er side 8. Det er 6 sider før arker som mangler, så da er det seks sider etter arket som mangler bakerst i avisa. Dette er alle sidene fra og med side 54 til 60. Det betyr at side 52 og 53 mangler.

Sum 100

98-76+54+3+21=100

Gult hår

13 jenter har ikke gult hår. Av de med 34 som har gult hår, er 9 gutter. Da må 25 være jenter. Det er 87-49=38 jenter til sammen, det vil si at 38-25=13 jenter har ikke gult hår.

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Sykkeltur

Det er tre muligheter, nemlig: 1 trehjulssykkel og 8 tohjulssykler, 3 trehjulssykler og 5 tohjulssykler eller 5 trehjulssykler og 2 tohjulssykler. Forklaring: Totalt antall hjul på trehjulssyklene må være et tall i tregangen som er mindre enn 19. Det kan være: 3 6 9 12 15 18 Totalt antall hjul på tohjulssykler må være et tall i togangen som er mindre enn 19. Det kan være: 2 4 6 8 10 12 14 16 18. Kombinasjoner som gir sum 19, er: 3+16 (dvs 1 trehjul og 8 tohjul), 9+10 (dvs 3 trehjul og 5 tohjul) eller 15+4 (dvs 5 trehjul og 2 tohjul).

Terningtårn (innsendt av Morten Blomhøj)

Du kan velge heltallssummer fra og med 2 til og med 12. Det er viktig å vite at summen av øynene på to motstående sideflater på en terning er 7. Den minste verdien du kan velge for summen er 2. Da må to enere ligge mot hverandre, og tårnet blir to terninger høyt. Velger du sum 3, vil 1 og 2 måtte ligge mot hverandre, og tårnet blir også denne gangen to terninger høyt. Sum 4 gir også to terninger: 1 mot 3 eller 2 mot 2. Det blir ikke høyere fordi på andre siden av 3 er 4, og må andre siden av 2 er 5. Vi lister opp:

Sum 2: 2 terninger, sum 3: 2 terninger, sum 4: 2 terninger, sum 5: 3 terninger, sum 6: 6 terninger, sum 7: så høyt du vil (uendelig), sum 8: 4 terninger, sum 9: 2 terninger, sum 10: 2 terninger, sum 11: 2 terninger og sum 12: 2 terninger.

Hvor mange barn? (Bidrag fra Torgeir Onstad)

Det var 5 barn og 36 mynter. Det finnes en mulighet med 3 barn og 16 mynter, men da passer ikke oppgaveteksten som sier at det er minst 4 barn.

Pilspill

Du kan klare det med tre trekk: ↑↑↑↓↓↓ ↑↓↓↓↓↓ ↑↓↑↑↓↓ ↑↓↑↓↑↓

Fiskekonkurransen

Oda må ha fått dobbelt så mange fisk over 1,5 kilo som under 1,5 kilo. Da er 1/3 av fiskene under 1,5 kilo, det vil si fire fisk.

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Synligfaktortall

Det finnes 32 ulike synligfaktortall. - alle ensifrede tall og endel tosifrede tall. Disse tallene er: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 , 8, 9, 10, 11, 12, 15, 20, 22, 24, 30, 33, 36, 40, 44, 48, 50, 55, 60, 66, 70, 77, 80, 88, 90, 99.

Fredag den 13.

Ja, det finnes alltid. Sett opp alle muligheter for hvilken ukedag 1. januar kan være, og regn ut hvilken ukedag 13. januar, 13. februar, 13. mars osv. faller på i hvert tilfelle. Hvis 1. jan. er en søndag, har vi fredag den 13. januar. Hvis 1. januar er mandag, har vi fredag den 13. april. Slik fortsetter vi. Tirsdag gir fredag den 13. i september, onsdag i juni, torsdag i februar, fredag i august og lørdag i mai. Det kan også bli flere fredag den 13. utover i året i noen av tilfellene. Vi gjør tilsvarende for skuddår.

Sekskanter

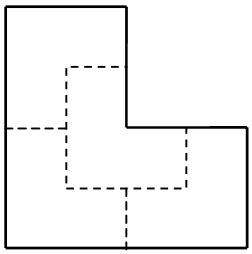
Det finnes mange ulike løsninger. En finner du ved å tegne et kvadrat på 4 ruter og henge på et rektangel på 2 ruter. En annen finner du ved å sette sammen to trapes med de to parallelle sidene på henholdsvis 1 og 5 lengdeenheter og høyde 1 lengdeenhet. En tredje kan du få ved å sette sammen et trapes med parallelle sider 2 og 5 lengdeenheter og høyde 1 lengdeenhet med et rektangel på 2x1 ruter.

Magisk trekant 1

Det finnes fire ulike løsninger, med sum 9, 10, 11 og 12. Det kan ikke finnes noen løsning med sum mindre enn 9 og ingen med sum større enn 12. Dette fordi alle tallene summeres en gang, dvs sum 21, og i tillegg summeres hjørnene en gang til. Minste sum er når de små tallene står i hjørnene. Da er summen langs hver sidekant (21+1+2+3):3=9. Med de store tallene i hjørnet, blir summen (21+4+5+6):3=12. Vi får sum 10 ved å plassere oddetall i hjørnene, og sum 11 ved å plassere partallene i hjørnet.

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Oppdeling



Iskremvalg

45 muligheter. Det er 15 ulike måter å kombinere to iskremkuler på når det er fem smaker og vi kan velge to like. For hver av disse, er det tre ulike kjekser.

Husnummer

Jeg bor i nr 35 og det er 49 hus i veien der jeg bor. Ved å prøve seg litt fram, finner en at 1+2+3+4+…+33+34=595 og 36+37+38+…+48+49=595

Sats på høns

Det må bli 4 griser, siden 17•4=68. Av de 304 dyra, er 4 griser og 300 høner. De 4 grisene byttes mot 68 høner.

Røde og svarte kort

La x være antall svarte kort på bordet. Da er det 30 - x røde kort på bordet. Siden det er 26 røde kort til sammen, er det x - 4 røde kort på handa. (Legg merke til at det alltid er færre røde kort på handa enn det er svarte kort på bordet. Hvorfor det?). Differansen er da 4.

Bemerkning: Hvis det ikke er noen røde kort på handa, er det 26-22=4 svarte kort på bordet, så differansen er fortsatt 4. Det kan ikke være mindre enn 4 svarte kort på bordet.

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Dobbelt og tredobbelt

Mulige løsninger er 219, 273 og 327. Svaret er derfor 327.

Pizzakveld

De begynte å telle på nummer seks med sola fra der læreren sitter.

Kvadrattall

8-1-15-10-6-3-13-12-4-5-11-14-2-7-9 eller omvendt.

Barnestjerne

$1^3+12^3=9^3+10^3=1729$

Julehandel

Løser denne enkelt med én ligning:

100kr+(x/100*100kr)=125kr-(x/100*125kr)

Den gir at x=11.11%. Prisen blir da 111.11 kr.

Skitur

6xrød, 4xrød+1xgrønn, 2xrød+2xgrønn, 2xrød+1xgul, 3xgrønn, 1xgrønn+1xgul. Det vil si seks ulike måter.

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Relative primtallsdager

JUNI. Da er det 10 relative primtallsdager. Månedstall faktorisert som gir flest ulike og lavest primtall er 6=3x2 og 12=3x2(x2). Siden desember har en dag mer enn juni, og denne (31.12) er en relativ primtallsdag, har juni færrest. De 10 dagene er 1., 5., 7., 11., 13., 17., 19., 23., 25. og 29. juni. Løsningen kan også finnes ved å liste opp alle relative primtallsdager i alle månedene. Dagene i januar regnes ikke som relative primtallsdager.

