Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

GeoGebra 5.0 for videregående skole

Av: Tor Espen Kristensen

3. utgave / 1. opplag 2015

Norsk GeoGebra-institutt
Matematikksenteret NTNU
7491 Trondheim

http://www.geogebra.no

Forord

Denne boka har utviklet seg fra små hefter som jeg har brukt på ulike kurs. Boka er bygget opp rundt en del tema som er aktuelle for lærere i videregående skole, og jeg har prøvd å veksle mellom eksempler og oppgaver. Jeg håper at du vil få se hvor nyttig program GeoGebra er gjennom arbeidet med de ulike oppgavene og eksemplene. Boka kan brukes til selvstudium, men er først og fremst tenkt som kursmateriell til Norsk GeoGebra-institutt sine kurs. Vi har tatt med en god del oppgaver, men vil poengtere at du ikke finner ferdige undervisningsopplegg i denne boka. Alle eksamensoppgavene er hentet fra Utdanningsdirektoratet (2015). Jeg vil ikke her ta stilling til om dette er den beste måten å løse de ulike oppgavene eller hva som er læringseffekten av å gjøre det ene eller det andre. Her vil vi kun kose oss med selve programmet og løsningene av en del oppgaver.

Før vi setter i gang vil jeg takke for mange gode innspill til denne boka, både fra kursdeltakere og fra kollegaer. Jeg vil spesielt takke for gode kommentarer fra Sigbjørn Hals, Torger Nilsen, Anders Sanne og Jostein Våge som alle er tilknyttet Norsk GeoGebra-institutt.

Dersom du har spørsmål, kommentarer eller forslag til forbedringer av denne boka, så vil vi sette pris på om du sender oss noen ord. Bruk gjerne epostadressen `post@geogebra.no` til dette.

Du kan laste ned pdf-versjon av boka eller bestille trykt versjon på Matematikksenterets nettsider (`http://www.matematikksenteret.no/`).

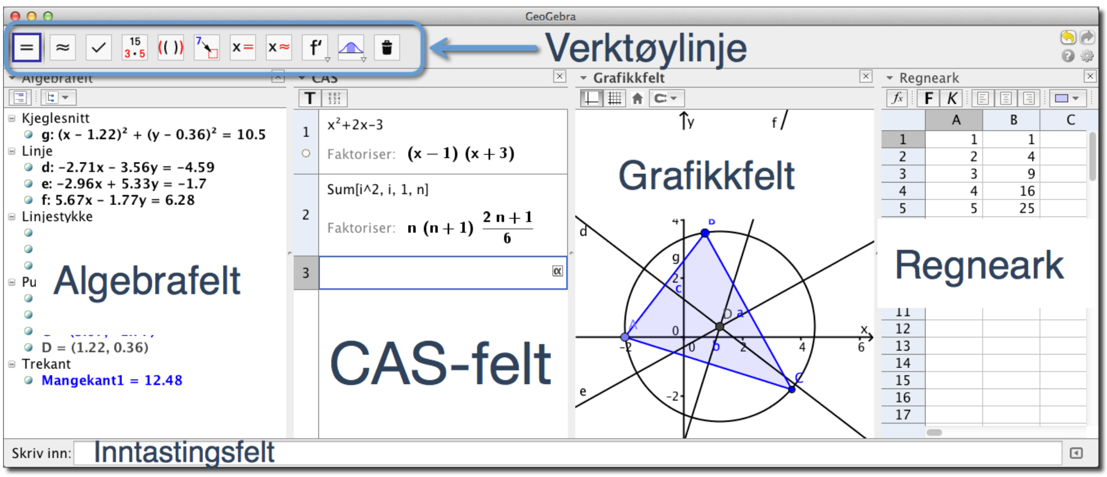
Innhold

1 Å komme i gang med GeoGebra

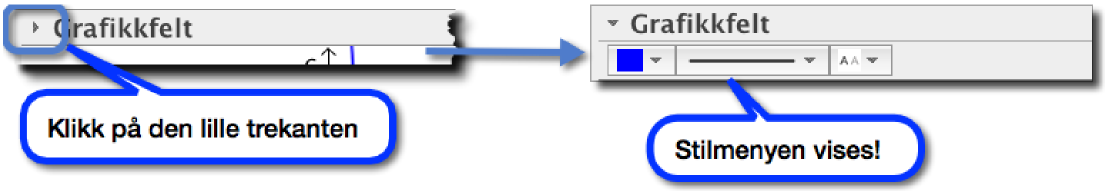
GeoGebra er et program som kobler sammen geometri, algebra og funksjoner. Det inneholder dynamisk geometriprogram, en grafplotter og et computer algebra system (CAS). Således er det et program som passer perfekt i skolesammenheng. Du kan laste ned programmet fra nettsiden `http://www.geogebra.org`. Klikk på «Last ned» og velg riktig versjon. Jeg anbefaler at du ikke installerer Tablet-versjonen dersom du ikke har spesielt behov for denne. Bruker du Mac kan du bruke App Store for å laste ned og installere GeoGebra. Men merk at denne ikke oppdateres så ofte som versjonen fra `www.geogebra.org`.

1.1 Litt om grensesnittet til GeoGebra

GeoGebra er bygget opp rundt flere felt. I inntastingsfeltet kan du skrive inn tall, kommandoer, funksjonsuttrykk, etc.. Det største feltet kaller vi for grafikkfeltet. Det er her du kan se grafer, geometriske figurer etc. I algebrafeltet ser vi funksjonsuttrykk, tallverdier osv. I verktøylinjen finner vi ulike konstruksjonsverktøy (tegning av linjer, linjestykker, sirkler, normaler etc.) og en del andre verktøy som måling av lengder, areal, innsetting av tekst etc. GeoGebra har også et eget regneark. Dette fungerer på samme måte som andre regneark ved at du kan sette inn tall, tekst og formler. For å vise dette feltet må du gå til «Vis» på menylinjen og hake av for «Regneark». I CAS-feltet kan vi regne symbolsk og løse likninger eksakt og nummerisk. (se kapittel 8).

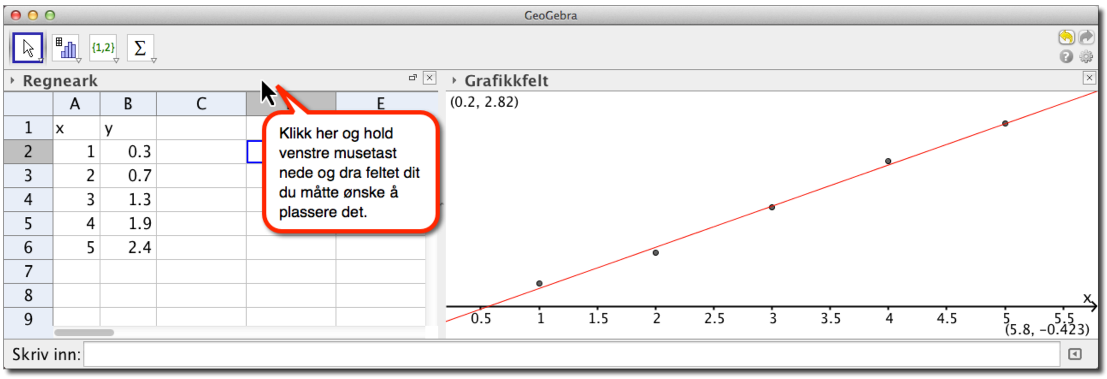


Dersom du vil formatere objekter (endre farge på en graf etc) kan du klikke på den lille trekanten øverst til venstre i feltet (se figur 1.1). Da vil du få fram stilmenyen. Klikk så på objektet du vil formatere og velg formatering.

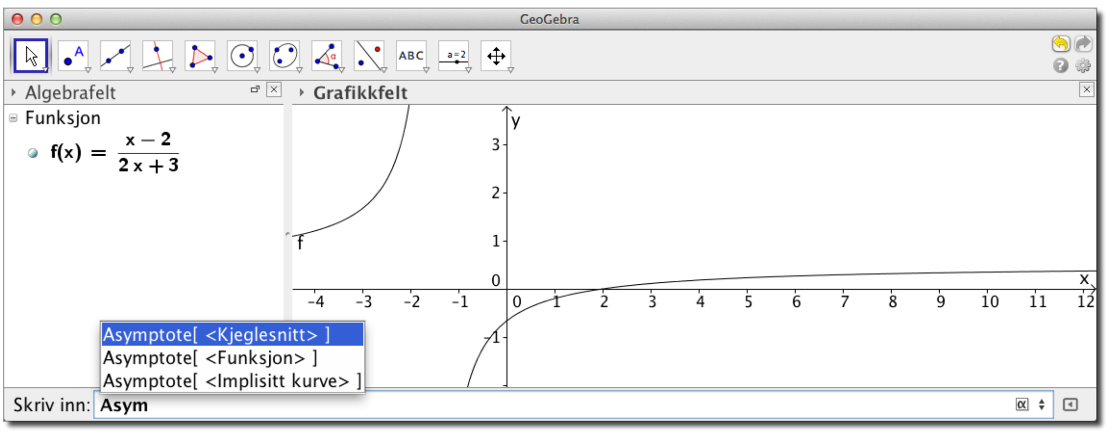


Figur 1.1: Du kan endre farge, tykkelse, skriftstørrelse etc ved å bruke stilmenyen.

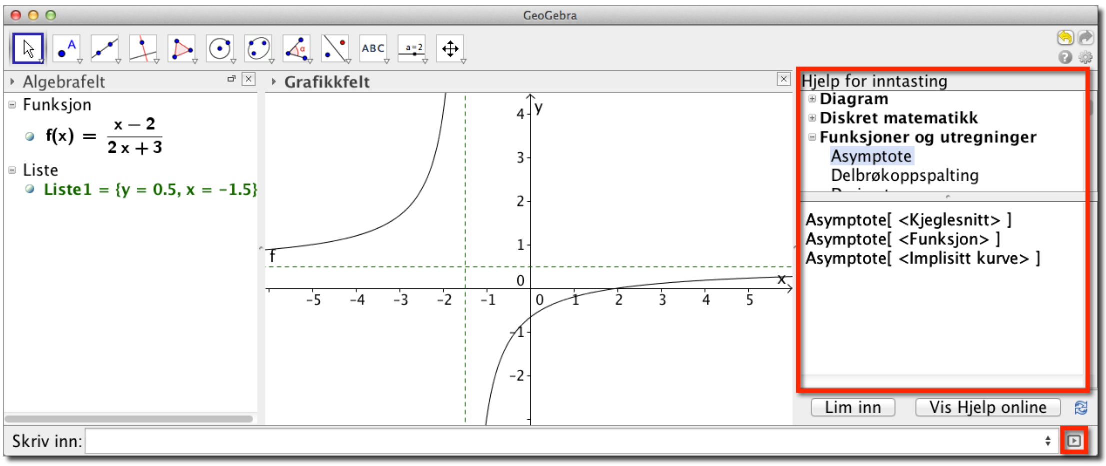
Du kan flytte feltene rundt omkring slik du vil ha dem ved å dra dem rundt mens du klikker og holder venstre musetast nede på den grå ramma øverst i feltet:



Når du skriver inn en kommando i inntastingsfeltet vil du få opp en liste over alle kommandoer som begynner med de bokstavene du har tastet inn. Skal du for eksempel bruke kommandoen `Asymptote` vil du få opp alle kommandoer som begynner med `As` når du har skrevet disse to bokstavene.



Klikker du på den lille knappen med trekant i nede til høyre vil du få opp «Hjelp for inntasting»:



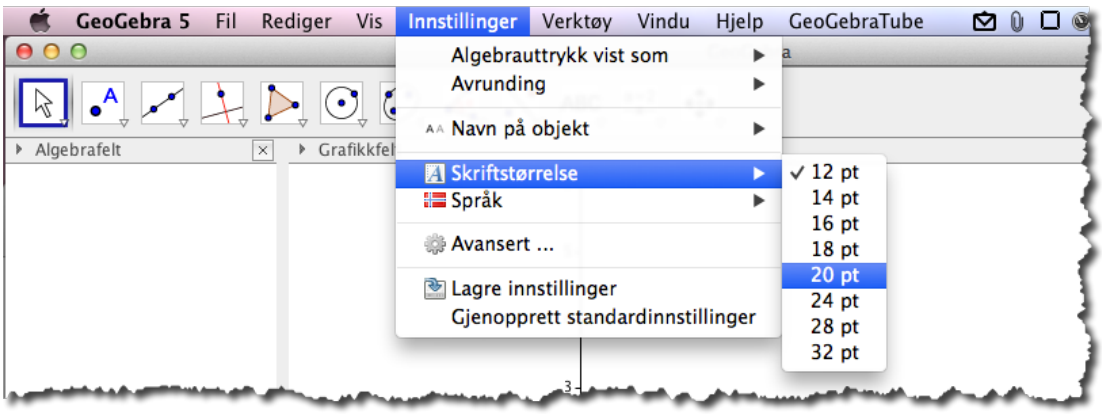
Figur 1.2: Her finner du en oversikt over alle kommandoene i GeoGebra. Merk at du kan klikke på «Vis Hjelp online»

1.2 Endre innstillinger

Vi vil i dette delkapitlet vise hvordan du kan gjøre noen tilpasninger av GeoGebra som gjør det letter for elevene å følge dersom du for eksempel viser ting på en projektor. Vi vil vise hvordan vi kan endre skriftstørrelse, flytte på inntastingsfeltet og få fram vis hjelp...

1.2.1 Endre skriftstørrelse

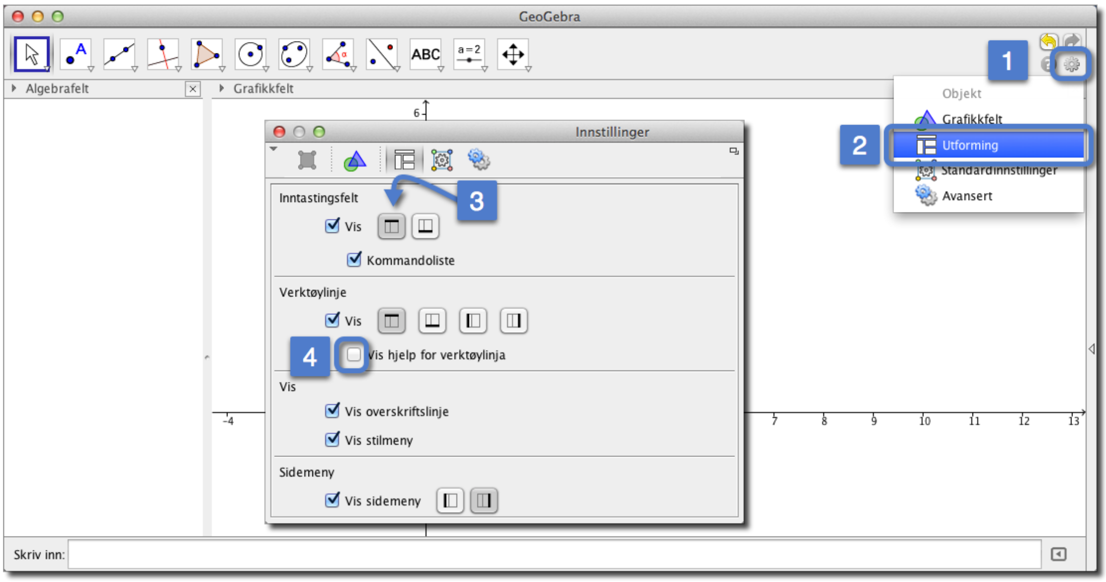
GeoGebra har 12 pt skriftstørrelse som standard. Dette kan bli litt lite dersom du skal demonstrere noe for elevene ved hjelp av en projektor. Vi anbefaler at du bruker minst 18 pt størrelse. Gå til innstillinger på menylinjen og velg skriftstørrelse som vist på figur 1.3. Klikk deretter på Lagre innstillinger under innstillinger. Da vil du få denne skriftstørrelsen hver gang du starter GeoGebra.



Figur 1.3: Velg større skriftstørrelse, så vil de bakerste elevene se bedre det du viser!

1.2.2 Flytt innstastingsfeltet opp

Det neste du kan gjøre er å flytte inntastingsfeletet opp. Det kan du få til ved å klikke på tannhjulet (innstillinger) i øvre høyre hjørne, som vist på figur 1.4. Velg Utforming (2). Da får du opp et nytt vindu hvor du kan gjøre de ulike endringene. Klikk på (3) og du vil se at inntastingsfeltet flytter seg opp under verktøylinjen. Dette er en god ide, siden elever som sitter litt bak i klasserommet da lettere kan se hva du skriver inn i inntastingsfeltet. Når du først har oppe dette vinduet, kan du også hake av for «Vis hjelp for verktøylinja» (4). Dette vil gjøre at du vil få opp en beskrivelse av de ulike verktøyene som du velger til høyre på verktøylinja.



Figur 1.4: Flytt inntastingsfeltet opp

2 Funksjoner i GeoGebra

GeoGebra er et utmerket verktøy til å utforske og analysere funksjoner. I dette kapittelet skal du lære hvordan du kan tegne grafer, bestemme nullpunkt, ekstremalpunkt og andre interessante punkt på grafen til en funksjon. Du skal også lære å løse likningssystem og løse ulikheter grafisk,

2.1 Plotting, nullpunkt og ekstremalpunkt

■ **Eksempel 2.1** Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 9x^3 + 3x^2 - 7x - 1, \quad x \in \langle -\tfrac{3}{2}, 1 \rangle$$

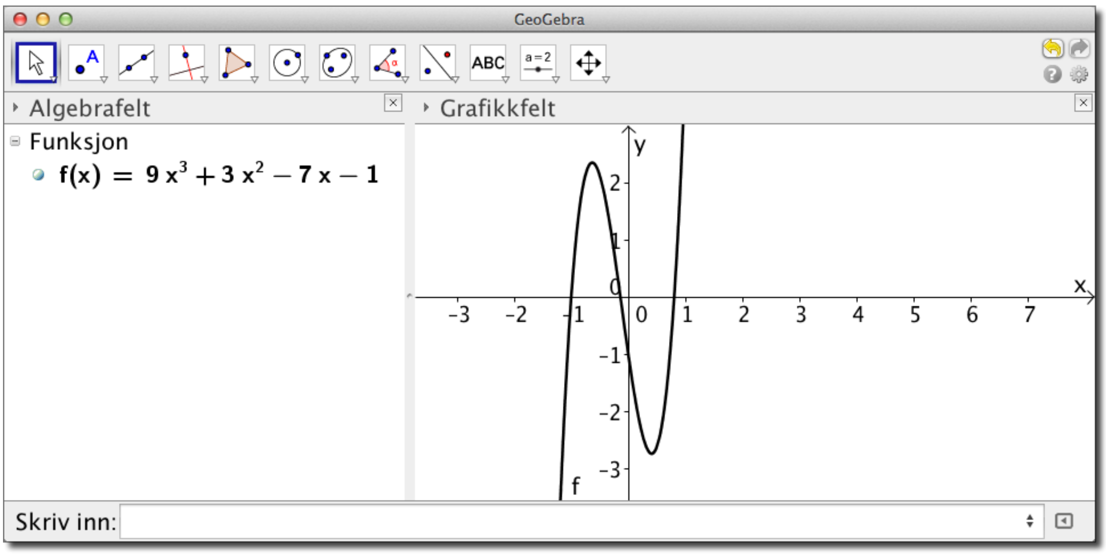
a) Tegn grafen til f i et koordinatsystem.

b) Bestem eventuelle nullpunkt til f.

c) Bestem eventuelle topp-/bunnpunkt til grafen til f.

Løsning:

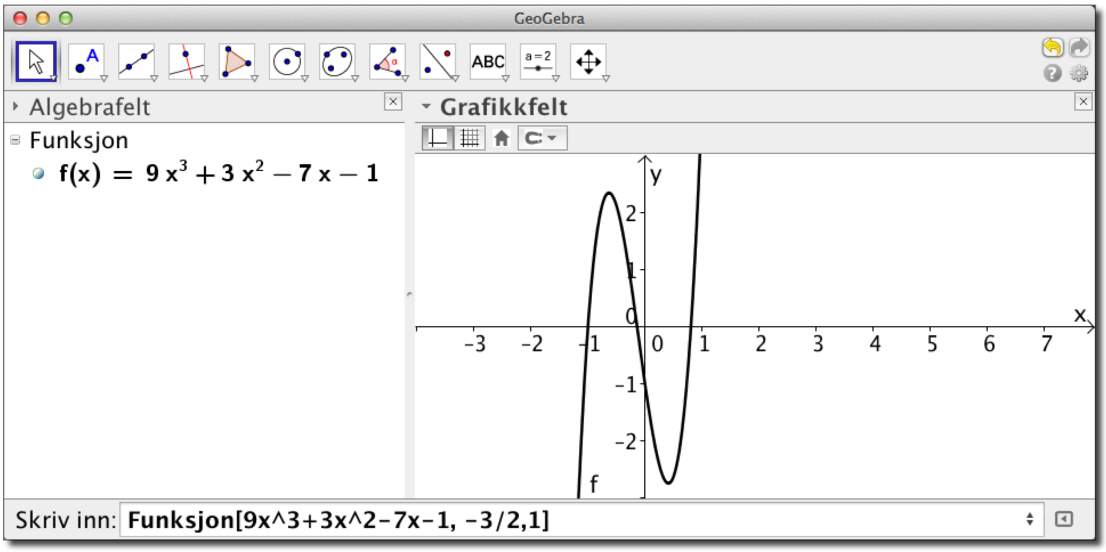
a) Dersom vi skriver funksjonsuttrykket inn i inntastingsfeltet, vil vi få tegnet grafen uten begrensinger på x-verdiene:



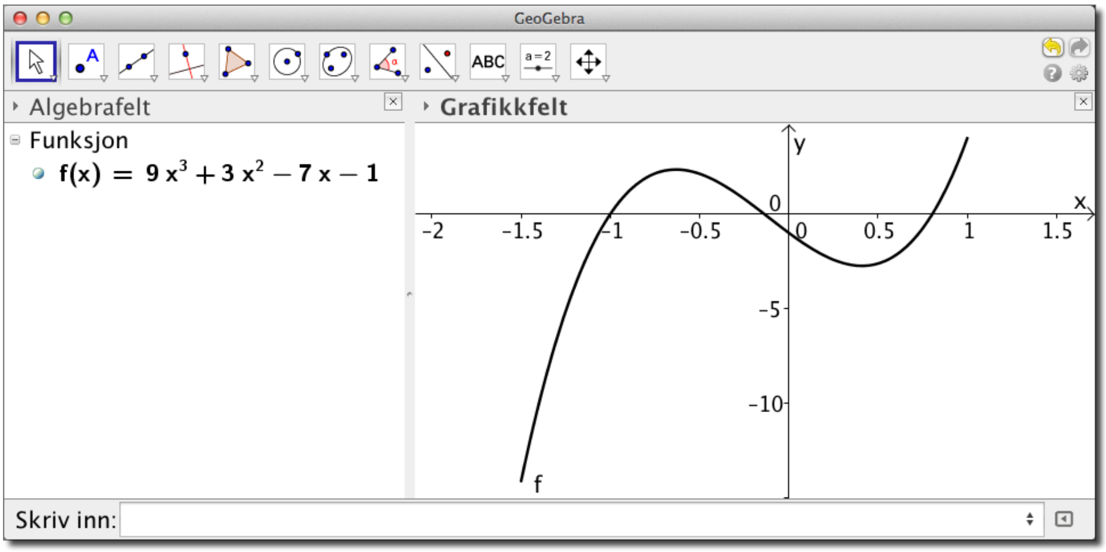
Dersom vi ønsker å plotte grafen for x-verdier i et bestemt intervall, kan vi bruke kommandoen `Funksjon[funksjon, a, b]`. I vårt eksempel skriver vi inn:

```
Funksjon[9x^3+3x^2-7x-1,-3/2,1].
```

Vi vil da få noe slikt:



Et problem med denne grafen er at vi ikke får se alle y-verdiene. Vi ønsker derfor å zoome litt ut på y-aksen og zoome inn litt på x-aksen. Den enkleste måten å gjøre dette på, er å holde shift ⇧ nede mens du flytter markøren over aksen. Holder du da venstre musetast nede (mens du samtidig holder shift ⇧ nede), vil du kunne dra i aksen slik at du enten får strukket den ut eller trukket den sammen. Resultatet kan da se slik ut:



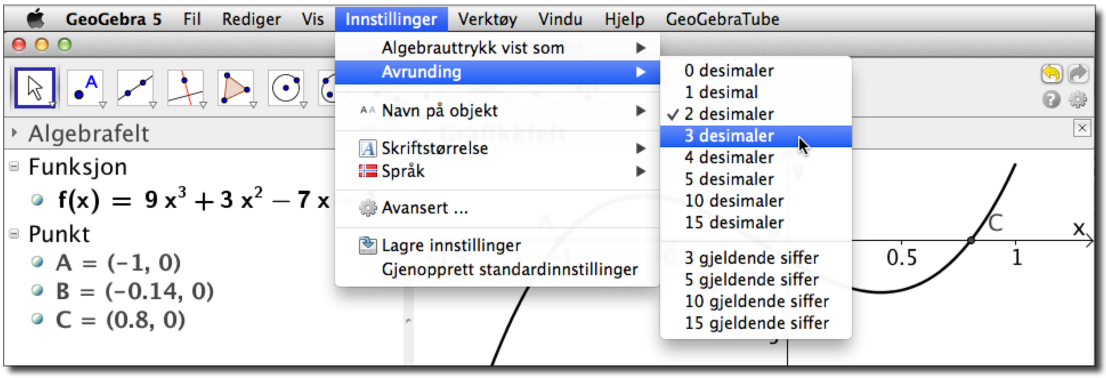
b) Vi skal finne nullpunktene. Det er flere måter å gjøre dette på i GeoGebra. For polynomfunksjoner er det nok å skrive `Nullpunkt[f]` i inntastingsfeltet. Men siden vi nå brukt kommandoen `Funksjon`, vil GeoGebra se på funksjonen vår som en generell funksjon og ikke en polynomfunksjon. Det enkleste i slike tilfeller er å bruke kommandoen

```
NullpunktIntervall[ <Funksjon>, <Start>, <Slutt>]
```

I vårt eksempel kan vi skrive inn

```
NullpunktIntervall[f, -3/2, 1]
```

Vi vil da få tre punkt som svar: $A(-1,0)$, $B(0{,}14,0)$ og $C(0{,}8,0)$. Vanligvis pleier vi ikke å oppgi y-koordinaten når vi skal oppgi nullpunkt. Altså har f tre nullpunkt: $x=-1$, $x=-0,14$ og $x=0{,}8$. Skulle vi ønske flere desimaler, kan vi få det ved å klikke på Innstillinger i menylinjen og velge antall desimaler:

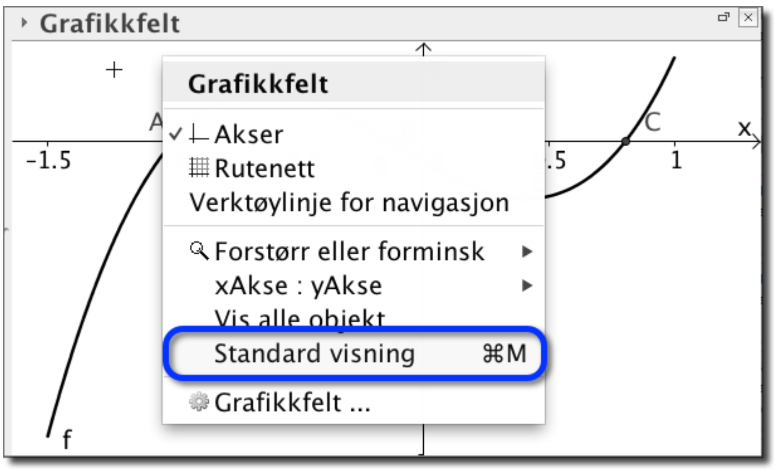


Dersom vi ønsker eksakte svar i slike oppgaver må vi bruke GeoGebra CAS. Se kapittel 8 (side 97). I eksempel 2.2 viser vi hvordan vi kan løse slike oppgaver grafisk.

c) Topp-/bunnpunkt finner vi ved å bruke kommandoen `Ekstremalpunkt`. Vi skriver inn `Ekstremalpunkt[f, -3/2, 1]` i inntastingsfeltet og trykker enter. Vi får da tegnet inn to punkt E of D på grafen til f. Grafen har et toppunkt $D(-0{,}632, 2{,}35)$ og et bunnpunkt $(0{,}41, -2{,}745)$.

■

Tips! Merk at du kan få justert aksene tilbake til standard visning ved å høyre-klikke i grafikkfeltet og velge «Standard visning». Du kan også bruke tastekombinasjonen Ctrl + M på Windows eller cmd ⌘ + M på Mac.



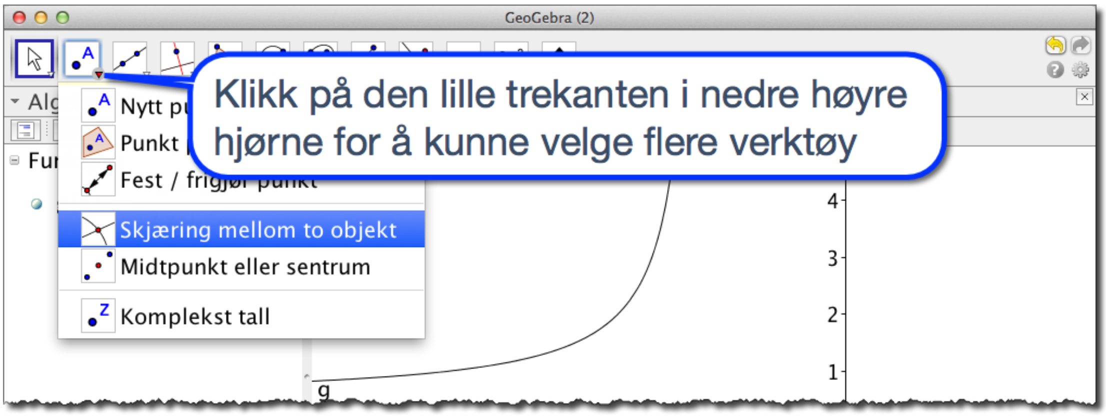
■ **Eksempel 2.2** Finn nullpunktene til funksjonen $g(x) = \dfrac{x-2}{2x+5}$.

Løsning:
Vi skriver i inntastingsfeltet: Skriv inn: g(x)=(x-2)/(2x+5). Vi får da plottet grafen. Dersom vi forsøker å skrive `Nullpunkt[g]`, vil ingen ting skje når vi trykker enter. Dette vil nemlig bare fungere for polynomfunksjoner. Men vi kan skrive inn

```
Nullpunkt[g, 3]
```

Tretallet er her et tall i nærheten av nullpunktet. Nå kan vi trykke enter og lese av koordinatene til punktet A som ble tegnet. Vi ser at funksjonen har nullpunkt for $x = 2$.

En annen måte å finne nullpunktet er å velge et verktøy på verktøylinja som heter *Skjæring mellom to objekt*. Se figur 2.1. Når dette verktøyet er valgt, klikker du først på grafen til g og deretter på x-aksen. Da vil du få nullpunktet tegnet inn. ■



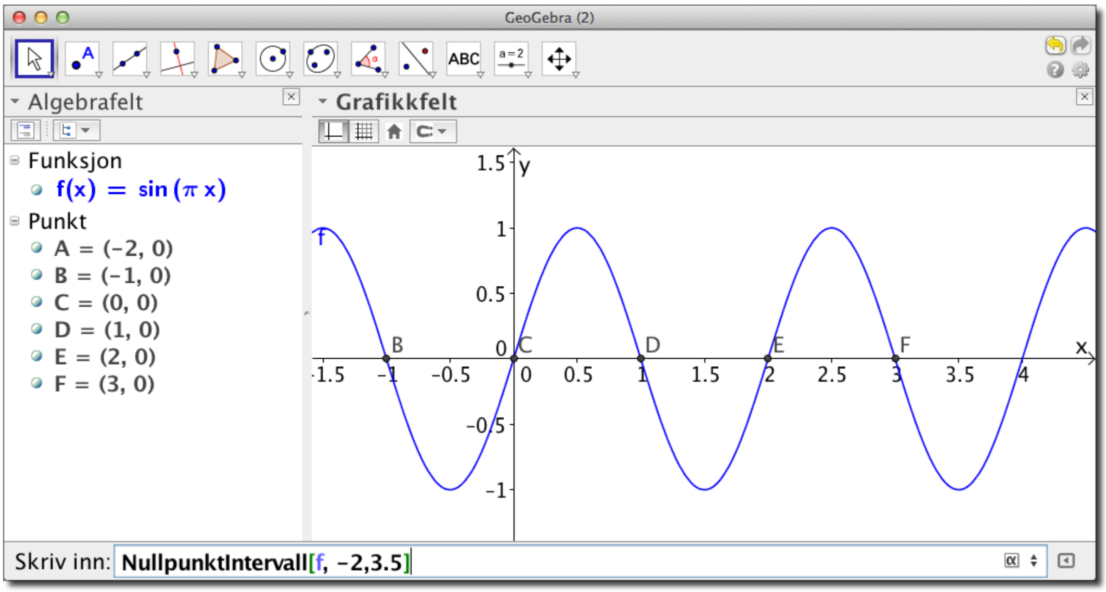
Figur 2.1: *Skjæring mellom to objekt*. For å få rullet ned de andre verktøyene må du klikke på den lille trekanten nede i høyre hjørne.

Tips! Dersom du bruker kommandoen Nullpunkt[<Funksjon>,<Start>] vil du kun få ett av nullpunktene til en funksjon. Dersom en funksjon har mer enn ett nullpunkt anbefales kommandoen

```
NullpunktIntervall[ <Funksjon>,  <Start>, <Slutt> ].
```

■ **Eksempel 2.3** Finn alle nullpunktene til funksjonen $f(x) = \sin(\pi x)$ i intervallet $[-2,\ 3{,}5]$

Løsning:
Vi vet at denne funksjonen har flere nullpunkt i det gitte intervall. Vi kan finne all i et jafs ved å bruke kommandoen `NullpunktIntervall[f,-2,3.5]`.



Figur 2.2: `NullpunktIntervall[f,-2,3.5]` gir alle nullpunktene i $[-2, 3{,}5]$.

■

■ **Eksempel 2.4**

a) Finn eventuelle topp- og bunnpunkt til funksjonen $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-x}$

b) Finn asymptotene til funksjonen f.

Løsning:

a) Vi kan finne ekstremalpunkt til andre funksjoner enn polynomer. For å finne slike topp- eller bunnpunkt må vi avgrense området som punktet ligger i. Vi bruker kommandoen

```
Ekstremalpunkt[<funksjon>, <fra>, <til>]
```

I dette eksempelet ser vi ut fra grafen til f at det er et toppunkt rundt $x = 0{,}5$ og et bunnpunkt rundt $x = 2{,}4$. Vi bruker derfor kommandoene

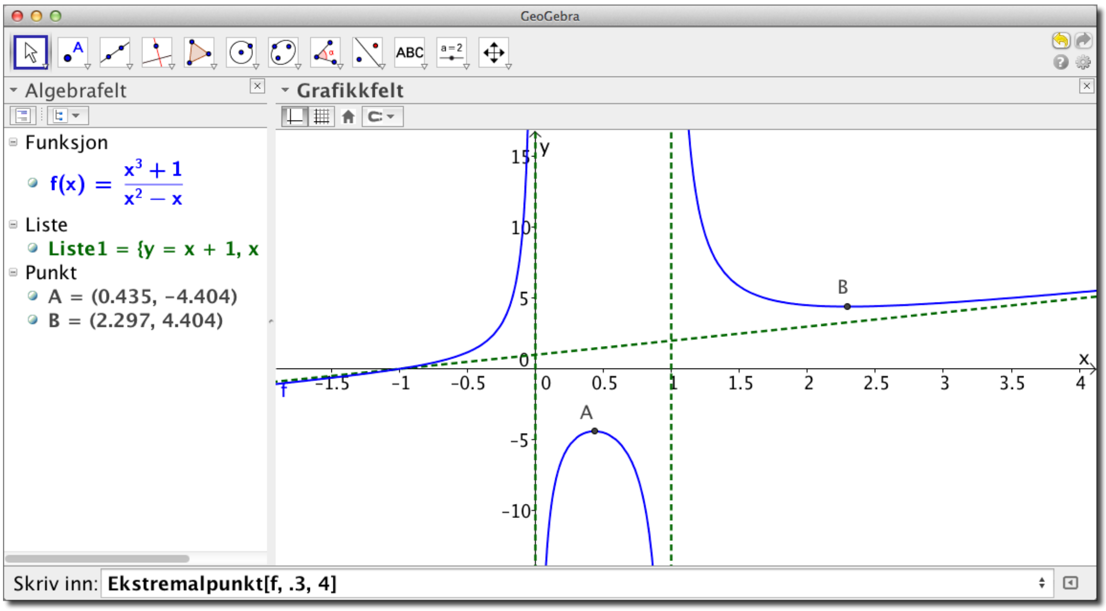
```
Ekstremalpunkt[f, 0.3, 4]
```

Vi ser at grafen har et toppunkt i $(0{,}435, -4{,}404)$ og et bunnpunkt i $(2{,}297, 4{,}404)$

b) Vi finner asymptoter til en graf ved å bruke kommandoen `Asymptote[<funksjon>]`. I dette eksempelet skriver vi inn `Asymptote[f]`. Vi får da tegnet opp tre asymptoter. Disse er oppgitt i en liste i algebrafeltet:

$$\{-x+y=1, x=0, x=1\}$$

■



Figur 2.3: Ekstemalpunkt og asympoteter til funksjonen i eksempel 2.4

Oppgave 2.1

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2, \qquad x \in [0, 2]$.

a) Tegn grafen til f i et koordinatsystem.

b) Finn eventuelle nullpunkt til f.

c) Finn eventuelle topp-/bunnpunkt til grafen til f.

Oppgave 2.2

Gitt funksjonen $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} - 1$.

a) Bestem eventuelle topp- og bunnpunkt til grafen.

b) Bestem eventuelle asymptoter.

Oppgave 2.3 — Eksempelsettet til MAT1011 Matematikk 1P, Høsten 2009.

En fabrikk produserer CD-stativer. Det koster $K(x)$ kroner å produsere x stativer per måned, der

$$K(x) = 12\,000 + 60x + 0{,}2x^2$$

a) Tegn grafen til K i et koordinatsystem. Velg x-verdier fra 0 til 800.

b) Hvor mange stativer kan produseres for 68 000 kroner?

Fabrikken regner med å selge de x stativene for $I(x)$ kroner per måned, der

$$I(x) = 200x$$

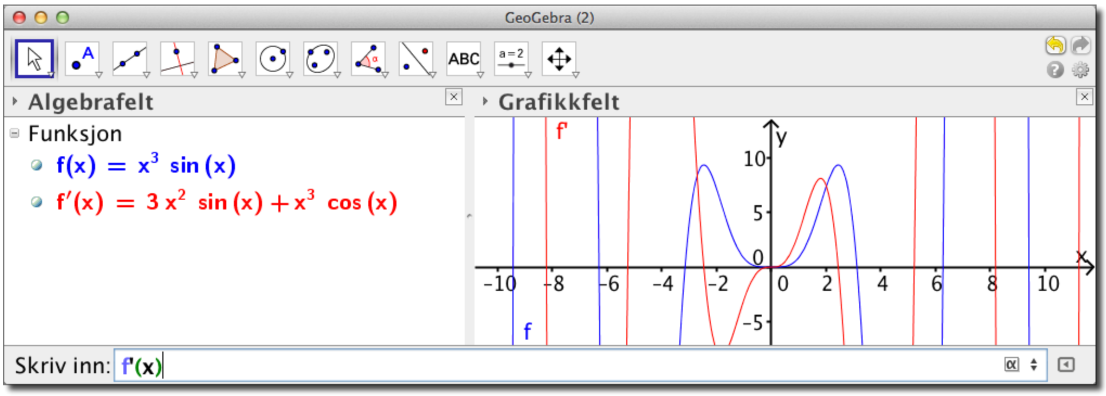
c) Tegn grafen til I i samme koordinatsystem som grafen til K.

d) Gjør nødvendige beregninger og kom med forslag til hvor mange CD-stativer som fabrikken må produsere for å gå med overskudd.

GeoGebra kan også derivere funksjoner. Har du skrevet inn en funksjon $f(x)$ i inntastingsfeltet, er det bare til å skrive $f'(x)$ i inntastingsfeltet og GeoGebra deriverer f. Du kan også derivere en funksjon $f(x)$ ved å bruke kommandoen Derivert[f].

■ **Eksempel 2.5** Deriver funksjonen $f(x) = x^3 \sin(x)$.

Løsning:
Vi skriver først inn funksjonsuttrykket til f i inntastingsfeltet. For å derivere funksjonen skriver du så inn f'(x) i inntastingsfeltet. Vi kan da lese av svaret i algebrafeltet:



Vi har altså funnet at $f'(x) = 3x^2 \sin(x) + x^3 \cos(x)$. ■

Merk: Du også kan bruke kommandoen Derivert[<Funksjon>,<tall>] for å derivere en funksjon. Tallet du da oppgir er antall ganger du vil derivere funksjonen. Kommandoen Derivert[f, 2] gir med andre ord den dobbeltderiverte til f. Dette kunne vi også funnet ved å skrive inn f''(x).

Oppgave 2.4 — Eksempelsettet til MAT1011 Matematikk 1P, Høsten 2009.

a) Tegn tre rette linjer i tre forskjellige koordinatsystemer og finn stigningstallet til hver av linjene.

b) Tegn linjer som står vinkelrett på linjene i a) og finn stigningstallene til disse linjene også.

c) Multipliser sammen stigningstallene til linjene som står vinkelrett på hverandre. Lag en hypotese om sammenhengen mellom stigningstallene til to linjer som står vinkelrett på hverandre.

Tips! Du trenger ikke å derivere for å finne stigningstallet til ei linje. Du kan skrive Stigning[a] for å finne stigningstallet til ei linje a.

Oppgave 2.5
Deriver funksjonene

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3-1}$ b) $g(x) = \sqrt{x^2-2x}$ c) $h(x) = 10^x$

Oppgave 2.6
Funksjonen g er gitt ved

$$g(x) = \frac{2x^2-1}{x+1}$$

a) Tegn grafen til g i et koordinatsystem.

b) Tegn den deriverte $g'(x)$ i samme koordiantsystem.

c) Bruk den deriverte til å bestemme eventuelle topp- eller bunnpunkt på grafen til g.

d) Har grafen til g vendepunkt?

Oppgave 2.7 — Eksempelsettet til MAT1013 Matematikk 1T, Høsten 2009.
La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

a) Tegn grafen til f. Finn koordinatene til toppunktet og bunnpunktet.

b) Finn stigningstallet til linja l gjennom toppunktet og bunnpunktet.

La m være gjennomsnittet av x-koordinatene til toppunktet og bunnpunktet.

c) Finn stigningstallet til tangenten til grafen til f i punktet $(m, f(m))$. Vis at forholdet mellom stigningstallene til linjene l og t er $\frac{2}{3}$.

d) Finn to andre tredjegradsfunksjoner som har både toppunkt og bunnpunkt. Løs oppgavene a), b) og c) for hver av disse funksjonene.

   Sett opp en hypotese om forholdet mellom stigningstallene til linja l og tangenten t.

Dersom du har et punkt $A = (a, b)$ i GeoGebra, så finner du x-koordinaten ved å skrive `x(A)` i inntastingsfeltet. Tilsvarende finner du b med kommandoen `y(A)`.

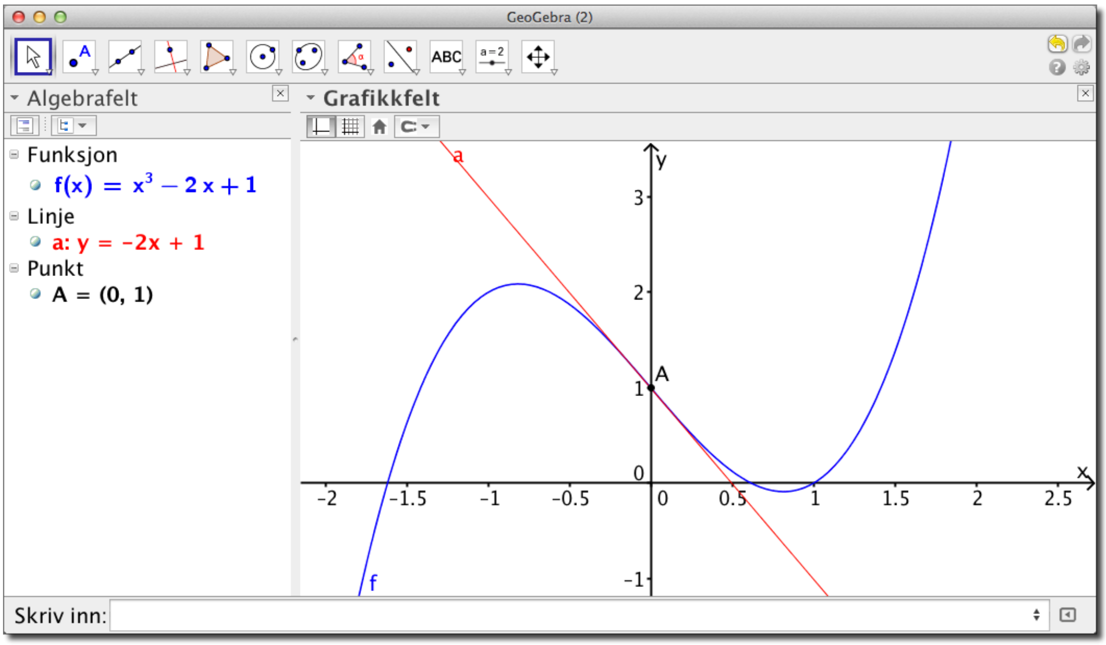
Du kan regne med punkt akkurat som vektorer. Det vil si at gjennomsnittet mellom to punkt `A` og `B` er `(A+B)/2`.

■ **Eksempel 2.6** Finn vendepunktet til funskjonen $f(x) = x^3 - 2x + 1$, og finn likningen til tangenten i vendepunktet.

Løsning:
Vi kan selvsagt finne vendepunkt ved å se hvor den dobbeltderiverte skifter fortegn. Men GeoGebra har en egen kommando som heter `Vendepunkt`. For polynomer er det nok å skrive inn `Vendepunkt[<polynom>]`.

I dette eksempelet skriver vi først inn funksjonen f og deretter kommandoen `Vendepunkt[f]`. Vi finner da at f har vendepunkt i $A = (0,1)$.

Vi finner tangenten til f i A ved å skrive `Tangent[A,f]`. Vi får da tegnet inn tangenten i grafikkfeltet og kan lese av likningen i algebrafeltet:



Vi ser at likningen til tangenten er $y = -2x + 1$. ■

Vi kunne også ha funnet likningen til tangenten ved å bruke verktøyet *Tangenter*. Når du har valgt dette verktøyet, klikker du først på et punkt som tangenten skal gå gjennom og deretter på grafen (eller kjeglesnittet).

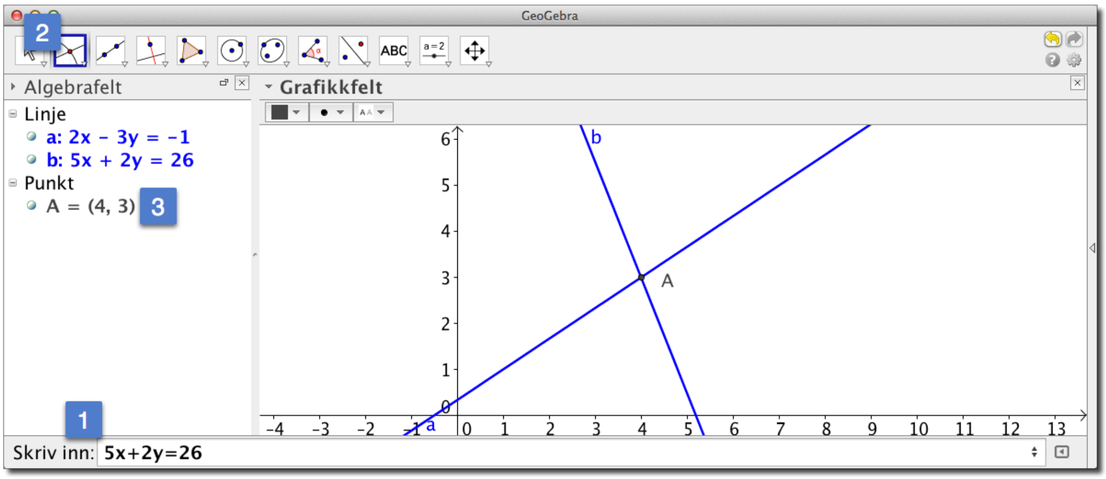
2.2 Skjæringspunkt mellom to objekt

■ **Eksempel 2.7** Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -1 \\ 5x + 2y &= 26 \end{aligned}$$

Vi skriver inn likningene en etter en i inntastingsfeltet. Se (1) på figur 2.4. Når vi trykker enter vil linjene som likningene representerer bli tegnet i koordinatsystemet i grafikkfeltet.

Vi kan nå velge *Skjæring mellom to objekt* (2) på verktøylinja, klikke først på den ene linja, så den andre, og få markert skjæringspunktet $A = (4,3)$ (3). Det vil si at $x = 4$ og $y = 3$. Det fins også en egen kommando for skjæring mellom to kurver, nemlig `Skjæring`: Skriv inn: **Skjæring[a, b]**. Men husk at dersom du skal bruke denne på grafer til andre objekt enn polynomer, så må du i tillegg skrive inn et punkt i nærheten av et søkt skjæringspunkt.



Figur 2.4: Grafisk løsning av et likningssystem

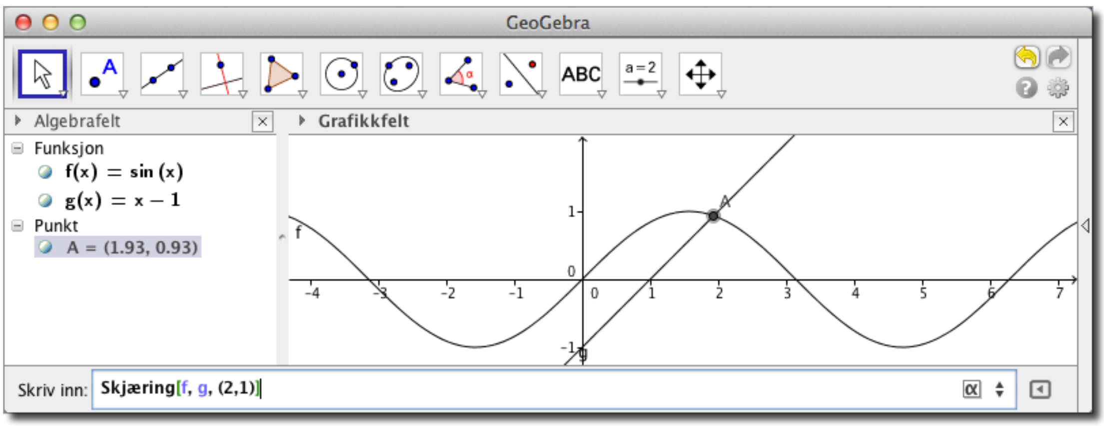
■

■ **Eksempel 2.8** Gitt funksjonene $f(x) = \sin(x)$ og $g(x) = x - 1$.

a) Tegn grafen til f og g i samme koordinatsystem.

b) Finn skjæringspunktet til grafene.

Løsning:
Vi skriver inn funksjonene i GeoGebra og skriver inn i inntastingsfeltet. Du kan enten bruke verktøyet *Skjæring mellom to objekt* som beskrevet over, eller du kan skrive inn kommandoen `Skjæring[f,g,(2,1)]` i inntastingsfeltet. Vi har her valgt $(2,1)$ som et punkt som ligger i nærheten av det søkte skjæringspunktet. Vi kan da lese av i algebrafeltet at $A = (1{,}93,\ 0{,}93)$.



Figur 2.5: Skjæring mellom to grafer nær punktet $(2,1)$.

■

Oppgave 2.8
Løs likningssettene

a) $x-y=9$ og $3x+5y=11$

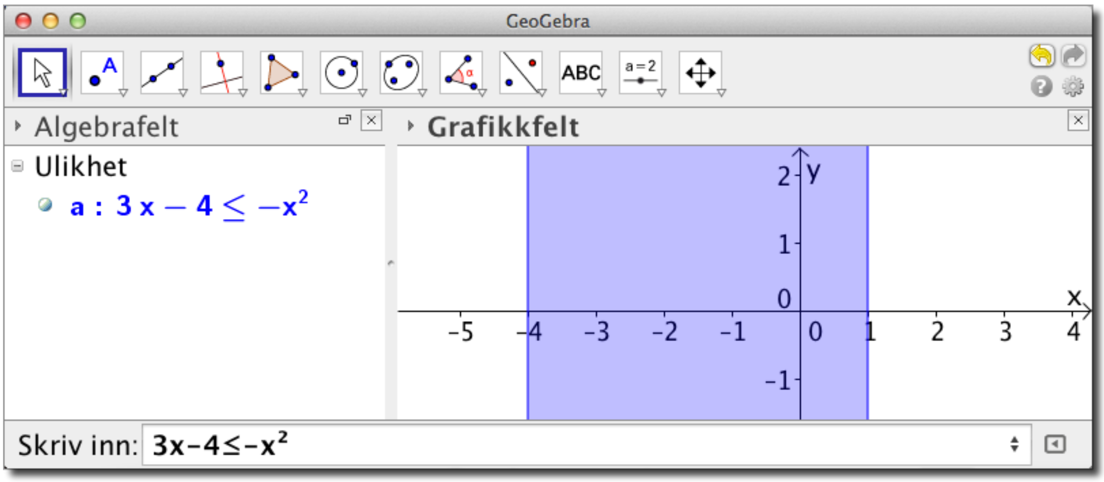
b) $y=x^2-2$ og $x^2+y^2=8$

2.3 Ulikheter

GeoGebra kan være til stor hjelp når vi skal løse ulikheter. Som vanlig tar vi utgangspunkt i noen eksempler.

■ **Eksempel 2.9** Løs ulikheten $3x-4\leq -x^2$.

Løsning:
Skriv inn ulikheten i inntastingsfeltet. For å få $\leq$ kan du enten skrive «<=» eller inn symbolet ved å klikke på den lille «alpha»-en til høyre i inntastingsfeltet α.[1] Trykk enter og du vil kunne lese av løsningsmengden som det blå området i grafikkfeltet på figur 4.14. Vi ser at



Figur 2.6: Du kan løse ulikheter i GeoGebra ved å skrive dem inn i inntastingsfetet

løsningsmengden er gitt ved $-4\leq x\leq 1$.

Vi kan også løse slike ulikheter i GeoGebra CAS. Dette kan du lese om på side 101.

■

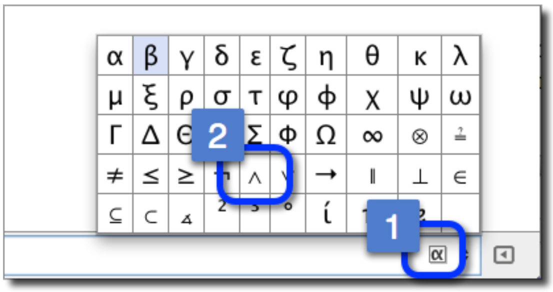
Det neste eksempelet er særdeles relevant i Matematikk S1 hvor elevene må løse lineære optimeringsproblemer. Dette innebærer å finne et område i planet definert av et sett med ulikheter.

[1] Du kan også trykke Alt + ; (eller Ctlr + ; på en Mac) for å få $\leq$. Bytter vi ut ; med : får vi $\geq$

■ **Eksempel 2.10** Skraver området definert med ulikhetene

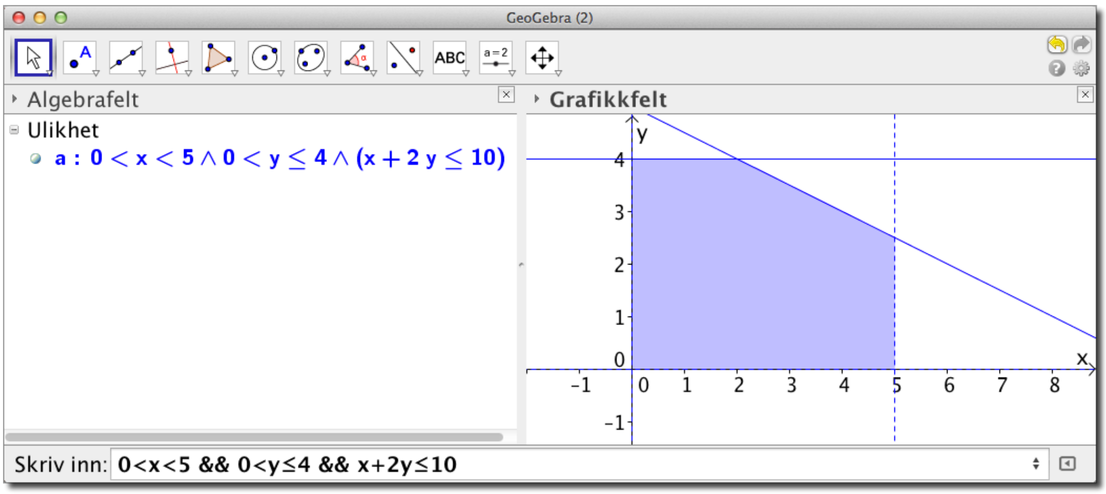
$$0 < x < 5$$
$$0 < y \leq 4$$
$$x + 2y \leq 10$$

Løsning:
I dette tilfellet er det ikke lurt å skrive inn én ulikhet om gangen. I stedet skriver vi alle inn i én omgang. For å gjøre dette må vi fortelle GeoGebra at alle ulikhetene skal være tilfredsstilt samtidig. Vi vil derfor skrive inn det logiske tegnet for *og* mellom ulikhetene. Vi finner dette som $\wedge$ i menyen til høyre i inntastingsfeltet. Se figur 2.7 under. Alternativt kan du skrive & to ganger, slik: &&. Skriv så inn alle ulikhetene som vist på figur 2.8. Du vil da få tegnet opp



Figur 2.7: Du finner $\wedge$ og mange andre symboler i denne listen.

området som tilfredsstiller alle ulikhetene. Legg merke til at linjene der vi har mindre-eller-lik er heltrukne, mens der vi har ekte ulikhet er stiplet.



Figur 2.8: Bruk $\wedge$ eller && mellom ulikhetene.

■

Oppgave 2.9
Løs ulikheten $x^2 < 5 + 4x$ i GeoGebra.

Oppgave 2.10

Skraver området definert ved ulikhetene

$$y > x^2$$
$$-x^2 < 2y - 3$$

Oppgave 2.11

For hvilken x og y vil $F(x, y) = 12x + 8y$ ha sin største verdi dersom

$$0 \leq x \leq 10$$
$$0 \leq y \leq 8$$
$$2x + 3y \leq 36$$
$$6x + y \leq 60$$

Tegn området definert av ulikhetene og marker punktet som gir den største verdien.

Oppgave 2.12 — Eksamen REA3026 Matematikk S1, Høsten 2010.

En ferje frakter personbiler og lastebiler. En personbil trenger et areal på $15\,\text{m}^2$ når den står parkert på ferja, mens en lastebil trenger $50\,\text{m}^2$. Arealet av hele ferjedekket er $2\,100\,\text{m}^2$.

En personbil veier i gjennomsnitt 1 t (tonn), og en lastebil veier 10 t. Den samlede vekten av bilene på ferja må ikke overstige 250 t.

Det koster 106 kroner for en personbil på denne ferjestrekningen, mens det koster 603 kroner for en lastebil.

La x være antall personbiler og y antall lastebiler om bord på ferja ved en overfart.

a) Sett opp ulikheter som avgrenser antall personbiler og lastebiler det er mulig å ta med på ferja.

b) Tegn grafer som illustrerer ulikhetene i et koordinatsystem. Marker på figuren hvilket område som angir de mulige antallene av personbiler og lastebiler.

c) Sett opp et uttrykk som viser hvor stor inntekt ferjeselskapet har på en overfart. Finn den fordelingen av personbiler og lastebiler som gir høyest inntekt for selskapet. Hva er den største inntekten selskapet kan oppnå på en overfart?

Det innføres nye regler. Av sikkerhetsgrunner er det ikke lenger tillatt å ta med mer enn 14 lastebiler.

d) Hva blir nå den høyeste inntekten som er mulig å oppnå på en overfart?

2.4 Funksjonsanalyse

GeoGebra har også et nyttig verktøy til utforsking og undersøkelser av funksjoner. Dette verktøyet ligger i samme gruppe på verktøylinjen som «Sett inn tekst» ABC og har fått navnet «Funksjonsanalyse» .

Men før vi kan bruke dette verktøyet må vi først skrive inn funksjonen du vil undersøke.

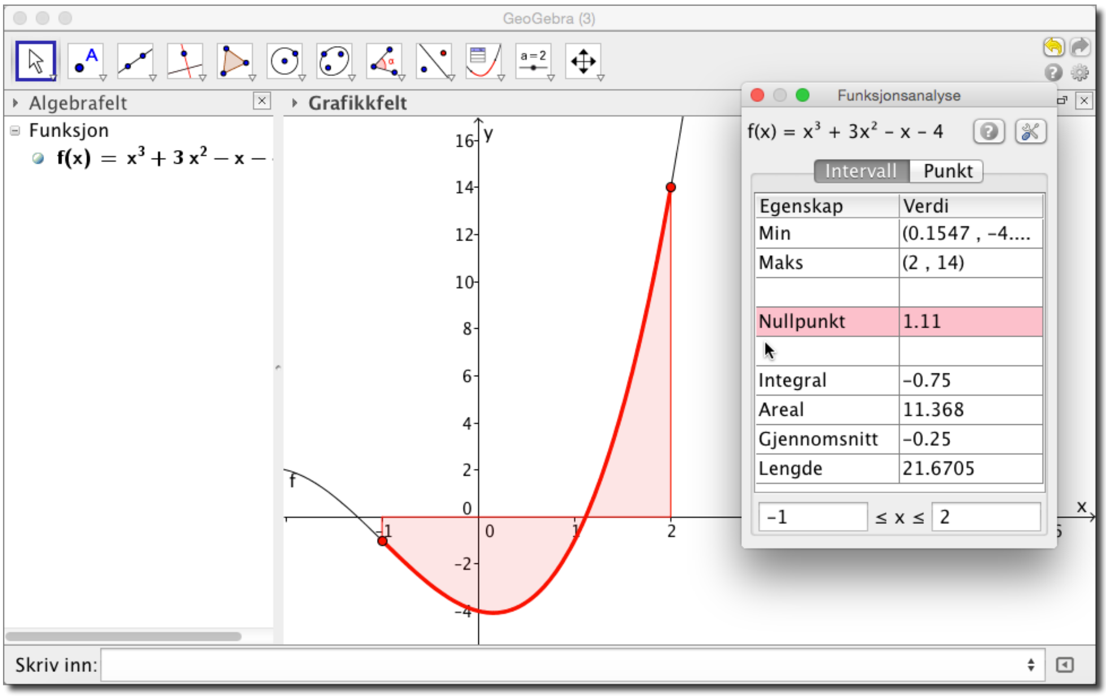
Vi skriver da inn funksjonsuttrykket i inntastingsfeltet, velger «Funksjonsanalyse» og klikker på funksjonen (enten i algebrafeltet eller på grafen). Vi vil da få opp et vindu som vist på figur 2.9.

La oss si at vi vil drøfte funksjonen

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 4$$

La oss si at vi ønsker å studere egeneskapene til denne funksjonen i intervallet $[-1, 2]$. Vi kan da enten dra i de to røde punkta på grafen eller vi kan skrive inn -1 og 2 nederst i Funksjonsanalysevinduet. Se figur 2.10. Vi kan nå lese av ulike egenskaper til funksjonen i dette intervallet. Vi ser for eksempel at grafen har et toppunkt i $(2, 14)$ og nullpunkt i $x = 1{,}11$. Legg også merke til at vi kan lese av integralet og arealet mellom grafen og x-aksen. Sistnevnte er større enn integralet, siden integralet er negativt mellom $x = -1$ og $x = 1{,}11$.

Under fliken «Punkt» kan vi også få ut lister med verdier tilhørende grafen til f. For å få fram denne listen må vi klikke på knappen ▤ nede til venstre. På figur 2.10 ser vi en liste med syv rader der vi kan lese av verditabell for f og dens deriverte. Du kan dra det midterste punktet rundt på grafen for å få andre punkt med tilhørende verdier.



Figur 2.9: Vi må velge intervallet vi vil studere ved enten å skrive inn intervallet eller ved å dra i de to punkta på grafen.

2.5 Oppgaver

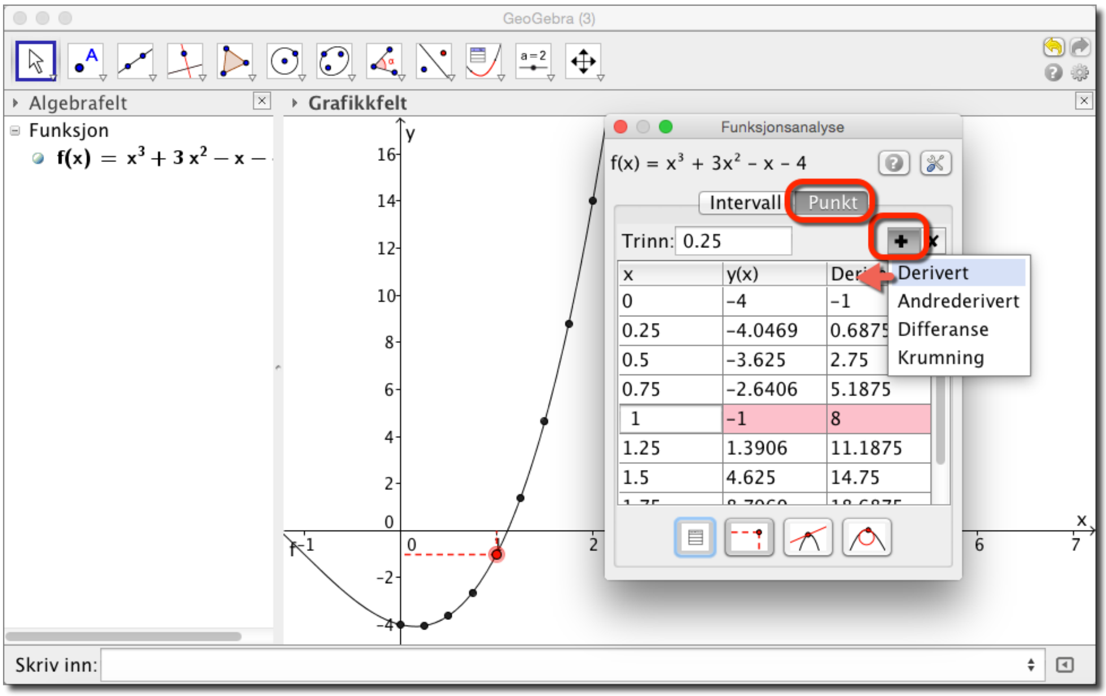
Oppgave 2.13

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^4 - x^2 + x, \qquad x \in [-2, 3]$$

a) Tegn grafen til f.

b) Bestem funksjonenes nullpunkt og grafens ekstremalpunkt og vendepunkt.



Figur 2.10: Under «Punkt» kan vi lese av ulike verdier til tilhørende f.

Oppgave 2.14 — Eksamen REA3022 Matematikk R1, Våren 2009.

I denne oppgaven skal du studere fjerdegradsfunksjoner som har to vendepunkt.

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \frac{1}{12}(x^4 - 2x^3 - 12x^2)$.

La S og T være de to vendepunktene, med S lengst til venstre på grafen.

a) Tegn grafen til f.

b) Finn $f''(x)$ og tegn fortegnslinja for denne. Bestem koordinatene til vendepunktene S og T.

c) Finn likningen for den rette linja gjennom punktene S og T. Bestem koordinatene til de to andre skjæringspunktene mellom grafen til f og linja. Bruk gjerne digitalt verktøy.

d) Vi lar Q være skjæringspunktet lengst til høyre. Regn ut $\dfrac{ST}{TQ}$.

En annen fjerdegradsfunksjon g er gitt ved $g(x) = x^4 - 6x^2$.

La S_1 og T_1 være de to vendepunktene, med S_1 lengst til venstre på grafen.

Du skal gjennomføre tilsvarende oppgaver som i a), b), c) og d):

e) 1) Tegn grafen til g.

   2) Finn $g''(x)$ og tegn fortegnslinja for denne. Bestem koordinatene til vendepunktene S_1 og T_1.

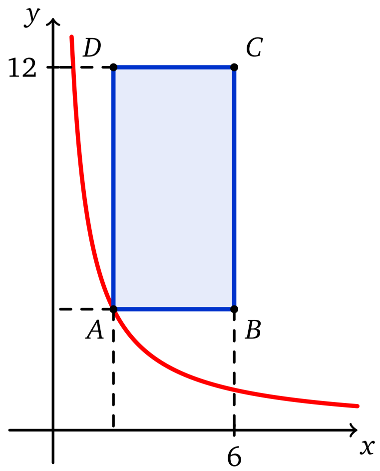
3) Finn likningen for den rette linja gjennom punktene S_1 og T_1. Bestem koordinatene til de to andre skjæringspunktene mellom grafen til g og linja. Bruk gjerne digitalt verktøy.

4) Vi lar Q_1 være skjæringspunktet lengst til høyre. Regn ut $\dfrac{S_1T_1}{T_1Q_1}$.

Kommenter resultatet.

Oppgave 2.15 — Eksamen REA3028 Matematikk S2, Våren 2009.

På figuren har vi tegnet grafen til $f(x) = \dfrac{8}{x}$ for $x > 0$, og et rektangel $ABCD$. Punktet $A(x, f(x))$ ligger på grafen til f og til venstre for B. Punktene B og C har førstekoordinat 6, og punktene C og D har andrekoordinat 12. Se figuren.



a) Bestem lengden av linjestykkene AB og AD uttrykt ved x.

b) Vis at arealet av rektanglet kan skrives som

$$g(x) = 80 - 12x - \frac{48}{x}$$

Hva er definisjonsmengden til g?

c) Bestem det største arealet rektanglet kan få.

d) Undersøk om rektanglet med størst areal også har størst omkrets.

Oppgave 2.16

Gitt tredjegradsfunksjonen

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

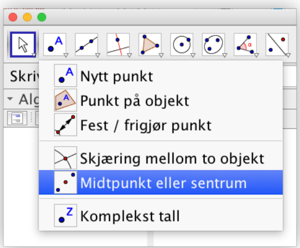
a) Finn nullpunktene til f.

b) Finn midtpunktet D til to av nullpunktene A og B og finn tangenten som tangerer f over D. Det vil si at tangenten tangerer f i $(d, f(d))$ der d er x-koordinaten til D. For å skrive inn dette punktet skriver du `(x(D), f(x(D)))` i inntastingsfeltet.

Du kan finne midtpunkt ved å velge verktøyet *Midtpunkt eller sentrum* .

c) Hva kan du si om denne tangenten?

Tips! Du kan finne midtpunkt til to punkt med dette verktøyet:

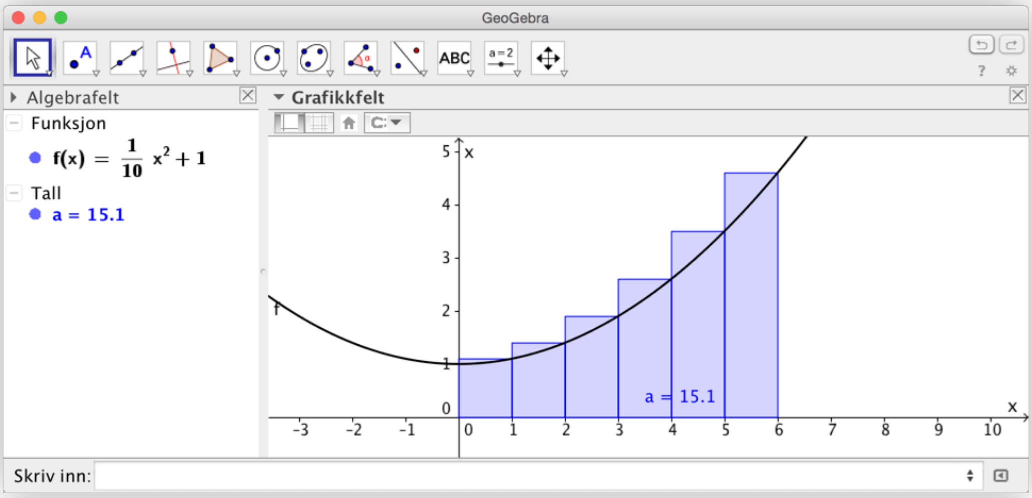


2.6 Arealet under en graf

Vi skal til slutt i dette kapittelet se hvordan vi kan bruke GeoGebra til å beregne arealet under en graf. Vi ønsker at elevene skal få en viss forståelse for hvordan vi kan finne arealet under en graf ved hjelp av Riemannsummer.

Eksempel 2.11 Hva er arealet under grafen til $f(x) = \frac{1}{10}x^2 + 1$ fra $x = 0$ til $x = 6$?

Nedenfor har vi tegnet inn grafen til f. Vi har også tegnet inn en del rektangler som ligger akkurat over grafen til f. Disse gir en god tilnærming til arealet under grafen.



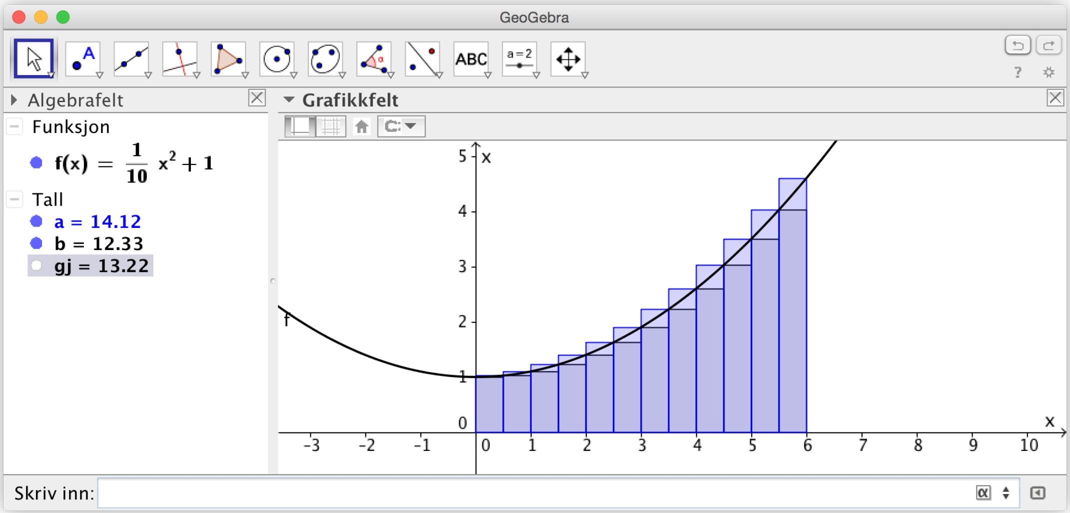
Figur 2.11: Kommandoen `SumOver[f,0,6,6]` gir en tilnærmet verdi for arealet under grafen.

Kommandoene `SumOver[f, a, b, n]` og `SumUnder[f, a, b, n]` fungerer slik at de beregner arealet til n rektangler fra a til b som henholdsvis er tegnet over og under grafen til f.

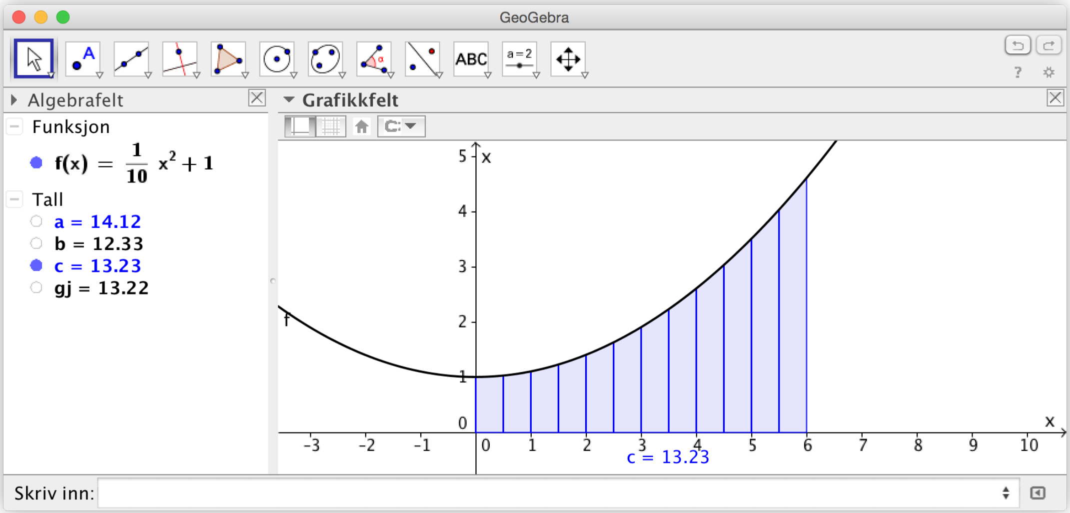
Vi kunne gjort dette enda bedre ved å ta flere rektangler. Vi kunne også beregnet arealet ved å tegne rektanglene inn slik at de ligger under grafen. På figur 2.12 har vi beregnet en tilnærmet verdi for arealet ved å bruke flere rektangler og ved å ta gjennomsnittet mellom øvre sum og nedre sum.

Dersom vi nå lar n i beregningene ovenfor gå mot uendelig vil differansen mellom de øvre og de nedre rektanglene gå mot null og vi finner arealet under grafen. Dette gjelder for alle stykkevis kontinuerlige funksjoner.

Vi kan også bruke kommandoen `TrapesSum[f,0,6,12]` til å finne en tilnærmet verdi til dette arealet. Denne kommandoen bruker trapeser i stedet for rektangler:



Figur 2.12: Kommandoen `SumOver[f,0,6,12]` og `SumUnder[f,0,6,12]` gir begge en tilnærmet verdi for arealet under grafen.



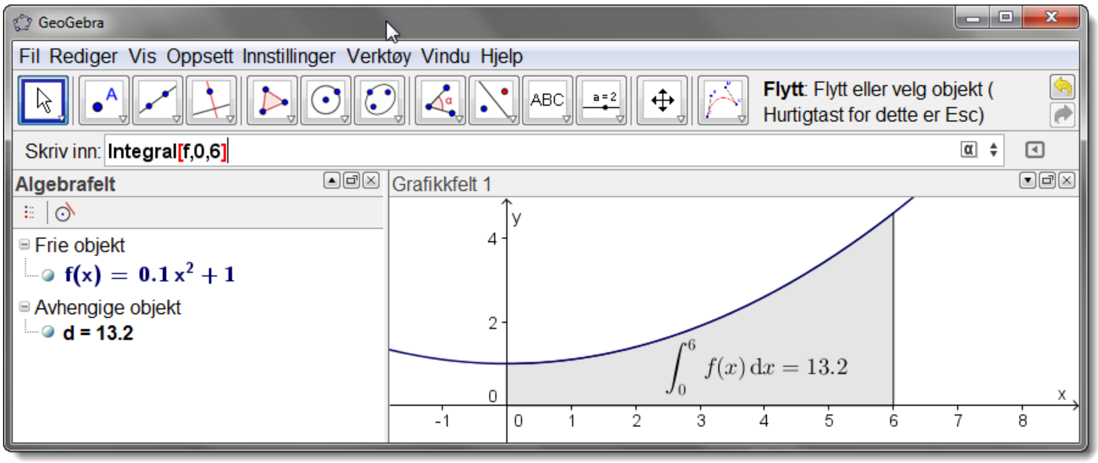
Figur 2.13: `TrapesSum[f,0,6,12]` gir en bra tilnærmet verdi for arealet.

En annen aktuell kommando vi vil nevne er `RektangelSum[]`. Du finner mer informasjon om denne ved å klikke «Vis Hjelp online».

■ **Eksempel 2.12** Beregn arealet under f fra 0 til 6. ■

Vi har allerede funnet en god tilnærming for dette arealet ved å bruke `SumOver` og `SumUnder`. Her vil vi bruke en kommando som heter `Integral[f, a, b]`. Denne beregner altså arealet under grafen til f fra $x = a$ til $x = b$. I dette tilfellet får vi

$$\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 13{,}2.$$



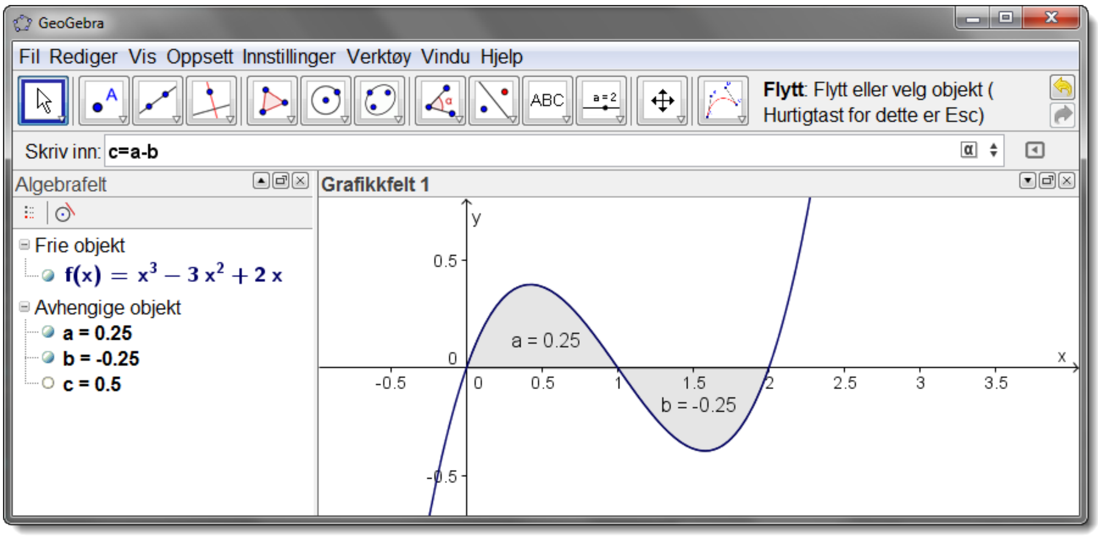
Figur 2.14: Kommandoen `Integral[f, 0, 6]` gir oss arealet under f fra $x = 0$ til $x = 6$.

■ **Eksempel 2.13** Finn arealet avgrenset av grafen til f, x-aksen, $x = 0$ og $x = 2$ til funksjonen $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. ■

Vi skriver inn $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ i inntastingsfeltet slik at grafen blir tegnet.

Kommandoen `Integral[f, 0, 2]` gir oss i dette tilfellet 0 som svar. Kan dette stemme? Det som skjer her er at det er like stort areal som ligger over x-aksen som under. Vi må derfor dele opp integralet fra $x = 0$ til $x = 1$ og fra $x = 1$ til $x = 2$. Vi skriver derfor inn kommandoene `Integral[f, 0, 1]` og `Integral[f, 1, 2]` i inntastingsfeltet. Vi får da henholdsvis $a = -0{,}25$ og $b = 0{,}25$ som svar. Vi får derfor:

$$\begin{aligned}\text{det søkte areal} &= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx \\ &= a - b = -(-0{,}25) = 0{,}5\end{aligned}$$



Figur 2.15: Arealet begrenset av grafen til funksjonen $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, x-aksen, $x = 0$ og $x = 2$.

Vi kan også finne arealet mellom to grafer. Dersom arealet er begrenset av f, g, $x = a$ og $x = b$, så er arealet gitt ved `Integral[f, g, a, b]`.

■ **Eksempel 2.14** Finn arealet avgrenset av grafene til funksjonene

$$f(x) = -2x^2 + 5x - 1 \quad \text{og} \quad g(x) = x - 1$$

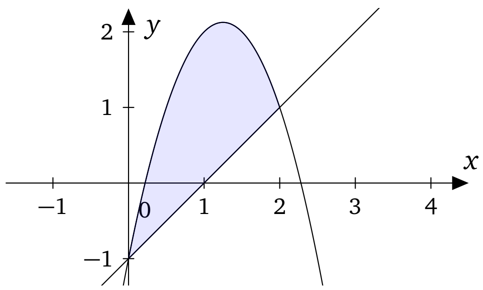
■

Løsning:
Vi må først finne skjæringspunktene mellom grafen til f og g. Det kan vi gjøre ved å skrive inn `Skjæring[f,g]`. Vi ser da at grafene skjærer hverandre i $(0, -1)$ og $(2, 1)$.

For å finne det søkte arealet skriver vi derfor kommandoen

```
IntegralMellom[f, g, 0, 2]
```

i inntastingsfeltet. Vi finner at arealet er 2,67.



Oppgave 2.17

a) Lag glidere a, b og c som kan variere mellom -5 og 5. Plott grafen til

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

b) Tegn inn linja som skjærer grafen til f i punkta med x-koordinatene $x = -2$ og $x = 1$.

c) Finn arealet avgrenset av linja og grafen til f. Hva skjer når du endrer på a? Hva med b og c?

GeoGebra kan også regne ut ubestemte integraler. Dette gjøres ved å gi kommandoen `Integral[<funksjon>]` uten å spesifisere grensene.

■ **Eksempel 2.15** Finn det ubestemte integralet $\displaystyle\int x^3 \sin x \, dx$ ■

Løsning:
Vi skriver inn kommandoen `Integral[x^3sin(x)]` og trykker enter. Vi får da svaret i algebrafeltet, nemlig $(3x^2 - 6)\sin(x) + (6x - x^3)\cos(x)$. Det vil si at

$$\int x^3 \sin x \,\mathrm{d}x = (3x^2 - 6)\sin x + (6x - x^3)\cos x + C$$

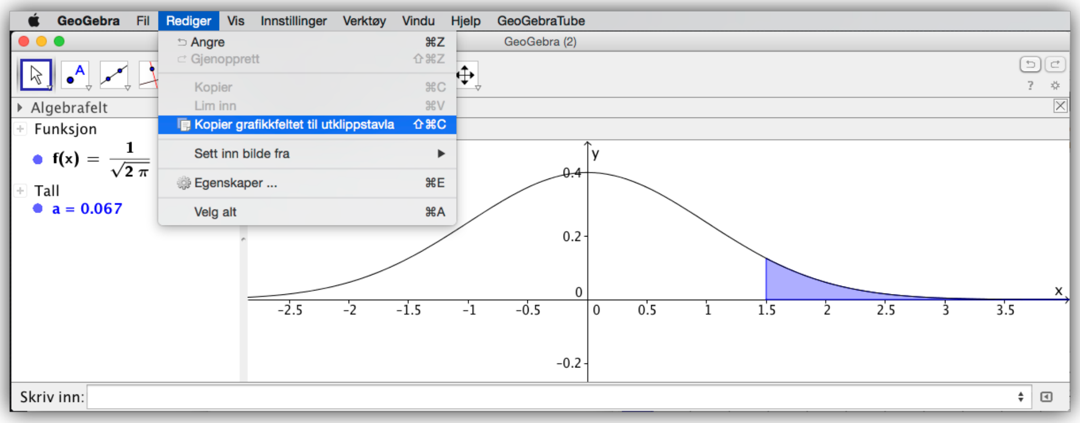
3 Kopiere og lime inn i en tekstbehandler

Dersom du bruker Word (eller andre tekstbehandlere) og ønsker å få en graf inn i et dokument, er det bare å trykke følgende tastekombinasjoner:

Windows: Shift + Ctrl + C
Mac: Shift + cmd + C

Du vil da få alt det du ser i grafikkfeltet kopiert til utklippstavlen. Nå kan du lime dette inn i tekstbehandleren der du måtte ønske.

Om du ikke husker tastekombinasjonen kan du velge «Kopier grafikkfeltet til utklippstavla» under «Rediger» på menylinjen.



Figur 3.1: Du kan kopiere det som vises i grafikkfeltet til utklippstavla.

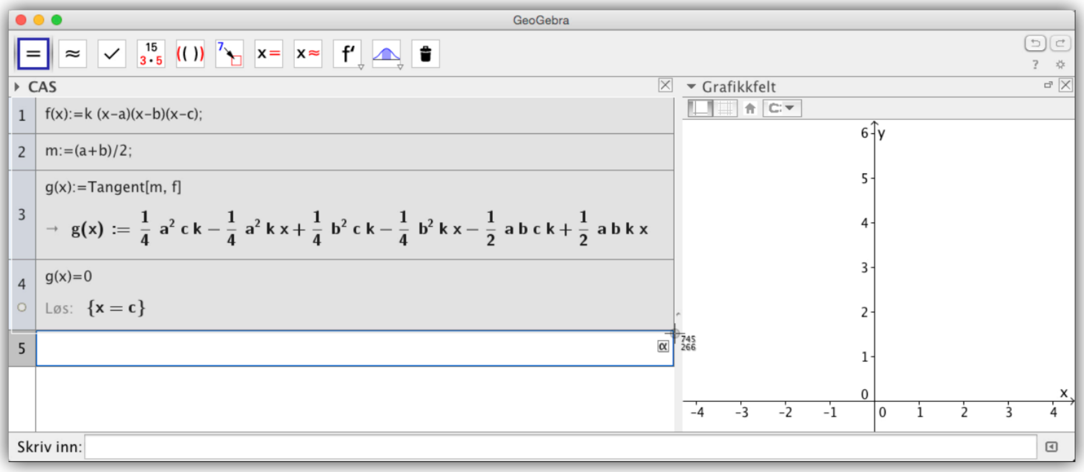
Dersom du bruker program som GeoGebra eller Excel under eksamen, kan det være lurt å lære seg hvordan du pent kan ta skjermdump av det du gjør slik at du kan lime det inn i en tekstbehandler (som for eksempel Word). Vi viser først hvordan dette kan gjøres på en Mac.

3.1 Skjermutklipp på Mac

Det fins essensielt to metoder for å ta skjermbilder på. (1) som et selvvalgt rektangel eller (2) som utklipp av aktive vindu.

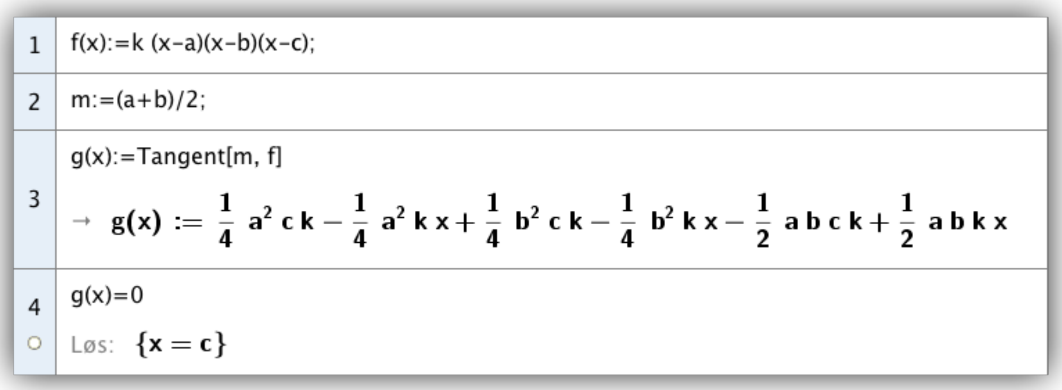
3.1.1 Skjermbilde av rektangel

For å velge ut et rektangel som du vil kopiere til utklipstavlen, trykker du kombinasjonen cmd ⌘ + shift ⇧ + ctrl + 4 og velger området du vil ta bilde av.



Figur 3.2: Skjermbilde av en bit av grafen til en funksjon

På figur 3.2 vil vi få følgende skjermbilde på utklipstavlen:

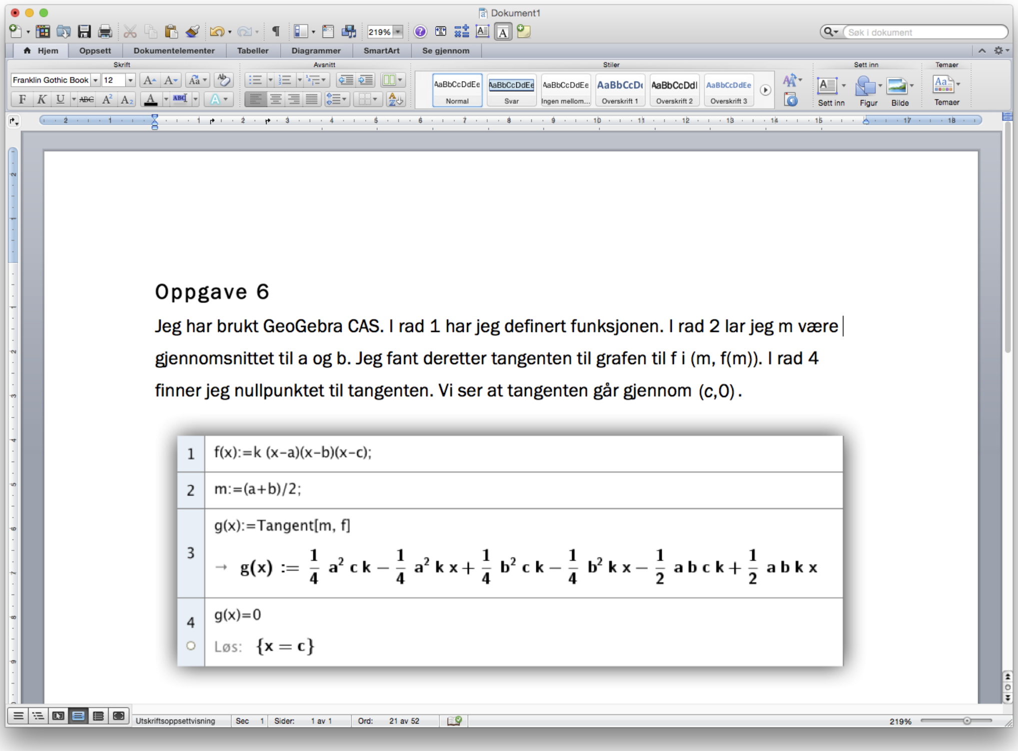


For å få dette inn i for eksempel Word, er det bare til å plassere markøren der du vil ha bildet og lime inn. Se figur 3.3.

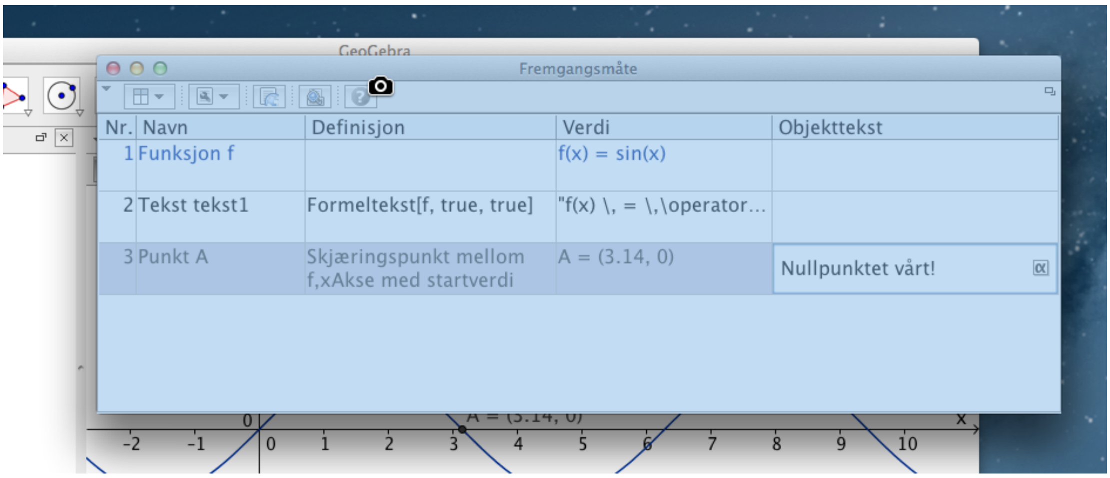
3.1.2 Skjermbilde av aktivt vindu

Noen ganger ønsker vi å ta bilde av et helt vindu fra skjermen. For å gjøre dette trykker du følgende tastekombinasjon: cmd ⌘ + shift ⇧ + ctrl + 4 og deretter spacebar (mellomromstastet). Du kan da velge hvilket vindu du ønsker å ta skjermbilde fra, slik figur 3.4 nedenfor viser.

Resultatet blir da lagret til utklipstavlen. Dette kan du deretter sette inn i tekstbehandleren din (Word).



Figur 3.3: Pent lite skjermbilde limt inn i Word.



Figur 3.4: Skjærmbilde av et vindu.