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Store Abel - Innhold

OPPGAVER	DATO PUBLISERT	SIDE
Wire virr-varr	- lagt ut lørdag den 16. februar 2002	35
Plassbytte	- lagt ut lørdag den 23. februar 2002	35
Egg-koking	- lagt ut lørdag den 2. mars 2002	35
Tallmønster	- lagt ut lørdag den 9. mars 2002	36
Prøvelse	- lagt ut lørdag den 16. mars 2002	36
Trekanter	- lagt ut lørdag den 23. mars 2002	37
Fyrstikkfigurer	- lagt ut lørdag den 30. mars 2002	37
Svarte og hvite kuler	- lagt ut lørdag den 13. april 2002	37
Falske gullmynter	- lagt ut lørdag den 20. april 2002	38
Juicemaskinen	- lagt ut lørdag den 27. april 2002	38
Ringer i kvadrat	- lagt ut lørdag den 4. mai 2002	39
Oppdelt sølvstav	- lagt ut lørdag den 11. mai 2002	39
Populære skolefag	- lagt ut lørdag den 18. mai 2002	40
Flua og hundene	- lagt ut lørdag den 25. mai 2002	40
Krone og mynt	- lagt ut lørdag den 8. juni 2002	40
Go	- lagt ut lørdag den 15. juni 2002	41
Kloke ord	- lagt ut lørdag den 29. juni 2002	41
Kode-knekk	- lagt ut lørdag den 6. juli 2002	42
Merkelig brøkregning	- lagt ut lørdag den 13. juli 2002	42
Rare tegn	- lagt ut lørdag den 20. juli 2002	42
Målestokk	- lagt ut lørdag den 27. juli 2002	43
Tennisballer	- lagt ut lørdag den 3. august 2002	43
Trafikklys (innsendt av Morten Blomhøj)	- lagt ut lørdag den 10. august 2002	43
Kuler av krukke (bidrag fra Torgeir Onstad)	- lagt ut lørdag den 17. august 2002	44
Trekanter og sirkler	- lagt ut lørdag den 24. august 2002	44
Sirkler på papir	- lagt ut onsdag den 4. september 2002	44
Opp Ned	- lagt ut lørdag den 7. september 2002	45
Primtall	- lagt ut lørdag den 14. september 2002	45
Delbarhet	- lagt ut lørdag den 21. september 2002	45
Magisk trekant 2	- lagt ut lørdag den 5. oktober 2002	45
A4-ark	- lagt ut lørdag den 12. oktober 2002	46
Liten differans	- lagt ut mandag den 21. oktober 2002	46
Terningkast	- lagt ut lørdag den 26. oktober 2002	46
Frimerker	- lagt ut lørdag den 2. november 2002	46
Bokstavregning	- lagt ut lørdag den 9. november 2002	47
Telys	- lagt ut lørdag den 16. november 2002	47
Kryssende båter	- lagt ut lørdag den 23. november 2002	47
Magiske kvadrater	- lagt ut lørdag den 30. november 2002	48
Bøffe tall	- lagt ut lørdag den 7. desember 2002	48
Trekanter	- lagt ut onsdag den 18. desember 2002	48
Toppen av kransekaka	- lagt ut lørdag den 21. desember 2002	49
Kvadrat i åttekant	- lagt ut lørdag den 28. desember 2002	49
Løsningsforslag		51-66

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Wire virr-varr

Et stykke wire er 52 m langt. Det kuttes i to biter, og hver bit formes til et kvadrat. Summen av arealene til de to kvadratene er 97 kvadratmeter.

Hvor mye lenger er lengden av siden i det største kvadratet enn siden i det minste? Forklar hvordan du kom fram til svaret.

Plassbytte

I et klasserom er de 25 pultene plassert på fem rekker med fem pulter i hver rekke. Læreren ber alle elevene å bytte plass på den måten at hver elev flytter enten en plass fram, en plass tilbake, en plass til venstre eller en plass til høyre. Er dette mulig?

Bevis svaret ditt.

Egg-koking

Du skal koke et egg i nøyaktig 9 minutter, men idet du skal starte å ta tida, har klokka di stoppet. Men du har flaks. Du har nemlig to timeglass på kjøkkenet. Det ene er 4 minutter og det andre er 7 minutter. Hvordan kan du klare å ta tida så egget ditt koker i nøyaktig 9 minutter?

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Tallmønster

Vi lager et tallmønster av oddetall slik:

1
3 5
7 9 11
13 15 17 19

I tredje rad er summen av tallene 7+9+11=27. Hva blir summen av tallene i rad nummer 100? Forklar hvordan du kom fram til svaret.

Prøvelse

Vennen til Maria bodde i en blokk der hver leilighet hadde nummer. Hun ringte for å spørre hvilken leilighet han bodde i.

"Det er det minste tallet som gir 3 til rest hvis du deler på 5, 2 til rest hvis du deler på 4, 1 til rest hvis du deler på 3 og 0 til rest hvis du deler på 2!"

Hvilken leilighet bodde han i? Forklar hvordan du kom fram til svaret.

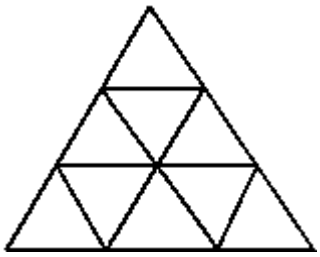
Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Trekanter

Trekanten nedenfor har tre rader og er bygget opp av 9 små trekanter. Hvor mange små trekanter trenger vi til

a. 4 rader?
b. 44 rader?
c. *n* rader?

Forklar hvordan du kom fram til svaret.



Fyrstikkfigurer

I denne oppgaven bruker vi lengden av en fyrstikk som 1 lengdeenhet. Vi kan bruke 12 fyrstikker til å lage polygoner (mangekanter) med omkrets 12, for eksempel et kvadrat med omkrets 12 og areal 9, eller et kors med omkrets 12 og areal 5. Lag et polygon med omkrets 12 og areal 4.

Svarte og hvite kuler

Du har tre ugjennomsiktige esker, den ene inneholder to hvite kuler, den andre to svarte kuler og den siste en svart og en hvit kule. Boksene er merket med *HH*, *SS* og *SH*, men noen har byttet om lappene slik at alle er feil merket.

Du har lov til å ta ut en kule av gangen fra hver av boksene uten å se nedi, og så legge dem tilbake før du kan ta en ny. Slik skal du finne innholdet i de tre boksene. Hva er det minste antall trekk du trenger?

Forklar hvordan du kommer fram til innholdet i eskene.

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Falske gullmynter

Du har 10 stabler med gullmynter, hver med 10 mynter i. En hel stabel inneholder falske mynter, men du vet ikke hvilken. Du kjenner vekten til en ekte gullmynt, og du vet at hver falske mynt veier ett gram mer enn de ekte. Du kan veie myntene på en helt nøyaktig vekt.

Hva er det minste antall veiinger du må gjøre for å finne ut hvilken stabel som inneholder falske mynter? Forklar framgangsmåten.

Juicemaskinen

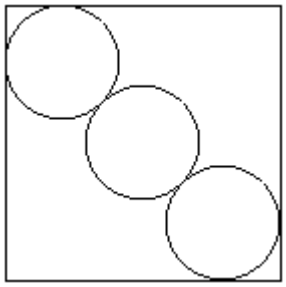
En juicemaskin brukes til å lage gulrotjuice. Den første gangen du presser gulrøttene, får du ut en firedel av juicen. For hver gang du presser gulrøttene etter dette, får du ut en firedel av den juicen som er igjen i gulrøttene.

Hvor mange ganger må gulrøttene presses for at du skal få ut minst to tredeler av juicen?

Forklar hvordan du tenker.

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Ringer i kvadrat



De tre sirklene på figuren har alle sammen radius 1 og sentrum langs diagonalen i kvadratet.

De to "ytterste" sirklene tangerer to sider i kvadratet. De tangerer i tillegg den midterste sirkelen.

Finn arealet av kvadratet. Forklar!

Oppdelt sølvstav

En sølvsmed hadde ikke råd til å betale husleien for mars måned. Han eide en sølvstav som var 31 tommer lang, så han gjorde følgende avtale med husverten:
Han ville dele staven inn i mindre biter, slik at husverten fikk en tomme av staven for hver dag som gikk, som et slags depositum. På slutten av måneden regnet sølvsmeden med å ha penger til leien, så da skulle husverten levere tilbake bitene.

Siden det var mye arbeid å dele opp staven, ville han kutte den i så få biter som mulig. Han kunne for eksempel gitt en bit på 1 tomme de to første dagene. Så kunne han gi en bit på 3 tommer den tredje dagen og ta tilbake de to første.

Hvis han byttet fram og tilbake på denne måten, hva er det minste antall biter han måtte kutte staven i, og hvor lange er hver av bitene?

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Populære skolefag

På Haugen videregående skole er de mest populære fagene geografi, kunst og naturfag. Det er 200 elever på skolen.

- 70 har geografi
- 80 har naturfag
- 60 har kunst
- 35 har både geografi og naturfag
- 33 har både geografi og kunst
- 31 har både naturfag og kunst
- 15 har geografi og naturfag og kunst

Hvor mange elever har ingen av disse fagene?

Flua og hundene

Dette er en historie om to superraske hunder og en enda raskere flue. Hundene ser hverandre på hver side av en 100 meters lang gressplen, og begynner å løpe mot hverandre med en hastighet på 10 meter per sekund.

Flua flyr fram og tilbake fra nese til nese. Den starter på nesa til den ene hunden og flyr med en fart på 20 meter per sekund helt til hundene krasjer og klemmer flua flat. Hvor lagt har flua flydd til sammen?

Forklar hvordan du kom fram til svaret!

Krone og mynt

Jon kaster krone og mynt med seks mynter. Kari kaster med fem. Hva er sannsynligheten for at Jon kaster flere krone enn Kari? Begrunn svaret.

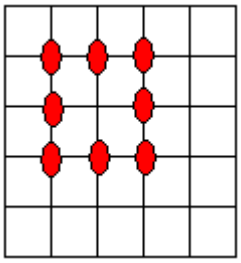
Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Go

Go er et japansk spill der spillerne etter tur plasserer hvite og sorte brikker i kryssene på et rutenett for å kapre området innenfor.

Hva er det største antall punkter det går an å kapre med 12 brikker? Forklar hvordan du kom fram til svaret.

I eksempelet på figuren er det brukt 8 brikker for å kapre ett punkt.



Kloke ord

Yorubafolket i Nicaragua har et system for å spå i fremtiden. De kaster åtte halve skjell og merker seg hvor mange som ligger med hul side opp og hul side ned.

En klok spådom skal sies for hver mulig posisjon skjellene kan havne i. Hvor mange kloke spådommer trenger Yorubafolket? Hvor magne flere ville de trenge hvis de la til to ekstra skjell? Forklar hvordan du kom fram til svaret.

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Kode-knekk

Finn den sjusifrede koden som tilfredsstiller disse reglene:

- De første tre sifrene er tre etterfølgende heltall i avtagende rekkefølge.
- Summen av de tre første sifrene er 18 og produktet er 210.
- De fire neste sifrene er **tre** primtall i stigende rekkefølge, men det nest siste sifferet er ikke et primtall.
- Produktet av de fire siste sifrene er 336.

Forklar hvordan du kommer fram til løsningen!

Merkelig brøkregning

Merk deg at 1647/8235 = 1/5.

Start med brøken 1647/8235. Stryk ett siffer i telleren og ett siffer i nevneren på en slik måte at den nye brøken også er 1/5.

Når du har gjort dette, skal du enda en gang stryke ett siffer i telleren og ett siffer i nevneren slik at brøken fortsatt er lik 1/5.

Hvordan ser brøkene ut etter første og andre stryking?

Rare tegn

Tegnene ? og # står for ulike regneoperasjoner og x står for et tall. Finn x. 62 ? x = 29 # x

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Målestokk

Målestokken på et kart viser at 1 cm svarer til 6 km. Hvor mange kvadratkilometer er terrenget som vises på 240 kvadratcentimeter? Vis hvordan du kom fram til svaret.

Tennisballer

Tre tennisballer er pakket helt tett ned i en boks som har form som en sylinder. De tre tennisballene er plassert oppå hverandre. Hvor stor brøkdel av volumet utgjør tennisballene? Vis hvordan du kom fram til svaret.

Trafikklys (innsendt av Morten Blomhøj)

Gatene på Manhattan danner et rutenettsystem. Ved hvert gatekryss står et trafikklys. Start ved et tilfeldig gatekryss. Hvis du går ett kvartal fra dette krysset i alle retninger, hvor mange trafikklys finnes til sammen ved alle kryssene du har vært ved? Hva blir resultatet hvis du får gå høyst to kvartaler vekk fra startkrysset? Hva blir resultatet hvis du får gå høyst r kvartaler vekk fra startkrysset?

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Kuler av krukke (bidrag fra Torgeir Onstad)

Du har ei tom krukke og en stor haug med blå og røde kuler. Uten å se på kulene, tar du en neve kuler og putter i krukka. Deretter trekker du kuler av krukka etter følgende regler:
1. Hvis du trekker ei rød kule, skal du legge den til side.
2. Hvis du trekker ei blå kule, skal den legges oppi igjen sammen med ei rød kule.
Idet du skal til å trekke den 10. kula, merker du at det er den siste. Før du kom til den siste kula, har du trukket kuler av begge fargene ut av krukka. Hvilken farge hadde den siste kula, og hvor mange kuler kan det ha vært i krukka til å begynne med?

Trekanter og sirkler

På hver av sidene i en rettvinklet trekant er det konstruert en halvsirkel med diameter lik lengden av siden. Hypotenusen i trekanten er 2. Finn summen av arealene av de tre halvsirklene. Begrunn svaret.

Sirkler på papir

To like sirkler tegnes på papir som er 9x12 cm. Finn den største radius sirklene kan ha. Vi klipper bort det som er utenom sirklene. Hvor stor prosent av arket blir klippet bort da?

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Opp Ned

En nummerskilt med et femsifret tall er hengt opp ned. Tallet gir fortsatt mening, men det er 78 633 større enn det riktige tallet. Finn det riktige tallet!

Primtall

Du velger to tilfeldige tall mellom 1 og 50. Tallene 1 og 50 kan være med, og du har lov til å velge to like tall. Hvor stor er sjansen for at summen av de to tallene du trekker er et primtall mindre enn 50? Oppgi svaret med tre desimaler.
Vis hvordan du kom fram til svaret.

Delbarhet

La n være produktet av fire etterfølgende hele tall. Hvis n er delelig med 7, hva er det største hele tallet vi med sikkerhet kan si går opp i n? Du må forklare hvorfor det er riktig!

Magisk trekant 2

a) Plasser tallene 2, 4, 6, 8, 10, 12 på en likesidet trekant, med ett tall i hvert hjørne og ett tall på hver sidekant, slik at summen blir den samme uansett hvilken side du summerer langs. Finn alle løsningene med ulike summer.
b) Finn en generell løsning der avstanden mellom tallene er konstant og det minste tallet er vilkårlig valgt.

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

A4-ark

Formatene A0, A1, A2, A3, A4, A5 osv.. er definert ved:

a) A0 har areal 1 kvadratmeter.
b) Forholdet mellom lengde og bredde er likt for alle A-formatene.
c) Ved å brette om midtaksen på lengdesiden, får vi det etterfølgende formatet. Hva er arealet av et A4-ark? Finn de eksakte målene til et ideelt A4-ark.

Liten differans

Bruk sifrene 2, 3, 4, 6, 7 og 8 nøyaktig en gang for å danne to tresifrede tall M og N slik at M – N blir så lite tall som mulig. Finn M – N.

Terningkast

Kast to terninger A og B. Skriv ned følgende produkter:
- produktet av tallene som vises på terning A og B
- produktet av tallene på undersiden av terning A og B
- produktet av tallet som vises på A og tallet på undersiden av B
- produktet av tallet som vises på B og tallet på undersiden av A

Finn summen av produktene. Forklar hvorfor det alltid blir dette tallet.

Frimerker

Tenk om vi bare hadde hatt frimerker med verdi 3 og 5 kroner. Hvilke portotakster kunne vi skaffe frimerker til da? Hvis vi har frimerker med to ulike verdier, hvordan må de verdiene være hvis vi skal kunne dekke alle portotakster i hele kroner over en bestemt verdi?