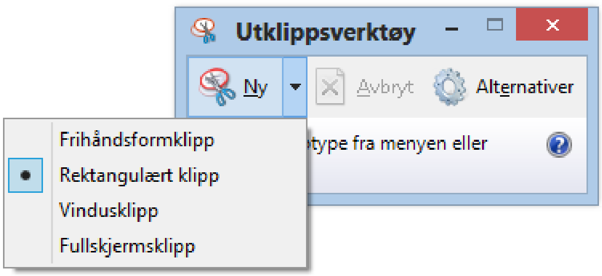
Her er en oversikt over de ulike tastekombinasjonene i OSX:

Tastekombinasjon	handling
cmd ⌘ + Shift ⇧ + 3	Tar bilde av hele skjermen og lagrer på skrivebordet
cmd ⌘ + Shift ⇧ + 4	Velg rektangel som du vil ta bilde av. Blir lagret på skrivebordet
cmd ⌘ + Shift ⇧ + 4 og så mellomromstast	Velg vindu du vil ta bilde av. Blir lagret på skrivebordet.
cmd ⌘ + ctrl + Shift ⇧ + 3	Tar bilde av hele skjermen og kopierer til utklipstavlen
cmd ⌘ + ctrl + Shift ⇧ + 4	Velg rektangel som du vil ta bilde av. Blir kopiert til utklipstavlen.

3.2 Skjermutklipp i Windows

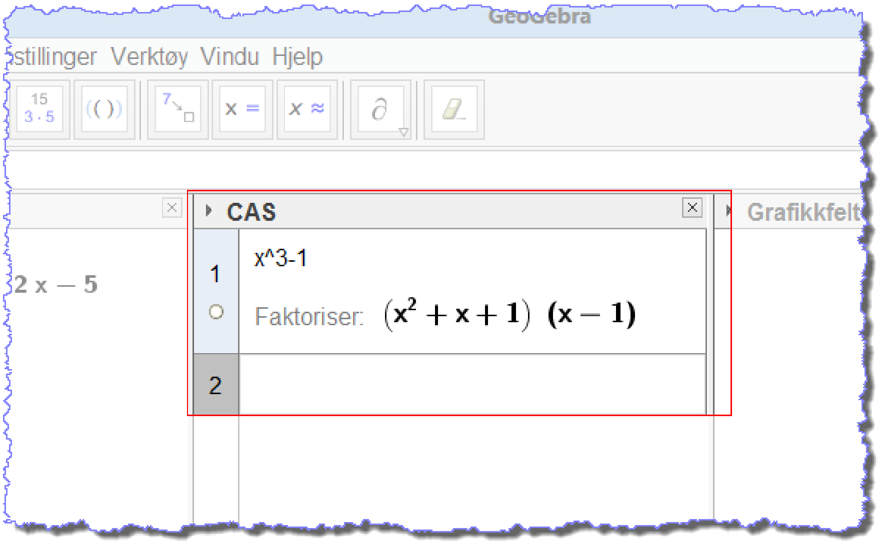
3.2.1 Utklippsverktøy

I windows kan du klikke på «Print screen» knappen. Du vil da ta bilde av hele skrivebordet ditt. Dette er i de fleste tilfeller ikke ønskelig. Du kan i stedet klikke på Alt-knappen og så Print Screen. Resultatet av dette blir et skjermbilde av det aktive vinduet. Dette kan virke enkelt nok, men jeg vil likevel anbefale deg å bruke et eget verktøy som ligger i Windows som heter utklipsvektøy. For å åpne dette klikker du på Windowstasten og skriver inn Utklippsverktøy. Du vil da få opp programmet i listen som dukker opp.

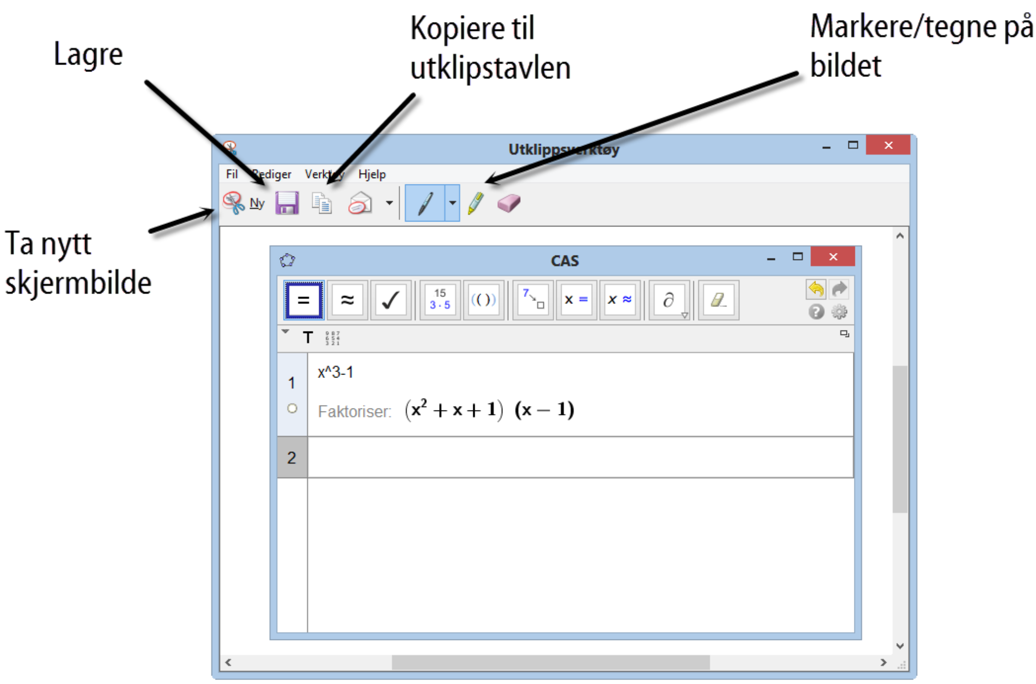


I dette programmet kan du så velge om du vil ta bilde av hele skjermen, vindusklipp, rektangulært klipp eller frihånd. I de fleste tilfellene vil rektangulært klipp fungere godt.

Når du har valgt rektangulært klipp er det bare til å dra markøren over området du ønsker å ta bilde av.



Når dette er gjort får du opp ett lite redigeringsvindu hvor du får mulighet til å markere inn med enten penn eller merkepenn (gule ut).

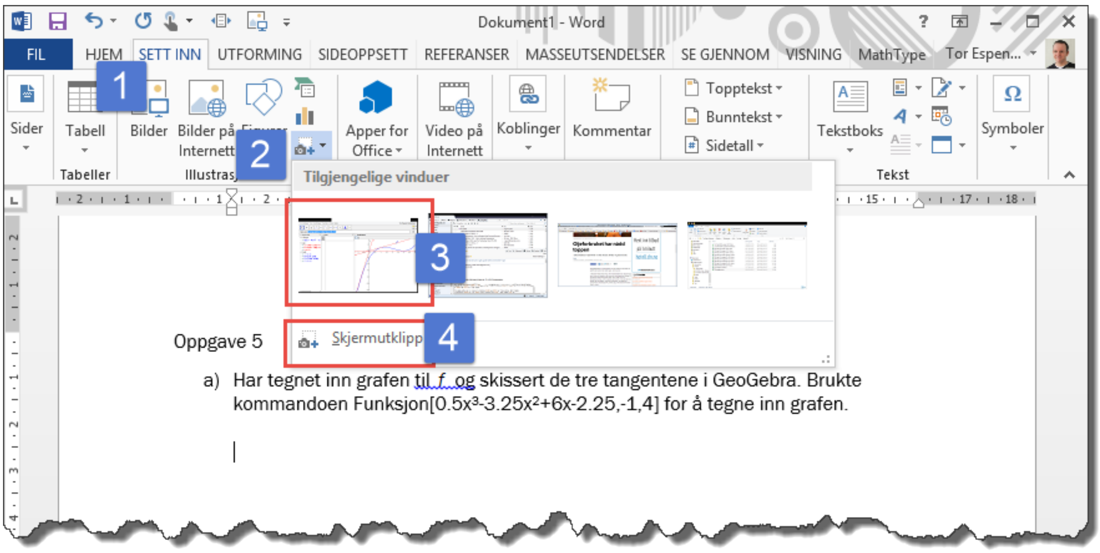


Når dette er gjort, kan du kopiere eller lagre bildet for så å sette dette inn i en tekstbehandler (Word).

Om du velger «Vindusklipp» i stedet for «Rektangulært klipp» vil du kunne velge et helt vindu i ett jafs. Du slipper da å dra markøren rundt det rektangelet du vil velge men velger i stedet hvilket vindu du ønsker å ta bilde av.

3.2.2 Å sette inn bilder i nyere versjoner av Word

Har du en nyere versjon av Word, kan du sette inn bilder direkte fra Word. Du går til «Sett inn» fliken på båndet (1) og og velger Skjermbildet (2). Du får da opp en forhåndsvisning av tilgjengelige vinduer. Skal du ta skjermbilde av et helt vindu kan du velge det her. Du vil da få skjermbildet satt inn direkte der du er i dokumentet. Ønsker du å ta skjermbilde av et rektangel, velger du Skjermutklipp (4). Da vil Word bli skjult og alt litt grått. Trekk så rektangel over det området du ønsker å ta skjermbilde av. Når du har gjort dette vil skjermbildet automatisk bli satt inn der du er i dokumentet.

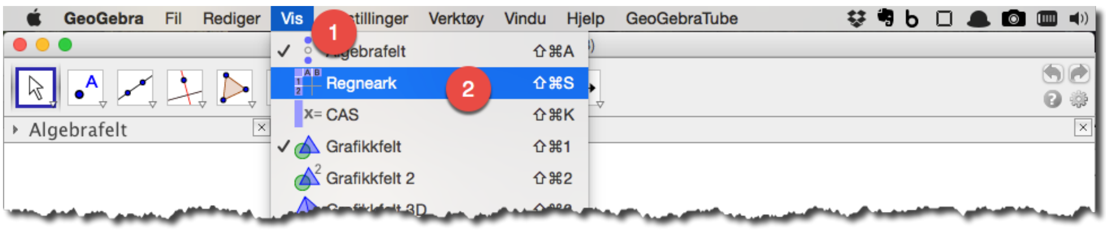


Når det gjelder videre bearbeidelse i tekstbehandleren (som for eksempel Word), så viser vi til Gjøvik and Sanne (2009).

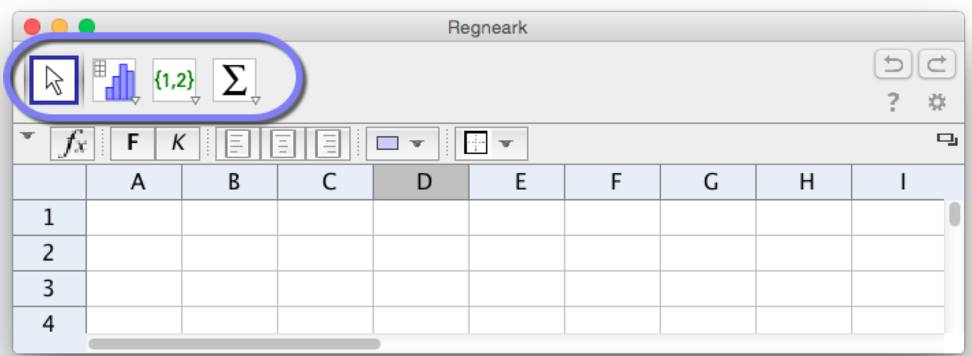
4 Regnarket

4.1 Generelt om regnearket

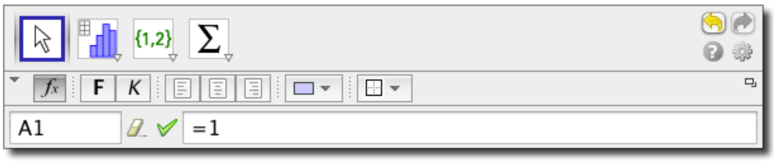
Et regneark kan ses på som en stor tabell med rader og kolonner. På samme måte som i Excel og andre typer regneark, angis en celle i denne tabellen ved å fortelle hvilken kolonne og hvilken rad som det henvises til. Kolonnene angis med bokstaver som A, B, . . . , mens radene nummereres med tall 1, 2, ... Vi kan utføre regneoperasjoner på celler (som A3+B5) og vi kan skrive inn tekst i cellene. I GeoGebra blir en celle formatert som tekst dersom du setter teksten i anførselstegn. Vi kan også skrive til en celle fra inntastingsfeltet. Skriver du `A2=10` i inntastingsfeltet vil det stå 10 i celle A2. Dette kan være nyttig dersom du skal bruke GeoGebras egne verktøy på cellene. Du kan for eksempel skrive `A1=Integral[x^2-2, 2, 5]`. Svaret vil da stå i celle A1. Du åpner regnearket ved å hake det av under «Vis» på menylinjen:



Merk at dersom du er i regnearket vil menyene endre seg:



Regnearket har også fått en egen stilmeny. Klikk på den lille trekanten oppe i venstre hjørne av regnarkvinduet for å få fram stilmenyen. Du kan også få fram regnearkets inntastingsfelt (tilsvarende formellinjen i Excel) ved å klikke på f_x. Toppen av regnearket vil da se slik ut:



Vi skal i dette kapittelet bruke regnearket til å løse en del oppgaver. Første eksempelet er hentet fra eksamen i 10. klasse.

■ **Eksempel 4.1 — Eksempel (tatt fra MAT0010 Matematikk, del 2 V2011).** Synne kjøper ny motorsykkel og får et serielån i banken. Lånebeløpet er 200 000 kroner. Hun betaler ned lånet med én termin per år i 10 år. Renten er 8 % per år. Nedenfor ser du begynnelsen på betalingsplanen fra banken.

Fullfør betalingsplanen i et regneark.

	A	B	C	D	E
1	Lånebeløp (i kroner)	200000			
2	Rente per år	8 %			
3	Antall terminer (år)	10			
4					
5					
6	Termin	Restlån	Rentebeløp	Avdrag	Terminbeløp
7	1	200000	16000	20000	36000
8	2	180000	14400	20000	34400
9	3	160000			
10	4				
11	5				
12	6				
13	7				
14	8				
15	9				
16	10				
17					
18			Sum rente	Sum avdrag	Sum innbetalt

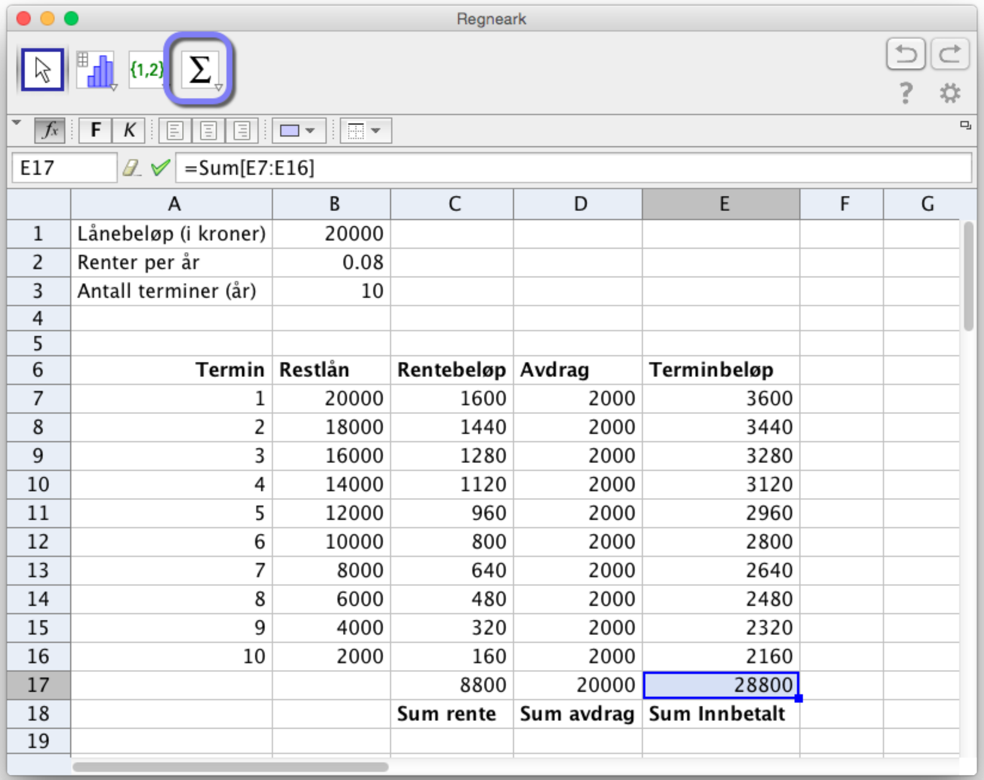
Løsning:

Vi fører tallene inn i regnearket. I celle C7 har vi skrevet inn `=B7*B$2` og i celle E7 har vi skrevet inn `=C7+D7`. I celle B8 har vi skrevet inn `=B7-D7`.

Merk at dollartegnet er skrevet inn forran to-tallet i den første av disse formlene for å få absolutt referanse til B2. Vi kan nå autokopiere cellene nedover på samme måte som i Excel.

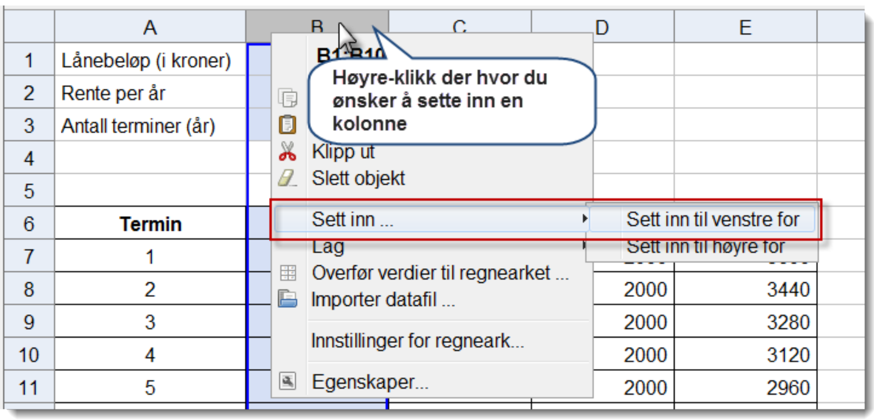
Summene regner vi ut ved enten å markere tallene vi vil legge sammen og klikke på Σ på verktøylinjen (se figur 4.1) eller ved å klikke i cellen du ønsker at summen skal stå i, klikke på Σ og velge cellene som du ønsker å summere.

■



Figur 4.1: Du kan summere tall fra en kolonne ved å markere tallene og deretter klikke på Σ. Du får da skrevet inn summen i cellen under de markerte tallene.

Dersom du ønsker å sette inn en ekstra kolonne eller rad i regnearket kand du gjøre dette ved å høyreklikke på den blå kanten (der hvor rad- eller kolonnenummerene står) og velge «Sett inn».



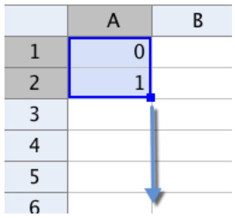
Figur 4.2: Du kan sette inn kolonner (eller rader) ved å høyreklikke øverst i kolonnen og velge «Sett inn...»

I regnearket til GeoGebra er det ikke bare tekst, tall og formler som kan plasseres i de ulike cellene, men alle typer objekter fra GeoGebra.

■ **Eksempel 4.2** Lag en sirkel med sentrum i origo og radius 1. Bruk regnearket til å tegne inn 12 punkt som ligger jevnt fordelt på sirkelen slik at det ene punktet ligger i $(1,0)$. Tegn også inn (ved å bruke regnearket) de elleve linjestykkene som går fra $(1,0)$ og ut til de andre punkta.

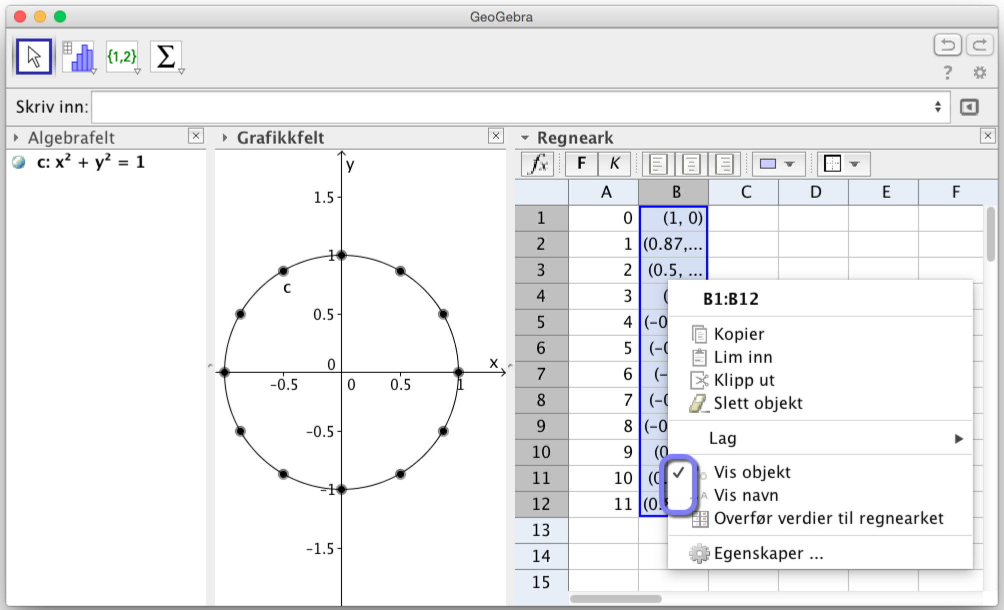
Hva blir produktet av lengdene til disse linjestykkene?

Løsning:



Skriv inn $x^2 + y^2 = 1$ i inntastingsfeltet for å tegne opp sirkelen. Åpne regnearket og skriv inn 0 i celle A1 og 1 i celle A2. Markerer A1 og A2, velg det lille kvadratet nederst i høyre hjørne av A2 og drar nedover slik at du får tallene 1 til 12 i cellene A1 til A12.

I B1 skriver du inn Roter[(1,0), 30° A1] og trykker enter. Marker deretter celle B1, velg det lille kvadratet i nedre høyre hjørne og dra dette nedover for å autokopiere formelen ned til celle B12. Du vil da få regnet ut koordinatene til punktene. For å få vise dem i grafikkfeltet må du markere cellene B1 til B12, høyreklikke i det blå området og hake av for «Vis objekt». Det kan også være lurt å hake vekk «Vis navn». Se figur 4.3. ■



Figur 4.3: For å vise punkta laget i regnearket, kan du høyreklikke og hake av for «Vis obekt». Du kan også velge å ikke vise navn.

Oppgave 4.1

Lag de elleve linjestykkene som går fra $(1,0)$ til de andre punkta. Hva blir produktet av lengdene til disse linjestykkene? Eksperimenter med andre antall punkt/linjestykker.

4.2 Statistikk

GeoGebra er et flott verktøy til å tegne histogrammer og søylediagrammer. For å gjøre dette, kan det være greit å bruke regnearket i GeoGebra til å føre inn de ulike tallene. Men vi kan også lage lister direkte i inntastingsfeltet, slik følgende eksempler viser.

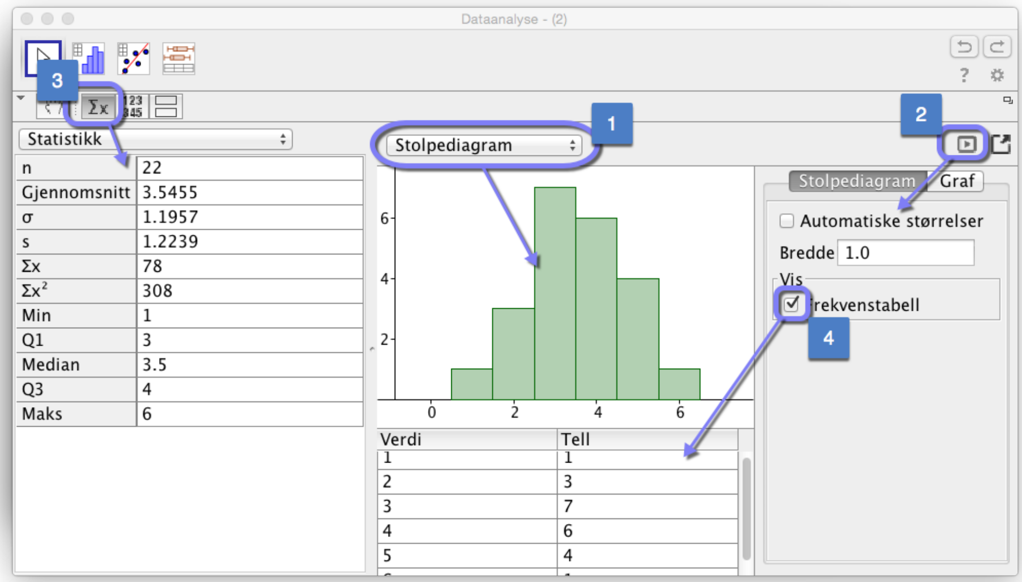
■ **Eksempel 4.3** På en prøve har en klasse fått følgende karakterer:
4, 3, 4, 5, 4, 6, 1, 2, 3, 2, 5, 4, 3, 4, 3, 2, 5, 5, 4, 3, 3, 3.

a) Lag en grafisk framstilling av resultatene.

b) Finn gjennomsnittskarakteren og medianen.

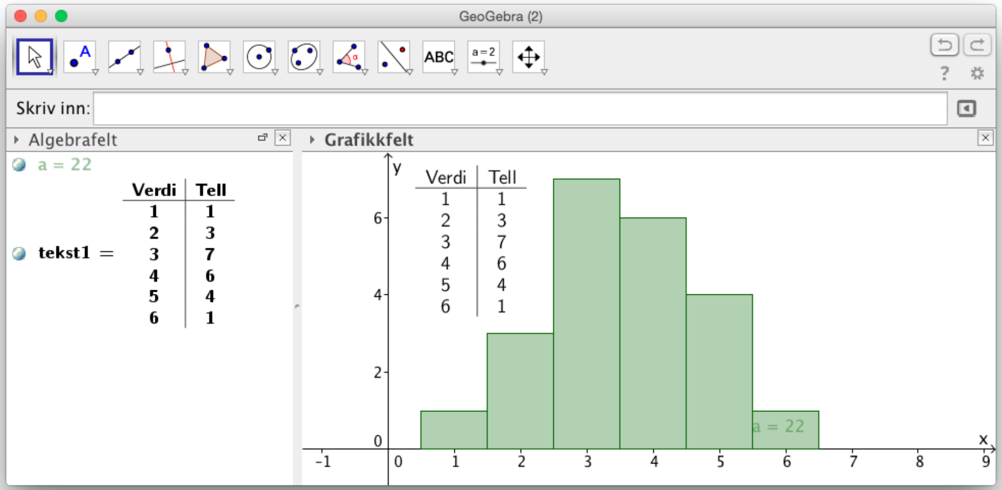
Løsning:

a) Vi bruker GeoGebra til å illustrere resultatene med et søylediagram. Åpne regnearket og før tallene inn i celle A1 til A22. Marker deretter tallene og klikk på verktøyet *Analyse av en variabel* . Klikk deretter på Analyser i vinduet som popper opp. Du får da opp *Dataanalyse* (se figur 4.4). Velg Stolpediagram (1). Dersom du ønsker å endre bredden på søylene klikker du på innstillinger (2), haker vekk Automatisk størrelse og skriver inn ønsket bredde. Her kan du også velge å få laget en frekvenstabell (4). For å svare på oppgave b) kan vi klikke på Σx (3). Vi ser at gjennomsnittet er ca 3,5 og Medianen er 3,5.



Figur 4.4: I Dataanalyse kan du få mye informasjon om datamaterialet.

Dersom du ønsker å få tegnet opp dette diagrammet i grafikkfeltet høyreklikker du i koordinatsystemet og velger «Kopier til grafikkfelt». Da får du tegnet opp søylediagrammet og det blir laget en frekvenstabell i grafikkfeltet som vist på figur 4.5.



Figur 4.5: Søylediagram med frekvenstabell.

b) Når vi krysser ut Dataanalyse forsvinner alle sentral- og spredningsmål som vi kunne lese av slik vi ser i figur 4.4. Dersom vi ønsker å lagre slike størrelser i algebrafeltet, kan vi gjøre dette ved å skrive inn passende kommandoer. For å finne gjennomsnittet kan vi for eksempel skrive inn

```
g=Gjennomsnitt[A1:A22]
```

På samme måte kan vi finne medianen ved å skrive inn

```
m=Median[A1:A22]
```

Vi ser at gjennomsnittet er 3,55 og madianen er 3,5.

■

■ **Eksempel 4.4** Elevene i en klasse hadde følgende skostørrelser:

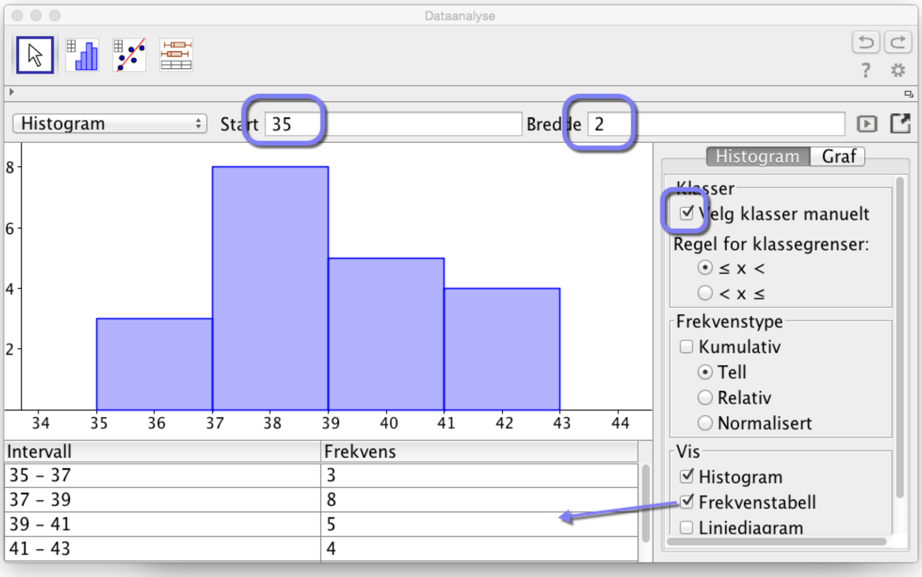
$$37, 36, 41, 40, 35, 39, 38, 37, 39, 43, 40, 41, 41, 37, 38, 38, 40, 36, 38, 38, 37$$

Illustrer tallene med et histogram der klassegrensene er 35, 37, 39, 41, 43 og 45.

Løsning:
Vi skriver inn tallene i regnearket, marker dem og klikker på . Vi får da opp et vindu som vist på figur 4.6. Legg merke til at grensene til histogrammet i utgangspunktet ikke er helt slik som vi ønsker dem. Klikk på innstillinger  og velg klasser manuelt. Velg at klassene skal starte på 35 og at bredden skal være 2. På figur 4.6 har vi også valgt å vise Frekvenstabell. Merk at denne metoden går fint dersom klassebredden er lik for hver klasse. Skal du bruke klasser med ulik klassebredde må du bruke Historgram-kommandoen I dette tilfelle kunne vi ha skrevet inn

```
Histogram[{35, 37, 39, 41, 43},A1:A20, false]
```

Vi har skrevet inn «false» for å få høyden lik klassefrekvens. Skriver vi «true» (eller ingen ting) blir høydene lik tetthetsfaktor · klassefrekvens/klassebredde. ■



Figur 4.6: Histogram i Datanalyse

Oppgave 4.2

I en undersøkelse ble en del elever spurt om hvor mange blyanter de hadde med seg på skolen. Her er resultatet:

3, 2, 3, 5, 4, 4, 5, 7, 2, 7, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 5, 4, 3, 3, 4.

a) Lag et histogram som viser hvor mange elever som hadde mellom 0 og 2 blyanter, 3 og 5 blyanter og 6 og 10.

b) Du kan også lage et søylediagram. Skriv inn `Søylediagram[L_1,0.5]`. Du vil da få søyler med bredde lik 0,5.

c) Finn gjennomsnittet ved å bruke kommandoen `Middelverdi[L_1]`.

d) Finn typetallet ved å bruke kommandoen `Typetall[L_1]`.

Oppgave 4.3

Listen angir antall timer ulike elever i en klasse bruker på spill i uken:

$$7, 7, 8, 8, 5, 4, 8, 3, 6, 5, 4, 7, 2, 1, 8, 7, 7, 0, 1, 4, 5, 8, 12, 14, 12, 3$$

a) Representer tallene i et histogram med 5 som klassebredde (0-5, 5-10,...).

b) Hvor mange timer bruker elevene i gjennomsnitt?

c) Hva er typetallet?

GeoGebra kan også finne første og tredje kvartil til et datasett. Du bruker da kommandoene `Q1[<liste>]` og `Q3[<liste>]`. Du kan selvsagt også finne andre kvartil ved å bruke kommandoen `Median[liste]`. Variasjonsbredden finner du ved å skrive inn

```
Maks[<liste>]-Min[<liste>].
```

Kvartilavviket finner du ved å skrive inn

```
(Q3[<liste>]-Q1[<liste>])/2
```

og standardavviket ved å skrive inn

```
Standardavvik[<liste>]
```

■ **Eksempel 4.5 — Eksamen MAT1003 Matematikk 2P, Høsten 2008 Eksempel .**

Lengdehopp er en gren av friidrett som går ut på å hoppe så langt man kan i et hopp. I konkurranser har man som regel tre hopp, der det beste hoppet teller.

Anna og Petra konkurrerer om å kvalifisere seg til lengdehoppkonkurransen i et friidrettsstevne. De får ti hopp hver, og den beste av dem er kvalifisert til konkurransen. Her er resultatene (oppgitt i meter) fra kvalifiseringen:

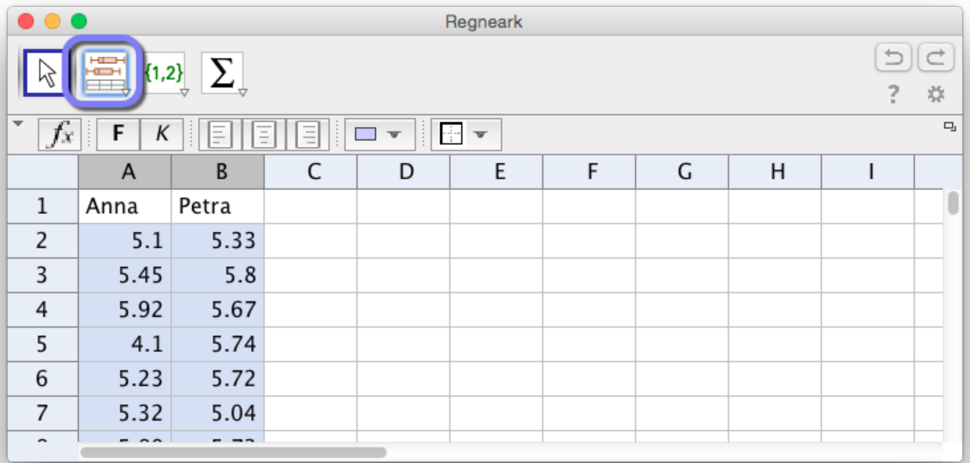
Hopp	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anna	5,10	5,45	5,92	4,10	5,23	5,32	5,89	4,91	4,37	5,42
Petra	5,44	5,80	5,67	5,74	5,72	5,04	5,73	5,53	5,59	5,83

a) Finn gjennomsnitt og median for hver av de to jentenes resultater.

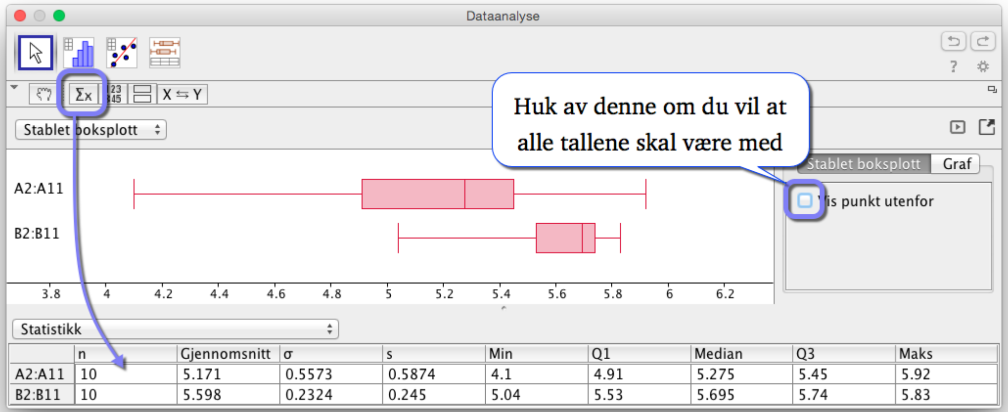
b) Finn variasjonsbredde og standardavvik for hver av de to jentenes resultater.

c) Foreta en vurdering av jentenes resultater og det du fant i a) og b), og argumenter for hvem du synes skal bli kvalifisert.

Løsning:
Vi fører tallene opp i regnearket. Deretter markerer vi alle tallene og klikker på verktøyet *Analyse av flere variable* som vi finner i samme gruppe på verktøylinjen som *Analyse av en variabel* .



Du får da opp følgende vindu:



	n	Gjennomsnitt	σ	s	Min	Q1	Median	Q3	Maks
A2:A11	10	5.171	0.5573	0.5874	4.1	4.91	5.275	5.45	5.92
B2:B11	10	5.598	0.2324	0.245	5.04	5.53	5.695	5.74	5.83

Figur 4.7: Analyse av flere variable

Vi kan nå lese av alle tallene som det blir spurt om i oppgaven. Unntaket er variasjonsbredden (som vi må regne ut manuelt ut fra tallene i tabellen over).

Vi ser også en grei grafisk framstilling som viser at Petra er jevnt over bedre til å hoppe enn Anna, noe som blir fanget opp av blant annet standardavvik og middelverdi. Men Anna ville uansett ha vunnet en konkurranse der det var det lengste hoppet som var avgjørende!

■

Neste eksempel er hentet fra eksempelsettet til Matematikk 2P for ny eksamensordning våre 2015. Her får du se at du også lett kan ta utgangspunkt i en frekvenstabell.

■ **Eksempel 4.6** Våren 2012 var klasse 2A og klasse 2B ved en skole oppe til eksamen i matematikk 2P. Tabellen nedenfor viser hvordan karakterene fordelte seg i de to klassene.

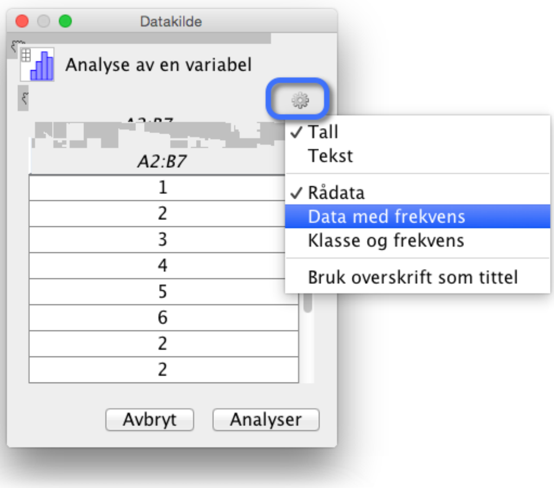
Karakter	Klasse 2A (Frekvens)	Klasse 2B (Frekvens)
1	2	0
2	2	0
3	3	6
4	5	8
5	4	6
6	4	0

a) Bruk regneark til å lage en grafisk framstilling som viser karakterfordelingen i de to klassene.

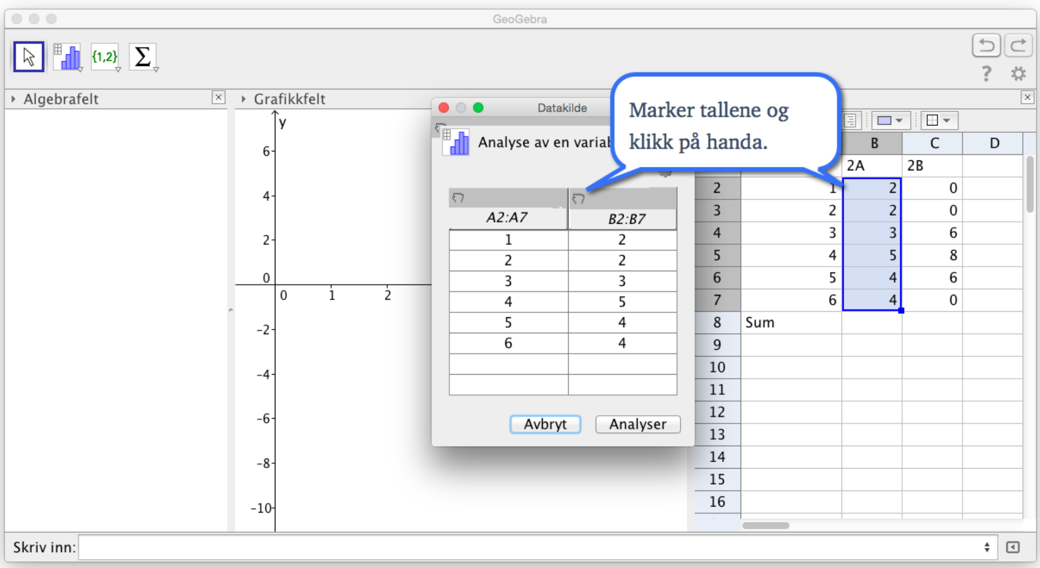
b) Bruk regneark til å bestemme gjennomsnittskarakter, mediankarakter og standardavvik for karakterene i hver av de to klassene. Hva forteller svarene om resultatene i de to klassene?

Løsning:

a) Før tallene inn i regnearket til GeoGebra, markerer karakterene og frekvensene for klasse 2A og klikk på *Analyse av en variabel*. Klikk deretter på tannhjulet for å få endret innput fra «Rådata» til «Data med frekvens» som vist nedenfor.



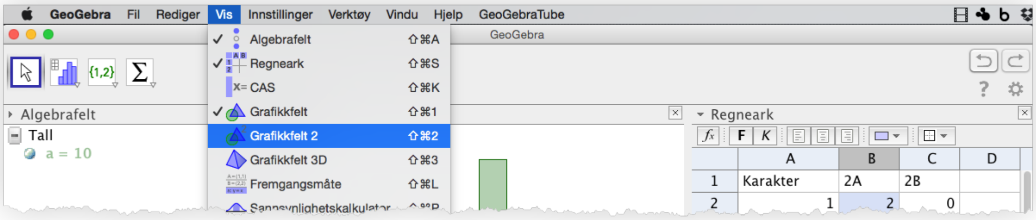
Du vil da få opp to kolonner (med feil tall i). Det neste du da må gjøre er å markere karakterene og deretter klikke på handa over tallene. Gjør tilsvarende for frekvensene, som vist på figur 4.8.



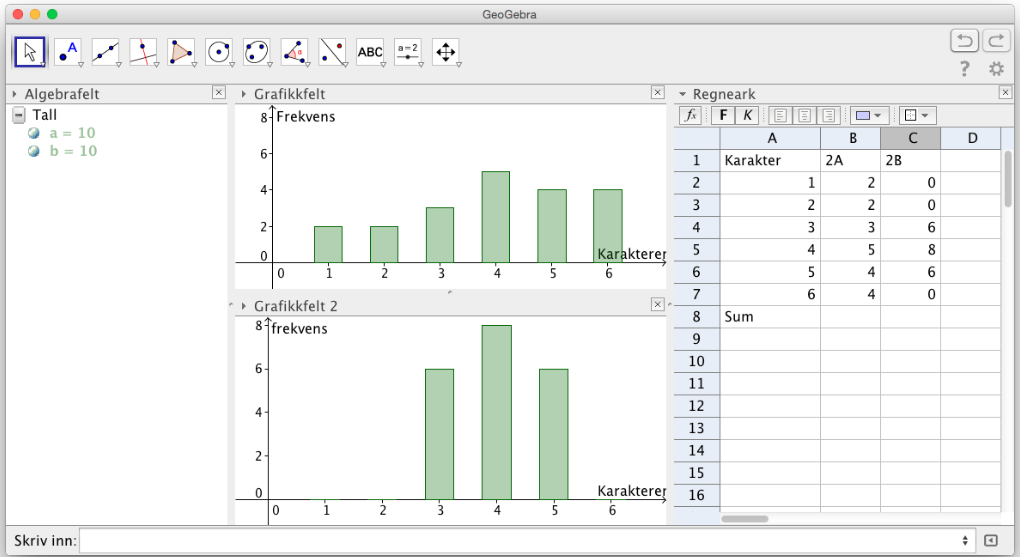
Figur 4.8: Du må først markere tallene du vil ha inn i en kolonne og deretter tykke på handa over kolonnen.

Når du så klikke på Analyser, vil du få opp søylediagrammet i *Dataanalyse*. Kopier dette til grafikkfeltet.

Vi ønsker å ha tilsvarende diagram for klasse 2B i Grafikkfelt 2. Åpne dette ved å velge det under Vis på menylinjen:



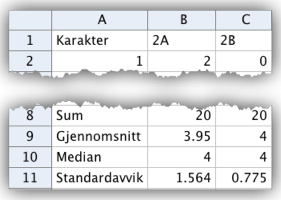
Klikk i Grafikkfelt 2 (slik at dette blir aktivert) og gjenta prosedyren over med tallene for klasse 2B. Du vil da få noe slikt:



b) Tallene som det spørres etter kan du finne ved å klikke på Σx i Dataanalyse. Alternativt kan du regne dem ut i regnearket.

Du kan skrive inn formler i regnearket. Dersom formlene er litt lange eller du ikke er sikker på syntaksen, kan det være et godt tips å skrive til cellene fra inntastingsfeltet.

I cellene på figuren til høyre har jeg skrevet inn følgende kommandoer i inntastingsfeltet:



	A	B	C
1	Karakter	2A	2B
2	1	2	0
8	Sum	20	20
9	Gjennomsnitt	3.95	4
10	Median	4	4
11	Standardavvik	1.564	0.775

```
B9=Gjennomsnitt[A2:A7, B2:B7]
C9=Gjennomsnitt[A2:A7, C2:C7]
B10=Median[A2:A7, B2:B7]
C10=Median[A2:A7, C2:C7]
B11=Standardavvik[A2:A7, B2:B7]
C11=Standardavvik[A2:A7, C2:C7]
```

Vi ser at de to klassene har ca samme sentralmål, men det er mye større spredning i klasse 2A. Dette ser vi både grafisk og ved at 2A har mye større standardavvik enn 2B.

■

Til slutt tar vi med et eksempel der vi regner på et klassedelt matemeriale. Igjen er det eksempelsettet for 2O fra Utdanningsdirektoratet som er utgangspunkt.

■ **Eksempel 4.7** Politiet har gjennomført fartskontroller på to veistrekninger. Den ene veistrekningen har fartsgrense 50 km/h og den andre 80 km/h. Nedenfor ser du resultatene fra hver av de to kontrollene

Fartsgrense 50 km/h	
Fart	Antall biler
$[45,50\rangle$	25
$[50,55\rangle$	26
$[55,60\rangle$	23
$[60,65\rangle$	3
$[65,70\rangle$	2
$[70,75\rangle$	1

Fartsgrense 80 km/h	
Fart	Antall biler
$[70,75\rangle$	7
$[75,80\rangle$	43
$[80,85\rangle$	17
$[85,90\rangle$	8
$[90,95\rangle$	0
$[95,125\rangle$	5

Bestem gjennomsnittsfarten til bilene i hver av de to kontrollene.