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Bokstavregning

I regnestykket nedenfor skal hver bokstav erstattes med et siffer slik at regnestykket blir riktig. Ulike bokstaver skal erstattes med ulike siffer, og like bokstaver betyr samme siffer. Dere får vite at D=5. DONALD + GERALD = ROBERT

Telys

I hvor mange ulike mønstre kan fire like te-lys plasseres på et bord slik at det bare forekommer to ulike avstander mellom lysenes sentrum.

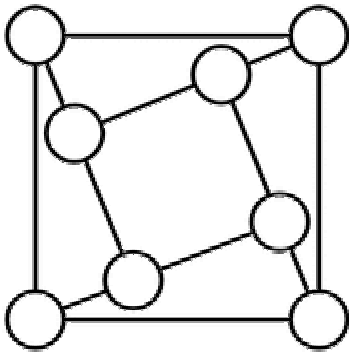
Kryssende båter

To båter har kurs 90º i forhold til hverandre. De seiler like fort. Når båt A er i krysningspunktet for båtenes kurs, har båt B 2500 meter igjen til krysningspunktet. Hvor langt fra hverandre er båtene i det øyeblikket de er nærmest hverandre? Svaret skal rundes av til nærmeste 10 meter.

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Magiske kvadrater

Plasser tallene 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 slik at summen langs de fire skrå linjene er like, og slik at summen av tallene i det innerste kvadratet er halvparten av summen i det ytterste kvadratet.



Bøffe tall

Da jeg holdt på med faktorisering av tall, oppdaget jeg at det var noe spesielt med tallene 1395, 1435 og 2187. Sønnen min og jeg bestemte oss for å kalle dem ”bøffe tall”. Hvilken spesiell egenskap har bøffe tall? Finn minst ett annet eksempel på bøffe tall.

Trekanter

En pose inneholder pinner med lengder 2cm, 3cm, 5cm, 7cm, 11cm og 13cm. Tre pinner trekkes tilfeldig fra posen. Hvor stor er sannsynligheten for at det kan lages en trekant av pinnene?

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Toppen av kransekaka (innsendt av Pål Grønås)

Brødrene Per og Pål er to notoriske kakemonser. Gleden er derfor stor når de på julekvelden får en stor kransekake med 18 ringer i julegave. Luringen Per foreslår de deler kaka i to slik at Per får de 9 øverste ringene av kaka og han selv de 9 nederste ringene! Pål er ikke dummere enn at han gjennomskuer broren forsøk på å tilegne seg brorparten av kransekaka. Han finner fram en tommestokk for å kunne regne ut volumet kransekaka. Målingene viser at hver ring har tykkelse på 16 mm og forskjellen i ytre diameter mellom to ringer der den ene ligger oppå den andre, er 10 mm. Dessuten har den nederste ringen en ytre diameter på 221 mm. Etter å ha regnet en stund, sier Pål forbløffet til Per: "Hvis du får toppen av kransekaka bestående av de ? øverste ringene og jeg resten av kransekaka, får vi nøyaktig halvparten hver av kransekaka!". Kan du si hvilket tall som skjuler seg bak spørsmålstegnet?

Kvadrat i åttekant

Det største kvadratet som kan innskrives (betyr: få plass inni) en regulær åttekant, er det som kommer fram ved å trekke rette linjer mellom hvert annet hjørne i åttekanten. Finn siden i det største kvadratet som kan klippes ut av en regulær åttekant med side 6cm.

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Løsninger

Store Abel

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Wire virr-varr

Det går an å sette opp dette med likninger, men hvis vi går ut fra at sidelengdene er hele tall, er det lettere å prøve om 97 kan skrives som en sum av to kvadrattall, slik at det passer med lengden av wiren. Kvadrattallene mindre enn 97 er 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81. Eneste mulighet er 16+81=97. Da er sidene 4 og 9, som gir en total wirelengde på 16+36=52. Dette stemmer! Da er hver side i det største kvadratet 5m lenger enn hver side i det minste.

Alternativt: La l være lengden av siden i det ene kvadratet. Da er $(52 - 4l)/4$ lengden av siden i det andre kvadratet. Da kan vi sette opp en likning for totalt areal og finne l.

Plassbytte

Det er ikke mulig. Det er lettest å se hvis vi tenker oss pultene plassert i et sjakkbrettmønster.

For å flytte slik læreren sa, må alle flytte til motsatt farge av det de satt på. Men siden det er flere svarte enn hvite felt, er dette ikke mulig.

Egg-koking

1. Snu begge timeglassene samtidig. Når sanda har rent ut i det første, har det gått 4 minutter, og det er 3 minutter igjen på det andre.
2. Snu 4 minutters glasset lynfort. Når 7 minutters glasset er tomt, er det 1 minutt igjen på 4 minutters glasset.
3. Snu 7 minutters glasset lynfort. Når 4 minutters glasset er tomt for andre gang, har det gått totalt 8 minutter, og det er sand tilsvarende 1 minutt i bunnen av 7 minutters glasset. (dvs. sand for 6 minutter på toppen.)
4. Snu dette lynfort når sanda her rent ned, har det gått 9 minutter.

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Tallmønster

Hvis vi legger sammen hver rad og leter etter et mønster, får vi

1
$3 + 5 = 8 = 2\times2\times2$
$7 + 9 + 11 = 27 = 3\times3\times3$
$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4\times4\times4$

Fortsetter vi mønsteret til rad 100, blir summen $100\times100\times100=1000000$.

Prøvelse

Av den siste opplysningen ser vi det må være et partall. Av den andre ser vi at det ikke er delelig med 4.

Tallene som gir 3 til rest når vi deler med 5 er 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53, 58, 63, 68, 73, 78, osv. Men bare 18, 38, 58, 78 osv er mulig.

Så må vi plukke ut det minste som gir 1 til rest når vi deler med 3. Det er 58.

Trekanter

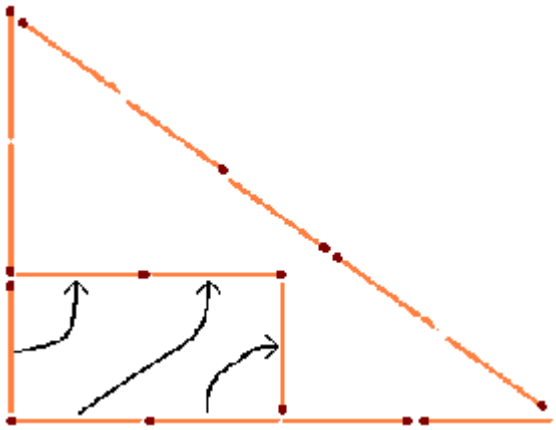
Vi setter opp en tabell:

Rader	Trekanter
1	1
2	$1 + 3 = 4 = 2^2$
3	$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$
4	$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

Av mønsteret ser vi at det er $4^2=16$ trekanter med 4 rader, $44^2=1936$ trekanter med 44 rader og n^2 trekanter med n rader.

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Fyrstikkfigurer



Trekanten har omkrets 12 og areal 6.
Hvis vi flytter 3 fyrstikker slik som figuren viser, får vi omkrets 12 og areal 4 (= 6 – 2).

Svarte og hvite kuler

Du trenger bare å trekke ei kule, og den må du trekke fra boksen merket *SH*. Hvis du trekker ei svart kule, vet du at den andre også er svart, siden boksen er feilmerket. Da må boksen merket *SS* inneholde to hvite, siden den siste boksen som er merket *HH* ikke kan inneholde to hvite.

Boksen merket *HH* må inneholde en svart og en hvit. Hvis kula du trekker fra SH-boksen er hvit, får du tilsvarende argumentasjon.

Falske gullmynter

Det er nok med en veiing. Du tar 1 mynt fra den første stabelen, 2 fra den andre 3 fra den tredje osv. helt til den siste som du tar alle 10 myntene fra. Du veier disse 55 myntene. Siden du vet hvor mye en ekte gullmynt veier, kan du bare se hvor mange gram for mye disse myntene veier.