Løsning:
Før inn tallene i et regneark som vist på figuren til høyre. Skriv inn følgende kommandoer:

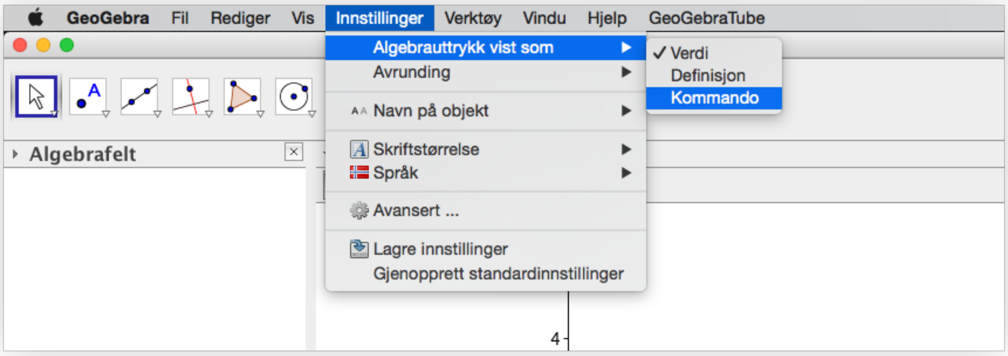
```
B9=Gjennomsnitt[A1:A7, B1:B6]
E9=Gjennomsnitt[D1:D7, E1:E6]
```

	A	B	C	D	E
1	45	25		70	7
2	50	26		75	43
3	55	23		80	17
4	60	3		85	8
5	65	2		90	0
6	70	1		95	5
7	75			125	

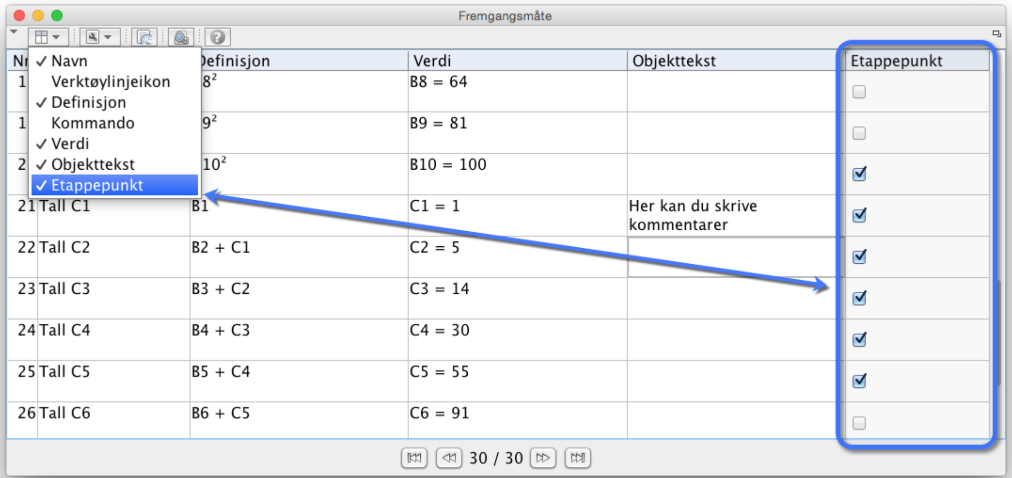
Da kan du lese av at gjennomsnittsfarten i den ene kontrollen var 53 km/h mens den var 81 km/h i den andre kontrollen. ■

4.3 Vis formlene

På samme måte som du i Excel kan bruke tastekombinasjonen ctrl+j (eller cmd + j på en Mac) for å vise formlene i regnearket, kan du bruke tastekombinasjonen ctrl + d i GeoGebra (cmd + d på en Mac). Du trokler da gjennom tre alternativer: Verdi, Definisjon og Kommando. Dette kan du også gjøre under Innstillinger på menylinjen.



Vi kan også dokumentere hva som er gjort i regnearket (eller andre felt) i «Framgangsmåte». Ulempen med dette er at den blir veldig lang, siden alle cellene som det er skrevet noe i vil få en egen rad. En mulig løsning kan være å lage «etappepunkt». Dette kan du gjøre ved å hake av for etappepunkt under nedtrekksfeltet i stilmenyen:



Figur 4.9: Du kan velge etappepunkt dersom du har haket av for dette i kolonnefeltet i stilmenyen.

Når du har valgt etappepunkt kan du skjule alle de andre ved å velge at kun etappepunkt skal vises under «Innstillinger» i stilmenyen:

Det er mulig å skrive ut «Framgangsmåten» ved å klikke på , men min erfaring er at det er bedre å ta et skjermbilde av «Framgangsmåte» og lime dette inn i en tekstbehandler. På den måten får du bedre kontroll med størrelse på utskriften. På en eksamen skal det også stå kandidatnummer, fagkode og skolenavn som topptekst på utskriften, og det er lettere å få til i en tekstbehandler.

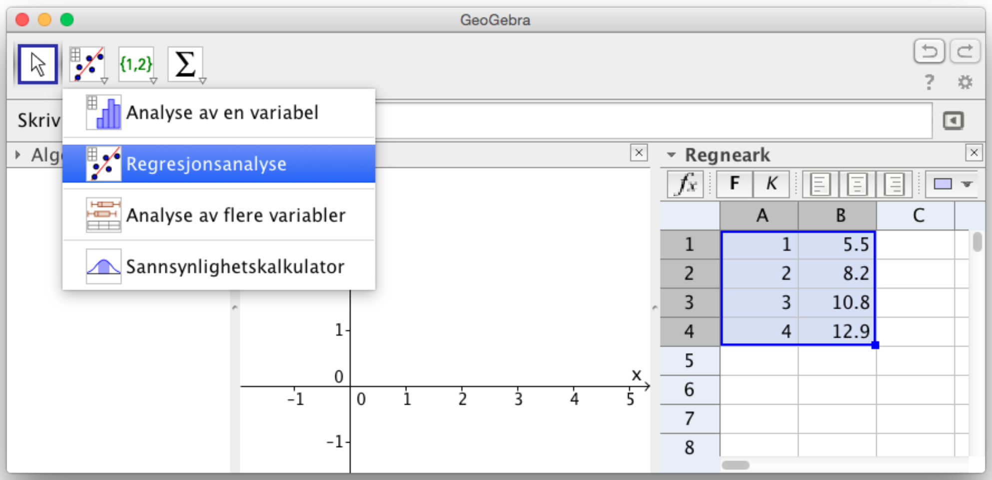
4.4 Regresjon

Når vi skal gjennomføre regresjon kan det være en god idé å bruke regnearket til GeoGebra. Vi skal i dette kapittelet bruke regnearket til å føre inn datamaterialet som danner grunnlag for regresjon. Vi tar som vanlig utgangspunkt i noen eksempler.

▪ **Eksempel 4.8** Finn en lineær funksjon som passer bra med følgende tall:

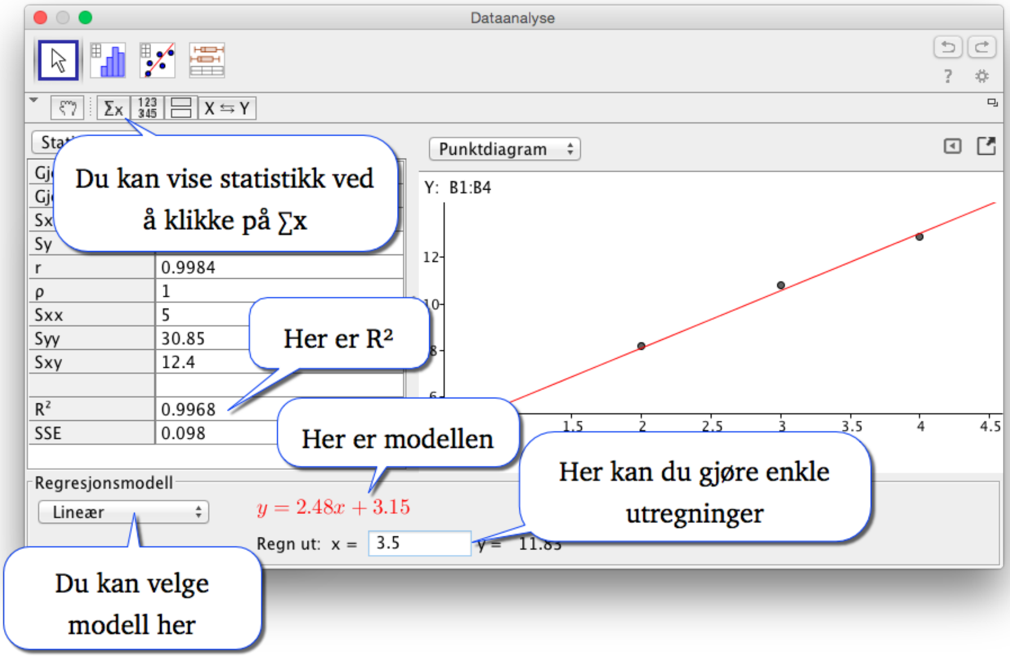
x	1	2	3	4
y	5,5	8,2	10,8	12,9

Løsning:
Vi fører tallene inn i regnearket, markerer dem og velger *Regresjonsanalyse* i verktøymenyen som vist på figur 4.10:



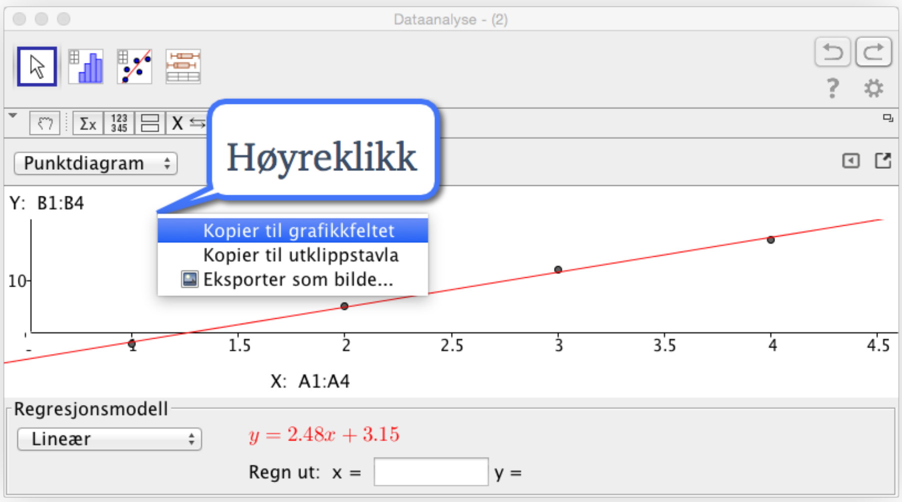
Figur 4.10: Marker tallene i regnearket og velg *Regresjonsanalyse* i verktøymenyen.

Du får da opp et vindu som vist på figur 4.11. Vi velger «Lineær modell» og ser at $y = 2{,}48x + 3{,}15$ passer bra med tallene i tabellen. Også her kan du klikke på Σx for å få fram for eksempel R^2. ▪



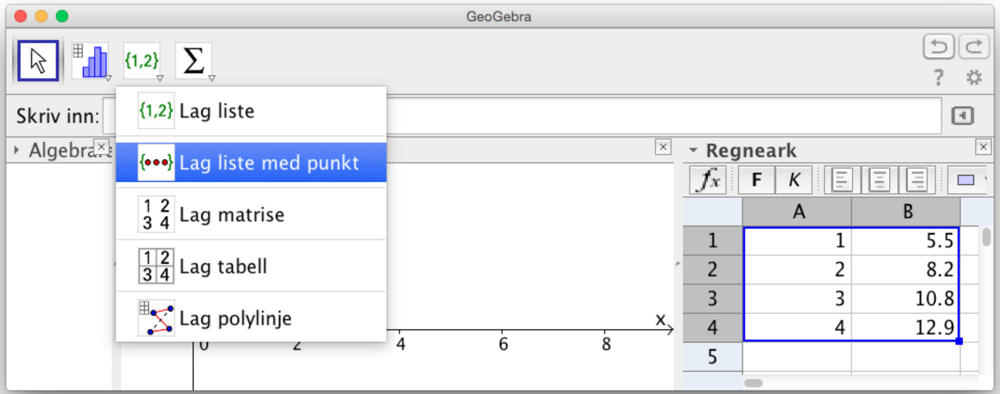
Figur 4.11: *Regresjonsanalyse* er effektiv å bruke.

Du kan kopiere regresjonen du har gjort i Regresjonsanalyse ved å høyreklikke i vinduet og velge «Kopier til grafikkfeltet». Du får da laget en liste med punkt og en funksjon definert ut fra regresjonen du har valgt.

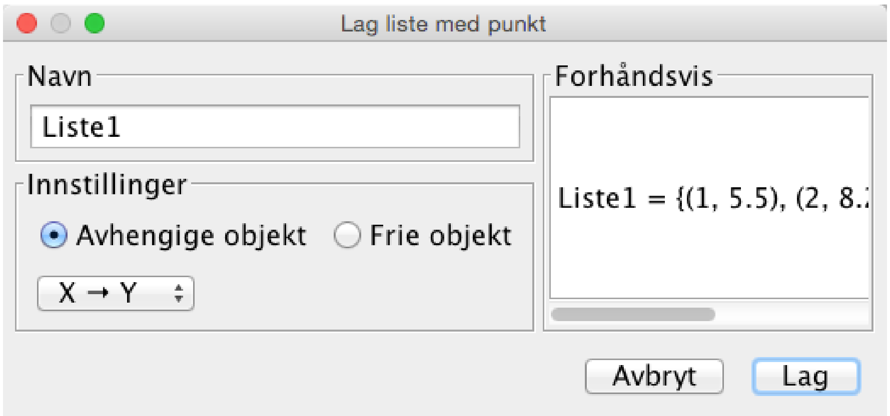


Figur 4.12: Du kan kopiere til grafikkfeltet fra Regresjonsanalyse.

Slike regresjoner kan du også gjøre ved å skrive inn kommandoer. Da må du først lage liste med punkt. Du kan lage slike lister med punkt ved å bruke regnearket. Marker tallene og klikk på verktøyet *Lag liste med punkt* {•••}, som vist på figuren nedenfor.



Du får da opp følgende vindu:



Her kan du velge om punkta skal være avhengig eller uavhengig av tallene fra regnearket. Dersom du velger Avhengige objekt, så vil punkta automatisk endres dersom du endrer tallene i regnearket. Motsatt gjelder også. Dersom du flytter på et av punkta, så vil tallene i regnearket automatisk bli endret.

Når du så har laget en liste med punkt kan du bruke kommandoer på denne listen. I dette tilfellet er en av følgende kommandoer aktuelle:

```
RegLin[liste1]
```

Merk at svaret blir en linje og ikke en funksjon når vi gir kommandoen `RegLin`. Men ønsker du å finne y når $x = 5$ kan du skrive inn `a(5)` i inntastingsfeltet (dersom linjen har fått navnet `a`). Du finner da at $y = 15{,}5$.

Gir du derimot kommandoen

```
RegPoly[liste1,1]
```

vil du få funksjonen $f(x) = 2{,}48x + 3{,}15$ som svar. Du kan da bruke denne funksjonen til å gjøre ulike beregninger, som for eksempel å regne ut $f(5)$.

Oppgave 4.4

En parabel går gjennom punkta $(2,1)$, $(4,4)$ og $(6,-1)$. Åpne et nytt arbeidsark og bruk regresjon til å finne et funksjonsuttrykk for andregradsfunksjonen.

Du trenger ikke å bruke regnearket til å tegne inn punkta. Du kan alternativt lage en liste direkte ved å gi kommandoen

```
L={(2, 1), (4, 4), (6, -1)}
```

Du må her bruke kommandoen `RegPoly[L, 2]`.

Oppgave 4.5

Sammenhengen mellom kostnaden $K(x)$ i kroner ved produksjon av en vare og tallet på produserte enheter x er gitt i tabellen nedenfor.

x	0	100	300	500	700
$K(x)$	30 000	83 000	207 000	355 000	527 000

a) Bruk regresjon og finn en god modell for $K(x)$. I GeoGebra kan du velge mellom `RegEksp`, `RegLin`, `RegLog`, `RegLogist`, `RegPoly`, `RegPot` og `RegSin`

b) Finn $K'(300)$.

Oppgave 4.6 — Fra MAT1015 Matematikk 2P, Høsten 2010.

Den mest nøyaktige måten å finne makspulsen din på er å gjennomføre en fysisk test der du presser deg maksimalt for å se hvor høy puls det er mulig å oppnå. Fem personer med ulik alder har gjennomført en slik test. Resultatene ser du i tabellen nedenfor. Finn en lineær sammenheng mellom alder x og makspuls y.

Alder	17	25	37	48	60
Makspuls	195	189	183	175	166

Oppgave 4.7 — Eksamen REA3026 Matematikk S1, Våren 2008.

Tabellen viser antall registrerte personbiler per 1000 innbyggere i Norge for noen år i perioden 1985 - 2005.

x	0	5	10	15	20
$f(x)$	417	418	426	460	496

Her er $f(x)$ antall registrerte personbiler per 1000 innbyggere x år etter 1985.

a) Bestem gjennomsnittlig veksthastighet fra 1990 til 2000. Hva forteller dette tallet oss?

b) Bruk regresjon til å finne en polynomfunksjon f av andre grad som tilnærmet beskriver utviklingen ovenfor.

c) Tegn grafen til f, og marker punkta i tabellen i samme koordinatsystem.

d) Bestem momentan veksthastighet i år 2000. Marker den momentane veksthastigheten på grafen til f.

e) I år 2001 var det ca. 4 500 000 innbyggere i Norge. Bruk d) til å anslå hvor mange registrerte biler det var dette året.

4.5 Overføre verdier til regnearket

Du kan overføre verdier til regnearket.

■ **Eksempel 4.9** Hva er arealet til en rektangulær femkant med side s?

Løsning:
Du kan selvsagt betrakte dette rent teoretisk og komme fram til formelen

$$A(s) = \frac{1}{4}\sqrt{10\sqrt{5}+25}\cdot s^2$$

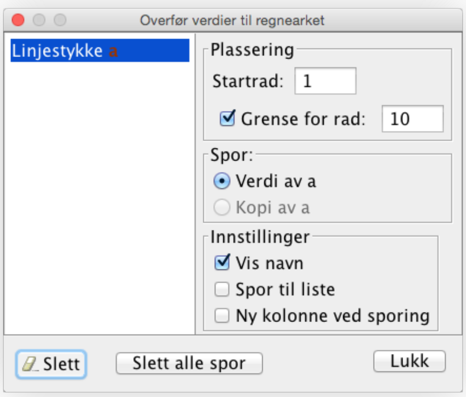
En annen måte å løse problemet på er å gjøre en del eksempler og så bruke regresjon til å finne formelen.

1. Lag et linjestykke a mellom to punkt A og B.

2. Velg verktøyet *Regulær mangekant* og klikk på A og B. Velg at polygonet skal ha 5 hjørner.

3. Åpne regnearket. Dette må være åpent for at du skal kunne overføre verdier til regnearket.

4. Høyreklikk på linjestykket a i algebrafeltet og velg «Overfør verdier til regnearket». Du får da opp følgende vindu:



Her har vi haket av for at det kun skal overføre til 10 rader i regnearket. Dette er lurt å gjøre. Ellers vil du få et veldig stort regneark.

5. Gjør det samme med polygonet: Høyreklikk på Mangekant1 og velg «Overfør verdier til regnearket». Pass på å hake av for kun 10 rader.

6. Flytt litt rundt på et av hjørnene i polygonet. Du vil da få satt av tilhørende verdier i regnearket.

7. Gjør en regresjon på (a, Mangekant1) ved å markere tallene i regnearket. Velg potensfunksjon. Du vil da få $y = 1{,}7205x^2$. Det vil si at

$$A(s) = 1{,}7205 \cdot s^2$$

■

Oppgave 4.8

Gjør tilsvarende som i eksempel 4.9 med en regulær sekskant. Kan du også finne en eksakt verdi for arealet?

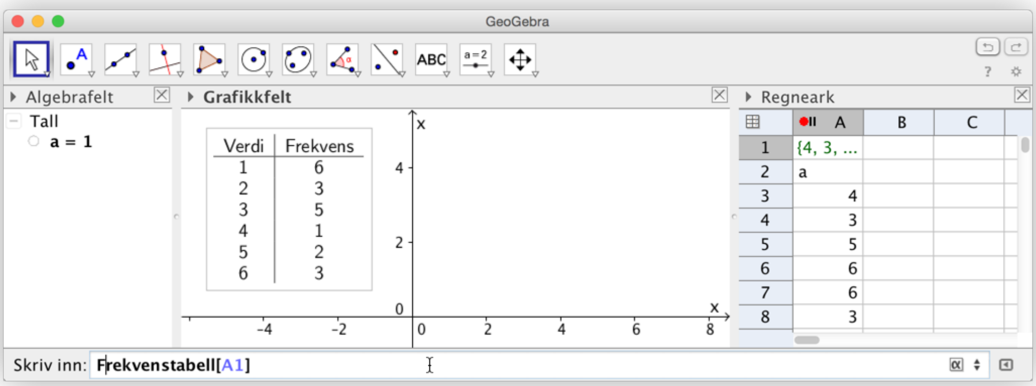
Å overføre verdier til regnearket er en fin måte å samle opp de ulike utfallene vi får når vi simulerer for eksempel et terningkast. La oss si vi ønsker å gjøre et forsøk der vi kaster en terning flere ganger. Vi ønsker da for eksempel å samle opp de ulike tallene i en frekvenstabell. Slik kan vi da gå fram:

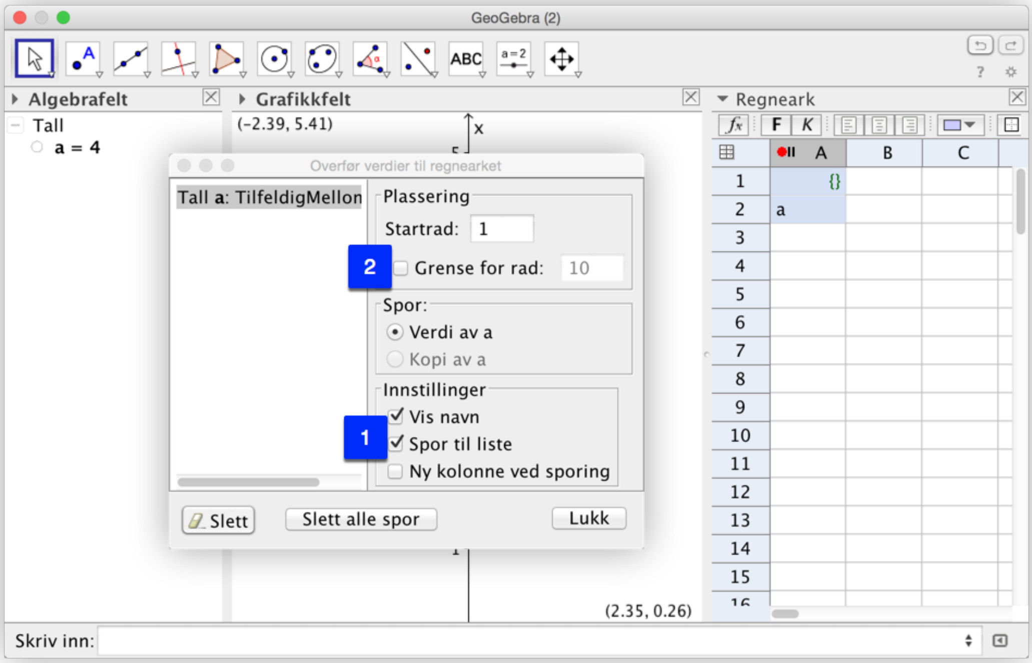
1. Skriv inn kommandoen `TilfeldigMellom[1, 6]` i inntastingsfeltet og få et tilfeldig tall a.

2. Åpne regnearket og høyreklikk deretter på a og velg «Overfør verdier til regnearket». Pass på at du haker av for «Spor til liste» (1) og at det ikke er haket av for «Grense for rad» (2). Se figur 4.13. Lukk deretter vinduet du fikk opp.

3. Når du nå oppdaterer GeoGebra (ved å klikke på F9), vil du få nye tall skrevet inn i regnearket. Vil du gjøre 100 kast kan du skrive inn kommandoen `OppdaterFiguren[100]`.

4. For å samle alt i en frekvenstabell kan du skrive inn kommandoen `Frekvenstabell[A1]`. Du får da en pen frekvenstabell plassert i grafikkfeltet.





Figur 4.13: Sporing av tilfeldige tall mellom 1 og 6 til regnearket. Husk at regnearket må vises for at du skal kunne spore til regnearket.

4.6 Mer om regresjoner

GeoGebra har fått et imponerende utvalg av regresjoner.

Funksjonstype	Kommando	Krav til x og y
$ax+b$	`RegPoly[<liste>, 1]`	ingen
$ax^n+bx^{n-1}+\cdots$	`RegPoly[<liste>, n]`	ingen
$a+b\ln x$	`RegLog[<liste>]`	$x>0$
$a\cdot e^{bx}$	`RegEksp2[<liste>]`	$y>0$
$a\cdot b^x$	`RegEksp[<liste>]`	$y>0$
ax^b	`RegPot[<liste>]`	$x>0$ og $y>0$
$a\sin(bx+c)+d$	`RegSin[<liste>]`	ingen
$\dfrac{a}{1+be^{cx}}$	`RegLogist[<liste>]`	ingen

Tabell 4.1: Regresjoner i GeoGebra

En stor nyhet i GeoGebra 4.0 er kommandoen

```
Reg[<liste med punkt>, <Funksjon>]
```

Med denne kan du utvide listen i tabell 4.1.

■ **Eksempel 4.10** Finn en funksjon som passer bra med punkta i tabellen nedenfor.

x	1,04	2,38	3,40	5,18	6,80	8,00
y	0,66	2,14	3,62	3,98	3,72	5,00

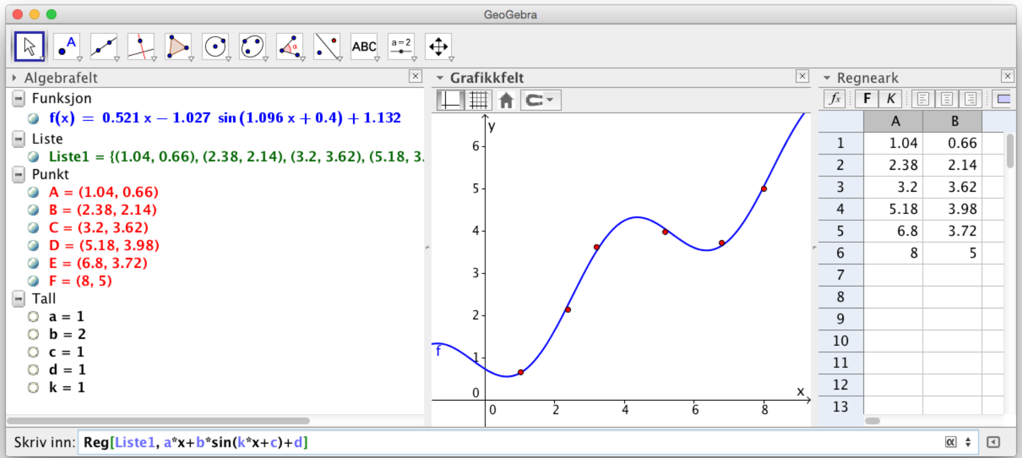
Før du kan bruke kommandoen `Reg[]` må du definere listen med punkt og funksjonene du ønsker å bruke. La oss si at vi ønsker å bruke en regresjon av typen $ax + b\sin(kx + c) + d$. Vi går da fram på følgende måte:

1. Skrive inn noen passelige verdier for a, b, c, d og k i inntastingsfeltet.

2. Før inn tallene fra tabellen i regnearket og lager en liste Liste1.

3. Vi kan da bruke kommandoen `Reg[Liste1,a*x+b*sin(k*x+c)+d]` for å finne regresjonen.

Vi får da at $f(x) = 0{,}52x - 1{,}03\sin(1{,}10x + 0{,}40) + 1{,}13$ som vist på figuren nedenfor.



Figur 4.14: Regresjon med funksjonen $f(x) = ax + b\sin(kx + c) + d$

Dersom du får et rart resultat kan det hjelpe å endre litt på en eller flere av verdiene for a, b, c, d og k. ■

Oppgave 4.9

Finn en funksjon som passer bra med punkta i tabellen under.

x	0	2	4	6	8	10	12
y	54	35	25	19	16	14	13

5 Sannsynlighet

5.1 Simulering av stokastiske forsøk

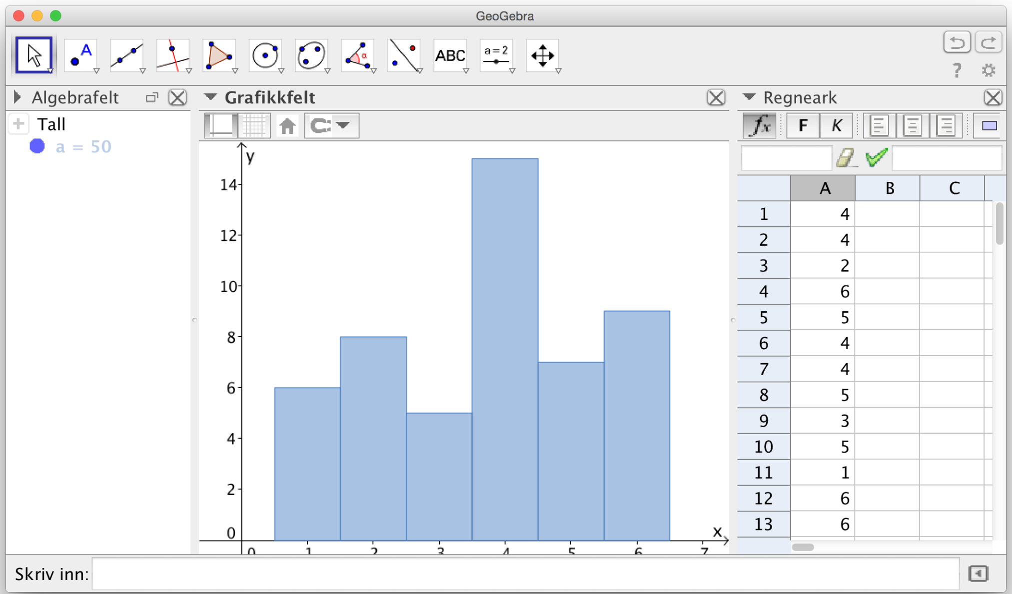
▪ **Eksempel 5.1** Simuler et terningkastforsøk.

Løsning:
Skriv inn kommandoen `TilfeldigMellom[1, 6]`. Trykk på F9 for å gjøre et nytt kast! Du kan også trykke ctrl + r på Windows eller cmd + r dersom du bruker en Mac.

I stedet for å gjøre ett kast om gangen, så kan vi bruke regnearket til å gjøre mange kast samtidig.

– Åpne regnearket og skriv inn `=TilfeldigMellom[1,6]` i celle A1. Autokopier så denne cellen ned til og med celle A50.

– Lag søylediagram av disse tallene ved å bruke verktøyet *Analyse av en variabel* til å lage søyledigram som illustrerer utfallene.



▪

Tips! Du kan også lage lister med tilfeldige tall ved å bruke kommandoen
`Følge[TilfeldigMellom[1, 6], k, 1, 50]`

Du får da 50 tilfeldige tall mellom 1 og 6. Lager du en glider n med heltallsverdier fra for 1 til 10000 kan du nå simulere n slike kast der $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$.

Oppgave 5.1

Simuler et forsøk der du kaster 2 terninger 100 ganger og der du ser på summen av antall øyne i hvert kast. Hvordan fordeler resultatet seg på to øyne, tre øyne, ..., 12 øyne?

Oppgave 5.2

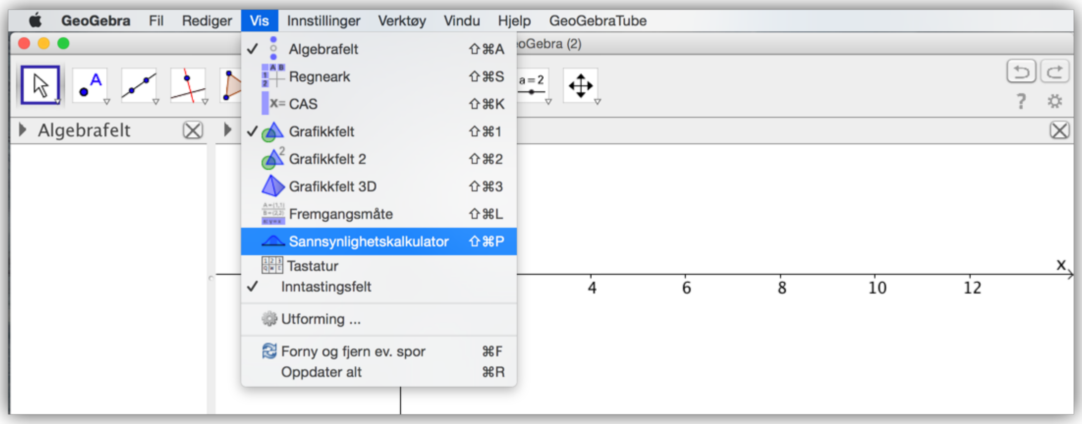
Simuler et forsøk der du kaster to mynter.

Tips! Du kan la 0 stå for kron og 1 stå for mynt og bruke kommandoen

```
TilfeldigMellom[0, 1]
```

5.2 Sannsynlighetskalkulatoren

GeoGebra har et nyttig verktøy for utregning og presentasjon av sannsynlighetsfordelinger. Du finner dette verktøyet under «Vis» på menylinjen:



Figur 5.1: *Sannsynlighetskalkulator* finner du under «Vis» på menylinjen.

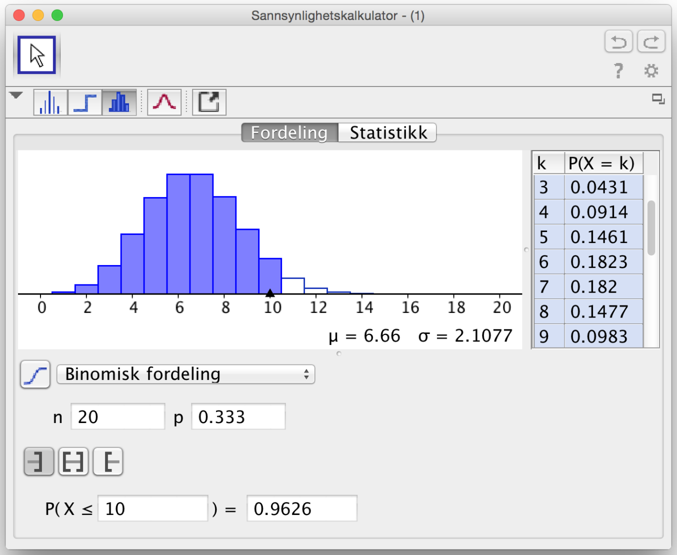
Det er et stort utvalg av fordelinger du kan bruke, men i videregående skole er det nok binomisk, hypergeometrisk og normalfordeling som er viktigst. Figur 5.2 vises binomisk fordeling.

■ **Eksempel 5.2 — Fra REA3026 Matematikk S1 V09 – Eksempel.** Ved en stor videregående skole blir det brukt en nettbasert ressursside. Bruk av ressurssiden forutsetter at hver elev har installert et bestemt program på datamaskinen sin. I klasse 2b fikk 15 av 27 elever hjelp av IKT-seksjonen med installeringen av programmet. Resten av elevene installerte det selv. Det trekkes tilfeldig ut 10 elever i klasse 2b.

a) Finn sannsynligheten for at 6 av de 10 elevene fikk hjelp av IKT-seksjonen.

b) Bestem sannsynligheten for at minst 2 av de 10 elevene installerte programmet selv.

Ved skolen måtte 30 % av alle elevene få hjelp av IKT-seksjonen for å komme inn på ressurs-siden.



Figur 5.2: GeoGebra gjør utregninger og visualiserer svaret fint.

c) Hva er sannsynligheten for at 9 av 24 tilfeldig valgte elever har fått hjelp av IKT-seksjonen? Forklar hvilke forutsetninger du må legge inn for å kunne regne binomisk.

d) Hva er sannsynligheten for at minst 9 av 24 tilfeldig valgte elever har fått hjelp av IKT-seksjonen?

■

Løsning:

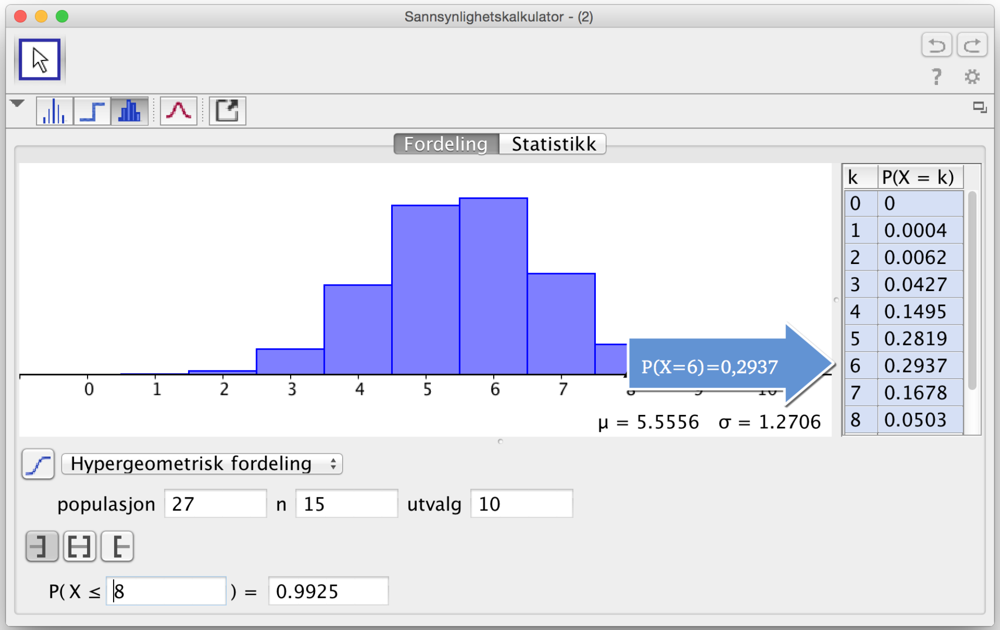
a) Vi åpner sannsynlighetskalkulatoren og velger «Hypergeometrisk fordeling» og skriver inn 27 for populasjon, 15 for antall elever som har fått hjelp og 10 for utvalget vi gjør. Vi ser at $P(X = 6) = 0{,}2937$. Se figure 5.1.

b) Siden $P(\text{minst 2 installerte programmet selv}) = P(\text{høyst 8 fikk hjelp})$, så ser vi at dette blir $P(X \leq 8) = 0{,}9925$. Se figur 5.1.

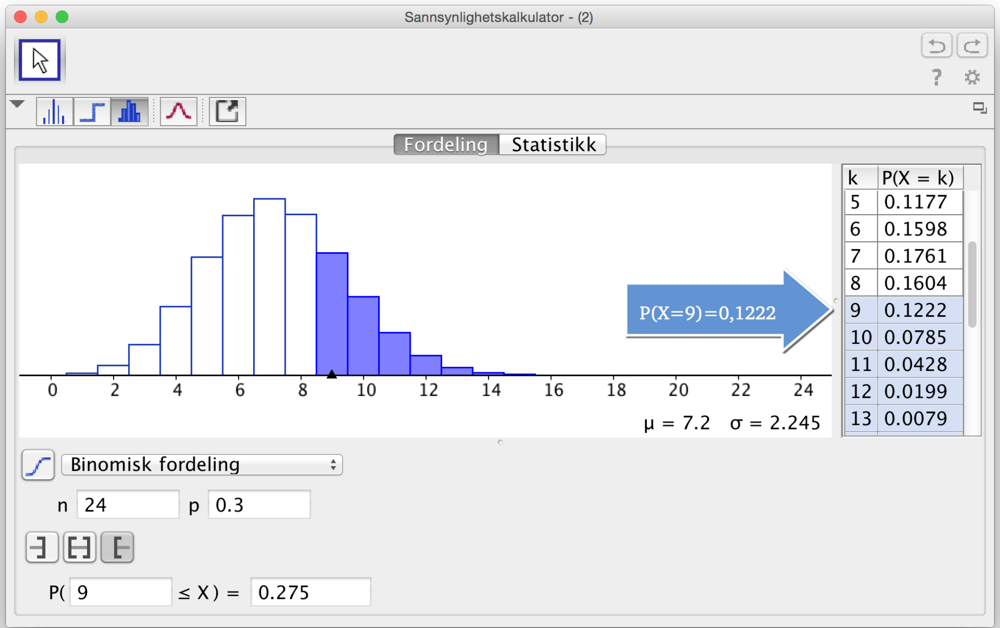
c) Vi kan i dette tilfellet bruke en binomisk sannsynlighetsmodell under forutsetningen at sannsynligheten for at en elev har fått hjelp er 30 %, uavhengig av om de andre elevene som velges ut har fått slik hjelp.

   Vi bruker *Sannsynlighetskalkulator* og finner at $P(X = 9) = 0{,}1222$. Det vil si at det er ca 12 % sannsynlig at 9 av 24 tilfeldig valgte elever har fått slik hjelp. Se figur 5.4.

d) Bruker *Sannsynlighetskalkulator* med binomisk fordeling og finner at $P(X \geq 9) = 0{,}275$. Se figur 5.4.



Figur 5.3: Sannsynlighetskalkulatoren viser at $P(X \leq 8) = 0{,}9925$ og $P(X = 6) = 0{,}2937$



Figur 5.4: Sannsynlighetskalkulatoren viser at $P(X \geq 9) = 0{,}275$ og $P(X = 9) = 0{,}1222$

■ **Eksempel 5.3 — Fra REA3026 Matematikk S1 V11 – Eksempel.** Ved et helsestudio registrerte de kroppsvekten til alle de 320 kundene.

Gjennomsnittsvekten var 79,2 kg med et standardavvik på 6,4 kg. Vi antar at kroppsvekten er normalfordelt.

a) 1) Hvor stor andel av kundene veide mellom 75,0 kg og 85,0 kg?

2) Hvor stor andel av kundene veide over 100,0 kg?

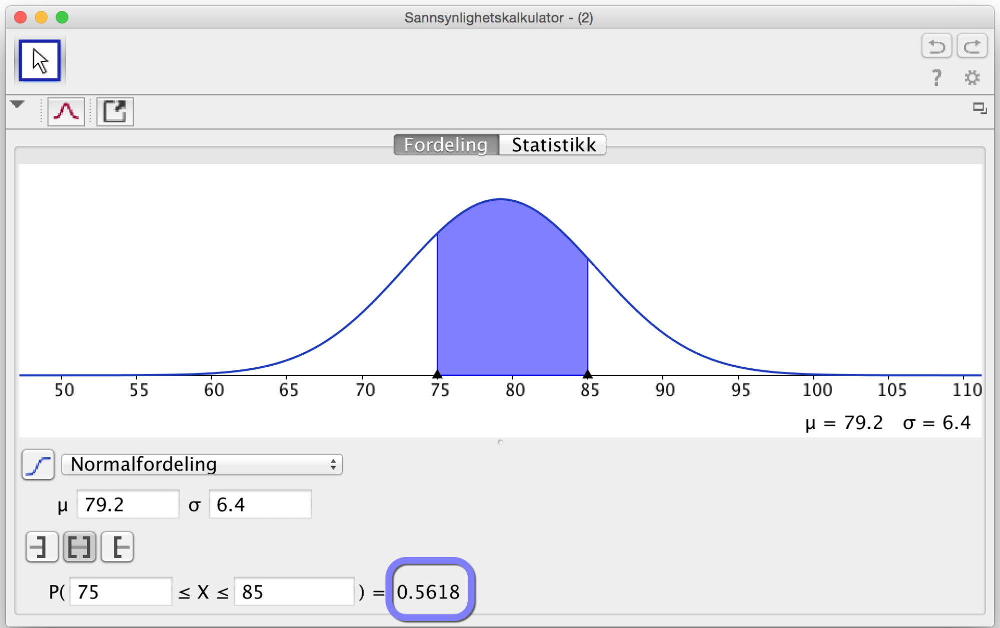
Helsestudioet vil undersøke om treningen påvirker kroppsvekten. De veier derfor 30 tilfeldig valgte kunder etter en periode med jevnlig trening. Gjennomsnittsvekten for disse 30 kundene er 76,0 kg. Vi antar at standardavviket er uendret.

b) Sett opp en nullhypotese og en alternativ hypotese som passer til denne problemstillingen.

c) Undersøk om det er grunnlag for å hevde at gjennomsnittsvekten til kundene i helsestudioet har gått ned. Bruk et signifikansnivå på 5 %.

Løsning:

a) 1) Bruker *Sannsynlighetskalkulator* med Normalfordeling som vist på figur 5.5. Vi ser at $P(75{,}0 \leq X \leq 85{,}0) = 0{,}5618$. Det vil si at 56,2 % av kundene veier mellom 75,0 kg og 85,0 kg. Det vil med andre ord si 180 personer.



Figur 5.5: Vi ser at $P(75{,}0 \leq X \leq 85{,}0 = 0{,}5618$. Legg merke til hvordan dette visualiseres med Gauss-kurven.

2) Vi bruker *Sannsynlighetskalkulator* og ser at $P(X \leq 100) \approx 0{,}0006$. Dette tilsvarer mye mindre enn 1 person. Vi kan derfor konkludere med at ingen av kundene er mer enn 100 kg.

b) Vi lar $\overline{X}$ være gjennomsnittsvekten[1] til de 30 tilfeldig valgte personene.

$$\text{Nullhypotse } H_0 : \overline{X} = 79,2$$
$$\text{Alternativ hypotese } H_1 : \overline{X} < 79,2$$

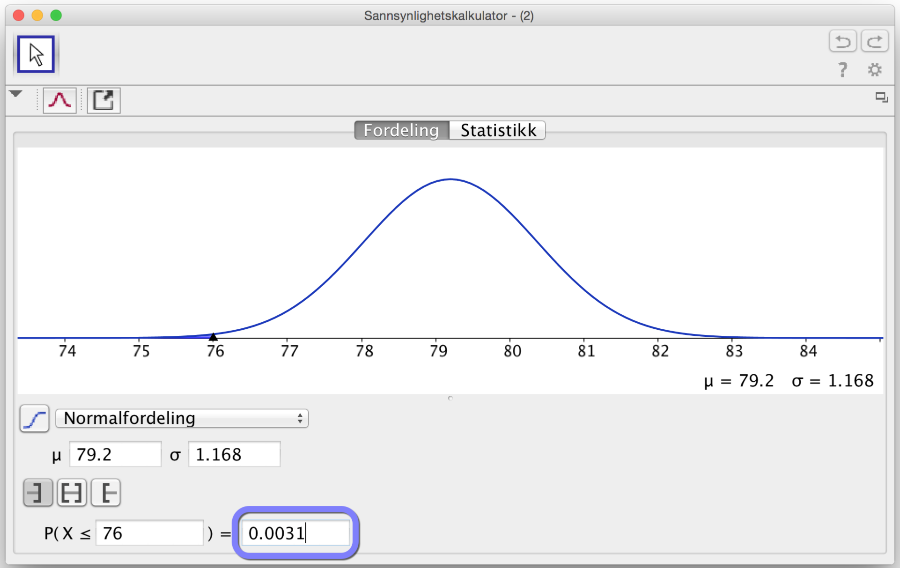
c) Vi antar nullhypotesen og ønsker å finne ut hva sannsynligheten er for at gjennomsnittsvekten til 30 tilfeldig valgte er mindre eller lik 76,0 kg. Da er forventningsverdien $E(\overline{X}) = 79{,}2$ (siden vi antar nullhypotesen er sann) og standardavviket er

$$SD(\overline{X}) = \frac{6,4}{\sqrt{30}} = 1{,}168$$

Bruker *Sannsynlighetskalkulator* og finner at

$$P(X \leq 76{,}0) = 0{,}0031 = 0{,}31\,\%$$

Vi ser at dette er veldig lite, så innenfor et vanlig signifikansnivå på 5 % kan vi forkaste nullhypotesen. Vi kan med andre ord konkludere med at treningen har virket!



Figur 5.6: *Sannsynlighetskalkulator* viser at $P(\overline{X} \leq 76{,}0) = 0{,}0031$.

■

[1]Vi kan også se på variabelen Y = summen av vektene til kundene og bruke at $E(Y) = 30 \cdot \mu = 2376$ og $SD(Y) = \sqrt{30}\sigma = 35{,}05$. Da skal vi regne ut $P(Y \leq 2280)$.

Oppgave 5.3 — Eksempelsett S2, oktober 2008.
Levetiden til en spesiell motor antas å være normalfordelt med en forventningsverdi på 10 år og et standardavvik på 2 år.

a) Finn sannsynligheten for at

  1) motoren fungerer mindre enn 8 år

  2) motoren fungerer mellom 8 og 11 år

Motorer som blir defekte før garantitiden går ut, blir erstattet av produsenten. Firmaet som produserer motorene, ønsker ikke å erstatte mer enn 3 % av de motorene som blir defekte.

b) Hvor lang garantitid bør de da tilby?

I firmaet er de usikre på om forventet levetid er så lang som 10 år. De registrerer levetiden i antall år på 10 tilfeldig valgte motorer:

8,3 9,2 7,3 10,1 9,5 8,7 8,4 10,0 9,1 9,4

De antar fortsatt at levetiden til motoren er normalfordelt med standardavvik på 2 år.

c) Still opp en nullhypotese H_0 og en alternativ hypotese H_1 for denne problemstillingen.

d) Velg et signifikansnivå på 5 % og undersøk om firmaet må forkaste hypotesen H_0.

Kommentar: GeoGebra hjelper oss ikke til å finne standardavviket i oppgave d). Dersom vi ser på gjennomsnittet $\overline{X}$ av de 10 motorene, så vil

$$E(\overline{X}) = \mu = 10 \quad \text{og} \quad SD(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{10}} \approx 0,63245$$

5.3 Statistikk i sannsynlighetskalkulatoren

I Sannsynlighetskalkulator er det en egen flik som heter *Statistikk*. Her byr GeoGebra på en del tester og estimater. En del av disse ligger nok utenfor læreplanmåla i matematikk for fagene i skolen, men kan være interessant å se nærmere på likevel. Unntaket er muligens Matematikk X hvor elevene skal kunne gjøre utvalgsundersøkelser.

■ **Eksempel 5.4 — Eksamen S2, Våren 2011.** Ved et helsestudio registrerte de kroppsvekten til alle de 320 kundene. Gjennomsnittsvekten var 79,2 kg med et standardavvik på 6,4 kg. Vi antar at kroppsvekten er normalfordelt.

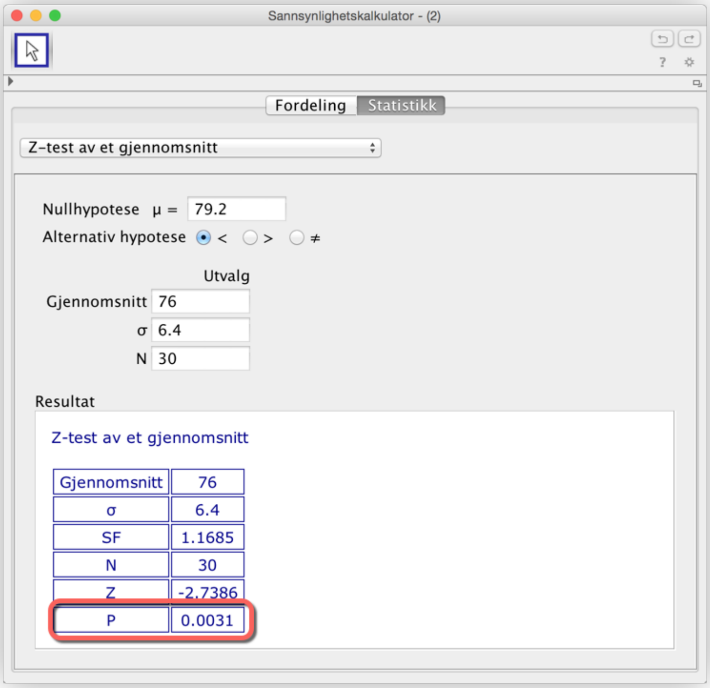
Helsestudioet vil undersøke om treningen påvirker kroppsvekten. De veier derfor 30 tilfeldig valgte kunder etter en periode med jevnlig trening. Gjennomsnittsvekten for disse 30 kundene er 76,0 kg. Vi antar at standardavviket er uendret.

Undersøk om det er grunnlag for å hevde at gjennomsnittsvekten til kundene i helsestudioet har gått ned. Bruk et signifikansnivå på 5%.

Løsning:
Vi lar $\overline{X}$ være gjennomsnittsvekten til 30 tilfeldig valgte kunder. Sentralgrenseteoremet gir at $\overline{X}$ er tilnærmet normalfordelt. Vi setter opp nullhypotese og alternativ hypotese:

$$H_0 : \mu_{\overline{X}} = 79{,}2$$
$$H_1 : \mu_{\overline{X}} < 79{,}2$$

Vi bruker et signifikansnivå på 5% og antar nullhypotesen er sann. Vi velger «Z-test av et gjennomsnitt» i *Statistikk* i Sannsynlighetskalkulator og fører inn de kjente tallene.



Vi ser at vi får $P = 0{,}0031$. Det vil si at det er 0,31% sannsynlig at gjennomsnittsvekten til 30 tilfeldig valgte medlemmer er mindre eller lik 76 kg. Vi forkaster derfor nullhypotesen og konkluderer med at det er gode grunner til å si at treningen har ført til at gjennomsnittsvekten har gått ned.

Merk: fordelen med å bruke Z-test i stedet for å regne det ut under Fordeling, er at vi her slipper å regne ut Standard Feil $\mathrm{SF}(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. ∎

I oppgave 5.3 ble det gjort et utvalg på 10 tilfeldige motorer. I oppgaven står det at vi kan gå ut fra et standardavvik på 2 år. Uten denne opplysningen måtte vi ha gjort et estimat av standardavviket. Vi kan beregne standardavviket til tallene vi fant, nemlig standardavviket til:

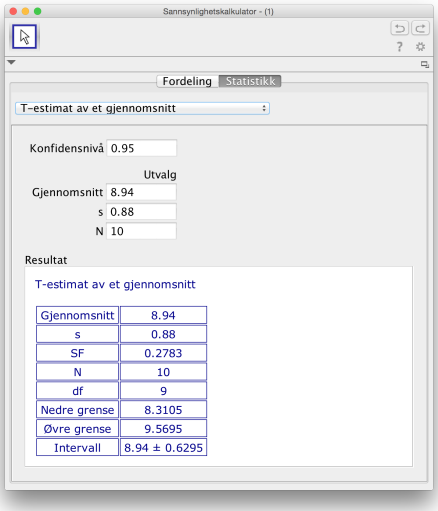
8,3 9,2 7,3 10,1 9,5 8,7 8,4 10,0 9,1 9,4

Siden vi i dette tilfelle har et utvalg, må vi bruke det som kalles *utvalgsstandardavvik*. I GeoGebra kan vi regne ut dette ved å bruke kommandoen

```
s=UtvalgStandardavvik[8.3, 9.2, 7.3, 10.1, 8.7, 8.4, 10, 9.1, 9.4]
```

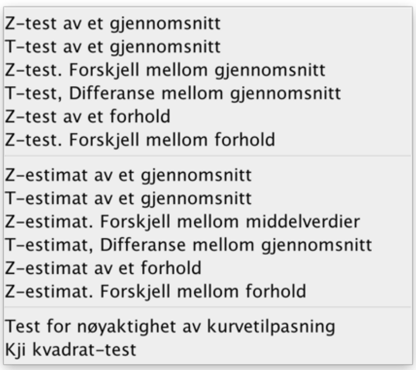
Forskjellen på vanlig standardavvik σ og utvalgsstandardavvik s er at vi i førstnevnte har hele populasjonen, mens i sistnevnte har en del av populasjonen. I vårt eksampel blir $s = 0{,}88$. Dette er større enn 0,63245, slik som i oppgaven. Men dette kan skyldes tilfeldige variasjoner, noe som selvsagt også får innvirkning på s. Når GeoGebra regner ut standardavvik σ og utvalgsstandaravvik s bruker programmet formelene

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$



Dersom vi ikke kjenner standardavviket, må vi ta til gode med å bruke vårt estimat s for standardsavviket. Når vi i slike situasjoner skal gjøre en hypotesetest, kan vi gjøre et T-esimat av et gjennomsnitt. Bruker vi et konfindensnivå på 95% får vi at konfidensintervallet blir [8,31 , 9,57].

Det er flere slike tester og estimater som kan gjøres i GeoGebra. På bildet til nedenforser du de som er tilgjengelige i Sannsynlighetskalkulator. Det ligger utenfor målsettingen til denne boken å gå inn på hver av de ulike testene.



Figur 5.7: Det fins flere ferdigprogramerte tester vi kan bruke i Sannsynlighetskalkulatoren.

6 Geometri

GeoGebra blir ofte omtalt som et dynamisk geometri-program. Det vil si at vi kan gjøre geometriske konstruksjoner og eksperimentere med disse på en dynamisk måte. I dette kapittelet skal vi jobbe oss gjennom en rekke eksempler på dette. I programmet er det en del innebygde verktøy som for eksempel *Midtnormal* og *Parallell linje*. Disse kan vi selvsagt bruke. Men vi vil først se hvordan vi kan bruke GeoGebra til å gjennomføre slike konstruksjoner «med passer og linjal». Det kan være praktisk å kunne dette dersom vi ønsker å lage et løsningsforslag til elevene som viser hvordan en konstruksjon kan se ut.

6.1 Konstruksjoner

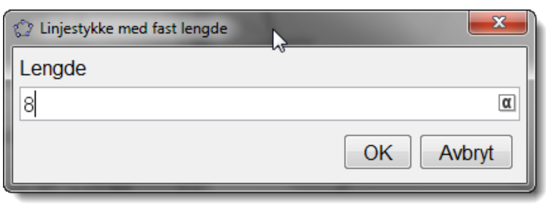
Vi vil her vise hvordan vi kan bruke GeoGebra til å konstruere ulike objekt. Merk at GeoGebra har en del verktøy tilgjengelig som gjør at noen kan være skeptiske til om det faktisk er konstruksjoner som blir gjort. Vi har en lang tradisjon når det gjelder vår tolkning av hva det vil si å konstruere en figur. Denne tradisjonen går tilbake til Euklid. I en konstruksjon er det i denne tradisjonen kun passer og (umerket) linjal som kan brukes. Det er i denne forstand at ordet konstruksjon skal forstås på en eksamen. Men dersom det står at en figur skal tegnet er det selvsagt fritt fram til å bruke alle verktøyene i GeoGebra. Konstruksjoner vil være mest aktuelt på del 1, mens det vil være mer aktuelt å tegne figurer på del 2. For en utdypning av dette henviser vi til vurderingsveiledningen fra Utdanningsdirektoratet.

▪ **Eksempel 6.1** I $\triangle ABC$ er $AB = 8{,}0\,\text{cm}$, $\angle A = 60°$ og $\angle B = 30°$.

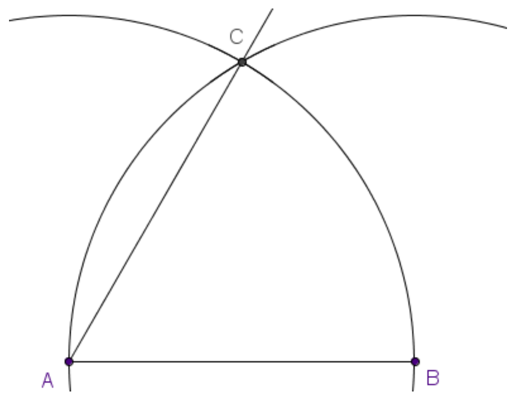
Konstruer $\triangle ABC$ ▪

Løsning:

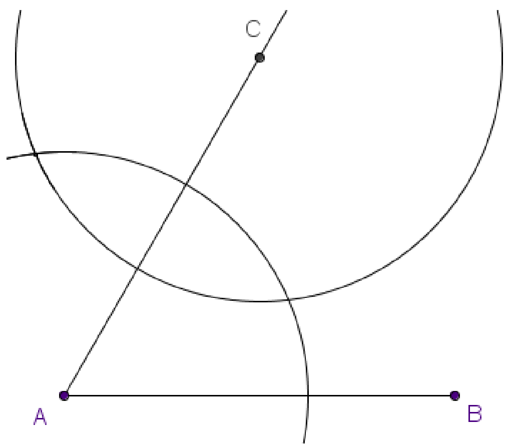
1 Vi setter først av AB ved å bruke verktøyet *Linjestykke med fast lengde* . Når dette verktøyet er valgt klikker vi i grafikkfeltet der hvor vi vil ha A. Du får da opp et vindu hvor du skriver inn lengden på AB $(= 8)$.



2 Vi konstruerer så vinkel A ved å finne skjæringspunktet mellom sirklene med radius 8,0 cm og sentrum i henholdsvis A og B. Trekker så en stråle gjennom dette skjæringspunktet. Merk at GeoGebra kaller dette punktet for C. Dette er noe vi må endre på når figuren er ferdig.

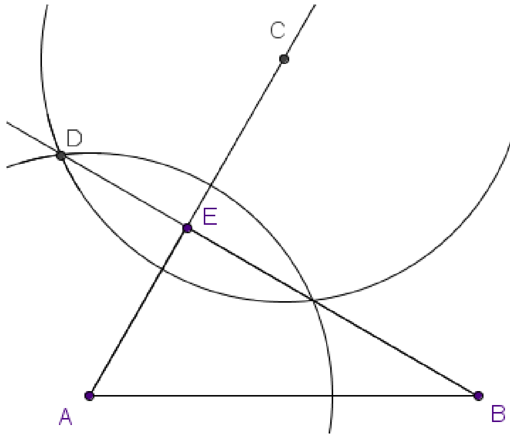


3 Vi konstruerer $\angle B$ ved å halvere vinkel ABC (husk at vi skal endre navn på C til slutt). Dette gjør vi ved å konstruere to sirkler med samme radius gjennom henholdsvis A og «C»:

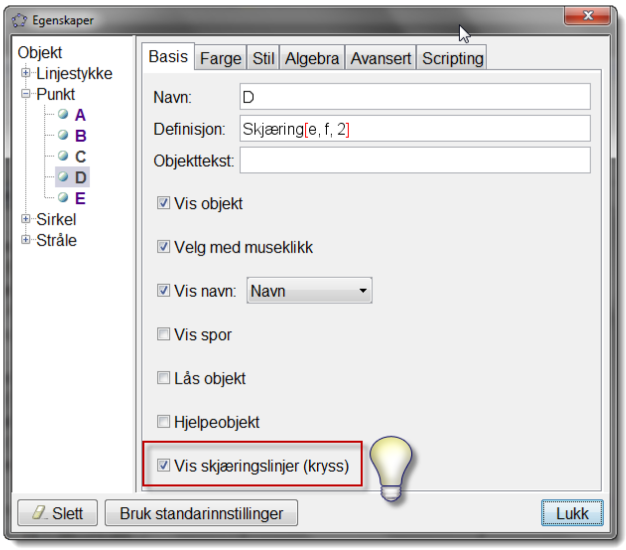


Merk at vi har skjult de to sirklene fra konstruksjonen av $\angle A$. Dette gjør du ved å høyreklikke på sirklene og hake vekk «Vis objekt».

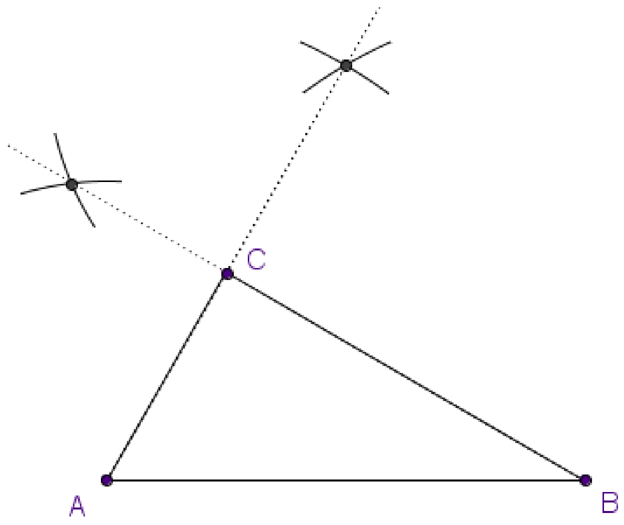
4 Finner et av skjæringspunktene mellom de to sirkelen og tegner en stråle gjennom B og dette punktet. Punktet C i oppgaven vil da være skjæringspunktet mellom de to strålene:



5 Vi rydder litt opp i figuren ved å skjule alle sirklene og endre navn på E (til C og skjule navn på alle andre punkt enn A, B og C. For å vise hvordan figuren er konstruert høyreklikker jeg så på D og velger egenskaper. Der haker jeg av for «Vis skjæringslinjer (kryss)»:



Gjør det samme for punktet som definerte det andre punktet på strålen gjennom A og C (vårt gamle C). Du vil da få følgende pene figur:



Merk at dersom du går til «Rediger» og velger «Kopier grafikkfeltet til utklipstavlen» og så limer dette inn i en tekstbehandler (for eksempel Word), så vil AB bli 8,0 cm på en utskrift dersom du ikke endrer størrelse på bildet som blir limt inn.

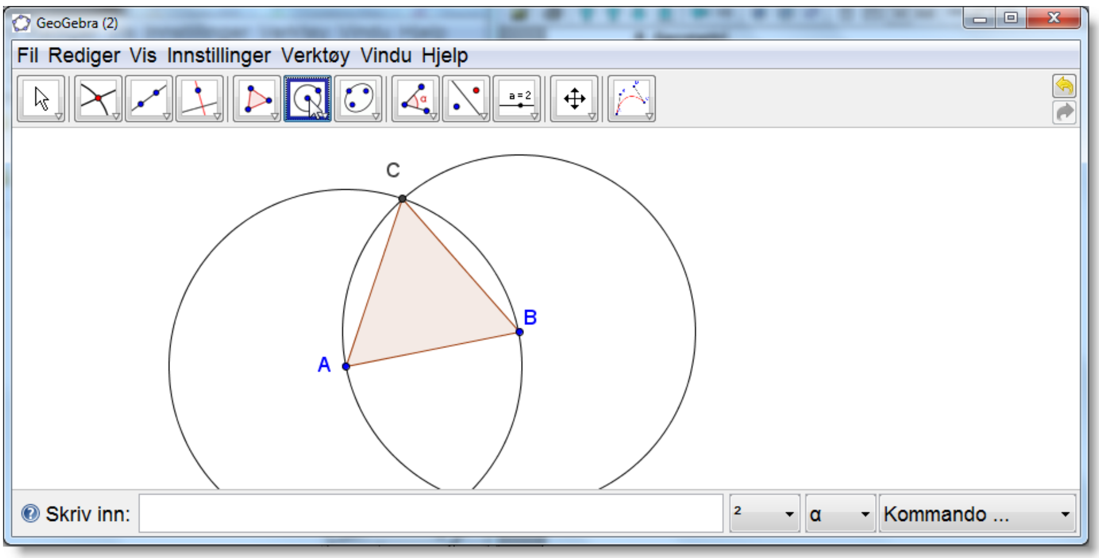
Oppgave 6.1

Trekanten ABC fra eksempel 6.1 er en del av trapeset $ABCP$ der $\angle BAD = 90°$.

Konstruer trapeset $ABCP$.

Oppgave 6.2

Åpne en ny GeoGebra-fil og slå av aksene og algebrafeltet (under «Vis» i menyene). Konstruer en likesidet trekant. Start med å tegne to punkt A og B. Du kan finne C ved å bruke verktøyet *Sirkel definert ved sentrum og periferipunkt* .



Figur 6.1: Konstruksjon av en likesidet trekant.

Når alle punkta er tegnet, kan du bruke verktøyet *Mangekant* for å få tegnet trekanten. Når dette verktøyet er valgt, er det bare å klikke rundt på hjørnene i trekanten. Husk at du må avslutte mangekanten ved å klikke på det første punktet.

Høyreklikk på sirklene og hak vekk «Vis objekt» for å gjøre figuren penere. Dersom det er mange elementer som skal skjules, kan det være fornuftig å bruke verktøyet *Vis eller skjul objekt* .

Oppgave 6.3

Åpne en ny GeoGebra-fil og slå av aksene (under «Vis» i menyen).

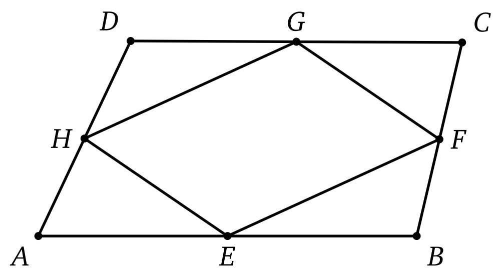
a) Tegn en sirkel.

b) Konstruer en diameter til sirkelen og merk av skjæringspunkta A og B mellom sirkelen og diameteren. (*Skjæring mellom to objekter*).

c) Tegn et nytt punkt C på sirkelen. Hva kan du si om trekanten ABC? Ta tak i punktet C og flytt det rundt på sirkelen.

Oppgave 6.4

a) Lag en firkant $ABCD$. Finn midtpunktet på hver av de fire sidene. La disse bli hjørner i en ny firkant. Kall denne $EFGH$.



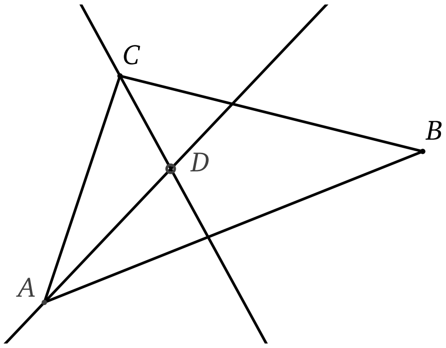
b) Grip fatt i ett av hjørnene av den opprinnelige firkanten, flytt på det og forandre på figuren. Ser du noe?

c) Hvor stort er arealet til firkant $ABCD$ i forhold til firkant $EFGH$?

d) Prøv om du kan forklare det du så i b) og c).

Oppgave 6.5

Tegn en trekant. Konstruer vinkelhalveringslinjen til to av sidene i trekanten. Bruk verktøyet «Halveringslinje for vinkel» .



Konstruer så den tredje halveringslinjen. Hva ser du? Undersøk om dette gjelder alltid ved å ta tak i hjørnene og forandre på trekanten.

Vis at punktet D er sentrum til den innskrevne sirkelen.

De siste oppgavene viser at du kan bruke GeoGebra til å utforske matematiske sammenhenger. GeoGebra egner seg på den måten utmerket til slike oppgaver. Men vi vil poengtere her at selv om vi kan flytte på hjørner og ta for oss en uendelighet av tilfeller, så vil vi aldri kunne bevise noe med GeoGebra. Den flotteste illustrasjon av Den pytagoreiske læresetning er nettopp en illustrasjon og ikke et bevis. På den måten vil nok aldri program som GeoGebra erstatte vanlig resonnering og bevisførsel. Faktisk kan slike programmer gjøre at elevene blir mindre motivert for å gjennomføre et bevis – hva er poenget med det? De ser jo at sammenhengen «alltid gjelder»... Vi må derfor ha en reflektert holdning til dette og ikke bruke dynamisk programvare som en erstatning for argumentasjon og bevisføring.

Oppgave 6.6

Tegn en trekant ABC. Konstruer midtnormalen til to av sidene. Konstruer så den tredje midtnormalen. Hva ser du? Gjelder dette alltid? Undersøk dette ved å ta tak i et hjørne og flytt på det.

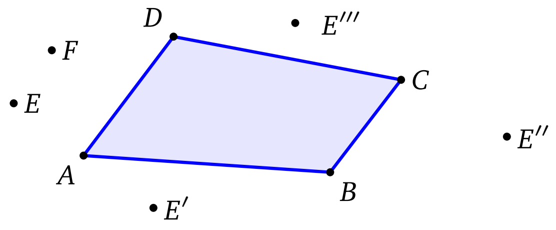
Vi ønsker å omskrive trekanten ABC med en sirkel. Nå vet vi at sentrum i sirkelen må ligge like langt fra A som fra B. Derfor må midtnormalen til AB gå gjennom sentrum av sirkelen. På samme måte må de andre tre midtnormalene gå gjennom sentrum av sirkelen. Derfor må dette sentrum være O. Bruk dette til å omskrive trekanten.

Oppgave 6.7

Tegn en likesidet trekant. Velg et punkt i det indre og mål avstanden fra dette punktet til de tre sidene. Velg et nytt punkt i det indre og mål igjen avstanden fra sidene. Hva ser du da? Formuler en hypotese. For mer om dette resultatet se Amdal (2009a) og (2009b).

Oppgave 6.8

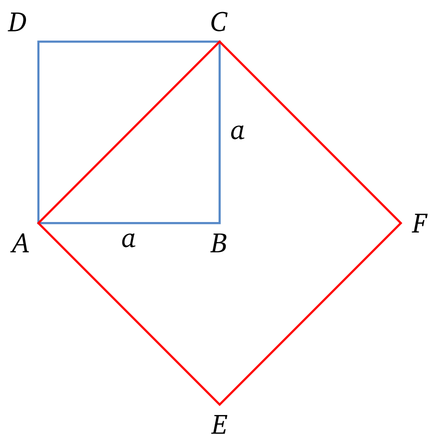
Tegn en firkant $ABCD$ og et punkt E utenfor firkanten. Bruk verktøyet *Speil objekt om punkt*  og speil punktet E om A slik at du får et nytt punkt E'. Speil så E' om B og få E'', som du igjen speiler om C og får E'''. Speil til slutt E''' om D og få punktet F. Eksperimenter med firkanten $ABCD$ og finn ut hva som må til for at F og E skal være sammenfallende. Se figur 6.2.



Figur 6.2: Speiling om hjørnene i en firkant. Når er $E = F$?

Oppgave 6.9

På figuren nedenfor har vi tegnet kvadratene $ABCD$ og $AEFC$. Vi setter sidene i kvadratet $ABCD$ lik a.

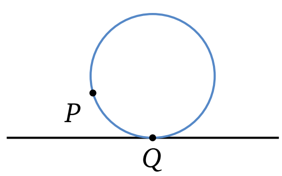


a) Vis at kacdratet $AEFC$ har dobbelt så stort areal som kvadratet $ABCD$.

b) Konstruer et kvdrat med areal lik 50cm^2.

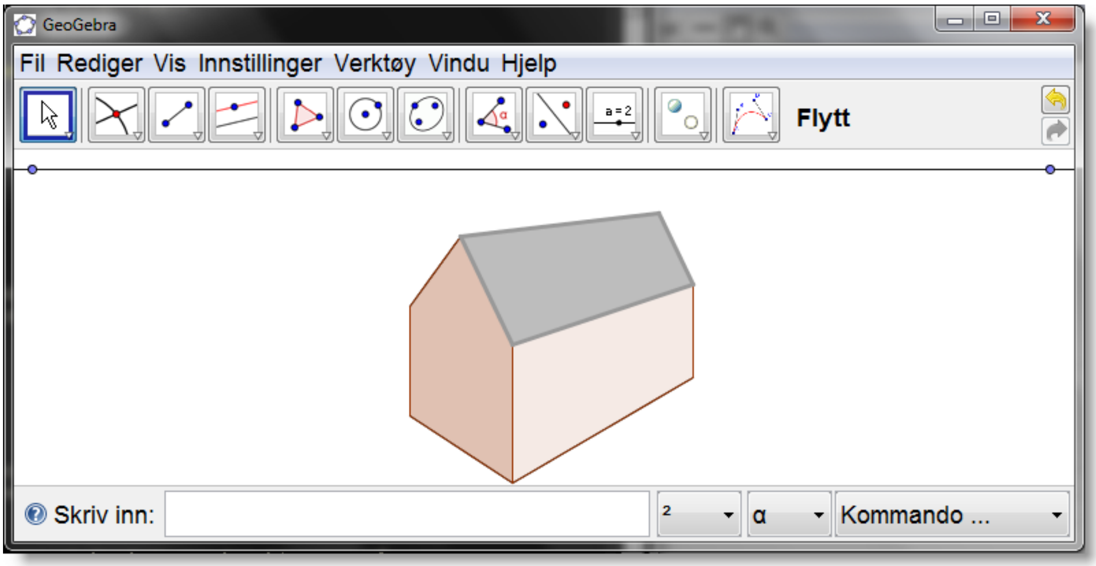
Oppgave 6.10

Gitt et punkt P og en linje som går gjennom et punkt Q. Konstruer en sirkel som går gjennom P og som tangerer linjen i Q.



6.2 Perspektiver

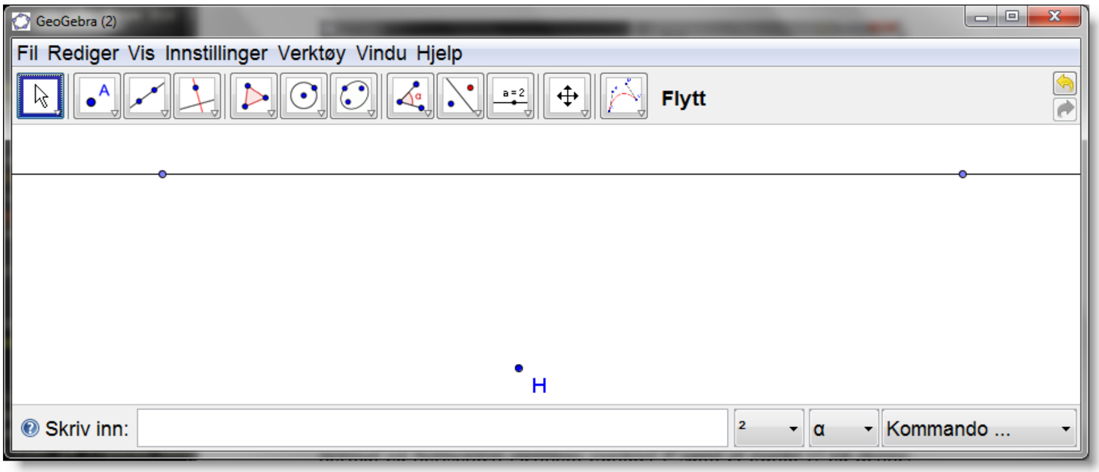
Du kan bruke GeoGebra til å tegne i perspektiv. Vi vil i dette delkapittelet vise hvordan vi går fram for å tegne et hus som ser slik ut:



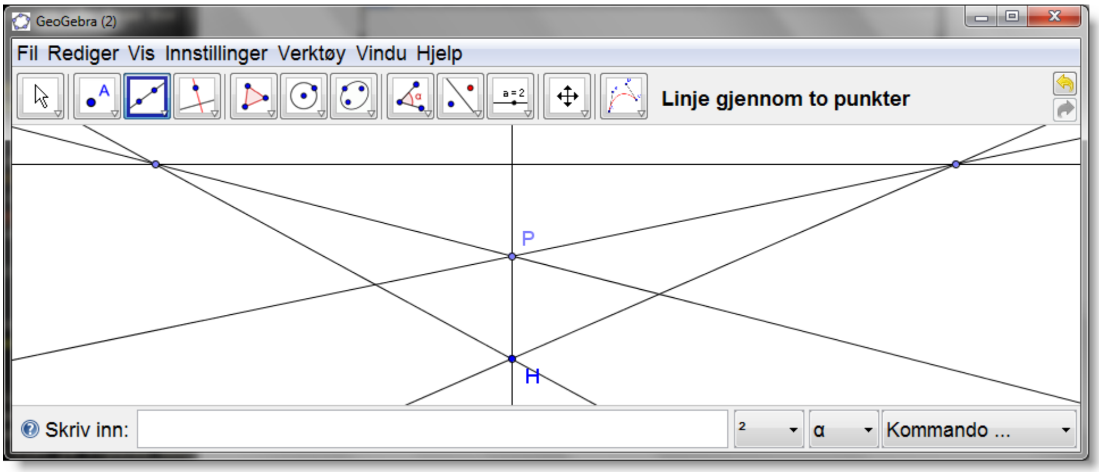
Figur 6.3: Hus med to forsvinningspunkt tegnet med GeoGebra.

Før du starter, så kan det være en god ide å skjule akser og algebrafeltet (under «Vis» på menylinja). Vi starter med å tegne inn en horisontal linje (horisonten). Skriv inn $y = 5$ i inntastingsfeltet. På den måten vet vi at vi får en 100 % horisontal linje. Velg så de to forsvinningspunkta.

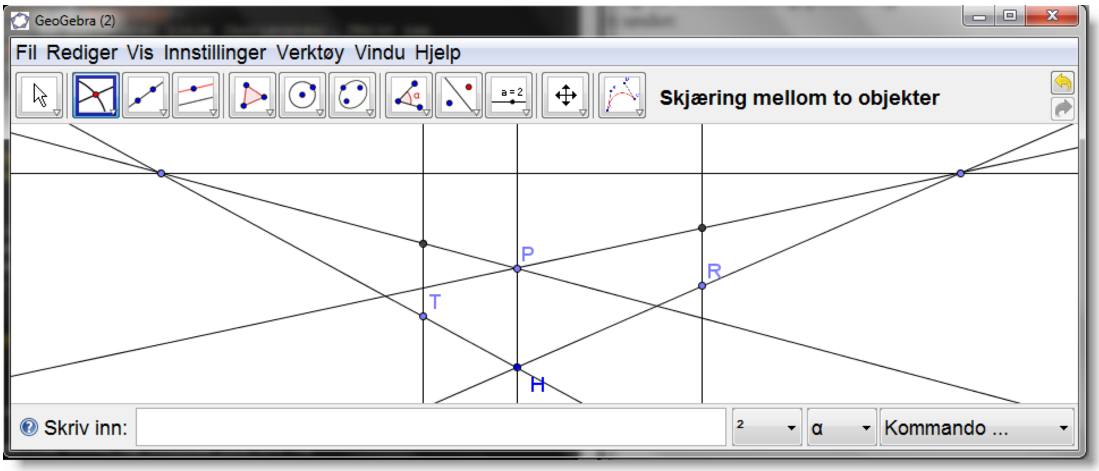
Tegn så det «nedre» hjørnet i huset:



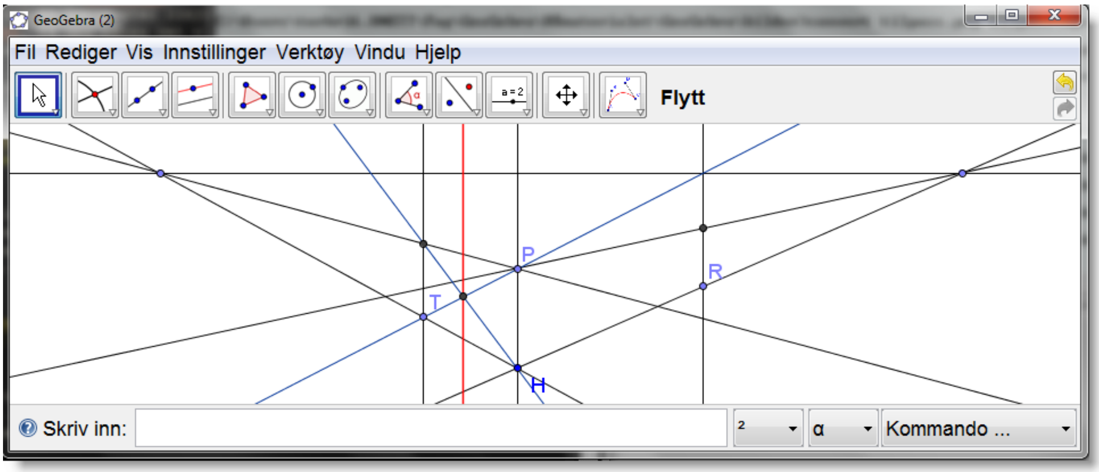
For å tegne hjørnet mellom de to synlige veggene tegner vi en linje normal på horisonten gjennom punktet H samt et punkt P på denne. Deretter tegner vi linjer gjennom H og de to forsvinningspunkta og tilsvarende for P som vist på figuren under:



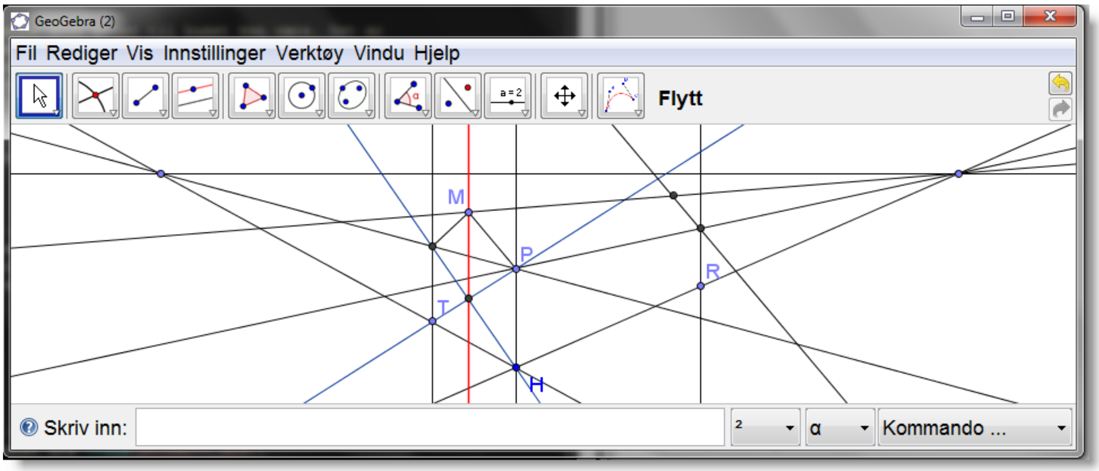
Det neste vi gjør er å tegne inn de to andre «nedre» hjørnene R og T. Deretter tegner vi linjer parallell med HP gjennom disse,og finner skjæringspunkta mellom disse og linjene fra P og forsvinningspunkta:



Neste problem er å bestemme hvor mønet til huset kan være. Det er selvsagt midt på den ene veggen. Men hvor er det i perspektiv? Vi tegner inn diagonalene mellom hjørnene i den ene veggen. Der disse møtes er «midt på» veggen. Vi tegner en linje gjennom dette punktet som er parallell med HP:

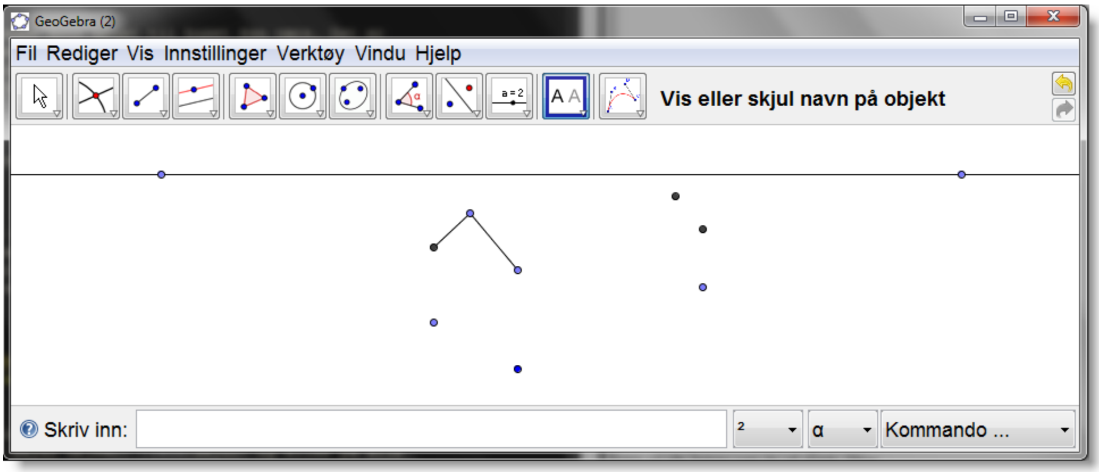


Vi kan nå tegne inn det ene mønet M og linja fra dette til det ene forsvinningspunktet. Vi mangler da kun ett punkt, og det er det andre mønet. Strengt tatt skulle vi ha tegnet inn enda ett forsvinningspunkt for å gjøre dette, men nøyer oss her med å tegne linje parallell med PM.



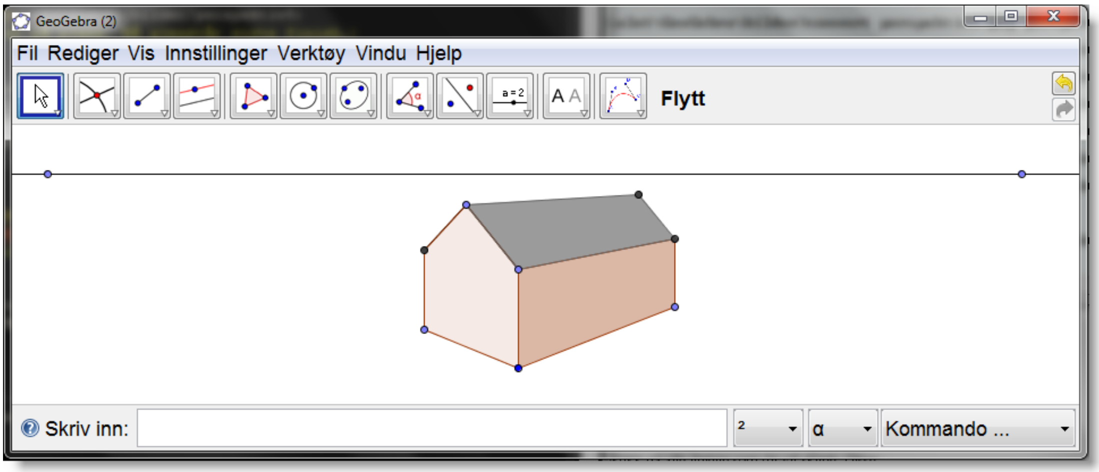
Figur 6.4: Huset begynner å ta form?

Vi vil nå skjule alle linjer (men ikke hjørnene i huset). Velg verktøyet *Vis eller skjul objekt* og klikk på alle linjene som du vil skjule. Disse vil da bli feite (og fremdeles synlige) mens du klikker rundt. Når du er ferdig trykker du på esc for å velge *Flytt*. Da ser figuren slik ut:



Figur 6.5: Her har vi skjult hjelpelinjer og et punkt. Merk at vi også har skjult navna til en del punkt.

Det siste vi gjør er å tegne inn de tre synlige flatene på huset ved hjelp av verktøyet *Mangekant* . Vi får da følgende figur:



Figur 6.6: Et lite kunstverk?

Oppgave 6.11

Lag et tilsvarende hus, men bruk tre forsvinningspunkt slik at taket blir korrekt. Tegne også inn vinduer og pipe.

Oppgave 6.12

Gå til nettsiden

`http://www.geogebra.no/filer/perspektiv.html`

og finn forsvinningspunktet!

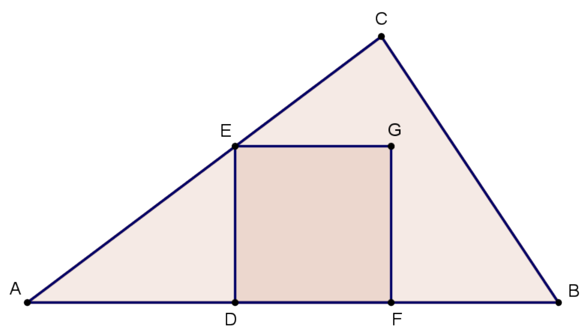
6.3 Sporing

Sporing er et effektivt verktøy når vi skal utforske sammenhenger. Følgende eksempel er hentet fra Polya (1957).

■ **Eksempel 6.2** Gitt en trekant ABC. Konstruer et kvadrat som har hjørnene på sidekantene til trekanten. ■

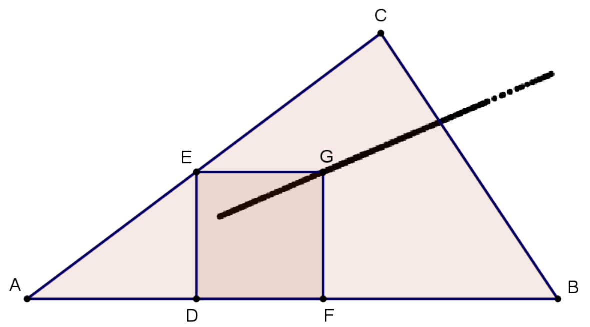
Løsning:
Vi tegner en trekant i GeoGebra ved å bruke verktøyet *Mangekant*. Klikk tre plasser i arbeidsarket og til slutt et klikk til på det første punktet for å «avslutte» trekanten.

Vi vet ikke hvor på sidekanten AB det ene punktet skal ligge, men velger et punkt D og konstruerer et kvadrat. Siden en trekant kun har tre sider og et kvadrat har fire, så må to av hjørnene til kvadratet ligge på en av sidene i trekanten. Vi velger dette til å være AB. Vi får da en konstruksjon som vist på figur 6.7.



Figur 6.7: Et kvadrat i en trekant. Her ligger ikke hjørne G på BC. Vi har ryddet litt på figuren ved å skjule ulike objekt som vi brukte i konstruksjonen av kvadratet.

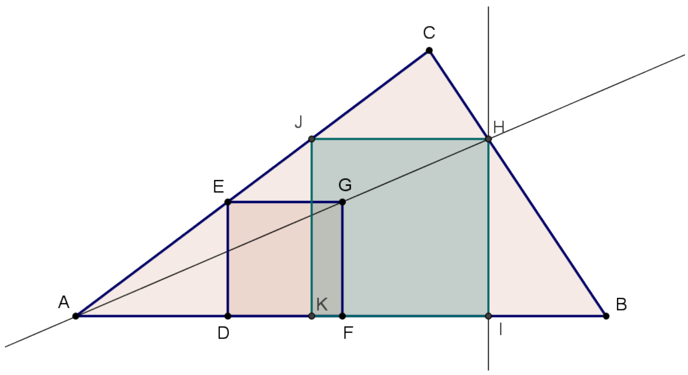
Nå var det ikke denne konstruksjonen vi ønsket. Punktet G skulle ha ligget på BC. Det vil si at D er plassert feil. Men her gjør vi et lite triks. Vi slår på sporing på G (høyreklikk og velg «Slå på sporing»). Når du nå flytter på D, vil punktet G sette av et spor. Dette gjør at vi oppdager en sammenheng som vi muligens ellers ikke ville ha sett, nemlig at G ligger på en rett linje.



Figur 6.8: Med sporing slått på ser vi at G ligger på en linje gjennom A. Merk at du kun kan flytte på D siden de andre punkta i kvadratet er avhengig av hvor D ligger.

x

Hvordan løser vi så oppgaven? Vi tegner nå en linje gjennom AG og finner skjæringspunktet H mellom denne og BC. Så feller vi ned en normal fra H ned på AB og får et punkt I. Dette er to av hjørnene i det søkte kvadratet. Vi konstruerer så kvadratet. Neste utfordring blir nå å forklare/argumentere for hvorfor denne konstruksjonen virker. Hvorfor kan vi vite at punktet J på figur 6.9 faktisk ligger på linjestykket AC?

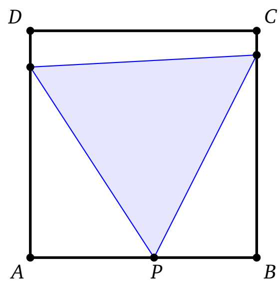


Figur 6.9: Et kvadrat i en trekant. Nå kan vi ta tak i et av hjørnene i trekanten ABC og flytte det. Kvadratet vil alltid ligge på sidekantene til trekanten. Merk at konstruksjonen virker kun dersom $DE < DB$. Hvorfor det?

Oppgave 6.13

Gitt et kvadrat $ABCD$. Konstruer en likesida trekant som har det ene hjørnet nær midten av linjestykket AB og de to andre hjørnene på sidene AD og BC.

Hvor langt fra midten kan punktet P ligge?



6.4 Parameterframstillinger

Det er selvsagt ikke bare grafer til funksjoner som er mulig å tegne i GeoGebra. Du kan for eksempel også tegne kurver som har en parameterframstilling. I følge LK06 skal elevene «kunne bruke vektorfunksjoner med parameterframstilling for en kurve i planet, tegne kurven og derivere vektorfunksjonen for å finne fart og akselerasjon.» (LK06, kompetansemål for R1). Vi vil her vise noen eksempler på hvordan dette gjøres i GeoGebra.

▪ **Eksempel 6.3** En linje l er gitt ved følgende parameterframstilling:

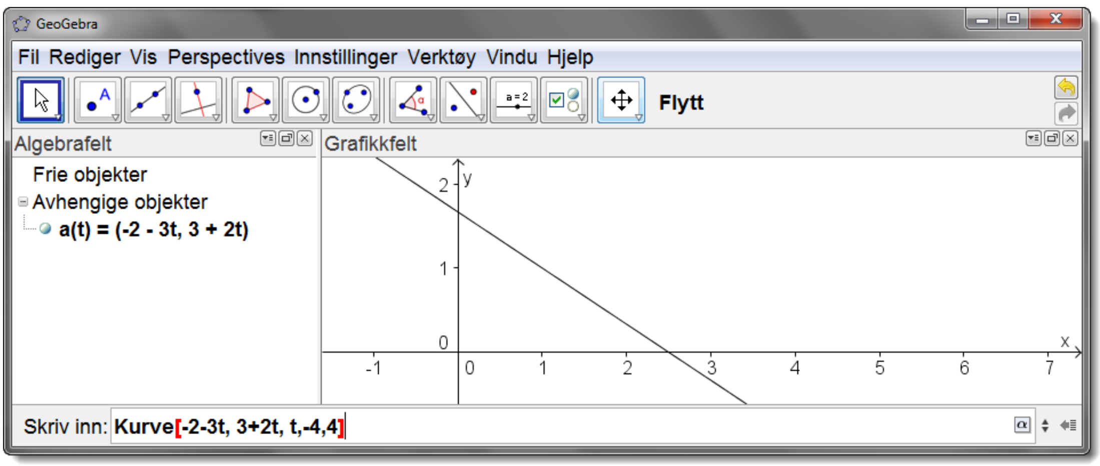
$$x = -2 - 3t \;\wedge\; y = 3 + 2t$$

Tegn linjen i et koordinatsystem. ▪

I GeoGebra kan vi tegne kurver gitt på parameterform ved å bruke kommandoen

`Kurve[<Uttrykk>,<Uttrykk>,<Parametervariabel>,<Fra>,<Til>]`

I dette eksempelet skriver vi kommandoen `Kurve[-2-3t, 3+2t, t,-4,4]`. Vi får da tegnet linjen:



Figur 6.10: Du plotter kurver ved å bruke kommandoen `Kurve[]`

Nå er det kanskje ikke så spennende å tegne inn linjer på denne måten, så derfor må vi prøve oss på litt mer avanserte kurver. Neste eksempel viser en kurve med en kusp[1].