Hvis de for eksempel veier 6 gram for mye, har du 6 falske mynter, og da må de falske myntene være i stabel nummer 6 (der du tok 6 mynter fra).

Denne teknikken ville også virke om du hadde 11 stabler. Da skulle du ikke ta noen mynter fra denne siste stabelen. Hvis det viste seg at de 55 myntene veide det de skulle for å være ekte, ville de falske myntene være i den siste stabelen.

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Juicemaskinen

Press nr	Presset ut	Rest	Presset ut totalt
1	1/4	3/4	1/4
2	1/4 × 3/4 = 3/16	3/4 - 3/16 = 9/16	1/4 + 3/16 = 7/16
3	1/4 × 9/16 = 9/64	9/16 - 9/64 = 27/64	7/16 + 27/64 = 37/64
4	1/4 × 27/64 = 27/265	27/64 - 27/265 = 81/265	37/64 + 81/256 = 175/265

Siden 37/64 er mindre enn 2/3, og 175/265 er større enn 2/3, er fire det minste antall ganger en må presse gulrøttene.

Alternativt kan en se på når resten blir mindre enn 1/3, dvs å finne minste n slik at

$$(3/4)^n < 1/3,$$

dvs. $n = 4$.

Ringer i kvadrat

Arealet er $12 + 8\sqrt{2} = 23{,}3$. Trekk diagonalen i kvadratet. Lengden av diagonalen er fire radier pluss $2\sqrt{2}$ (finnes ved pytagoras). Ved å bruke pytagoras igjen, nå på halve kvadratet, finner vi arealet av kvadratet.

Alternativt: Konstruér figuren og mål lengden.

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Oppdelt sølvstav

Staven kan deles i 5 biter med lengde 1, 2, 4, 8 og 16 tommer. Hver dag beholder husverten biter etter følgende tabell:

Dag	Stavbiter
1	1
2	2
3	1+2
4	4
5	1+4
6	2+4
7	1+2+4
8	8
9	1+8
10	2+8
11	1+2+8
12	4+8
13	1+4+8
14	2+4+8
15	1+2+4+8
16	16

Dag	Stavbiter
17	1+16
18	2+16
19	1+2+16
20	4+16
21	1+4+16
22	2+4+16
23	1+2+4+16
24	8+16
25	1+8+16
26	2+8+16
27	1+2+8+16
28	4+8+16
29	1+4+8+16
30	2+4+8+16
31	1+2+4+8+16

Populære skolefag

Det er lettest å begynne med den siste opplysningen og arbeide seg oppover: Da finner du:

- 15 har alle tre fagene
- 16 har naturfag og kunst, men ikke geografi
- 18 har geografi og kunst, men ikke naturfag
- 20 har geografi og naturfag, men ikke kunst
- 11 har bare kunst
- 29 har bare naturfag
- 17 har bare geografi

Da blir det 74 som ikke har noen av fagene.

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Flua og hundene

Hundene nærmer seg hverandre med en fart på 20 meter per sekund (10 m/s for hver hund). Siden plenen er 100 meter lang, løper de mot hverandre i 5 sekunder før de krasjer. I løpet av de 5 sekundene har flua en fart på 20 m/s. Derfor vil flua flydd 100 meter.

Eller sagt på en annen måte: Hver hund løper halveis over plenen, dvs. 50 meter. Dette tar 5 sekunder. På denne tiden flyr flua 100 meter.

Krone og mynt

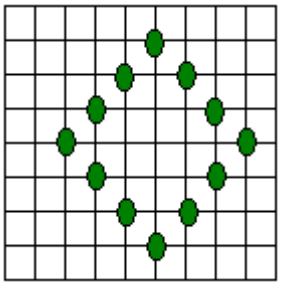
$^1/_2$ eller 50%. Fordi enten må Jon kaste flere kroner enn Kari, ellers må han kaste flere mynt enn Kari, men ikke begge deler.

Hvis Jon både hadde flere kroner og flere mynt enn Kari, måtte han hatt minst to mynter mer enn Kari. Hvis han verken har flere kroner eller flere mynt enn Kari, måtte hun hatt minst like mange mynter som Join, og det har hun ikke.

De to hendelsene er symmetriske, så sannsynligheten for begge er $^1/_2$.

Go

13. Det går an ved å plassere brikkene i en kvadratform med sidekanter 45 grader med rutene.



Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Kloke ord

De trenger 256 kloke spådommer. To ekstra skjell ville kreve fire ganger så mange spådommer, det vil si 1024.

Siden hvert skjell har to måter å lande på, har to skjell 2×2, eller 2^2 kloke spådommer. Hvert ekstra skjell dobler antall muligheter, så åtte skjell har $2^8 = 256$ muligheter. To ekstra skjell gir $2 \times 2 \times 2^8 = 1024$ muligheter.

Det betyr at det trengs 1024 - 256 = 768 nye spådommer.

Kode-knekk

Koden er: 765 2387.

Du kan gå fram slik: det midterste av de tre første tallene er 18:3 = 6. Da må det være 765. Sjekker vi produktet, stemmer det med 210.

Ensifrede primtall er 2, 3, 5 og 7. Siden produktet er 336, kan ikke 5 være med. Produktet av de tre andre er 42, og da må det nest siste sifferet være 336:42 = 8.

Merkelig brøkregning

Brøkene er 167/835 og 17/85.

Merk at nevneren alltid må være delelig med 5.

Rare tegn

Regnestykket blir: 62: 2 = 29 + 2, så x = 2.

Målestokk

Terrenget er 8640 kvadratkilometer. Siden 1 cm er 6 km, er 1 cm2= $6 \cdot 6\ \text{km}^2 = 36\ \text{km}^2$. Da blir $240\ \text{cm}^2 = 240 \cdot 36\ \text{km}^2 = 8640\ \text{km}^2$.

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Tennisballer

2/3. Forklaring: Sett volumet av tennisballene lik $V(T) = 3 * \frac{4}{3} * л * r^3 = 4лr^3$.

Volumet av sylinderen; $V(S) = л * r^2 * 6r = 6лr^3$.
Volumforholdstallet blir dermed 2/3.

Trafikklys (innsendt av Morten Blomhøj)

Ett kvartal vekk: 1 + 4 = 5 trafikklys. Høyst to kvartaler vekk: 1 + 4 + 8 = 13 trafikklys. Høyst r kvartaler vekk: 1 + 4 + 8 + … + 4 r = 1 + 4 (1 + 2 + … + r) = 1 + 2 r (r + 1) = 2 r2 + 2r + 1

Kuler av krukke (bidrag fra Torgeir Onstad)

Det er flere ulike løsninger, men alle har det til felles at den siste kula er blå, og det er bare ei blå kule i krukka. Det kan bare ha vært en blå kule fra starten, for ingen lovlige trekk reduserer antall blå kuler.

Det kan ha vært 7 røde og 1 blå kule. Da trekkes den blå bare en gang i tillegg til den siste gangen.
Det kan ha vært 5 røde og 1 blå kule. Da trekkes den blå kula 2 ganger i tillegg til den siste gangen.
Det kan ha vært 3 røde og 1 blå kule. Da trekkes den blå kula 3 ganger i tillegg til den siste gangen.
Det kan ha vært 1 rød og 1 blå kule. Da trekkes den blå kula 4 ganger i tillegg til den siste gangen.

Trekanter og sirkler

Arealet er л. Kall katetene i trekanten for 2a og 2b. Pytagoras' setning gir : $4a^2 + 4b^2 = 4 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$. Arealet av halvsirklene er dermed:
$½ лa^2 + ½ лb^2 + ½ л1^2 = ½л(a^2 + b^2) + ½л = ½л + ½л = л.$

Sirkler på papir

Sentrum av sirklene må ligge langs diagonalen av papiret 57,7% av arket blir klippet bort.

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Opp Ned

10968.