■ **Eksempel 6.4** Tegn kurven med parameterframstilling gitt ved

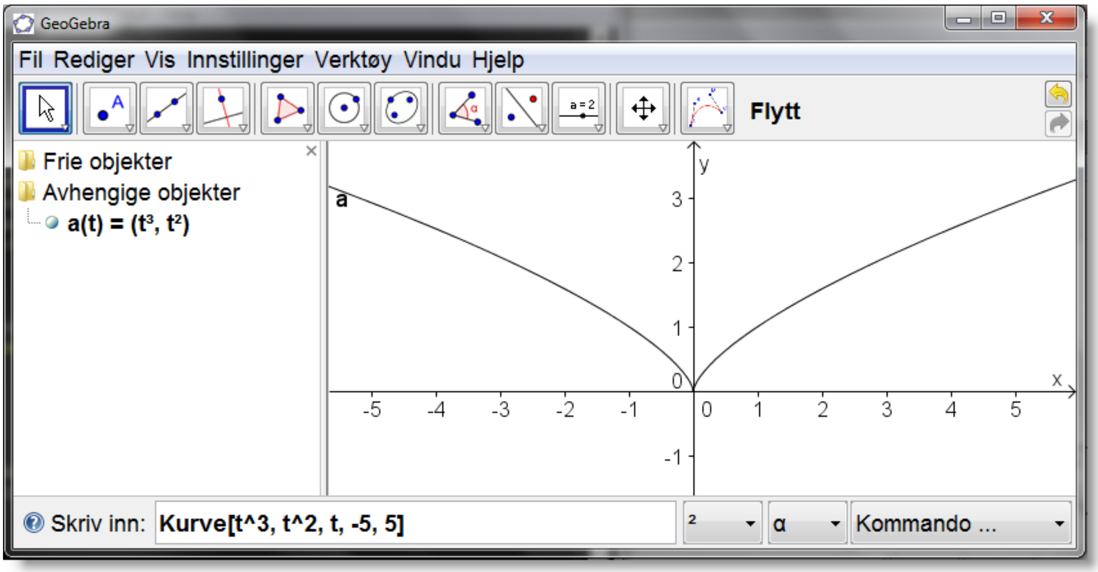
$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$$

■

I dette tilfellet gir vi kommandoen

```
Kurve[t^3, t^2, t, -5, 5]
```

og får følgende kurve:



Figur 6.11: En kusp. Kan du finne likningen for denne kurven?

Tips! Du kan skrive eksponenter i GeoGebra ved å bruke tastekombinasjoner som Alt + 2 på Windows eller ctrl + 2 på Mac (for å få opphøyd i andre potens). Tilsvarende for høyere potenser.

■ **Eksempel 6.5** Tegn kurven med parameterframstilling gitt ved

$$x = \frac{1-t^2}{1+t+t^2} \quad \wedge \quad y = \frac{t(t+2)}{1+t+t^2}$$

■

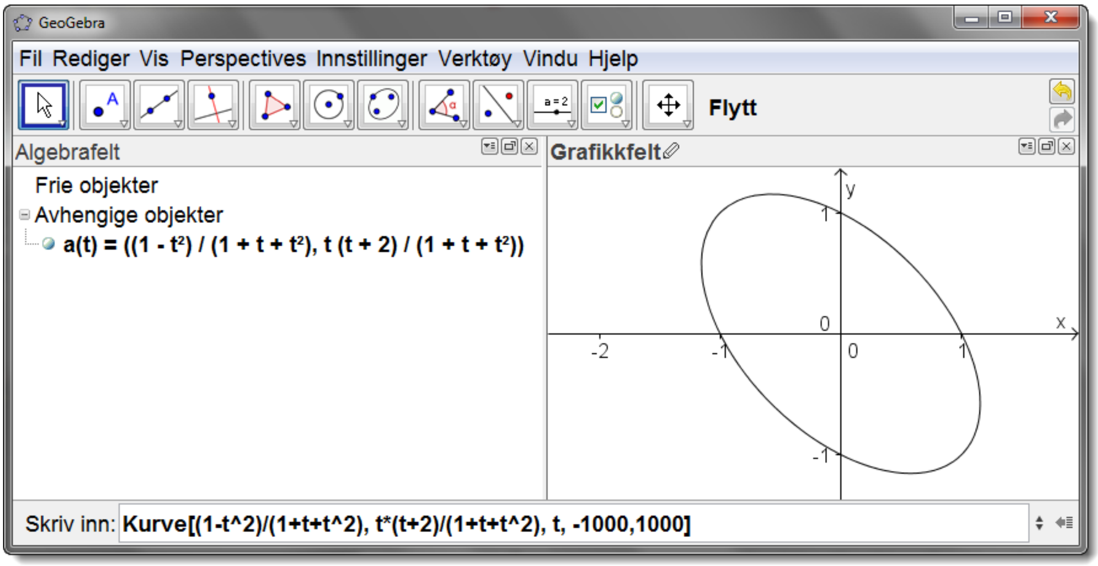
Her får vi et problem med å velge hvilke grenseverdier vi skal sette inn for parameteren t. For å få hele kurva må parameteren går fra $-\infty$ til ∞. Men dette kan vi ikke sette inn når vi skal tegne kurva.

[1] En kusp er en «spiss» på kurven. Det vil si en singularitet der kurven ikke krysser seg selv.

Vi bruker i stedet verdier fra for eksempel -1000 til 1000:

```
Kurve[(1-t^2)/(1+t+t^2), t*(t+2)/(1+t+t^2), t, -1000,1000]
```

Vi får da følgende kurve:



Figur 6.12: Hvilken kurve er dette?

Oppgave 6.14

Plott følgende kurve: $x = \cos(5t) \wedge y = \sin(3t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Oppgave 6.15

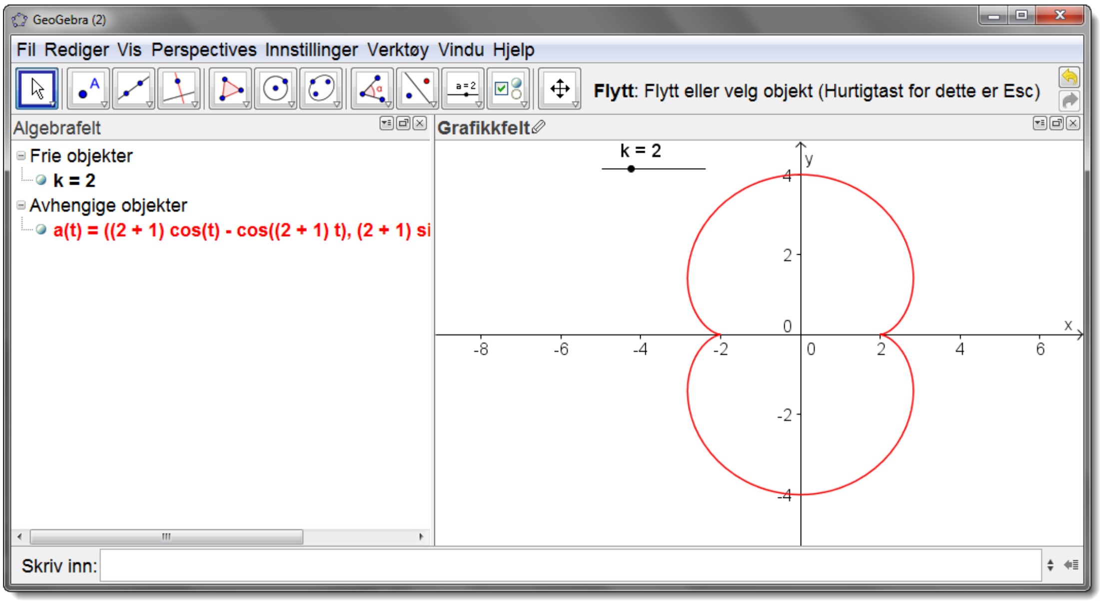
I denne oppgaven skal vi utforske en hel familie av kurver.

a) Lag en glider k som kan variere fra 0 til 7.

b) Plott kurven gitt ved

$$x = (k+1)\cos t - \cos((k+1)t) \wedge y = (k+1)\sin t - \sin((k+1)t)$$

La t variere fra 0 til 300. Når $k = 2$ får vi kurven vist på figur 6.13.



Figur 6.13: To kusper…

c) Varier nå k. Hvor mange kusper får vi når $k = 1$? Hva med $k = 2$? Hva om $k = 6$?

Oppgave 6.16

Tegn følgende to kurver i samme koordinatsystem. La parameteren t gå fra 0 til 50.

$$x = \sqrt{t} \cdot \cos t \quad \wedge \quad y = \sqrt{t} \cdot \sin t$$
$$x = -\sqrt{t} \cdot \cos t \quad \wedge \quad y = -\sqrt{t} \cdot \sin t$$

Oppgave 6.17 — Fermats spiral.

Plott følgende kurve

$$x = r\cos(r^2) \wedge y = r\sin(r^2)$$

velg r mellom -7 og 7.

Eksempel 6.6 — Eksamen REA3022 Matematikk R1, vår 2010.

Posisjonsvektoren til ein partikkel er gitt ved

$$\vec{r}(t) = [t^3 + 3, t + 1] \quad \text{det vil si} \quad \begin{cases} x = t^3 + 3 \\ y = t + 1 \end{cases}$$

a) Tegn grafen til $\vec{r}$ når $t \in [-2, 2]$.

b) Bestem fartsvektoren $\vec{v}(t)$ og akselerasjonsvektoren $\vec{a}(t)$. Marker $\vec{v}(1)$ og $\vec{a}(1)$ på kurven til $\vec{r}$.

c) Finn ved regning det punktet på kurven der $\vec{v}(t)$ er parallell med y-aksen.

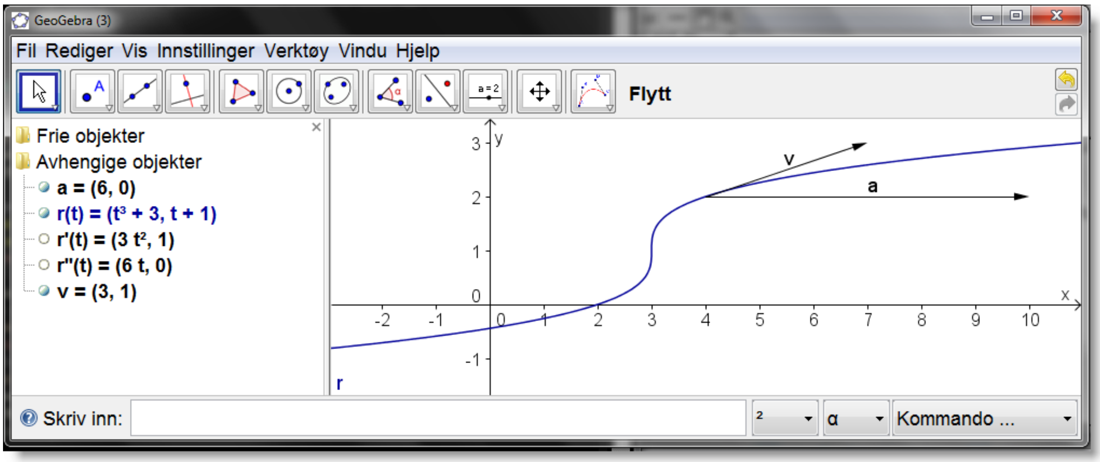
■

Løsning:

a) Vi plotter grafen ved å bruke kommandoen

```
r=Kurve[t^3+3, t+1, t, -2, 2]
```

Vi får da kurven som vist på figur 6.14.



Figur 6.14: Grafen til $\vec{r}(t)$.

b) Vi kan finne fartsvektoren og akselerasjonsvektoren ved å derivere $\vec{r}$. Dette gjør vi i GeoGebra ved å bruke kommandoene

```
Derivert[r]  og  Derivert[r, 2]
```

I figur 6.14 ser du svaret i algebrafeltet. Vi markerer inn $\vec{v}(1)$ ved å skrive inn kommandoen

```
Vektor[r(1), r(1)+r'(1)]
```

Vi får da en vektor som starter i $\vec{r}(1)$ og går til $\vec{r}(1)+\vec{v}(1)$. Merk at det ikke er naturlig å markere inn fartsvektoren i origo.

På samme måte får vi tegnet inn akselerasjonsvektoren ved å skrive inn kommandoen

```
Vektor[r(1), r(1)+r''(1)]
```

c) Denne deloppgaven kan ikke løses med GeoGebra. Her gjelder det bare å finne hvilken t som gir x-koordinaten til $\vec{v}(t)$ lik 0. Dette er når $t = 0$.

6.5 Andre kurver

I GeoGebra 4.0 er det nå mulig å plotte andre kurver enn de som har en parameterframstilling.

I eksempel 6.4 tegnet vi kurven med parameterframstilling $x = t^3$ og $y = t^2$. Vi ser at denne kurven oppfyller likningen $x^2 - y^3 = 0$. Vi trenger ikke å finne parameterframstillingen for å tegne kurven. I GeoGebra kan vi nå bruke kommandoen

```
ImplisittKurve[<f(x,y)>]
```

Det vil si at vi nå kan tegne alle kurver som vi kjenner en likning til, nemlig $f(x,y)=0$. For å plotte kuspen skriver vi med andre ord inn

```
ImplisittKurve[x^3-y^2]
```

Merk at du kan skrive likningen for kurven direkte inn i inntastingsfeltet. Det vil si at vi skriver inn `x^3=y^2` i inntastingsfeltet. Forskjellen er at du med kommandoen `ImplisittKurve[x^3-y^2]` får et avhengig objekt, mens du med `x^3=y^2` får et fritt objekt.

■ **Eksempel 6.7** Tegn kurven som er gitt ved likningen

$$(x^2+y^2-1)^3 = x^2y^3$$

■

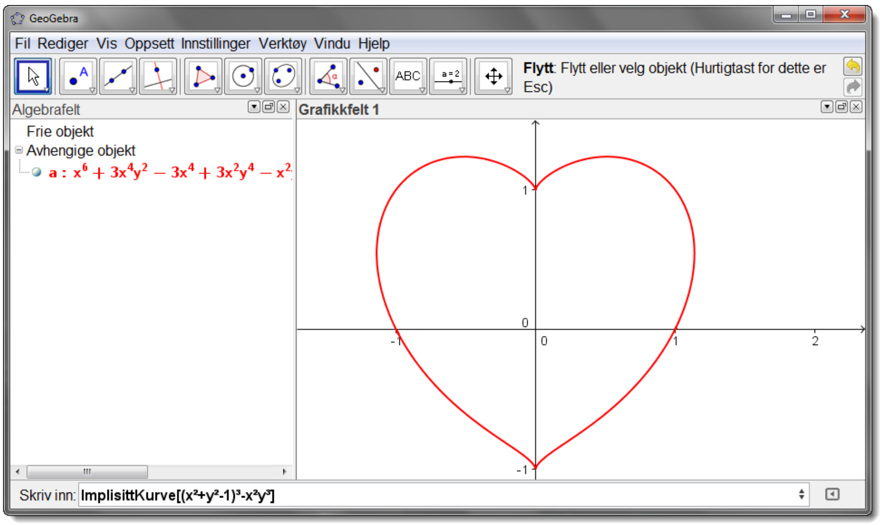
Merk at vi må flytte leddet på høyresiden over på venstresiden og få

$$f(x,y) = (x^2+y^2-1)^3 - x^2y^3 = 0$$

Vi skriver derfor inn kommandoen

```
ImplisittKurve[(x^2+y^2-1)^3-x^2y^3]
```

Vi får da følgende pene kurve:



Figur 6.15: Romantisk matematikk? Merk at vi har endret farge på kurven.

Oppgave 6.18

Tegn følgende kurver:

a) $(x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0$

b) $(x^2+y^2-1)^3 - x^2y^3 = 0$

Oppgave 6.19

Lag to glidere a og b mellom -5 og 5 og tegn ellipsen gitt ved

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

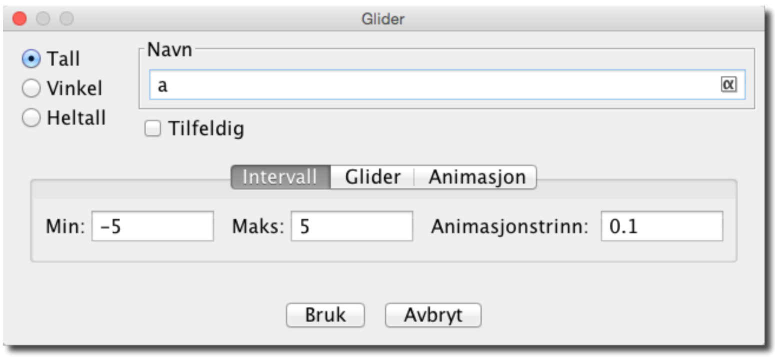
Beskriv hvordan kurven endrer seg når a og b varierer.

7 Verktøy for objekthandlinger

7.1 Glidere

Dersom du vil eksperimentere med ulike verdier som kan variere i et intervall, så er glidere et utmerket verktøy. Du finner dette verktøyet under ikonet på verktøylinjen.

La oss si at vi ønsker å utforske de kvadratiske funksjonene. Vi bruker verktøyet *Glider* og klikker så i grafikkfeltet. Vi vil da få opp følgende vindu:



Her kan vi velge hvilke verdier glideren skal kunne ta. Klikk «Bruk» og gjenta med enda to glidere. Da har vi tre glidere: a, b og c. Vi skriver så inn `f(x)=a*x^2+b*x+c` i inntastingsfeltet.

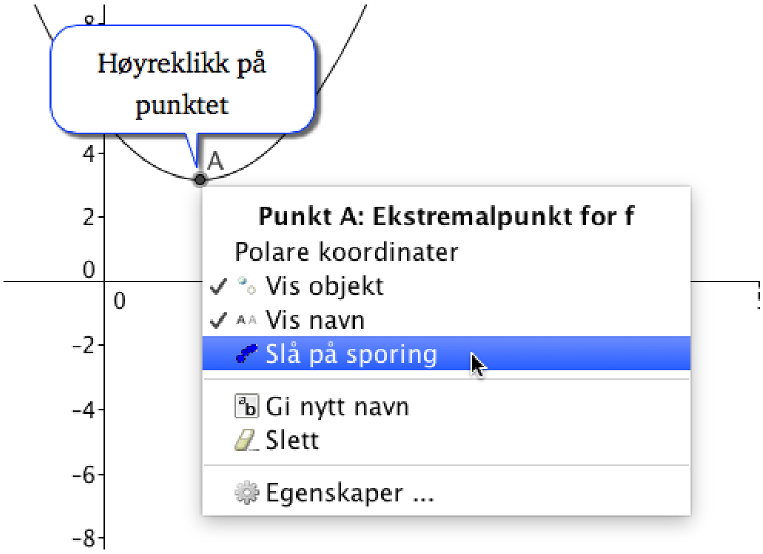
a) Varier a og se hva som skjer. Hvordan ser grafen ut når $a > 0$? Hva om $a < 0$?

b) Varier b og se hvilken effekt det har på grafen.

   1) Grafen har et topp- eller bunnpunkt (når $a \neq 0$). Finn dette ved å bruke kommandoen `Ekstremalpunkt[f]`.

   2) Høyreklikk på topp- eller bunnpunktet og slå på sporing (se figur 7.1). Endre nå på b og se hva som skjer. Kan du forklare/bevise det du ser?

c) Hva skjer når du varierer c?



Figur 7.1: Du kan slå på sporing i GeoGebra. Høyreklikk på punktet og hak av «Slå på sporing».

Oppgave 7.1

Gjør tilsvarende som over med det lineære uttrykket $y = ax + b$.

Oppgave 7.2

Lag to glidere a og b og utforsk hvordan ulike verdier av a og b påvirker grafen til

$$g(x) = \frac{ax - ab + 1}{x - b}$$

Tips! Du må skrive enten `a*x` eller `a x` (mellomrom) og ikke `ax` i GeoGebra, siden programmet vil tolke sistnevnte som en ny variabel. Tilsvarende for ab.

Oppgave 7.3

Utforsk hva som skjer når vi forandrer A, c, φ og d i uttrykket

$$f(x) = A \cdot \sin(cx + \varphi) + d$$

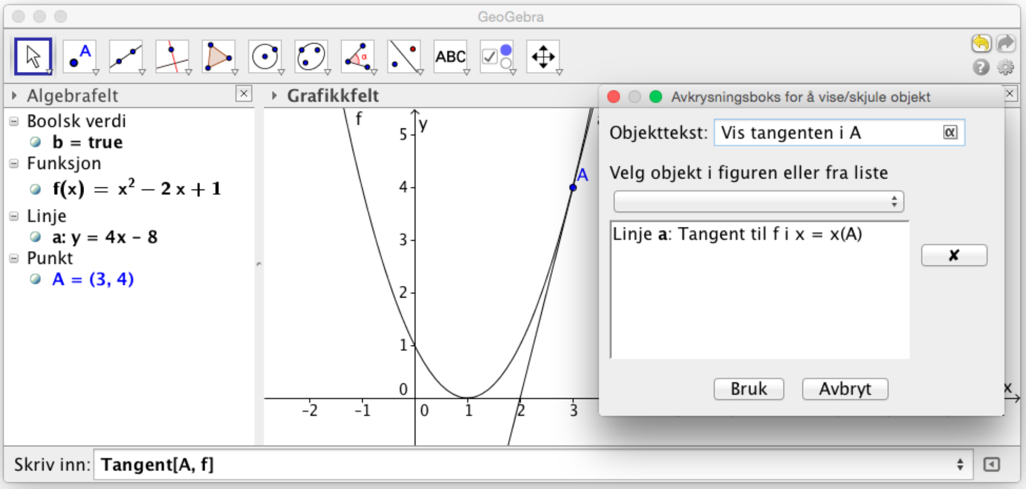
7.2 Avkrysningsboks for å vise og skjule objekt

I GeoGebra kan du lage avkrysningsbokser som du kan klikke i for å vise eller skjule objekter. La oss si at du vil tegne en graf og et punkt på grafen. Du ønsker så å velge om du vil vise tangenten i punktet eller ikke. Dette kan du gjøre på følgende måte.

1 Tegn grafen og et punkt på grafen. I dette eksempelet tegner vi inn grafen til $f(x) = x^2 - 2x + 1$ og lager et punkt A på grafen (samme hvor).

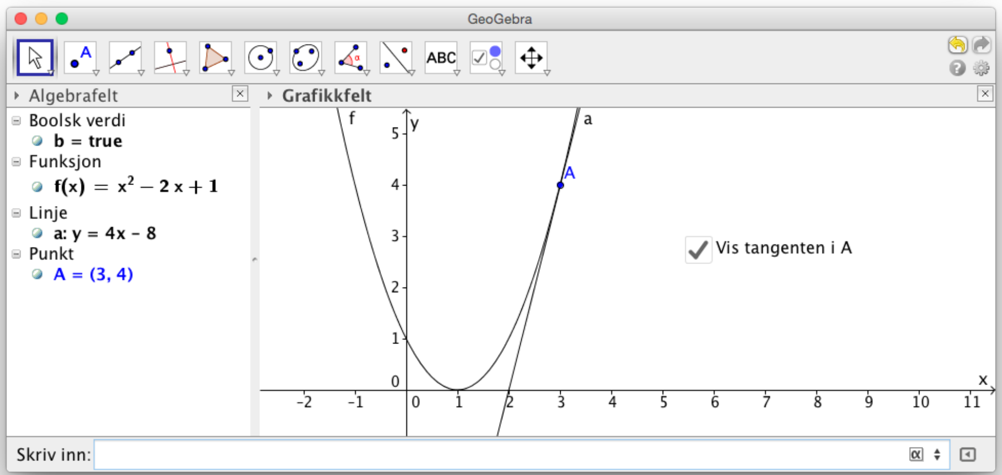
2 Tegn så inn tangenten til grafen i punktet A ved å skrive inn kommandoen `Tangent[A,f]`.

3 Vi ønsker nå en avkrysningsboks som fungerer slik at tangenten er synlig kun dersom vi har krysset av i boksen. Velg verktøyet *Avkrysningsboks for å vise og skjule objekt* . Du finner denne under samme meny som glidere. Klikk så der hvor du ønsker å plassere boksen. Du vil da få opp et vindu som vist på figur 7.2.



Figur 7.2: Avkrysningsboks for å vise og skjule objekt. I dette tilfellet vil vi skule/vise tangenten til f i A.

Merk at du kan enten velge hvilket objekt som skal vises/skjules ved å velge det fra nedtrekslisten eller ved å klikke på objektet i algebrafeltet eller grafikkfeltet. Skriv inn ønsket tekst som skal stå ved siden av avkrysningsboksen og klikk på «Bruk».



Figur 7.3: Avkrysningsboksen er haket av og tangenten vises!

Oppgave 7.4

Plott grafen til funksjonen $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ og lag en avkrysningsboks som viser/skjuler topp- og bunnpunktet til funksjonen.

7.3 Sett inn et tekstfelt

Noen ganger kan det være greit om vi raskt kan omdefinere et objekt uten å dobbeltklikke eller høyreklikke på objektet i algebrafeltet.

La oss si at vi ønsker at elevene skal finne funksjonsuttrykket til en lineær funksjon som går gjennom to gitte punkt. Det ville da være ok om vi lett kunne skrive inn funksjonsuttrykket uten å måtte lage et nytt objekt (som ville ha skjedd dersom vi hadde skrevet inn funksjonsuttrykket i inntastingsfeltet).

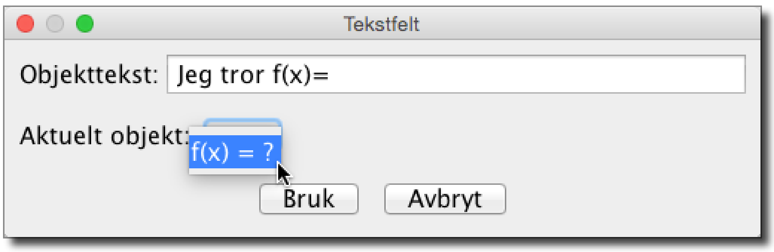
Vi kan gjøre dette på følgende måte:

1 Tegn to punkt i grafikkfeltet.

2 Skriv i inntastingsfeltet `f(x)=?`.

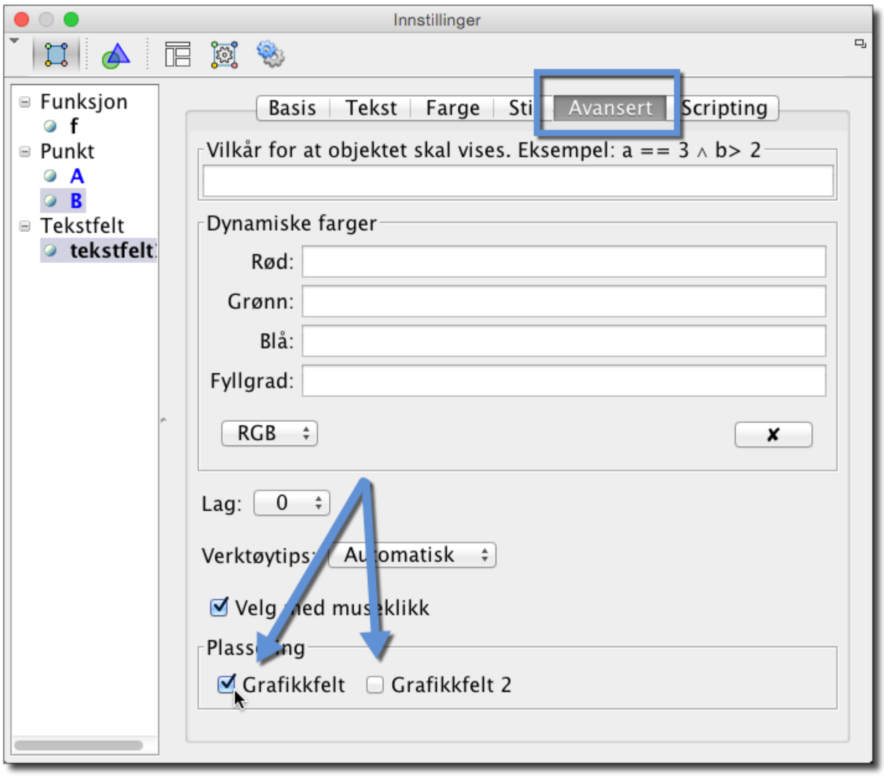
3 Velg så verktøyet *Sett inn tekstfelt* og klikk der hvor du ønsker å plassere dette feltet. Her kan det være en god idé å klikke i Grafikkfelt 2. På den måten vil du være garantert at linjene som du tegner inn ikke vil gå over tekstfeltet. Dersom dette grafikkfeltet ikke vises, så kan du få dette fram ved å hake det av under «Vis» på menylinjen. Du kan plassere dette feltet der du måtte ønske ved å dra i den øverste delen av feltet.

   Når du har klikket der hvor du ønsker å plassere tekstfeltet, vil du få opp et vindu hvor du kan skrive objekttekst og hvilket objekt du vil linke det til. I dette tilfellet skriver vi inn objektteksten «Jeg tror f(x)=» og linker det til `f(x)=?`.

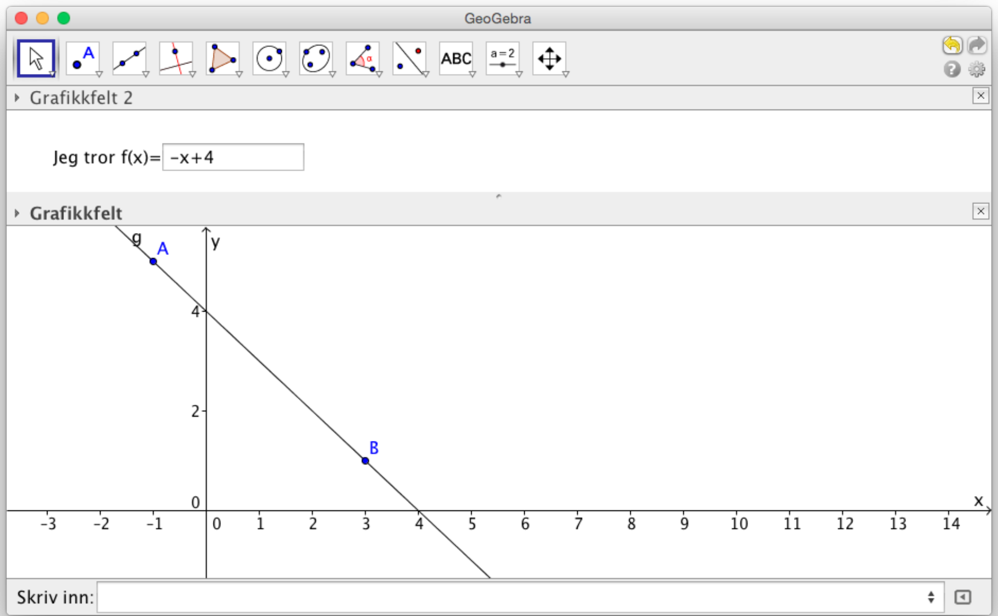


Figur 7.4: Tekstfelt omdefinerer $f(x)$ med det som skrives inn i tekstfeltet.

Merk: Dersom linjen blir tegnet i Grafikkfelt 2 må du høyreklikke på linjen og velge «egenskaper. . . » og «avansert». Nederst i dette vinduet kan du da sette hvilket grafikkfelt du ønsker at linjen skal vises i. Det kan da se ut som vist på figur 7.6.



Figur 7.5: Du kan velge hvilket grafikkfelt du ønsker at et objekt skal plasseres i under «egenskaper» og «Avansert». Merk at avkrysningsboksene nederst kun er synlige dersom du viser begge grafikkfeltene.



Figur 7.6: Funksjonen går gjennom punktene!

7.4 Sett inn en knapp

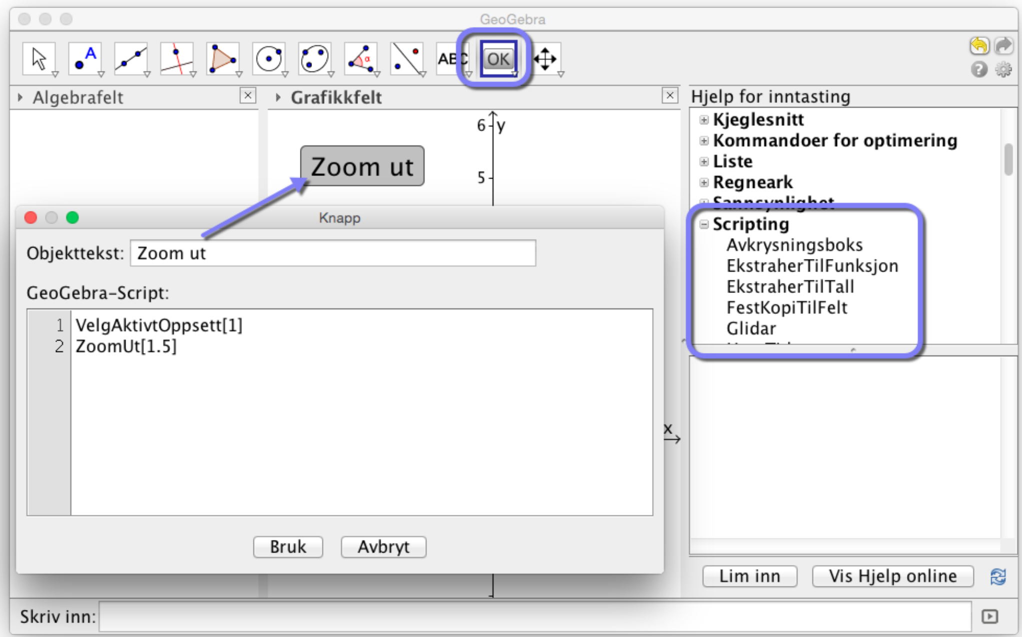
Med verktøyet *Sett inn en knapp* OK kan du sette inn en knapp. Med denne kan du få GeoGebra til å kjøre en sekvens av kommandoer når knappen blir klikket. Vi tar med noen eksempler som viser hvordan dette fungerer.

■ **Eksempel 7.1** Lag en knapp som zoomer ut grafikkfeltet.

Løsning:
Velg verktøyet *Sett inn en knapp* OK (samme gruppe som glider) og klikk i grafikkfeltet der hvor du ønsker at knappen skal være. I dette eksempelet vil vi plassere den i Grafikkfelt 2. Du vil da få opp et vindu. I dette skriver vi teksten vi vil skal stå på knappen (Zoom ut) under «Objekttekst». I det store feltet har vi skrevet inn

```
VelgAktivtOppsett[1]
ZoomUt[1.5]
```

Poenget med slike GeoGebra-Script (som de kalles) er at du skriver inn et sett med GeoGebra-kommandoer (akkurat som du ville ha gjort i Inntastingsfeltet). Når vi så klikker på knappen, vil disse kommandoene bli kjørt i den rekkefølgen de er listet opp i. På første linje har vi skrevet inn `VelgAktivtOppsett[1]`. Denne kommandoen forteller at kommandoene som er listet opp under skal gjelde Grafikkfelt 1. Hadde vi ikke skrevet inn dette ville grafikkfeltet som knappen er plassert i blitt zoomet ut. Virkningen av kommandoen `ZoomUt[1.5]` vil derfor være at grafikkfelt 1 zoomes ut med en faktor 1,5.



Figur 7.7: Når du klikker på knappen vil du Zoome ut med en faktor 1,5

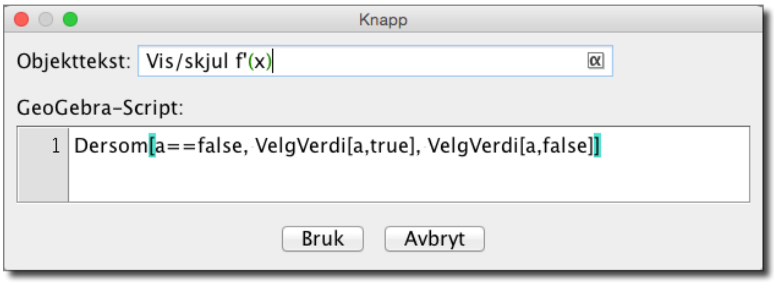
■

Oppgave 7.5
Lag en knapp som zoomer inn med en faktor lik 1,5

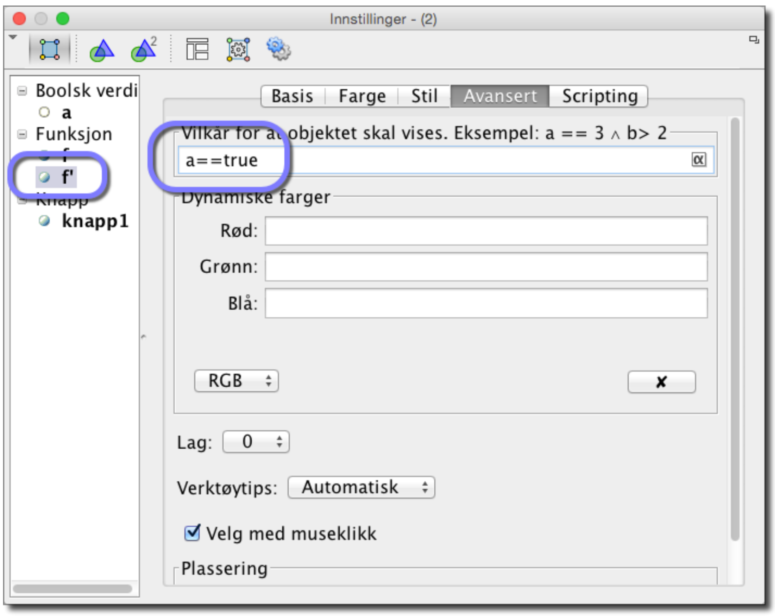
■ **Eksempel 7.2** Tegn grafen til funksjonen $f(x) = x^4 + x^3 - 1$ og lag en knapp som viser eller skjuler grafens deriverte.

Løsning:
Vi skriver inn funksjonen i inntastingsfeltet og finner den deriverte ved å skrive inn `f'(x)`. Siden vi vil at knappen skal veksle mellom å vise og skjule den deriverte trenger vi et vilkår som bestemmer når den derivere skal vises og når den ikke skal vises. En måte å gjøre dette på er å skrive inn `a=false` i inntastingfeltet. Velg så *Sett inn en knapp* OK og klikk i grafikkfelt 2 der du ønsker å plassere knappen.

I vinduet som du da får opp skriver du inn følgende:



Denne knappen vil nå skifte a fra sann til falsk (eller motsatt). For at dette skal få ønsket effekt må vi nå høyreklikke på den deriverte, velge egenskaper og avansert



Figur 7.8: Den deriverte blir vist kun dersom a er sann.

■

Foruten alle de vanlige kommandoene vi kan bruke, fins det også en god del kommandoer som er listet under kategorien «Scripting» i «Hjelp for inntastning».

Oppgave 7.6

Lag en knapp som viser/skjuler navnet til et punkt A.

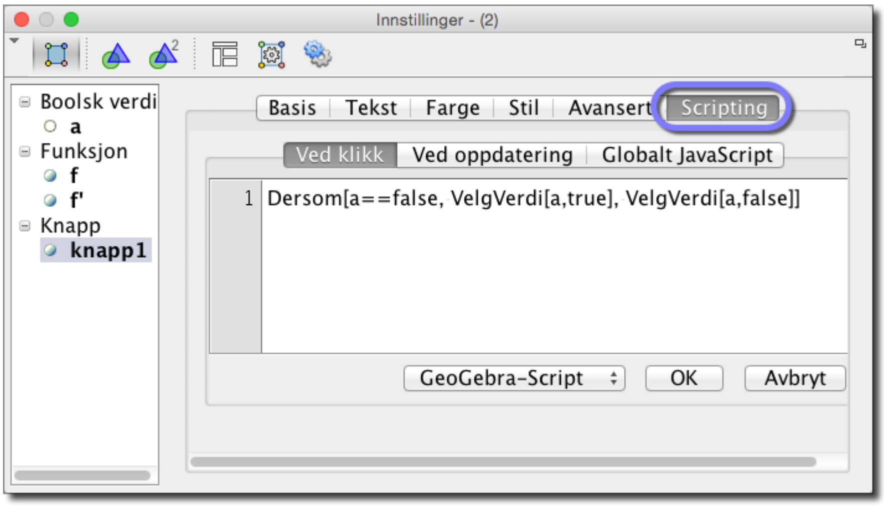
Oppgave 7.7

Lag en knapp som gir et tilfeldig tall mellom 1 og 6.

Oppgave 7.8

Legg inn bildene fra `http://tinyurl.com/terninger` inn i grafikkfeltet og lag en knapp som viser et tilfeldig bilde når du klikker på knappen.

Dersom du har laget en knapp med et GeoGebra-Script og så senere ønsker å endre på GeoGebra-Scriptet, så kan du gjøre dette ved å høyreklikke på knappen og velge «egenskaper». I vinduet du da får opp finner du en flik med navnet «Scripting». Her kan du redigere GeoGebra-Scriptet som vist på figur 7.9.

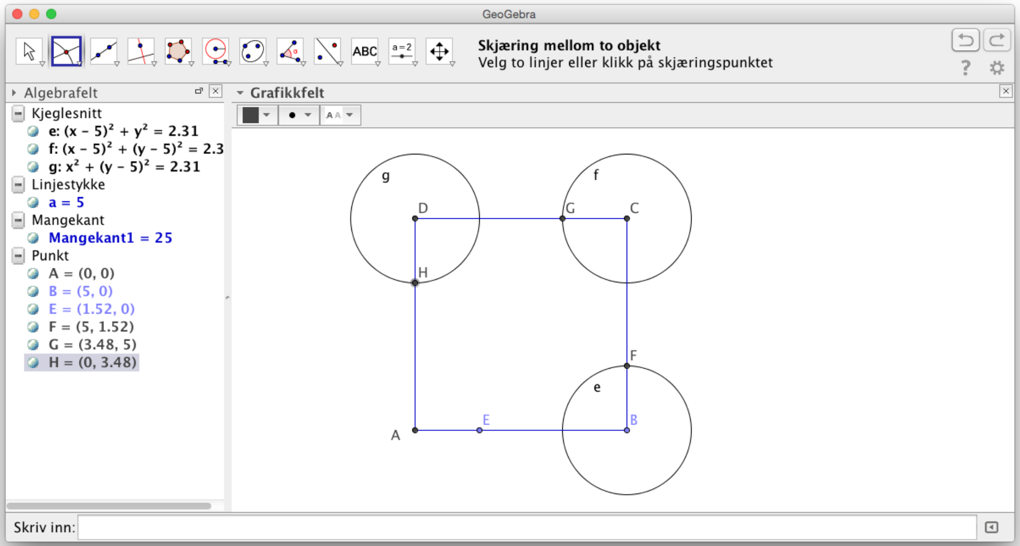


Figur 7.9: Du kan endre GeoGebra-Scriptet ved å høyre-klikke å knappen og velge fliken «Scripting»

7.5 Eksempel på animasjon

Vi avslutter dette kapitlet ved å vise et litt mer avansert eksempel hvor vi lager en animasjon til et av bevisene til Pytagoras setning.

1. Lag et kvadrat $ABCD$ ved å bruke verktøyet *Regulær mangegant* .
2. Lag et punkt E på AB.
3. Velg verktøyet *Passer* og klikk på A og deretter på E. Du får da en sirkel med radius AE. Klikk på B for å tegne sirkelen med sentrum i B. Klikk på denne sirkelen en gang og deretter på C. Gjenta dette, men klikk på D. Du får da noe som ser slik ut:

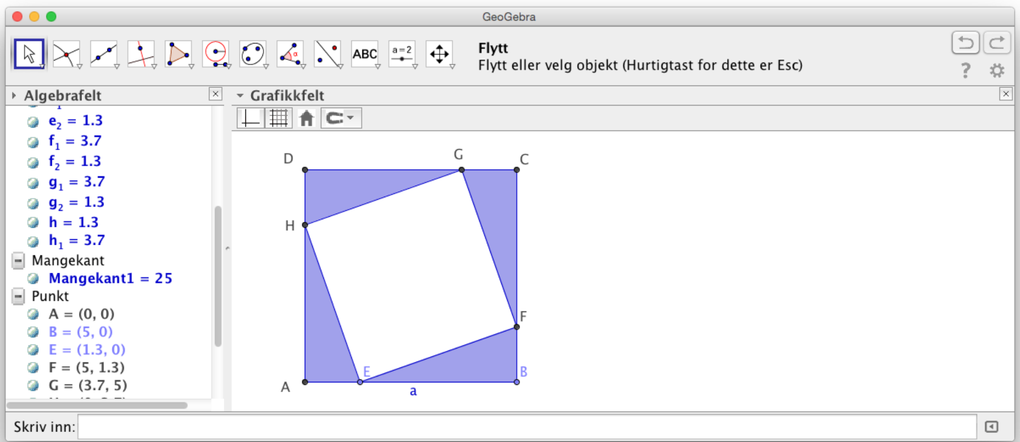


4. Velg verktøyet *Skjæring mellom to objekt* og klikk for å få skjæringspunkta F, G og H som vist på figuren over.

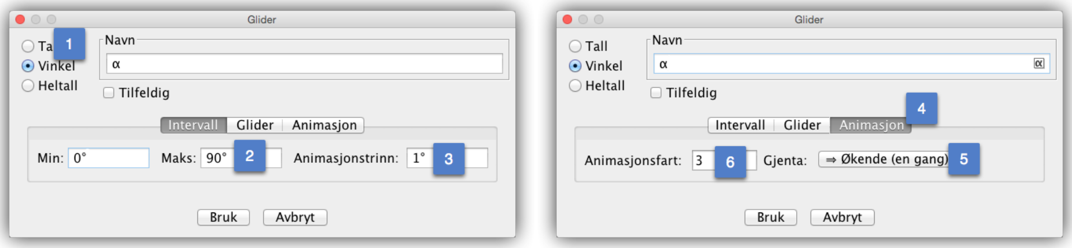
5. Skjul sirklene, enten ved å høyrklikke på dem og hak vek «Vis objekt» eller ved å klikke på kulen i algebrafeltet **e: (x − 5)² + y² = 3.534**.

Flytt litt på E og se hva som skjer! Om du har gjort alt korrekt, skal punkta F, G og H flytte seg tilsvarende i kvadratet.

6. Tegn nå inn følgende mangekanter, ved å bruke verktøyet *Mangekant* : $\triangle AEH$, $\triangle BFE$, $\triangle CGF$ og $\triangle DHG$.



7. Lag en glider. Hak av for vinkel (1), velg Maks til å være 90° (2) og animasjonstrinn lik 1° (3). Klikk på på fliken «Animasjonstrinn» (4) og velg animasjonsfarten til å være 3 og velg «⇒ Økende (en gang)» (5). Se figur 7.10.



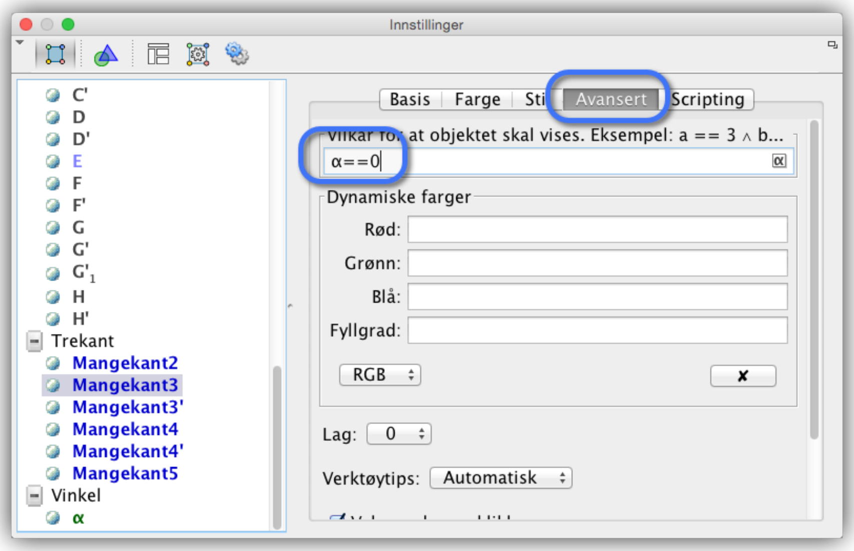
Figur 7.10: Noen tilpassninger av glideren

8. Dersom $\triangle FCG$ heter Mangekant3 og $\triangle GDH$ heter Mangekant4 kjører du følgende kommandoer i inntastingsfeltet:

   Roter[Mangekant3, α, F]
   Roter[Mangekant4, $-\alpha$, H]

   Du vil da få rotert disse to trekantene en vinkel α i henholdsvis positiv og negativ retning.

9. Høyreklikk på Mangekant3, velg Egenskaper. Under Avansert-fliken skriver du inn vikåret $alpha == 0$ som vist på figuren nedenfor.



   Gjør tilsvarende for Mangekant4.

10. Høyreklikk på Mangekant3' (den roterte trekanten) og skriv inn følgende vilkår for at objektet skal vises: $\alpha > 0$. Gjør tilsvarende for Mangekant4'.

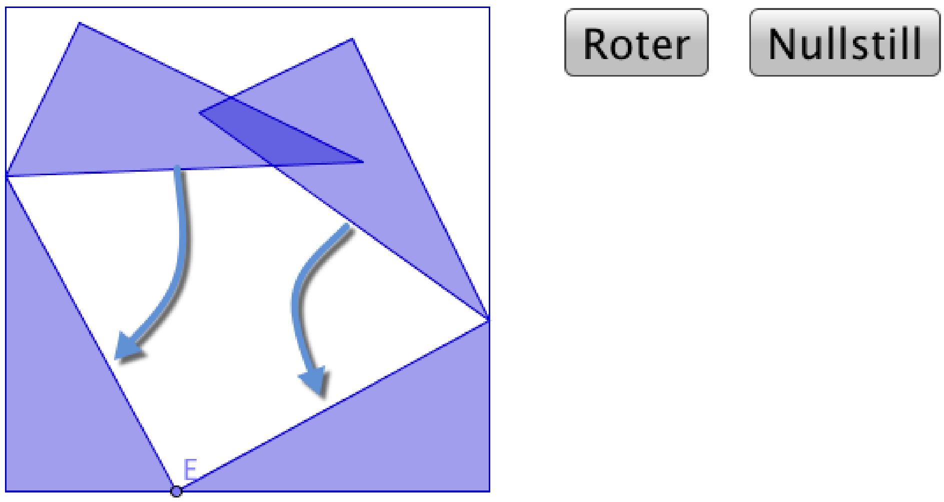
11. Lag en knapp med navn Roter. Skriv inn følgende skript på denne knappen:

    StartAnimasjon[α]

    Når du klikke på denne knappen, vil glideren α starte.

12. Lag en ny knapp som du kaller «Nullstill». Skriv inn $\alpha = 0$ som GeoGebra-script og klikk «Bruk».

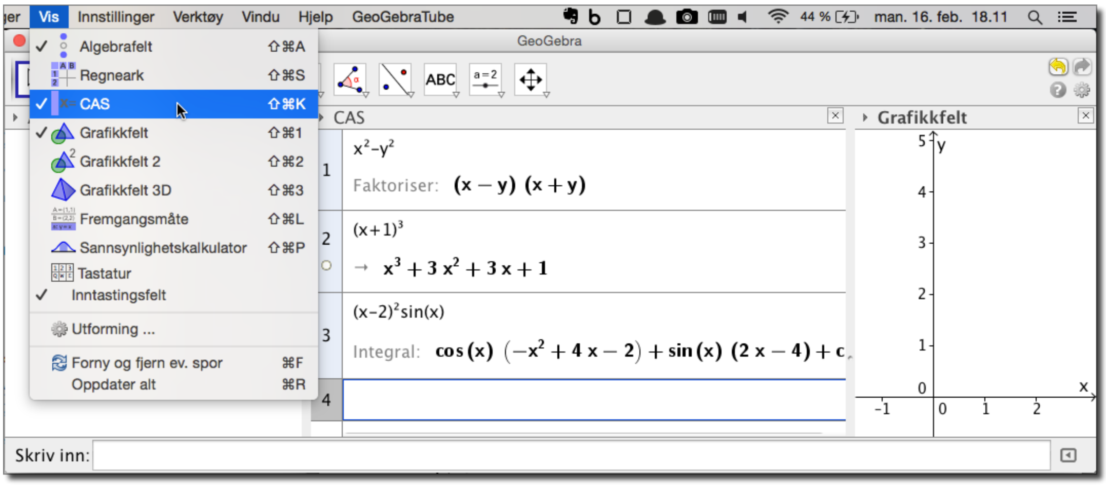
13. Rydd opp i figuren ved å skjule navn på objekter og ved å skjule passende linjestykker. Skjul også glideren α. Du har da fått en animasjon som kan brukes i samtale om hvorfor Pytagoras setning alltid gjelder ved å betrakte arealet til det hvite området inne i kvadratet.



8 CAS i GeoGebra

CAS står for Computer Algebra System og er en betegnelse for programvare som kan gjøre symbolske manipuleringer. Eksempler på slike manipuleringer er å løse likninger med rotutdragning (eksakte verdier), faktorisering av polynomer, integrering og derivering, beregning av summer osv.

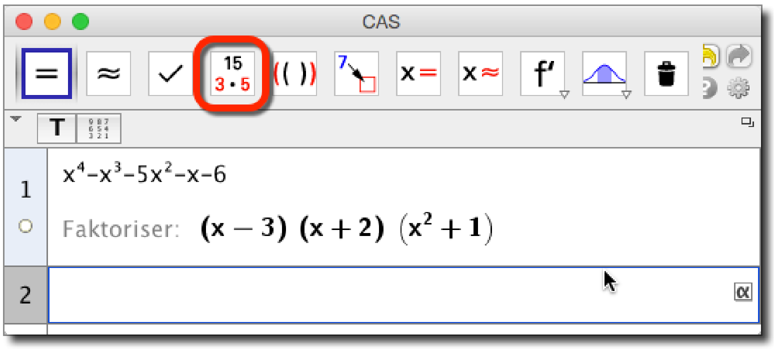
I GeoGebra finner du CAS ved å hake av for dette under «Vis» på menylinjen:



8.1 Verktøylinjen i CAS

■ **Eksempel 8.1** Faktoriser polynomet $x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$.

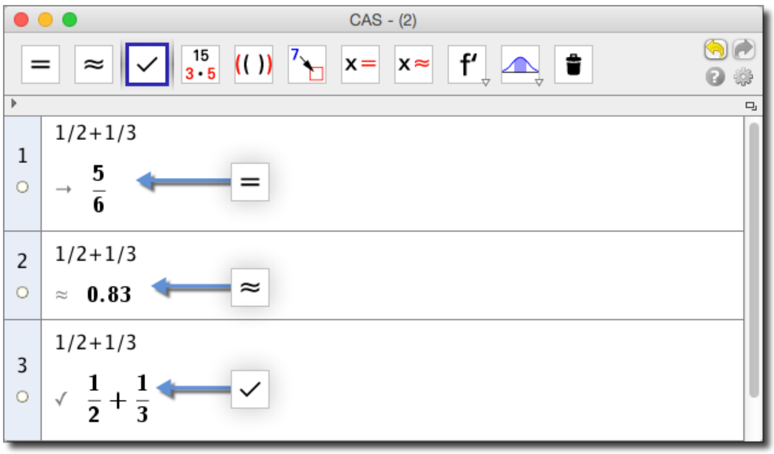
Løsning:
Vi skriver polynomet inn i CAS og trykker på *Faktoriser*-verktøyet på verktøylinjen. Vi får da følgende resultat:



Figur 8.1: Faktorisering kan lett gjøres ved å skrive inn uttrykket og så klikke på verktøyet for faktorisering.

∎

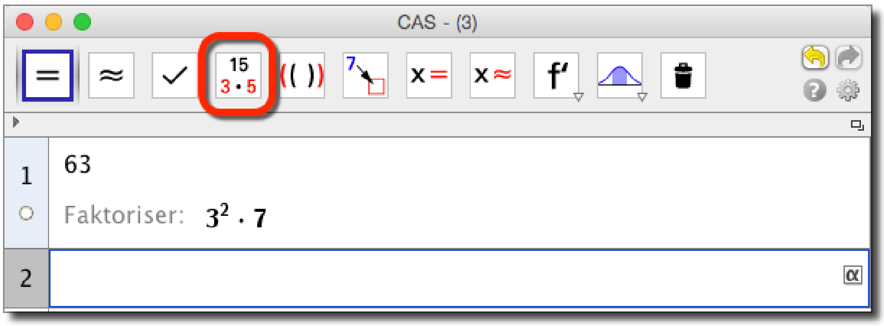
I eksempel 8.1 brukte vi ett av de åtte CAS-spesifikke verktøyene som vi har. Det første verktøyet er *Regn ut* $\boxed{=}$. Med dette vertøyet blir uttrykk evaluert og regnet ut eksakt. Skriver du for eksempel inn `1/2+1/3` og klikker så på $\boxed{=}$ vil du få $\frac{5}{6}$ som svar. Tilsvarende vil du få 0,8333 som svar dersom du klikker på *Numerisk* $\boxed{\approx}$. Klikker du på *Bruk inntasting* $\boxed{\checkmark}$ vil det ikke bli gjort noe med uttrykket du har skrevet inn. I eksempelet med `1/2+1/3` vil vi få $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ som svar.



Figur 8.2: Du får ulike output alt etter som hvilket verktøy som er valgt.

Merk at du kan enten skrive inn uttrykket og så klikke på ett av disse verktøyene beskrevet over eller du kan aktivere verktøyet, skrive inn uttrykket og så trykke <enter>. Har du for eksempel aktivert *Numerisk* og skriver inn `4/7` vil du få 0,5714 som svar.

Neste verktøy på verktøylinjen er *Faktoriser* $\boxed{\substack{15\\3\cdot 5}}$. I eksempel 8.1 brukte vi dette til å faktorisere et polynom. Du kan selvsagt også bruke dette til å faktorisere hele tall.

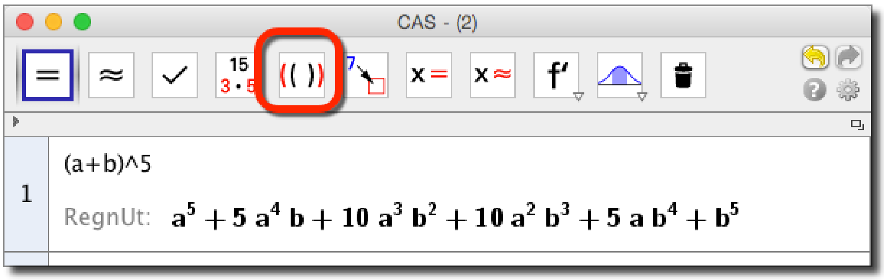


Figur 8.3: Faktorisering av hele tall i GeoGebra.

Går vi ett hakk til høyre på verktøylinja finner vi verktøyet *Utvid* (( )). Vi bruker dette til å be GeoGebra om å multiplisere ut parenteser etc.

■ **Eksempel 8.2** Gang ut $(a+b)^5$

Løsning:
Vi skriver inn `(a+b)^5` og klikker på (( )):



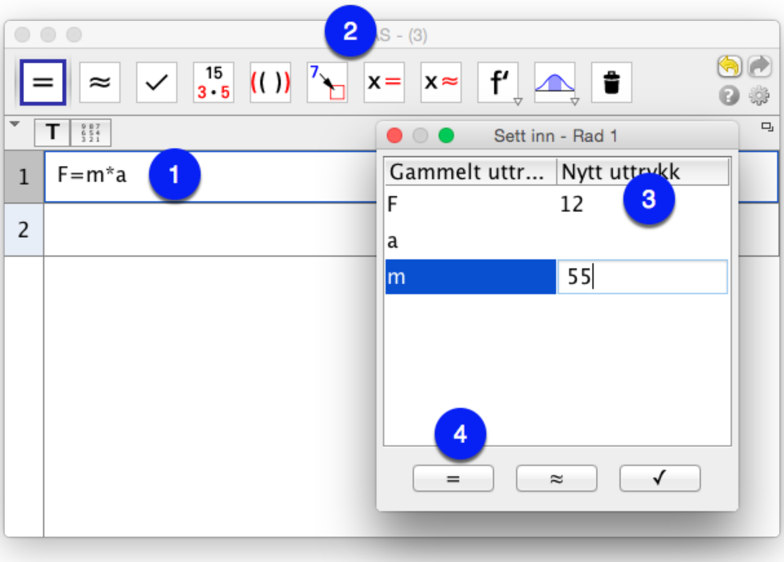
■

Merk at verktøyet *Utvid* har nesten samme effekt som *RegnUt* når vi skriver inn enkle uttrykk som i eksempelet over. Men om vi for eksempel gir en kommando som `Derivert[(x-3)^3]` og klikke på = (eller enter), så får vi noe annet enn om vi skriver inn kommendoen og trykker på (( )).

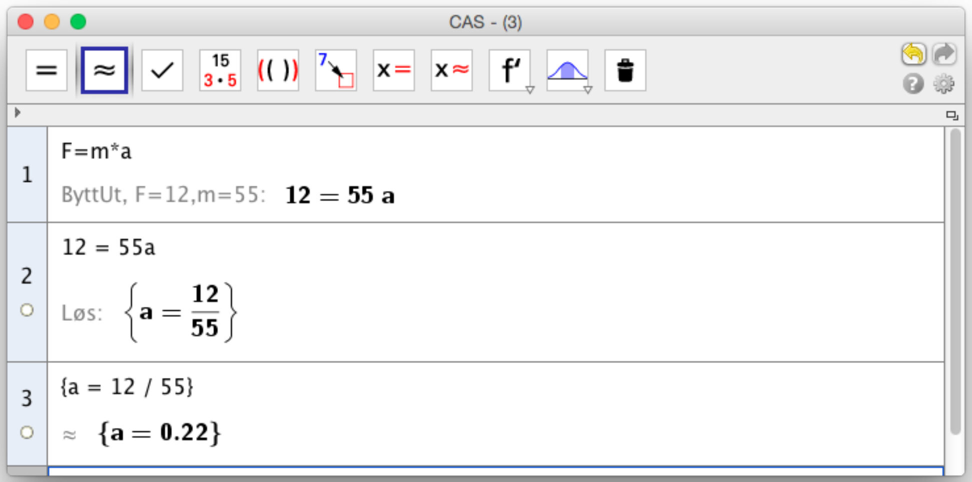
Neste verktøy er *Sett inn*. Med dette kan du erstatte én eller flere variable med andre variable eller tall.

■ **Eksempel 8.3** Skriv inn formelen $F = m \cdot a$ i CAS finn a når $F = 12$ og $m = 55$.

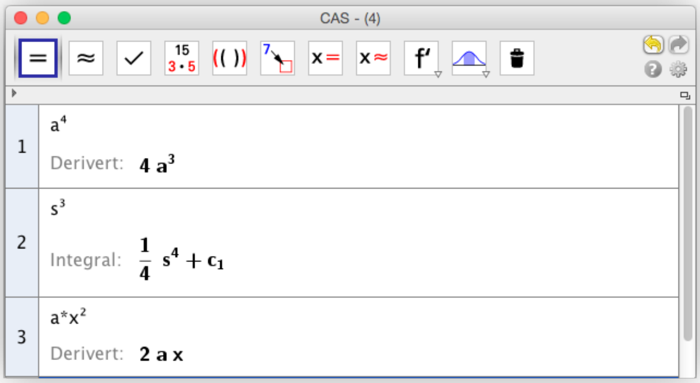
Løsning:
Vi skriver inn `F=m*a` og klikker på . Vi får da opp et vindu der vi kan skrive inn de ønskede substitusjonene:



Klikker vi på [=] får vi svaret $12 = 55a$. Vi løser denne likningen ved å bruke verktøyet *Løs* [x=]. For å bruke dette må vi hente opp forrige output og så klikke på [x=]. Du kan lett kopiere inn siste output ved å trykke på space-baren på tastaturet. Klikk deretter på [x=] (*Løs*) og får $a = \frac{12}{55}$. Dersom vi ønsker desimaltall trykker vi på mellomromstasten en gang til og så på [≈].



Helt til høyre på verktøylinja ligger det to verktøy: *Derivert* [∂] og *Integral* [∫]. For å bruke disse er det bare til å skrive inn et uttrykk og klikke på verktøyet. Uttrykket du skriver inn behøver ikke å være et uttrykk i x. Men dersom du skriver inn a^4b^2, så vil GeoGebra derivere med hensyn på a. Mer generelt, så vil GeoGebra derivere/integrere med hensyn på den første av varbiablene i lista $x, y, z, a, b, \ldots v, w$ som er uttrykket inneholder.



■

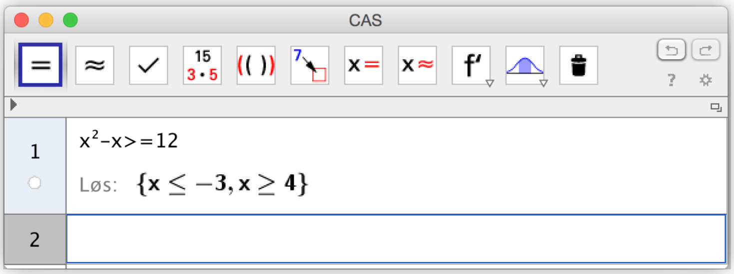
Du kan også løse ulikheter i GeoGebra CAS. Du kan da bruke x= på samme måte som for løsning av likninger.

■ **Eksempel 8.4** Løs ulikheten

$$x^2 - x \geq 12$$

Løsning:

Skriv inn likningen i GeoGebra CAS og trykk på x=. Vi ser at løsningen er alle x slik at $\{x \leq -3, x \geq 4\}$. Det vil si alle $x \in \langle \leftarrow, -3] \cup [4, \rightarrow \rangle$.



■

Oppgave 8.1

Bruk CAS til å regne ut

a) $\dfrac{12^2}{\sqrt{9}}$

b) $\sqrt{14} - \sqrt{16 - 4\sqrt{7}}$

c) $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$

Tips! Du kan få $\sqrt{\ }$ ved å bruker tastekombinasjonen Ctrl + r (Mac) eller Alt + r (Windows). Husk å bruke parenteser rundt alt du vil ta kvadratroten av.

Oppgave 8.2
Gang ut: $(a+b+c)^3$.

Oppgave 8.3
Finn de eksakte røtten til likningen $x^3+8x^2-2x-16=0$

Oppgave 8.4
Deriver funksjonen $f(x)=x^4\ln(x)$.

Oppgave 8.5
Finn integralet $\displaystyle\int x^4\cdot\sin(2x)\,\mathrm{d}x$

Oppgave 8.6
Løs ulikhetene

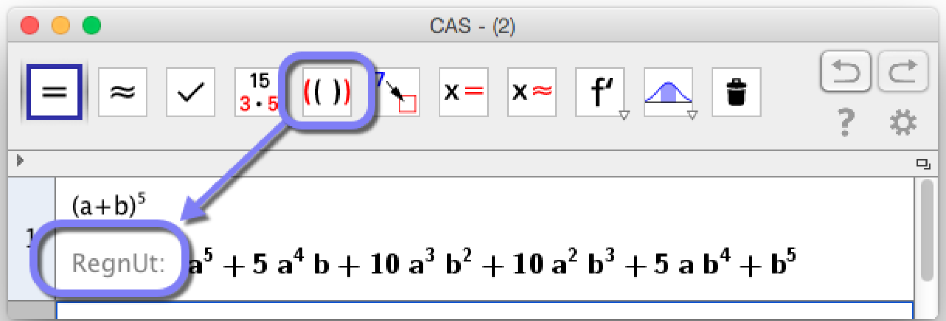
a) $x^2-4<0$

b) $3^x>4$

c) $\dfrac{x-2}{x^2-1}$

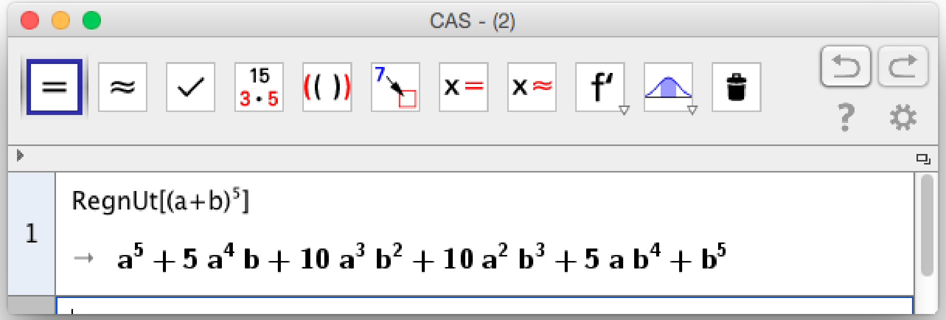
8.2 CAS-kommandoer

Vi har så langt sett hvordan vi kan bruke CAS-verktøyene til å utføre ulike operasjoner på uttrykk. Dersom vi kikker godt etter, ser vi at til de fleste verktøyene har en tilhørende kommando. Når vi utvidet $(a+b)^5$ ved å bruke *Utvid* ser vi at dette verktøyet kjører kommandoen `RegnUt`.



Figur 8.4: Verktøyet *Utvid* kjører kommandoen `RegnUt`

I stedet for å bruke verktøyet *Utvid* kunne vi med andre ord kjørt kommandoen `RegnUt` direkte:



Figur 8.5: Du kan utvide parenteser ved å direkte bruke kommandoen `RegnUt`

Det fins godt over 100 slike kommandoer i GeoGebra og du finner dem alle på nettsiden `http://wiki.geogebra.org/nb/CAS_Spesielle_kommandoer`.

Eksempel 8.5 Faktoriser polynomet $2x^3+3x^2-32x+15$.

Løsning:
Vi skriver inn `Faktoriser[2x^3+3x^2-32x+15]` og trykker enter. Vi får at

$$2x^3+3x^2-32x+15 = (2x-1)(x+5)(x-3)$$

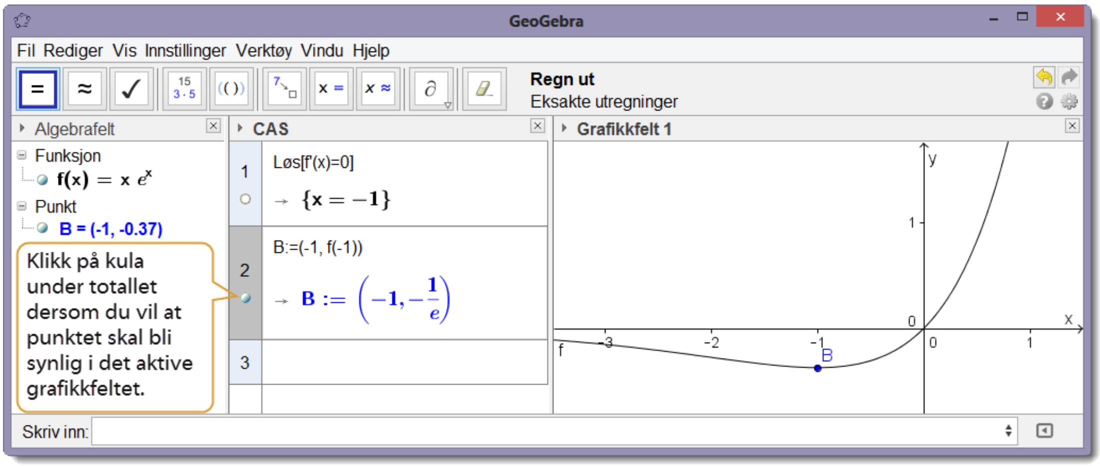
Eksempel 8.6 Finn eventuelle topp- eller bunnpunkter til grafen til $f(x) = xe^x$.

Løsning:
Vi kan definere en funksjon i CAS ved å skrive inn

```
f(x):=x*e^x
```

Vi bruker kolon foran likhetstegnet når vi definerer en funksjon i CAS. Du kan selvsagt også definere funksjonen på vanlig måte i inntastingsfeltet før du jobber videre med den i CAS. I så tilfelle skriver du kun inn `f(x)=x*e^x` i inntastingsfeltet.

Når funksjonen er definert kan vi skrive inn `Løs[f'(x)=0]` og får $x = -1$ som svar. Det neste vi vil gjøre er å finne punktet på grafen. Siden vi allerede har definert $f(x)$ kan vi nå skrive inn $f(-1)$ og få at bunnpunktet er $(-1,-1/e)$.



Figur 8.6: Vi har funnet eksakte verdier med CAS.

Oppgave 8.7

Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} 2y - x^2 + 2x &= a \\ y - 2x &= 3 \end{aligned}$$

For hvilke verdier har systemet

- én løsning
- to løsninger
- ingen løsninger

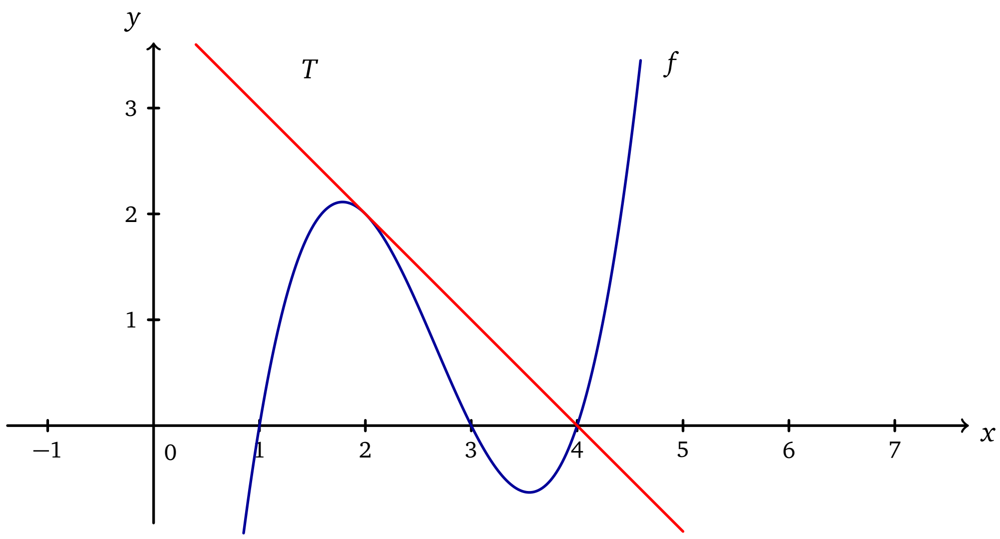
8.3 Litt mer om input og output

Når vi skal løse litt større oppgaver, slik som den i eksempel 8.7 er det viktig å få en god arbeidsflyt. Vi har tidligere nevnt at det er unødvendig å skrive opp uttrykk manuelt dersom vi allerede har regnet dem ut i CAS. Her er noen nyttige tips:

- Likhetstegn (=) vil skrive inn forrige input
- Mellomromstast vil skrive inn forrige output
- Høyreparentes) vil skrive inn forrige output med parenteser rundt.
- Du kan referere til forrige output ved å skrive enten $ (for dynamisk output) eller # (for statisk output). Tilsvarende kan du referere til output på rad n ved å skrive $n (for dynamisk output) og #n (for dynamisk output. Forskjellen på disse to er dersom du går inn og endrer på en verdi slik at output på rad n endres, så vil du også få endring i raden du skrev $n i mens du vil beholde den gamle verdien fra rad n dersom du skrev #n.

■ **Eksempel 8.7** La f være en tredjegradsfunksjon som har tre nullpunkt a, b og c. La T være tangenten til f i $d = \dfrac{a+b}{2}$. Hva kan du si om denne tangenten? ■

Løsning:
Før vi går i gang med selve løsningen i CAS kan det være en ide å utforske problemet litt. Vi kan for eksempel se på funksjonen $f(x) = (x-1)(x-3)(x-4)$. I dette tilfellet blir $d = 2$ og vi kan tegne og finne tangenten ved å skrive inn kommandoen `Tangent[2,f]` i inntastingsfeltet.



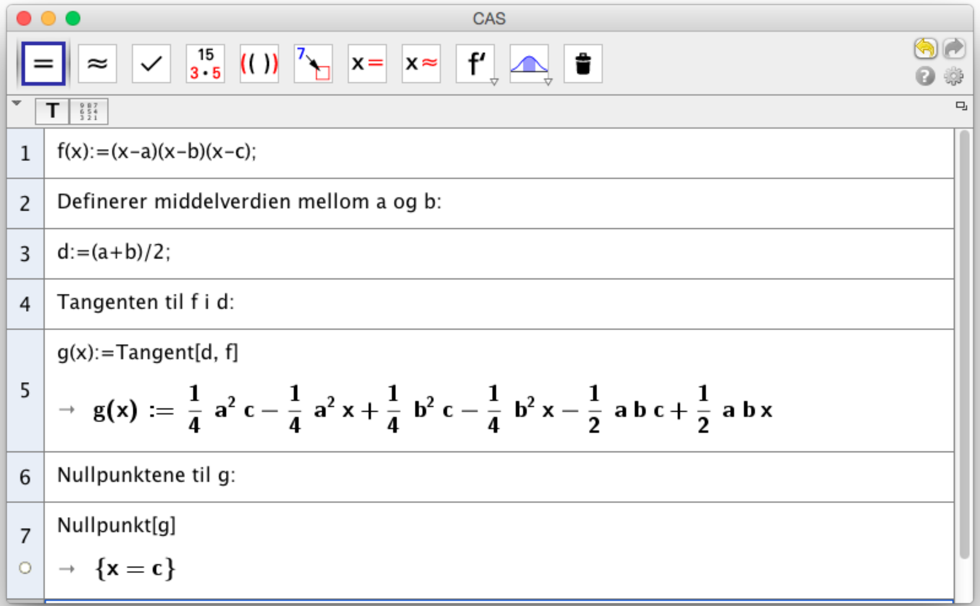
Ut fra denne figuren får vi en mistanke om at tangenten vil gå gjennom det tredje nullpunktet. Vi ønsker derfor å bevise dette ved å bruke et CAS!

Det første vi gjør er å definere funksjonen ved å skrive inn

```
f(x):=(x-a)(x-b)(x-c)
```

Vi kan finne tangenten i $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ ved å bruke ettpunktsformelen. Vi kan også bruke kommandoen `Tangent[<x-verdi>,<funksjon>]`. Resultatet blir det samme.

Vi ser at tangenten g har $x = c$ som nullpunkt, akkurat som forventet!



8.4 Differensiallikninger

Kommandoene under fungerer for de fleste likningene vi møter i Matematikk R2:

`LøsOde[<likning>]`

`LøsOde[<likning>,<Punktpå grafen til f>]`

`LøsOde[<likning>,<Punktpå grafen til f>,<Punkt på grafen til f’>]`

Den første gir den generelle løsningen til en ordinær differensiallikning og de to andre gir løsning på initialproblemer. Du kan skrive inn `y’` og `y’’` for henholdsvis første- og andrederiverte til y. GeoGebra kan ikke løse differensiallikninger av høyere orden enn 2.

Eksempel 8.8 Løs differensiallikningene $y' - y = x$. ■

Løsning:
Vi skriver inn kommandoen `LøsODE[y’-y=x]` og får at $y = -x + Ce^x - 1$:

Eksempel 8.9 Løs initialproblemet

$$y'' - 6y' + 5y = x, \quad y(0) = 1 \text{ og } y'(0) = 2$$

■

Løsning:
Her ser vi at punktet $(0,1)$ ligger på grafen til funksjonen mens $(0,2)$ ligger på grafen til den deriverte. Vi skriver derfor inn:

Vi ser at $y = \frac{1}{5}x + \frac{13}{50}e^{5x} + \frac{1}{2}e^{x} + \frac{6}{25}$ I rad 2 har vi fått svaret med desimaltall.

Oppgave 8.8
Løs differensiallikningene

a) $y' + y = 0$ b) $y'' + y = e^x$ c) $y'' - y' + y = 5$

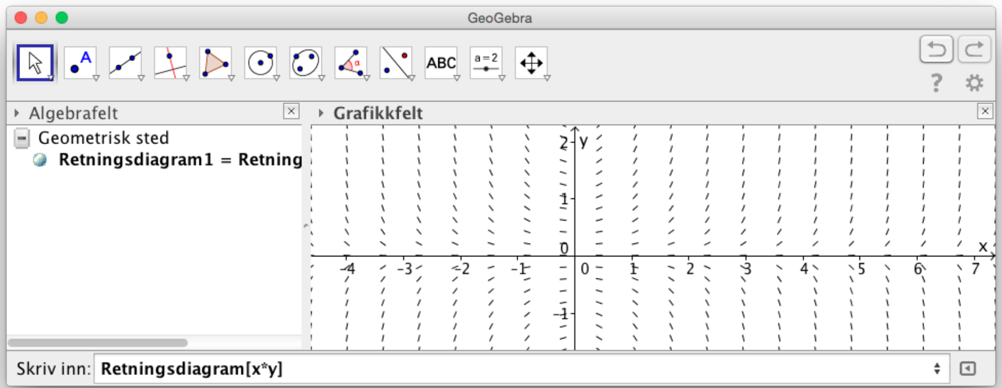
Oppgave 8.9
Løs initialproblemet

$$y'' + y = 2 \qquad y(\pi) = 1,\ y'(0) = 2$$

Du kan også lage retningsdiagram i GeoGebra. Kommandoen vi da bruker er

```
Retningsdiagram[<f(x,y)>].
```

Denne vil tegne opp et retningsdiagram til differnsiallikningen $y' = f(x,y)$. Merk at dette ikke er en CAS-spesifikk kommando, så denne kan du skrive rett inn i inntastingsfeltet. Kommandoen `Retningsdiagram[x*y]` vil gi retningsdiagrammet til differensiallikningen $y' = xy$:



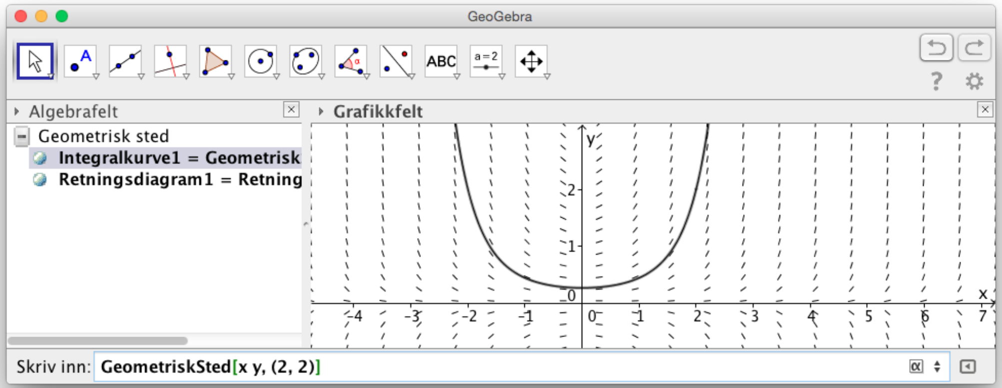
Figur 8.7: Retningsdiagram til differensiallikningen $y' = xy$

Dersom du synes linjestykkene i diagrammet ligger for tett eller har feil lengde (for lange?) kan du endre dette ved å oppgi hvor mange linjer i x- og y-retning som skal tegnet og hvor lange linjestykkene skal være. Kommandoen `Retningsdiagram[x*y, 30, 0.6]` gir oss kanskje et enda penere diagram?

Vi kan også tegne inn integralkurver til slike diagrammer. Dersom vi ønsker å tegne inn den integralkurven som går gjennom punktet $(2,2)$ kan vi bruke kommandoen

```
GeometriskSted[x*y,(2,2)]
```

Se figur 8.8.



Figur 8.8: Retningsdiagram til differensiallikningen $y' = xy$ sammen med integralkurven som går gjennom $(2,2)$.

8.5 Oppgaver

Oppgave 8.10

Bruk CAS til å forenkle uttrykkene:

a) $\dfrac{x^{12}-1}{x^4-x^2+1}$

b) $\sqrt{(x+1)^3} - x\sqrt{x+1}$

Tips: Du kan regne ut kvadratrøtter enten ved å bruke kommandoen `sqrt()` eller ved å trykke ⌥+ R og detter det som skal stå under rottegnet i et parentes.

Oppgave 8.11

Løs likningene

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$

b) $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1 = 6$

Oppgave 8.12
Løs likningssystemet

$$
\begin{aligned}
x+y+3\sqrt{x+y} &= 18\\
x-y-2\sqrt{x-y} &= 15
\end{aligned}
$$

Oppgave 8.13
Bruk CAS til å faktorisere polynomene:

a) $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + x^2 + 14x - 10$

b) $Q(x) = x^{12} - 1$

c) $h(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Følgende tre oppgaver er hentet fra utdanningsdirektoratets forslag til ny eksamensordning for videregående skole.

Oppgave 8.14 — **1T.**

En funksjon f er gitt ved

$$
f(x) = \frac{2}{x(x-1)} - \frac{3x}{x} + \frac{1}{x^2 - x}
$$

Skriv funksjonsuttrykket så enkelt som mulig, og bestem eventuelle vertikale og horisontale asymptoter for grafen til f.

Oppgave 8.15 — **S2.**
I denne oppgaven skal du finne mønstre og sammenhenger.

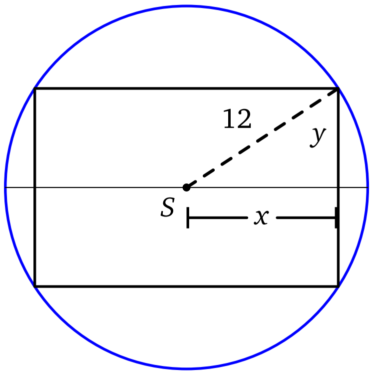
a) Det minste tallet som kan skrives som summen av to kubikktall på to måter er 1729:

$$
\begin{aligned}
1729 &= 1^3 + n^3\\
1729 &= m^3 + (m+1)^3
\end{aligned}
$$

Bestem n og m.

b) Det eneste kubikktallet som skrives som summen av tre påfølgende kubikktall, er 6^3. Bestem de tre kubikktallene ved å løse en likning.

Oppgave 8.16 — **R1.**



Et rektangel er innskrevet i en sirkel med sentrum i S og med radius 12.

a) Forklar at arealet av rektangelet er gitt ved

$$A(x) = 4x\sqrt{144 - x^2}, \quad x \in \langle 0, 12 \rangle$$

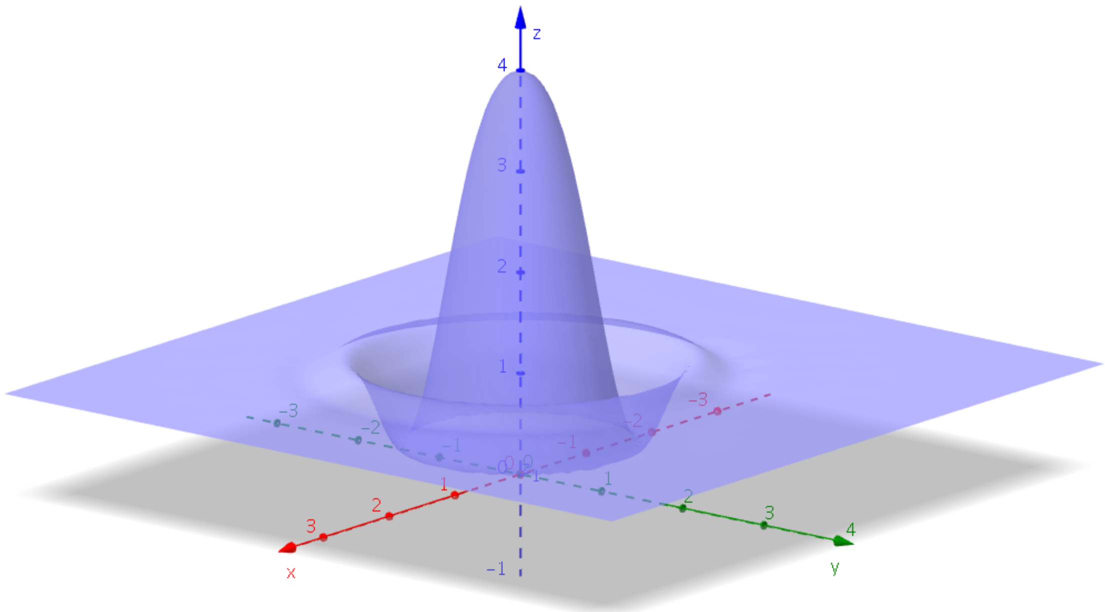
b) Bestem det største arealet rektangelet har. Kommenter formen på rektangelet.

Oppgave 8.17
Finn likningen til vendetangenten til funksjonen $f(x) = x^3 - ax + b$.

9 GeoGebra 3D

9.1 Grafikkfelt 3D

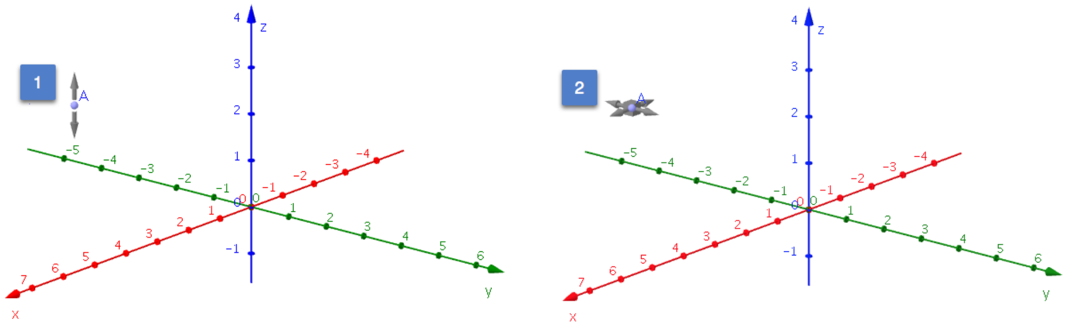
I versjon 5.0 fikk GeoGebra et eget 3D-vindu. Du åpner dette på vanlig måte. Under «Vis» på menylinjen klikker du på «Grafikkfelt 3D». Her kan du gjøre tilsvarende ting som i grafikkfeltet, men med en ekstra dimensjon. På figuren nedenfor har vi for eksempel tegnet inn grafen til funksjonen $f(x,y) = 1+3\cos(2x^2+2y^2)\cdot e^{-(x^2+y^2)}$. Denne har vi fått fram ved å skrive følgende i inntastingsfeltet: `f(x, y)=1+3cos(2x^2 + 2y^2) e^(-(x^2 + y^2))`



Når du er i Grafikkfelt 3D har du en ny verktøylinje, som vist på figuren:

Vi kan bruke disse verktøyene til å tegne punkt, linjer, linjestykker, mangekanter, sirkler, kjegler, plan, pyramider, kuler etc.

Dersom du skal tegne punkt i Grafikkfelt 3D kan du velge punktverktøyet og klikke der du vil ha punktet. Du vil da først få tegnet opp punktet i xy-planet. Dersom du vil endre på «høyden» til punktet må du dra det opp. Dersom du klikker en gang til på punktet, så kan du flytte det parallelt med xy-planet. Klikker du enda engang kan du igjen flytte det opp eller ned parallelt med z-aksen.

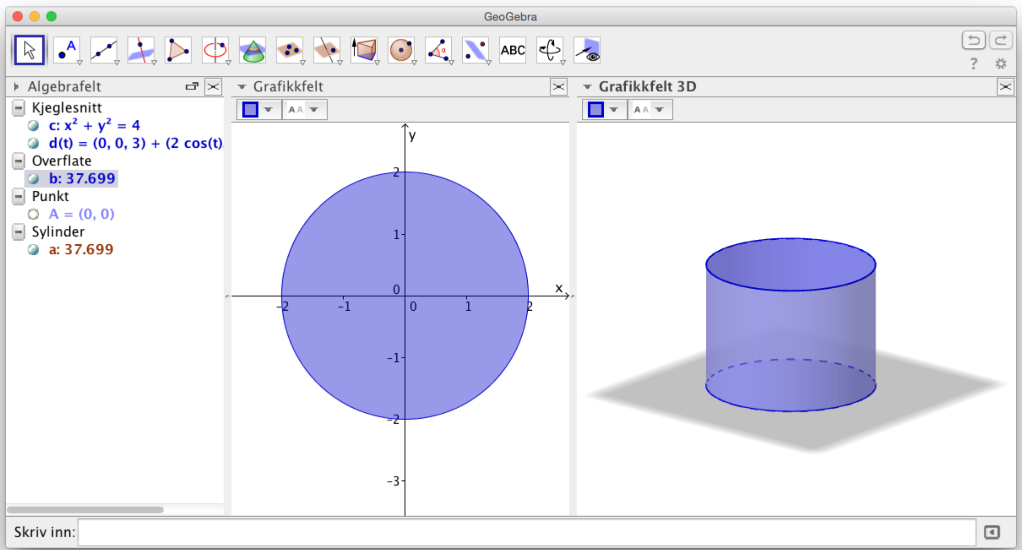


Dersom du skal tegne inn et punkt med gitte koordinater er det enklest å skrive inn punktet i inntastingsfeltet.

9.2 3D-objekter

■ **Eksempel 9.1** Tegn en sylinder med radius 2 og høyde 3.

Løsning:
Lag en sirkel med radius 2 i grafikkefelt 1. Du får da også tegnet en sirkel i xy-planet i Grafikkfelt 3D. Klikk så i Grafikkfelt 3D og velg verktøyet *Ekstruder til prisme eller sylinder* . Klikk så på sirkelen i Grafikkfelt 3D. Skriv inn høyden i vinduet som popper opp og klikk på OK. Du får da tegnet opp sylinderen.



Figur 9.1: Tegning av en sylinder. Vi har skult aksene og endret farge til blå.

■

Oppgave 9.1
Tegn en kjegle hvor grunnflaten har radius 4 og høyden er 4. Du kan bruke verktøyet *Ekstruder til pyramide eller kjegle* .

Oppgave 9.2
Lag et regulært tetraeder med sider 2. Du kan bruke verktøyet *Regulært tetraeder* .

■ **Eksempel 9.2** En kule har sentrum i $(2,0,-1)$ og har radius $r = 3$.

a) Tegn kulen i et koordinatsystem.

b) Bestem kulens volum.

c) Avgjør om punkta $A(3,1,-2)$ eller $B(2,3,-1)$ ligger på kulens overflate.

Løsning:

a) For å tegne kula kan du først skrive inn koordinatene til S i inntastingsfeltet. Skriv inn

```
S=(2, 0, -1)
```

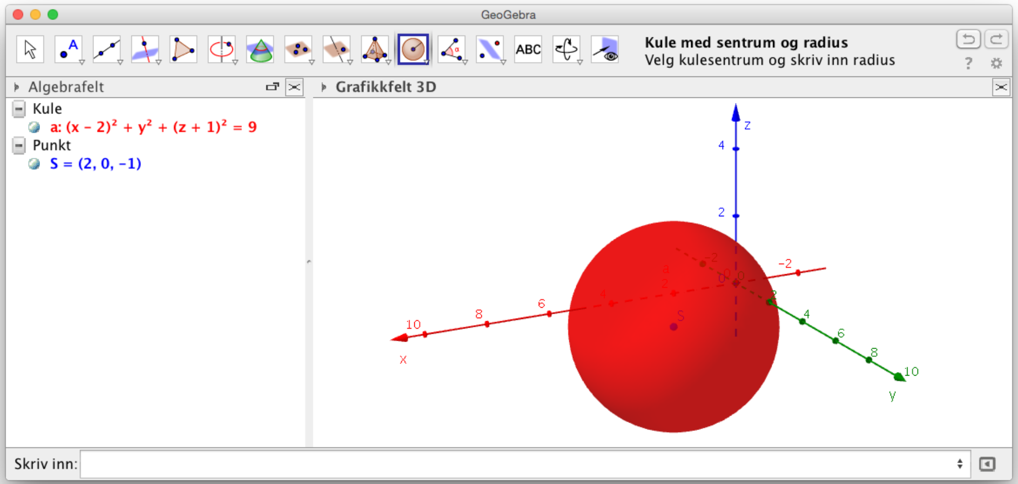
Velg deretter verktøyet *Kule med sentrum og radius* og klikk på punktet S. Du får da opp et vindu hvor du skriver inn kulens radius:

Klikk på OK og kulen blir tegnet opp. Dersom du vil endre litt på plasseringen av koordinatsystem, kan du gjøre dette ved å velge passende verktøy på verktøylinjen. Alternativt kan du holde Shift-knappen inne mens du holder venstsre museknapp inne og drar rundt xy-planet. Ctrl + venstre museknapp (eller høyreklikk) vil rotere rundt z-aksen. På figur 9.2 har ser du en tegning av kulen. Legg merke til at vi også har fått kulens likning med på kjøpet.

b) Du kan bruke verktøyet *Volum* til å bestemme kulens volum. Dette finner du i samme kategori som vinkelmålingsverktøyet . Velger du dette og deretter klikker på kulen, vil du se at volumet er ca 113,10. Men i dette tilfellet er det kanskje bedre å bruke formelen for volumet av en kule:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi$$

c) Du kan avgjøre om punkta A og B ligger på kulens overflate ved å finne avstanden fra punkta til S. Skriv først inn punkta i inntastingsfeltet:



Figur 9.2: Kule med sentrum i $S(2,0,-1)$ og radius 2.