På grunn av formen, kan bare sifrene 0, 1 og 8 være med, siden de er likedan opp ned, og i tillegg kan 6 og 9 være med, men de bytter verdi når de blir snudd. Når skiltet er opp ned, blir også tallet lest bak fram. La det riktige tallet være ABCDE og opp ned tallet edcba. Da har vi

78633 + ABCDE = edcba

e må være 8 eller 9, siden det er større enn 7. Hvis e=9, så er E=6. Da må a=6+3=9 og A=6. Men det går ikke med fem siffer i alle tallene over. Da må e=8, og også E=8, og A=1, og derfor a=1. Videre må B=0 eller 1. Derfor er b=0 eller 1 og D=8 eller 6. Men siden e=6, er 3+D+1=b. Det gir b=0 og D=6, som betyr at B=0 og d=9. Nå ser vi at C=9 og c=6.

Primtall

0,125.

De femten primtallene mindre enn 50 er 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 og 47. Hvert heltall n kan framkomme som en sum av to heltall på (n – 1) måter. For eksempel får vi 5 som 1+4, 2+3, 3+2 og 4+1. Det betyr at vi kan få primtall mindre enn 50 på

$$1 + 2 + 4 + 6 + 10 + 12 + 16 + 18 + 22 + 28 + 30 + 36 + 40 + 42 + 46 = 313$$

måter. Når du har valgt det første tallet, har du 50 muligheter for det andre tallet. Det er 50 ulike måter å velge første tallet på, derfor er det 50×50 = 2500 mulige tallpar å velge mellom. Siden 313 par gir primtall som sum, er sjansen for dette lik 313:2500=0,1252, eller omtrent 1/8.

Delbarhet

168. Siden n er produktet av fire etterfølgende hele tall, må to av dem være partall. Da er n delelig med 4. Men hver annet partall er delelig med 4, så da er n delelig med 8. Siden hvert tredje hele tall er delelig med 3, må n være delelig med 3 også. I oppgaven står det at n er delelig med 7. Men da må n være delelig med 8x3x7=168.

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Magisk trekant 2

a) Det finnes fire ulike løsninger, med sum 18, 20, 22 og 24. Det kan ikke finnes noen løsning med sum mindre enn 18 og ingen med sum større enn 24. Dette fordi alle tallene summeres en gang, dvs sum 42, og i tillegg summeres hjørnene en gang til. Minste sum er når de minste tallene står i hjørnene. Da er summen langs hver sidekant 42 + 2 + 4 + 6 = 54. Med de største tallene i hjørnene, blir summen 42 + 8 + 10 + 12 = 72. De to sirte summene er 60 og 66.

b) Hvis minste tallet er a og differansen mellom hvert tall er d, blir minste sum (2a+2(a+d)+2(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)+(a+5d)):3=3a+6d. Største sum blir (a+(a+d)+(a+2d)+2(a+3d)+2(a+4d)+2(a+5d)):3=3a+9d Vi får summen 3a+7d hvis vi har a, a+2d og a+4d i hjørnene. Vi får summen 3a+8d hvis vi har a+d, a+3d og a+5d i hjørnene.

A4-ark

For å lage et A4-ark av et A0-ark, må vi dele arket i to fire ganger. A4-arket blir derfor halvparten av halvparten av halvparten av halvparten av A0-arket. Det betyr at A4-arket er 1/16 av A0-arket, altså 1/16 kvadratmeter. La s være lengden av et ark i A4-format og t være bredden. Da er s bredden av arket som er dobbelt så stort, og 2t er lengden.
På grunn av dette får vi:s/t = 2t/s. Multipliserer vi med (s/t) på hver side av likningen og tar kvadratrota, får vi: s/t = $\sqrt{2}$. Siden arealet av A4-arket er 1/16 kvadratmeter, er s · t = 1/16. Multipiserer vi disse likningene, får vi forkortet t , og står igjen med: $s^2 = \sqrt{2}/16$ og dermed s = $\frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{4}$ Siden s · t = 1/16, er t = $\frac{1}{4\sqrt{\sqrt{2}}}$. Målene er i meter. Hvis vi regner ut tilnærmede verdier, får vi at s er omtrent lik 29,7 cm og t er omtrent 21 cm.

Liten differans

Hvis vi skal få M-N så lite som mulig, må vi velge tallene så nær hverandre som mulig. Vi får differansen mindre enn 100 ved å velge sifferet på hundreplassen for M til å være en mer en sifferet på hundreplassen for N. Vi vil gjøre sifferet på tierplassen for M så lite som mulig,mens sifferet på tierplassen til N skal være så stort som mulig. Hvis vi velger 2 og 8, har vi fortsatt 6 og 7 til hundreplassene. Hvis vi prøver og feiler litt, får vi at M=723 og N=684 er er de beste tallene. Dermed er svaret vi spør etter 723-684=39. En annen mulig løsning er 426-387=39.

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Terningkast

Summen blir alltid 49.
La A være tallet som vises på terning A og B tallet på terning B. Legg merke til at en spillterning er laget slik at summen av tallet terningen lander på og tallet på undersiden alltid er 7. Det betyr at tallene på undersiden av A og B er 7-A og 7-B. Summen av de fire produktene vi spør etter er derfor:

AB + (7-A)(7-B) + A(7-B) + B(7-A) =
AB + 49 - 7A - 7B + AB + 7A - AB + 7B - AB = 49

Frimerker

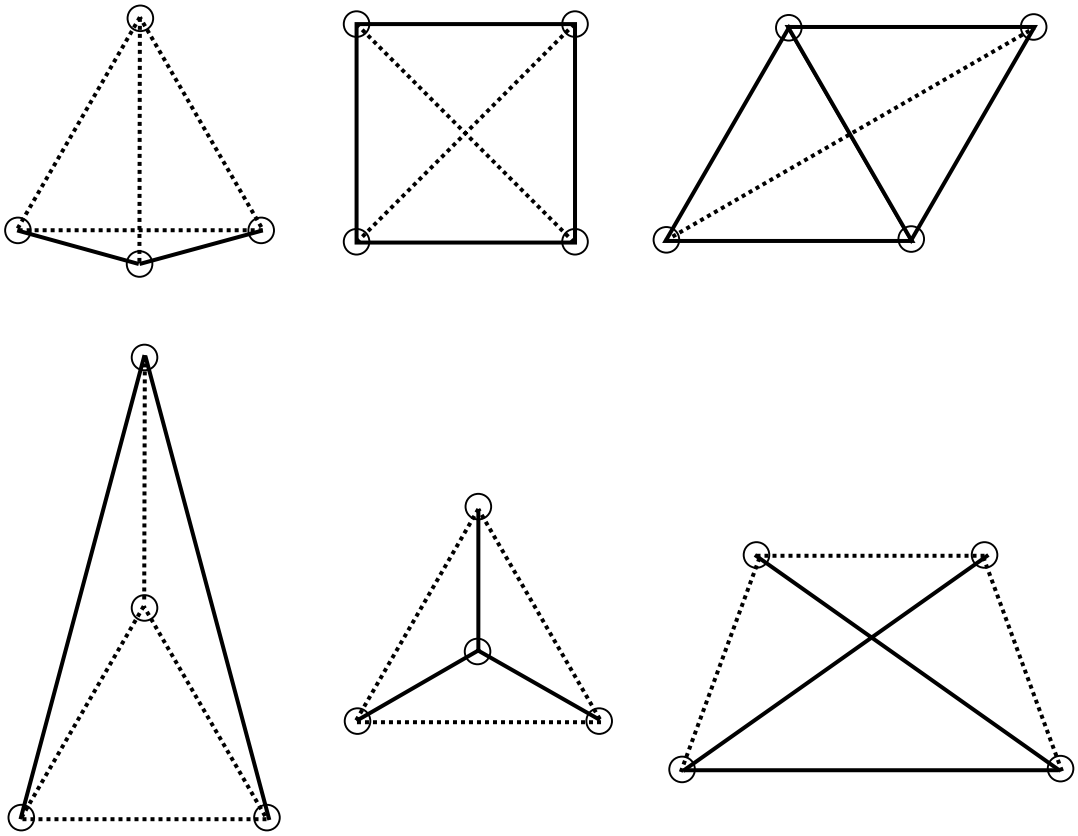
Hvis vi har frimerker til 3 og 5 kroner, kan vi dekke alle portotakster i hele kroner unntatt 1, 2, 4 og 7 kroner. Vi kan dekke alle takster på formen 3x+5y der x og y er hele positive tall Dersom frimerkenes verdi er n kroner og m kroner, vil vi kunne dekke alle heltallige portotakster over en viss verdi dersom n og m ikke har noen felles faktor.

Bokstavregning

526485 + 197485 = 723970

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Telys



6 løsninger; De stiplede linjenje er like lange, og de heltrukne linjene er like lange.

Kryssende båter

Båtene er 1770 meter unna hverandre når de er nærmest.
Dette kan vises ved derivasjon. En setter opp avstanden mellom punktene som en funksjon $f(x) = x^2 + (2500 - x)^2$. Her betegner f(x) kvadratet av avstanden mellom båtene.

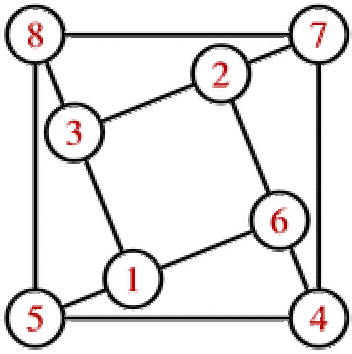
Den deriverte av funksjonen er 0 når x = 1250. Siden dette da utgjør en minimumsverdi av funksjonen, setter vi inn i f(x) og tar kvadratroten av denne verdien:

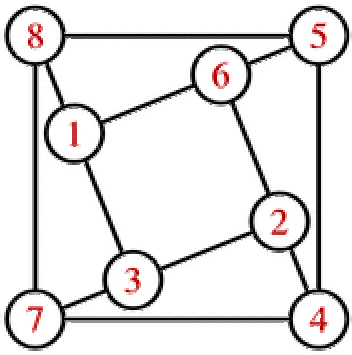
$\sqrt{f(1250)} = 1767 \sim 1770$ meter.

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Magiske kvadrater

Summen langs hver skrå linje er 12, summen rundt det innerste kvadratet er 12, og summen langs det ytterste er 24. Det finnes ikke andre løsninger enn disse to, eventuelt etter en dreining av firkanten.





Bøffe tall

Ved en bestemt faktorisering av bøffe tall, vil sifrene i faktorene være de samme som sifrene i tallet selv. Vi har at 15x93=1359 35x41=1435 27x81=2187 Andre eksempler er 21x60=1260 30x51=1530 21x87=1827 80x86=6880 Det er lurt å lete blant tall som ender på 0, 1 eller 5, for så å sørge for at siste siffer stemmer.

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Trekanter

Løsningen er sendt inn av Knut Roar Strengen, Trondheim.
For å få til trekant, må summen av de to korte pinnene være større enn den lengste pinnen. Det finnes to mulige tolkinger på oppgaven:

1) Hvis vi forutsetter at det er én pinne av hver lengde nedi posen, 6 pinner, gir 3 trekkinger 20 mulige utfall. Av de utfallene som gir trekant, er 5 gunstige: (3,5,7) (3,11,13) (5,7,11) (5,11,13) (7,11,13). Sannsynligheten blir da 5/20=0.25
2) Hvis det er mange pinner av hver lengde nedi posen, og like mange av hver, blir regningen noe annerledes. Antall mulige blir da 6*5*4=120 Jeg finner 32 gunstige utfall: De 5 overnevnte, de 6 likesidede trekantene, 1+2+3+4+5=15 likebeinte trekanter der de sidene som er like lange er lengre enn den tredje, + 6 til der de to like er kortere enn den tredje: (2,2,3) (3,3,5) (5,5,7) (7,7,11) (7,7,13) (11,11,13). Sannsynligheten blir da: 32/120=0.26666667

Toppen av kransekaka

Ved å erstatte spørsmålstegnet med n og anvende formelen for volumet av en torus, ender vi opp med andregradslikningen $n^2 + 6n - 216 = 0$.
M.a.o. er n = 12.

Kvadrat i åttekant

To sider i en åttekant utgjør sammen med diagonalen mellom de to hjørnene, en likebeint trekant med vinkler 135 grader, og 22,5 grader. De to like sidene er 6 cm. Den tredje siden, er siden i kvadratet vi er ute etter. Kaller vi siden S og trekker høyden ned på denne siden, får vi en rettvinklet trekant. Da får vi at: $\sin 67{,}5^\circ = (S/2):6\text{cm}$ Det gir S=11,1cm Det går også an å konstruere en regulær åttekant og måle siden i kvadratet.

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Instituttets nøtter

OPPGAVER	DATO PUBLISERT	SIDE
Tusen?	- lagt ut lørdag den 16. februar 2002	69
Diagonaler	- lagt ut lørdag den 1. mars 2002	69
Historien om P og S	- lagt ut lørdag den 1. april 2002	70
Rettferdig deling	- lagt ut lørdag den 2. mai 2002	71
Løsningsforslag		73-79

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Tusen?

Se på regnestykket

NI × TI × TI + NI × TI + TI = TUSEN.

Dette stemmer jo rent tekstmessig, men hvis hver bokstav står for ett siffer hver, hvor mange løsninger finnes da på denne oppgaven?
(Vi forutsetter at N og T ikke er null.)

F.eks. gir NI = 93 og TI = 13 ved regning TUSEN = 16939. Dessverre blir da både S = 9 og N = 9, og E = I =3. Altså er ikke bokstavene unike.

Ekstraoppgave

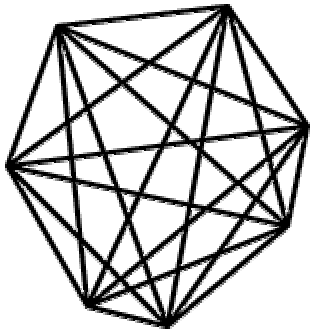
Hvis dette var for lett, kan du jo fortsette med f.eks.

NI × TI × TI + NI × TI + NI + EN = TUSEN.

eller

NI × TI × TI + NI × NI + TI + TI = TUSEN + EN.

Diagonaler



Figuren viser en irregulær, konveks sjukant. Den har fjorten diagonaler som skjærer hverandre i 35 punkter i sjukantens indre.
Legg merke til at hjørnene er plassert slik at ingen av skjæringspunktene involverer mer enn to av diagonalene. (En matematiker ville sagt at hjørnene i sjukanten er «i generell posisjon».)

Hvor mange skjæringspunkter får vi for en irregulær, konveks n-kant, når n=4,5,6,7,8,...?

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Historien om P og S

Noen har valgt to helttall a og b, med a større enn 1 og b større enn eller lik a.

Pål og Siri er to kompetente matematikere som har fått vite dette om de to tallene: Pål vet verdien av produktet $p=ab$, og Siri vet verdien av summen $s=a+b$.

Pål ringer til Siri og sier: «Jeg kan ikke vite ditt tall,» og legger på.

Noe senere ringer han igjen til Siri, og sier: «Du kan ikke vite mitt tall.» Til det svarer Siri: «Nei, jeg kunne ikke det, men nå vet jeg det.» «Å,» sier Pål, «da vet jeg ditt tall også.»

Hva var de to tallene a og b? Forklar.

Ekstraoppgave

Eksperimentet ble gjentatt med to nye tall a og b, fortsatt med begge større enn eller lik 2. Denne gangen ble samtalen slik:

Pål: «Jeg vet ikke ditt tall»
(pause)
Pål: «Du kjenner ikke mitt tall»
(pause)
Siri: «Jeg kan ikke vite ditt tall»
Pål: «Men nå vet jeg ditt tall!»
Siri: «Og da vet jeg også ditt.»

Hva var a og b denne gangen?

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Rettferdig deling?

Divisjon er ikke alltid så greit, spesielt ikke hvis det skal gjøres av grådige unger som lett krangler.
(Eller parter i arveoppgjør?)

Når to barn skal dele noe, f.eks. en flaske brus, er det mange familier som praktiserer regelen: én deler - den andre velger.