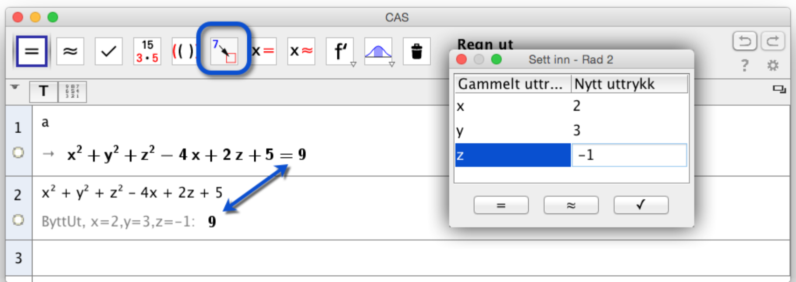
```
A=(3, 1, -2)
B=(2, 3, -1)
```

Du kan nå enten måle avstanden ved å bruke verktøyet *Avstand eller lengde* og så klikke på A og deretter på S. Du får da at avstanden er ca 1,73. Dette er mindre en radiusen, så derfor ligger ikke A på kulens overflate.

Du kunne også gitt kommandoen `AS=Avstand[A, S]` og fått at $AS = 1{,}73$

Tilsvarende finner du at avstanden fra B til S er 3, som er det samme som radiusen. Vi kan derfor konkludere med at B ligger på kulens overflate.

Nå kunne det tenkes at vi blir litt lurt her. Det kunne være at avstanden mellom B og S er for eksempel 2,0001 og ikke eksakt lik 2. For å være helt sikker, kan vi bruke CAS. Kulen vår heter a i algebrafeltet. Åpne CAS og skriv inn a i rad 1 og trykk enter. Du får da opp likningen til kulen. Klikk på dette uttrykket og ta vekk $= 9$. Klikk så på verktøyet *Sett inn* . Skriv inn koordinatene til B og trykk på $=$. Vi ser at vi får 9 som svar. Dette er høyresiden til liknkingen for kulen. Vi kan derfor være helt sikre på at punktet B ligger på kuleoverflaten.



■

9.3 Flater

■ **Eksempel 9.3** Et plan α går gjennom punkta $A(1,-1,1)$, $B(4,2,2)$ og $C(-2,3,4)$.

a) Bestem likningen til planet.

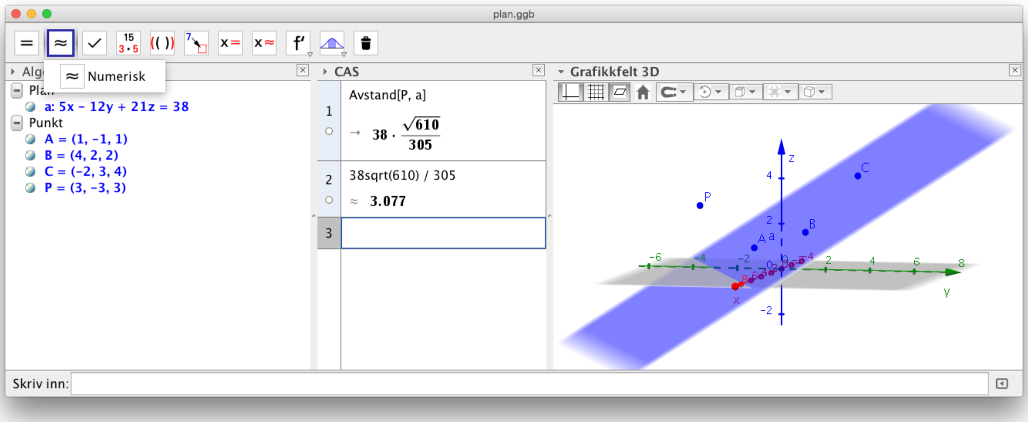
b) Bestem avstanden mellom planet og punktet $P(3,-3,3)$.

Løsning:

a) Skriv inn punkta i inntastingsfeltet og velg verktøyet *Plan gjennom tre punkt*. Klikk på de tre punkta. Da får du tegnet planet og du kan lese av likningen for planet i algebrafeltet. Planet har likning

$$5x - 12y + 21z = 38$$

b) For å bestemme avstanden mellom P og planet åpner du CAS-vinduet og skriver inn kommandoen `Avstand[P, a]` som vist på figuren nedenfor. Da finner du at avstanden er $\frac{38}{305}\sqrt{610} \approx 3{,}08$.



■

■ **Eksempel 9.4** Et plan har likningen $2x - y + z = 3$ og en kule $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 5 = 4$

a) Tegn planet og kulen i et koordinatsystem.

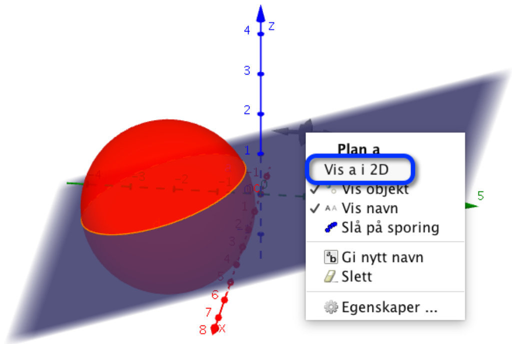
b) Kulen skjærer planet i en sirkel. Bestem radiusen til denne sirkelen.

Løsning:

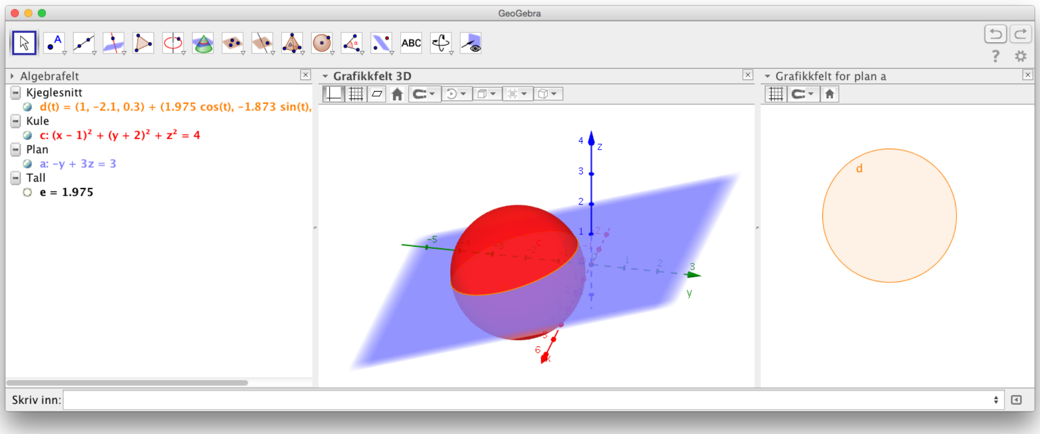
a) Du får tegnet inn de to flatene ved å skrive dem inn i inntastingsfeltet. Se figuren nedenfor.

b) Velg verktøyet *Skjæring mellom to overflater* og klikk på kulen og på flaten. Du får da opp et kjeglesnitt d. Vi ser at dette kjeglesnittet har sentrum i $S(1,-2{,}1,0{,}3)$ ut fra dens parameterframstilling. Vi kan så velge et punkt P på sirkelen og bestemme avstanden mellom P og S. Men det enkleste er nok å bruke kommandoen `Radius[d]`. Vi ser at radiusen er ca 1,975.

En måte å få visualisert skjæringskurven mellom planet og kulen er å er å høyreklikke på planet og velge «Vis i 2D»:



Du får da opp et eget grafikkfelt som viser alle objektene som ligger i dette planet.



■

Å vise et plan i 2D kan være nyttig når vi skal studere kjeglesnitt. Vi kan få tegnet opp en kjegle ved å skrive inn i inntastingsfeltet:

```
a=UendeligKjegle[(0,0,0), (1, 0, 0), 45°]
```

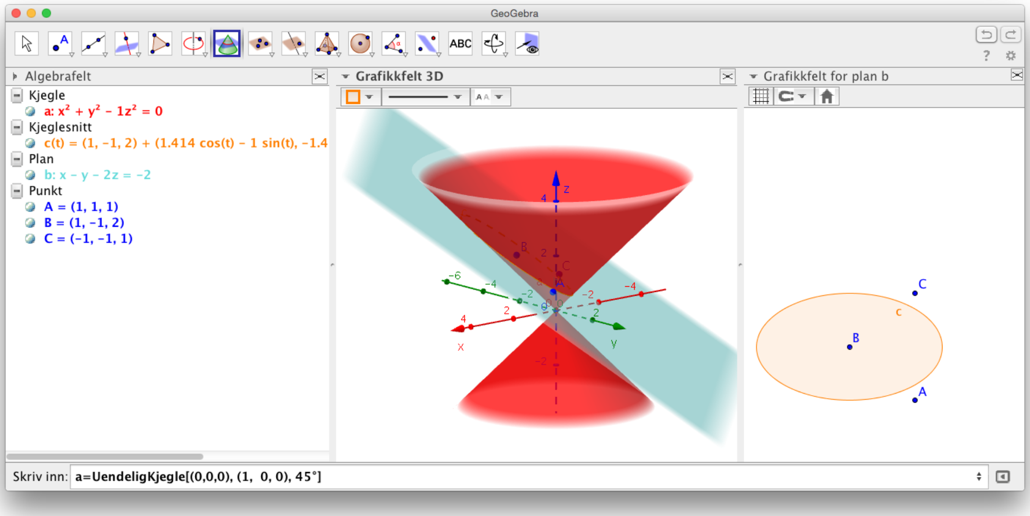
Vi tegner så inn tre punkt og finner planet gjennom disse. Vi kan for eksempel se på planet gjennom $A(1,1,1)$, $B(1,-1,2)$ og $C(-1,-1,1)$. Vi skriver inn disse punktene i inntastingsfeltet og gir kommandoen `Plan[A, B,C]`. Vi får da et plan som snitter kjeglen i en kurve. Høyrklikker vi nå på planet og velger «Vis i 2D» får vi opp «Grafikkfelt for plan b» som viser de tre punkta og snittet mellom de to overflatene. Vi ser at det er en ellipse i dette tilfellet. Se figur 9.3.

Oppgave 9.3

Gjør tilsvarende som over, men med punkta

a) $A(0,-4,0)$, $B(6,8,0)$ og $C(4,4,4)$.

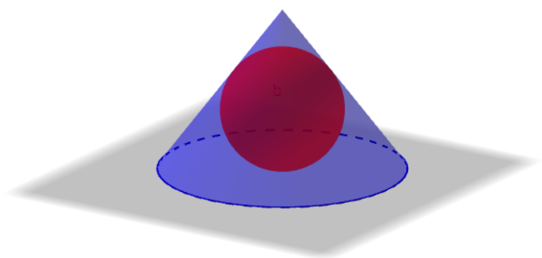
b) $A(4,0,0)$, $B(2,3,2)$ og $C(-2,0,6)$.



Figur 9.3: Et kjeglesnitt.

■ **Eksempel 9.5** Gitt en kjegle med radius 3 og høyde 4. Tegn en innskrevet kule som tangerer bunnen og sideflaten i kjeglen.

Løsning:
Tegn først opp kjeglen ved å tegne en sirkel med radius 3. Tegn derretter kjeglen ved å bruke verktøyet *Ekstruder til pyramide eller kjegle* . Skriv så inn $x = 0$ i inntastingsfeltet for å få tegnet inn yz-planet. Kulen vil snitte dette planet i en sirkel. Denne må være den innskrevne sirkelen til trekanten som er snittet mellom planet og kjeglen. Vi konstruerer sentrum til S til denne sirkelen i Grafikkfelt for plan e. Til slutt tegner vi kulen ved å bruke verktøyet *Kule med sentrum gjennom punkt* . Etter litt rydding vil du få noe som ser slik ut:



■

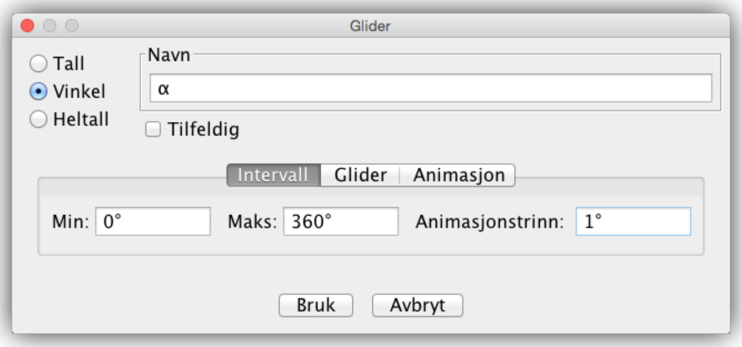
9.4 Omdreiingslegemer

Vi kan også illustrere omreiingslegemer i GeoGebra 3D.

Tegn grafen til funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 2\sqrt{x} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}, \qquad x \in [0,4]$$

Lag en glider α. Velg Vinkel med grader mellom 0° og 360° og animasjonstrinn lik 1°:

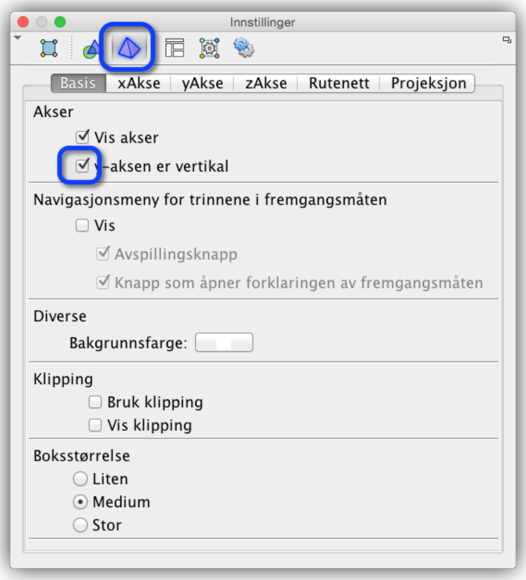


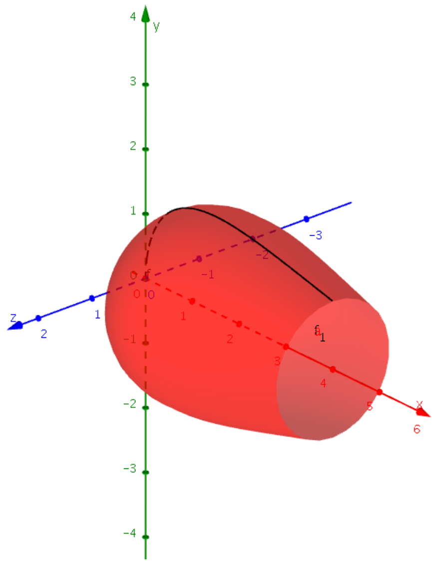
Skriv inn kommandoene

`Roter[f,`α`,xAkse]` og

`Overflate[t, f(t) cos(u), f(t) sin(u), t, 0, 4, u, 0,`α`].`

Du vil da få illustrert hva som skjer når du roterer grafen rundt x-aksen. For å få det riktig så pent vil vi anbefale å la y-aksen være vertikal. Dette får du til ved å høyreklikke i Grafikkfelt 3D, velge egenskaper og så hake av for y-akse er vertikal.





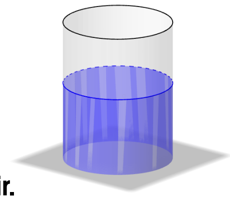
Selve volumet må du regne ut ved for eksempel å bruke CAS:

1	V:= π Integral[f(x)², 0, 4]
○	≈ **21.071**

Oppgave 9.4

Tegn en pyramide med kvadratisk grunnflate med side 2 og med høyde 4. Konstruer en innskrevet kule i pyramiden.

Oppgave 9.5



Lag en sylinder med radius 2 og høyde 5. Lag en glider a som kan variere mellom 0 og 5 og lag en sylinder med samme grunnflate som den første, men med høyde a. Velg passende farger slik at det ser ut som et glass fylt med vann.

Oppgave 9.6 — Eksamen REA3024 Matematikk R2 Våren 2012 – Udir.

I et koordinatsystem er det gitt et punkt $P(5,-1,4)$ og et plan

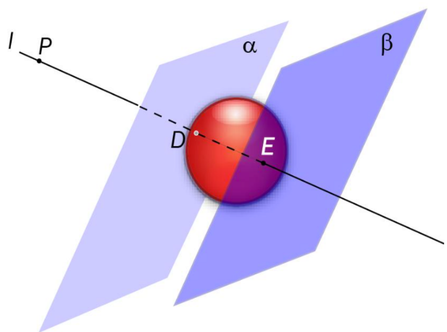
$$\alpha: \ 2x - 2y + z + 2 = 0$$

Punktene $A(0,0,4)$, $B(2,0,0)$ og $C(1,1,4)$ ligger i et plan β.

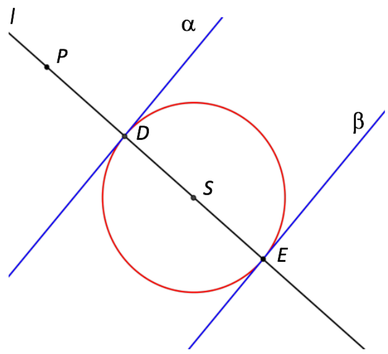
a) Bestem likningen for β, og forklar at $\alpha \parallel \beta$.

b) Regn ut avstanden mellom planene α og β.

Planene α og β er begge tangentplan til en kule. Sentrum S i kula og de to tangeringspunktene D og E ligger på en rett linje l gjennom P. Se figuren nedenfor.



Figur 1: Kule og plan i rommet



Figur 2: Tverrsnitt av kule og plan

c) Sett opp en parameterframstilling for l.

d) Bestem koordinatene til D og E.

e) Bestem likningen til kula.

Oppgave 9.7 — Eksamen REA3024 Matematikk R2 Høsten 2014 – Udir.

Et plan α er gitt ved likningen

$$2x + y - 2z + 3 = 0$$

a) Bestem likningen for den kuleflaten som har sentrum i punktet $S(11,2,-6)$ og som har α som tangeringsplan.

b) Bestem koordinatene til tangeringspunktet mellom kuleflaten og planet α.

Et plan β er gitt ved

$$2x + y - 2x = 0$$

Dette planet skjærer kuleflaten langs en sirkel.

c) Bestem radien i denne sirkelen.

10 Egne verktøy i GeoGebra

Dersom det er en type konstruksjon som du skal gjøre mange ganger, kan det være en god ide å lage et eget verktøy som tar seg av konstruksjonen. Prinsippet for å lage slike verktøy er det samme som for makroer i programmer som Excel. Du gjør konstruksjonen på vanlig måte og forteller så GeoGebra at det skal lage et verktøy basert på de objektene du nå har konstruert. Prinsippet er da at du forteller GeoGebra hvilke objekter alt er bygd på og hvilke objekter som skal være resultatet. Alt du gjør med de opprinnelige objektene er «loggført» og vil bli gjentatt med nye objekter.

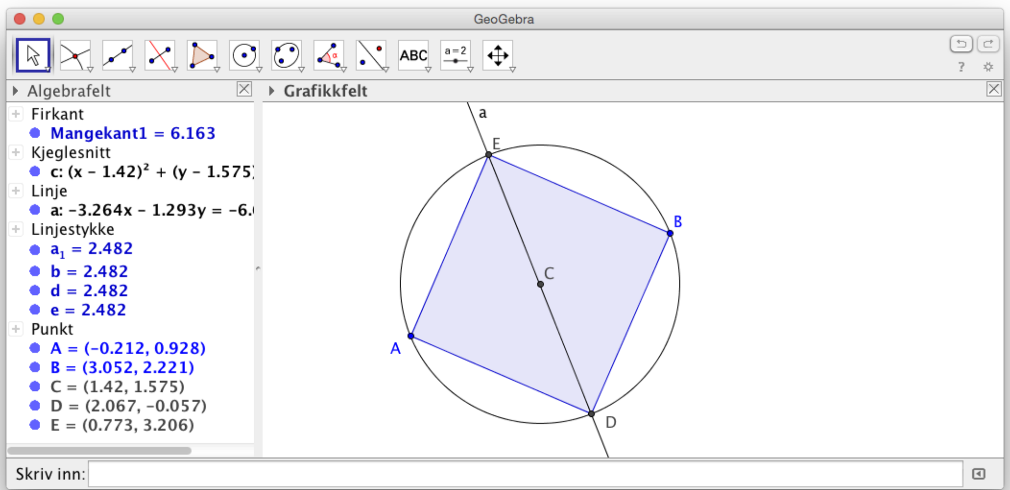
10.1 Eksempler

■ **Eksempel 10.1** Lag et verktøy som tegner et kvadrat når to motsatte hjørner er gitt.

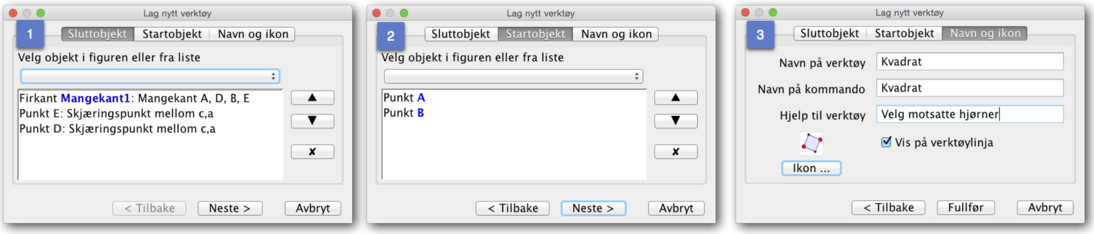
Løsning:

1. Tegn først opp de to hjørnene A og B. Dette er våre startobjekter.

2. Konstruer deretter det ønskede kvadratet på vanlig måte.



3. For å lage et nytt verktøy, velger du «Verktøy» på menylinjen og «Lag nytt verktøy…» som vist på figur 10.1. Dette vil lede deg gjennom prosessen. Først blir du bedt om å velge hva som skal være *sluttobjekt*. Du kan enten velge Mangekant1 og de to andre hjørnene (dersom du ønsker at også disse skal være med) fra nedtrekksmenyen eller ved å klikke på disse objektene i grafikkfeltet.

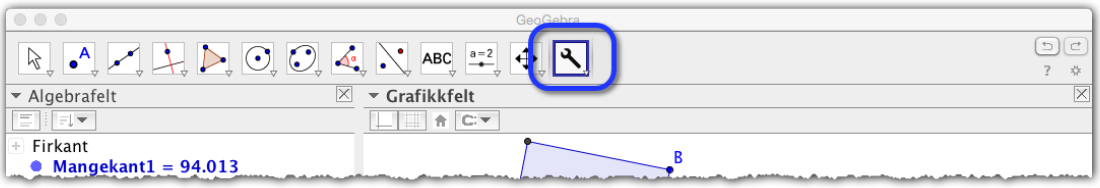


4. Klikk på neste. Da er det på tide å velge*Startobjekt*. Her vil vanligvis de nødvendige objektene allerede være valgt. Dersom dette ikke er tilfelle kan du velge dem på samme måte som du valgte *startobjekt*.

5. Klikk på neste. Nå må du velge navn og kommando for verktøyet. Det kan også være fint å skrive noen ord om hvordan verktøyet virker. Har du et ikon, kan du velge det. Men dette er ikke nødvendig. Klikk på «Fullfør» og verktøyet er laget.

Figur 10.1: Du kan lage nye verktøy i GeoGebra

Du har nå fått et nytt verktøy på verktøylinjen:



■

Oppgave 10.1

I denne oppgaven skal vi lage et verktøy som deler et linjestykke i tre.

a) Start med å tegne et linjestykke. Velg  og klikk på to steder i grafikkfeltet.

b) Tegn en normal til linjestykket i det ene endepunktet

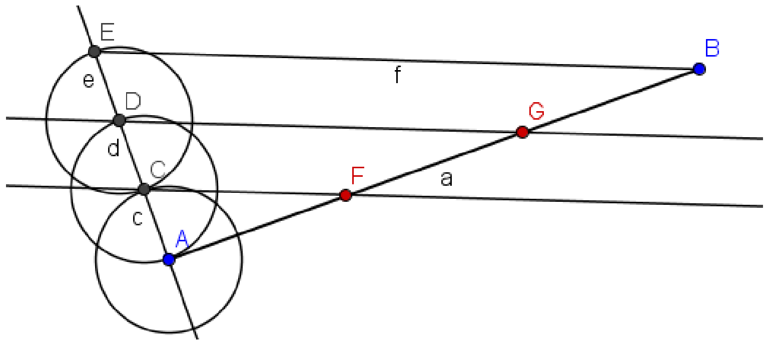
c) Lag en sirkel med sentrum i det samme endepunktet og med radius lik 1. (Bruk Sirkel definert med sentrum og radius)

d) Lag to til punkt på normalen, slik at du får tre punkt etter hverandre med avstand 1 mellom hverandre.

e) Lag så et linjestykke mellom det ene punktet som ligger lengst vekk fra endepunktet til det andre endepunktet.

f) Tegn så linjer gjennom de to andre punkta parallelt med linjestykket du tegnet i e).

g) Marker skjæringspunkta mellom disse linjene og det opprinnelige linjestykket. Du har da to punkt på linjestykket som deler det i tre like deler!

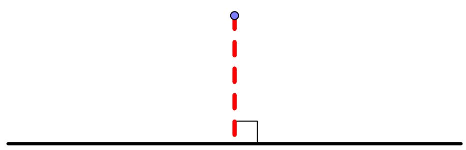


Figur 10.2: Konstruksjon av punkt som deler linjestykke i tre.

h) Under «Verktøyer» på menylinjen velger du nå «Lag nytt verktøy...». Du må da velge hva som skal være utgangspunktet for konstruksjonen (startobjektene) og hva som skal være resultatet (sluttobjektene). Velg endepunkta på linjestykket som startobjekt og de to punkta som deler linjestykket i tre som sluttobjekter. Skriv en forklarende tekst for hvordan konstruksjonen virker under «Hjelp til verktøy» og velg passe navn på verktøyet. Du kan også lage et eget ikon, men det er som nevnt tidligere ikke nødvendig.[1] Du har nå fått et nytt verktøy helt til høyre på verktøylinja som du kan bruke!

Oppgave 10.2

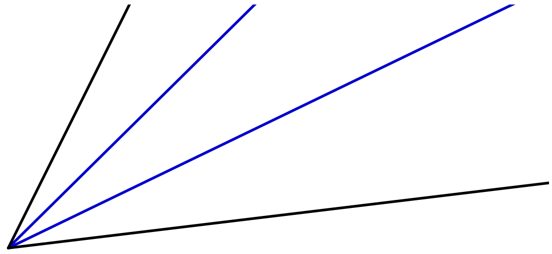
Lag et verktøy som konstruerer et linjestykke normalt ned fra et gitt punkt til et linjestykke.



Oppgave 10.3

Lag et verktøy som deler en vinkel i tre like store vinkler som vist på figur 10.3.

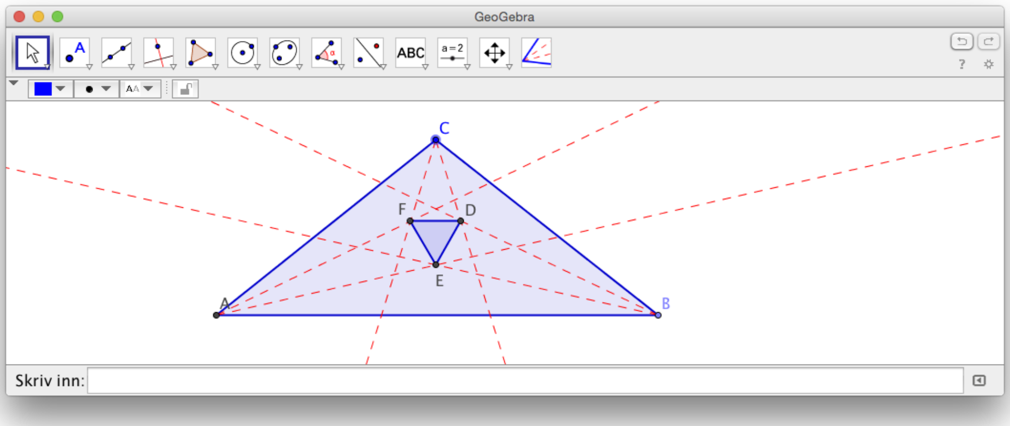
[1]Du kan lage ikon ved å ta et skjermbilde av en figur som viser verktøyet i bruk. Dette skjermbildet kan du så lime inn i for eksempel programmet Paint, beskjære det og lagre det som en png-fil.



Figur 10.3: Tredeling av en vinkel

Oppgave 10.4

Tegn en trekant ABC og bruk verktøyet du laget i oppgave 10.3 til å dele de tre vinklene i trekanten. De seks linjene vil parvis krysse hverandre som vist på figuren under. Hva kan du si om den lille trekanten? Se figur 10.4



Figur 10.4: Hva sier Morleys teorem? Hva kan du si om trekanten DEF?

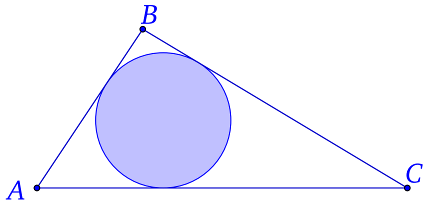
Oppgave 10.5

Lag et verktøy som deler et linjestykke i n like store deler. Startobjektene skal være de to endepunkta og tallet n.

Tips: Du kan få bruk for kommandoen `Følge[A+k/n (B-A), k, 1, n-1]`

Oppgave 10.6

Lag et vertøy som tegner den innskrevne sirkelen til en trekant.



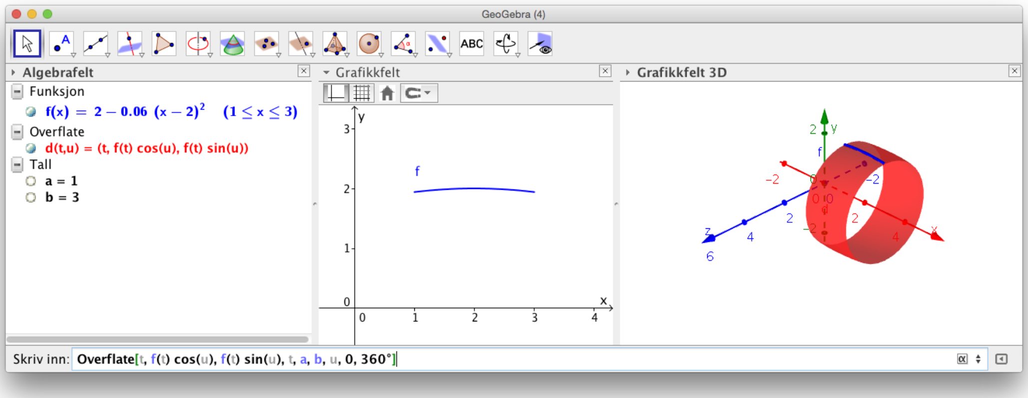
Oppgave 10.7

Gitt en funksjon f derfinert mellom $x = a$ og $x = b$. Lag et verktøy som tegner omdreiingslegemet til grafen til f om x-aksen.

Startobjekter skal være f, a og b og sluttobjektet skal være omdreiingslegemet.

Tips: Du kan bruke følgende kommando:

```
Overflate[t, f(t) cos(u), f(t) sin(u), t, a, b, u, 0,360°]
```



11 Tekst og bilder i GeoGebra

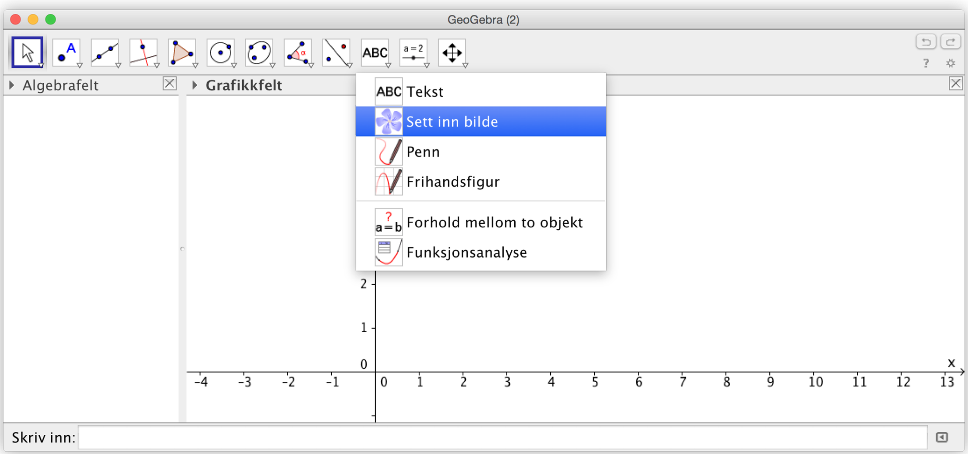
Du kan legge til tekst og bilder i grafikkfeltet i GeoGebra.

11.1 Legge til bilder

Vi ønsker å legge følgende bilde (hentet på nettsiden `http://www.flickr.com`) inn i en GeoGebrafil:

Figur 11.1: Originalbilde: Basketball av Eric Silva på Flickr, Lisens: CC-by-sa 2.0

For å gjøre dette åpner vi en ny GeoGebra-fil og velger verktøyet *Sett inn bilde*, som vist på figur 11.2.

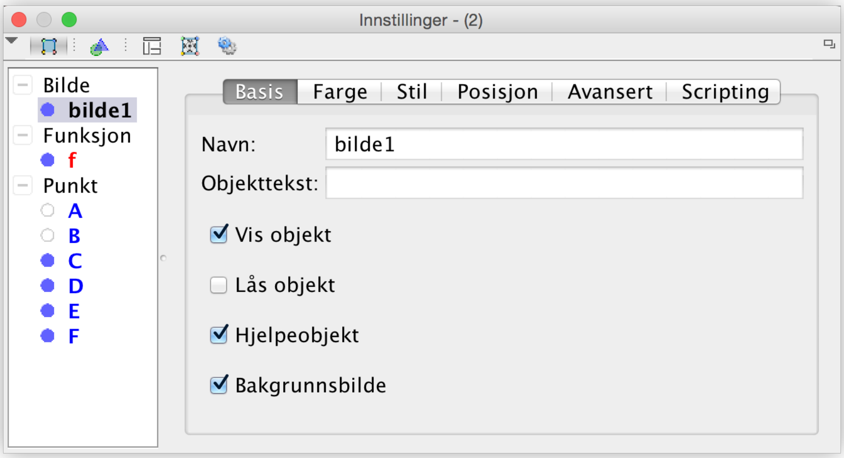


Figur 11.2: Du setter inn et bilde ved å bruke verktøyet *Sett inn bilde*.

Når du så klikker en eller annen plass i grafikkfeltet, så vil du få opp et vindu der du kan bla deg fram til bildet du vil legge inn i GeoGebra. Når dette er gjort vil du ha lagt til bildet. Nå gjelder det bare å få bildet riktig plassert. Dersom du zoomer inn på aksene, så ønsker du å zoome inn på bildet også. For å få dette til må du høyreklikke på bildet og velge Egenskaper. Under «Posisjonen» kan du velge hvor du ønsker at hjørne til bildet skal plasseres.

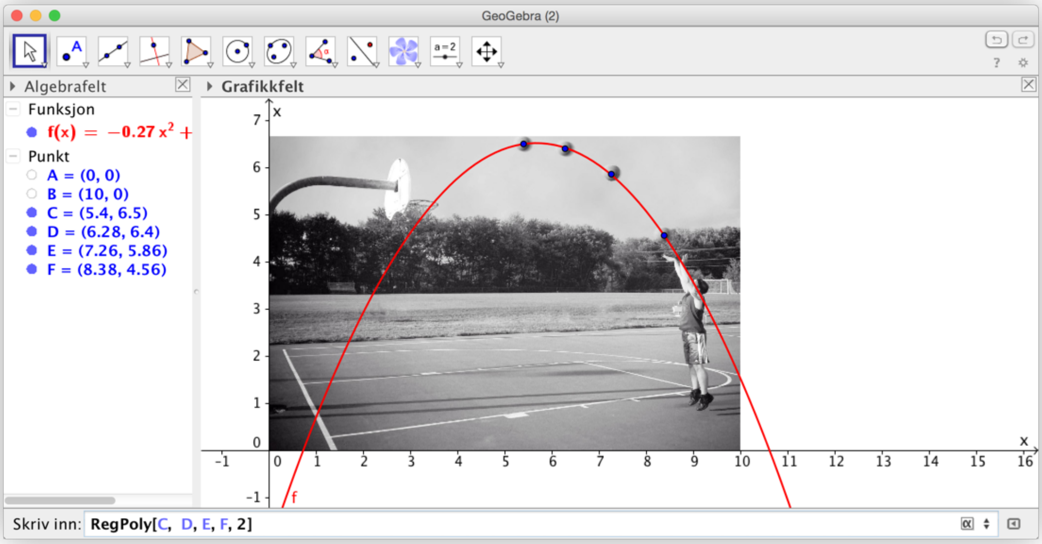
Figur 11.3: Du kan bestemme koordinatene til hjørnene til bildet under egenskaper.

Når du har fått plassert bildet og er fornøyd med posisjonen, så kan det være en ide å gjøre bildet om til bakgrunnsbilde. Se figur 11.4. Da vil slike ting som akser og rutenett legge seg over bildet.



Figur 11.4: Bildet kan gjøres om til et bakgrunnsbilde.

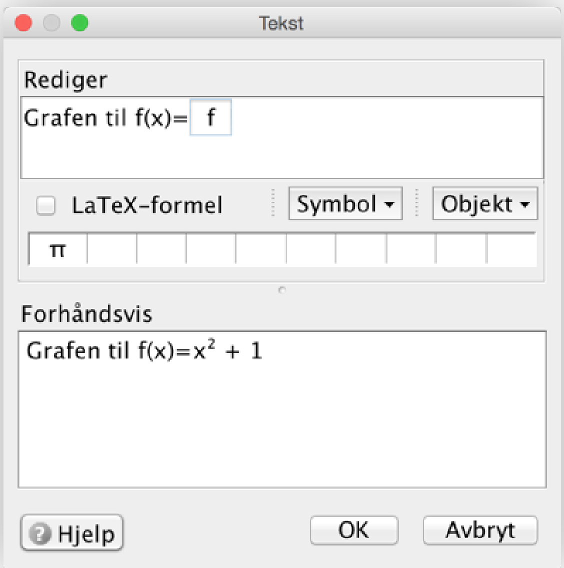
Nedenfor ser du resultatet. Her har vi også lagt til en kurve ved hjelp av regresjon.



Figur 11.5: Vil ballen gå oppi kurven?

11.2 Sette inn tekst

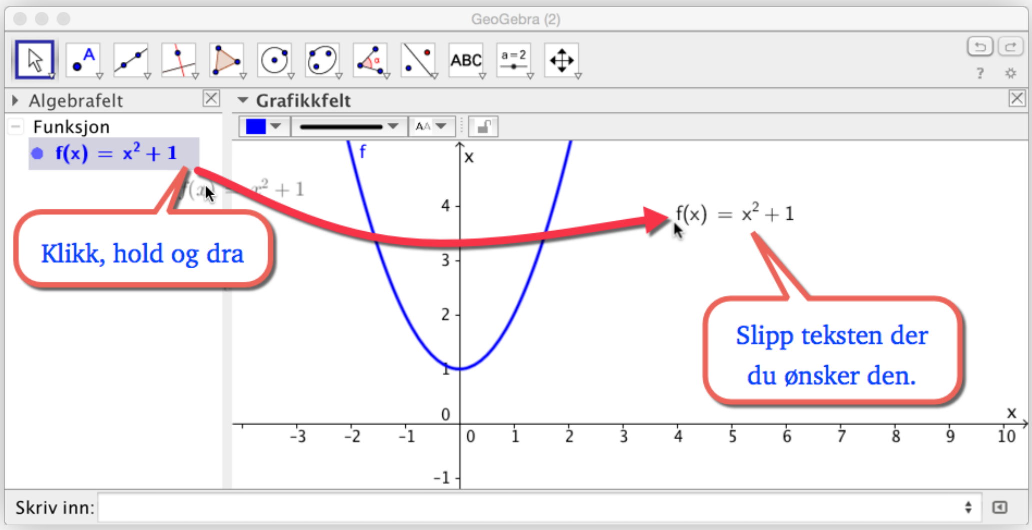
Det er et eget verktøy for å sette inn tekst i grafikkfeltet. Velg verktøyet *Sett inn tekst* ABC på verktøylinjen og klikk i grafikkfeltet der hvor du ønsker at teksten skal være. Du får da opp følgende vindu:



Figur 11.6: Du kan lett redigere tekst ved å bruke verktøyet *Sett inn tekst*

Vi har i dette eksempelet skrevet inn teksten *Grafen til* $f(x) = x^2 + 1$. Legg merke til at vi har bedt GeoGebra om å skrive inn $x^2 + 1$ ved å hente fram f fra «Objekt». På den måten vil vi få nytt funksjonsuttrykk dersom vi senere endrer f.

Dersom vi kun ønsker at det skal stå $f(x) = x^2+1$ kan vi nå «dra» funksjonen fra Algebrafeltet over i Grafikkfeltet. Se figur 11.7.



Figur 11.7: Du kan trekke uttrykkene fra Algebrafeltet over i grafikkfeltet.

Oppgave 11.1

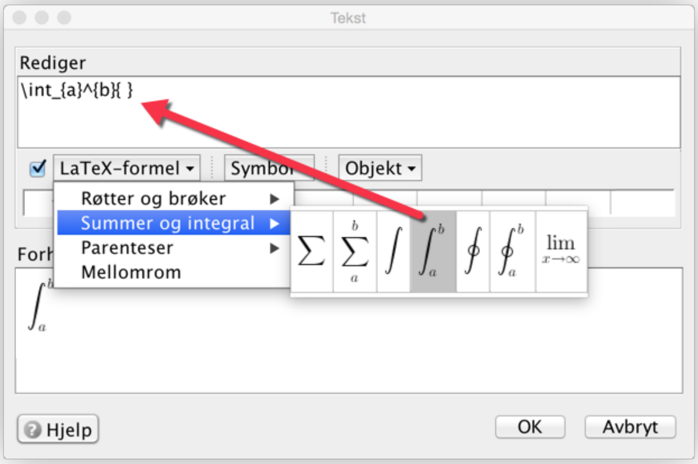
a) Lag to glidere a og b ved å bruke verktøyet *glidere* .

b) Skriv inn `a*x+b` i inntastingsfeltet slik at du får definert funksjonen $f(x) = ax + b$.

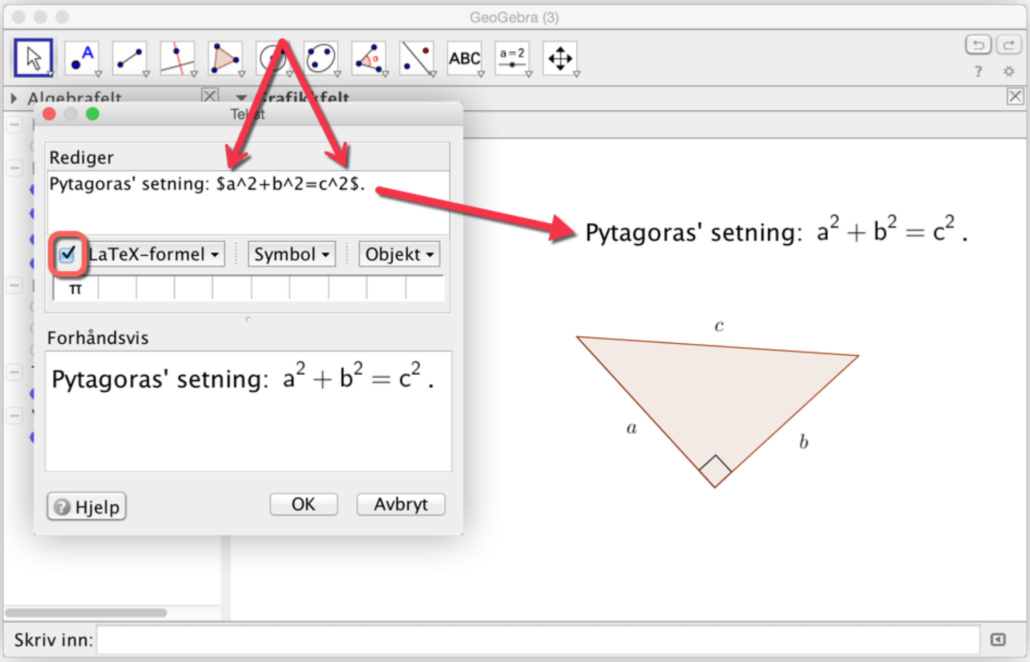
c) Sett inn i grafikkfeltet teksten «Grafen til funksjonen $f(x) = 3x + 2$» (dersom $a = 3$ og $b = 2$).

Dersom du ønsker å sette inn mer avansert matematisk tekst, må du bruke LaTeX-kode. La oss si at du vil skrive inn $\int_0^3 f(x)\,dx$. Du kan da hake av for LaTeX-formel og skrive inn `\int_0^3f(x)\,dx`. Heldigvis trenger du ikke kunne LaTeXfor å få dette til. Når du har haket av for LaTeX-forme blir nedtrekksmenyen aktiv og du kan velge ulike kommandoer fra denne som vist på figur 11.8.

Pass på at formler og annen matematisk tekst står mellom to dollartegn som vist på figur 11.9.



Figur 11.8: GeoGebra kan skrive inn LaTeX-kode.



Figur 11.9: Du må passe på at matematisk tekst står mellom to \$-tegn.

■ Eksempel 11.1

a) Lag gliderne a, b og c. Skriv inn `f(x)=a*x+b` i inntastingsfeltet.

b) Lag den dynamiske teksten som gir oss løsningsmengden til ulikheten $f(x) \leq c$ (der c er tallet som glideren er satt til).

Løsning:
Vi åpner Grafikkfelt 2 hvor vi ønsker å plassere gliderne. På den måten vil aldri grafen dekke over en av gliderne. Etter å ha laget de tre gliderne a, b og c skriver vi inn `f(x)=a*x+b` i inntastingsfeltet. Det er da stor sjanse for at grafen blir tegnet opp i Grafikkfelt 2. For å endre dette høyreklikker du på grafen og velger «Egenskaper». Under «Avansert»-fliken kan du velge hvilket grafikkfelt du vil at objektet skal vises i (se figur 11.11, side 133).

Vi ønsker å legge inn dynamisk tekst av typen $f(x) \leq 2$ når $x \leq 5$ (som er tilfelle dersom $a = 0{,}5$, $b = -0{,}5$ og $c = 2$.) Problemet er at ulikhetstegnet må snus dersom $a < 0$. For å få dette til kan vi bruke kommandoen

```
Dersom[<Vilkår>,<Så>,<Ellers>].
```

Denne fungerer slik at dersom vilkåret er sant får vi objektet vi skriver som andre argument («så») og dersom det ikke er sant får vi det tredje argumentet («Ellers»). I vårt tilfelle ønsker vi «≤» når $a > 0$

Vi skriver derfor inn følgende kommando i inntastingsfeltet:

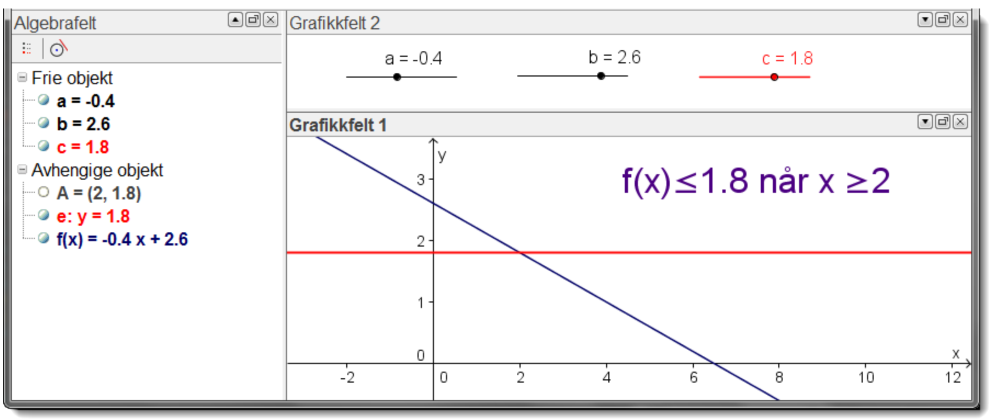
```
Dersom[a>0,"≤","≥"]
```