Den som deler vil da gjøre sitt ytterste for at begge delene blir like store for ikke å bli snytt, og er dermed sikret å få halvparten etter eget øyemål. Den andre kan alltid velge den delen hun/han mener er størst og kan dermed heller ikke klage. Og de trenger ikke stole på mor, far, desilitermål eller vekt.

Faktisk vil metoden også virke hvis Bernt skal ha f.eks. 1/5 av brusen og Astrid skal ha resten. Astrid deler da innholdet i 5 like store deler etter beste evne, og Bernt velger en.

Men hva kan en familie med 3 barn gjøre for at alle vil hevde at de har fått like mye eller mer enn de andre? Hvis Astrid fordeler brusen i 3 glass og Bernt velger ett, kan det jo hende at Cecilie mener at de to gjenværende glassene inneholder mindre enn Bernt sitt glass.

Beskriv hva de 3 barna kan gjøre.

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Instituttets nøtter

Løsningsforslag

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Tusen?

Dessverre finnes ingen slike sifferkombinasjoner! (Med våre "vanlige" siffer.)

For hvert valg av I, er det bare én mulighet for N, fordi bare I er siste siffer på venstre side av uttykket, og N er siste siffer på høre side. Når vi eliminerer kombinasjoner som gir N = I, er det bare 6 muligheter for NI igjen å prøve.

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	0	3	4	9	4	5	8	9	4	9

Vi kan deretter teste valg av TI som gir riktig første siffer i TUSEN. (Husk at I er kjent hvis NI er kjent.)

NI = 31 krever TI = 31; fordi TUSEN større enn 5000 for TI = 41, større enn 6000 for 51 osv., og TI = 21 blir for lite.

NI = 42 krever på samme måte TI = 22. I begge tilfellene får to bokstaver samme sifferverdi.

For NI = 86 eller 97, blir selv 17 for stort, så disse må forkastes.

NI = 93 krever TI = 13, som er vist at ikke går i oppgaveteksten, og for NI = 48, er TI = 18 eneste mulighet, som dessverre gir TUSEN = 16434, altså uakseptabel løsning for S også her.

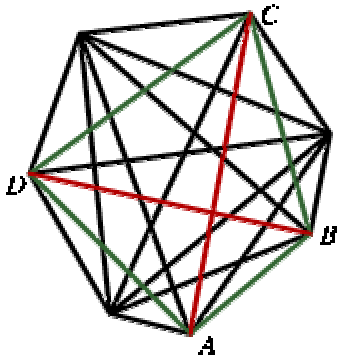
PS: **Hederlig omtale** til Eirik Mauring, som foreslår løsningen:

$$6A \times 2A \times 2A + 6A \times 2A + 2A = 2EBF6,$$

hvor 0,1,2,3,...,9,A,B,C,D,E,F er siffer i det heksadesimale tallsystemet.

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Diagonaler



$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

Et skjæringspunkt i det indre involverer to diagonaler. Disse to har til sammen fire endepunkter: Hvis de hadde et felles endepunkt, ville de ikke skjære hverandre i det indre av n-kanten.

Omvendt, om du velger fire hjørner vil disse gi nøyaktig ett skjæringspunkt mellom de tilhørende diagonalene: Om vi kaller hjørnene A, B, C og D i den rekkefølgen de finnes rundt n-kanten så vil bare AC og BD skjære hverandre i det indre.

Antall skjæringspunkter er altså lik antall måter å velge 4 hjørner av n. Dette tallet er *binomialkoeffisienten* «n over 4».

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Historien om P og S

$a = 4$, $b = 4$.
I ekstraoppgaven: $a = 2$, $b = 8$.

Forklaring

I det følgende bruker vi p for produktet; tallet Pål fikk, og s for summen som Siri fikk.

Ta Påls første påstand først: Han kjenner ikke s. Det betyr at p ikke er et produkt av to primtall eller ett primtall opphøyd i 3. F.eks. hvis han hadde 6, kunne han faktorisert dette som 2×3, og visst at summen var 5. Hvis han hadde $8 = 2^3$, ville det bare kunne skrives som 2×4, og da ville summen vært 6. Det første tallet som oppfyller dette kravet er 12.
Altså er $p > 11$ og $s > 6$.

Dernest: mange mente svaret var 3 og 4. Da ville imidlertid utsagnet til Pål om at Siri ikke kunne vite hans tall være feil. Hvis Siri hadde 7, kunne det bare være dannet av 2 og 5 eller 3 og 4, og 2 og 5 kan utelukkes av Påls første påstand.
Utsagn 2 sier oss at $p > 15$ og $s > 7$.

Nå visste plutselig Siri tallet. Det må være fordi den siste påstanden utelukket en eller flere mulige p slik at bare én gjensto. For s=8, hadde hun to muligheter; a=2 og b=6 eller a=b=4. Den første gir p=12, som vi kan utelukke ettersom Pål kunne si sikkert at $s > 7$, og bare en mulighet gjenstår. Dette er løsningen.

Hvis s=9, er mulighetene

- a=3 og b=6 og
- a=4 og b=5.

Ingen av disse kan utelukkes, og for $s > 9$, finnes det også to eller flere mulige a og b som gir $p > 15$.

Dermed har vi klart å argumentere for at a=b=4, så det er ingen overraskelse at Pål skjønte dette også, når han i tillegg visste at p=16. Det siste utsagnet sier oss altså ikke noe ekstra.

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Ekstraoppgaven:

Situasjonen er den samme til og med utsagn, 2 i tilfellet over. Vi har dermed kommet til at $p > 15$ og $s > 7$.

Denne gangen bekrefter Siri at hun ikke vet p. Etter å ha sett argumentet over, ser vi nå at dette faktisk gir Pål litt ekstra informasjon, nemlig at $s > 8$ denne gangen.

Dette er nok til at Pål klarer å løse oppgaven. Altså finnes det bare én mulig faktorisering av p som gir $s > 8$. For p=16 er det slik, når a=b=4 er utelukket, er a=2 og b=8 eneste mulige faktorisering, som gir s=10.

La oss sjekke at det ikke finnes andre p som også kunne gjort at Pål kunne gjettet svaret. 17 og 19 er et primtall og kan ikke brukes, $18=3^3$, som gjør at eneste mulige s er 9, noe Pål måtte ha visst fra starten av, mens p=20 ville gitt to muligheter som ikke kunne utelukkes ($s > 8$):

- a=4, b=5 som gir s=9 eller
- a=2, b=10 som gir s=12.

21 og 22 har bare en mulig faktorisering hver, 23 er primtall, og for $p > 23$, vil alle tall som oppfyller kravet om flere mulige faktoriseringer også gi flere mulige $s > 8$.

Vi har dermed klart å finne ut hva a og b er fra påstandene over, så det er ikke noen overraskelse at Siri klarte det også, når hun i tillegg visste at s=10. Det siste utsagnet var altså overflødig også her.

Oppsummering:
I hovedoppgaven: a=4, b=4, s=8, p=16.
Ekstraoppgaven: a=2, b=8, s=10, p=16.

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Rettferdig deling?

Astrid fordeler først brusen likt i tre glass etter beste evne.

Bernt får nå lov å tømme litt brus fra det glasset der han mener det er mest brus (kall dette F) ut i et ekstra glass til F inneholder like mye som glasset han mener det er nest mest brus (G). (Glass H har nå etter Bernts mening mindre enn eller like mye brus som F og G.) Det er nå likegyldig for Bernt om han får F eller G.

Deretter kan Cecilie velge. Velger hun glass H, skal Bernt ha glass F og Astrid G.

Hvis Cecilie velger G, skal Bernt ha F og Astrid H.

Hvis Cecilie velger F, skal Bernt ha G og Astrid H.

I alle tilfellene får Cecilie velge fritt, Bernt får et av glassene han mener inneholdt mest (etter justeringen hans), og Astrid får ett av glassene som hun har fylt med 1/3 slik hun ser det.

Nå blir det en liten rest (hvis Bernt gjør en justering), men denne kan de jo dele seg imellom på samme måte. (Ev. spare til neste brusflaske som skal deles eller gi det bort til mor eller far.)

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen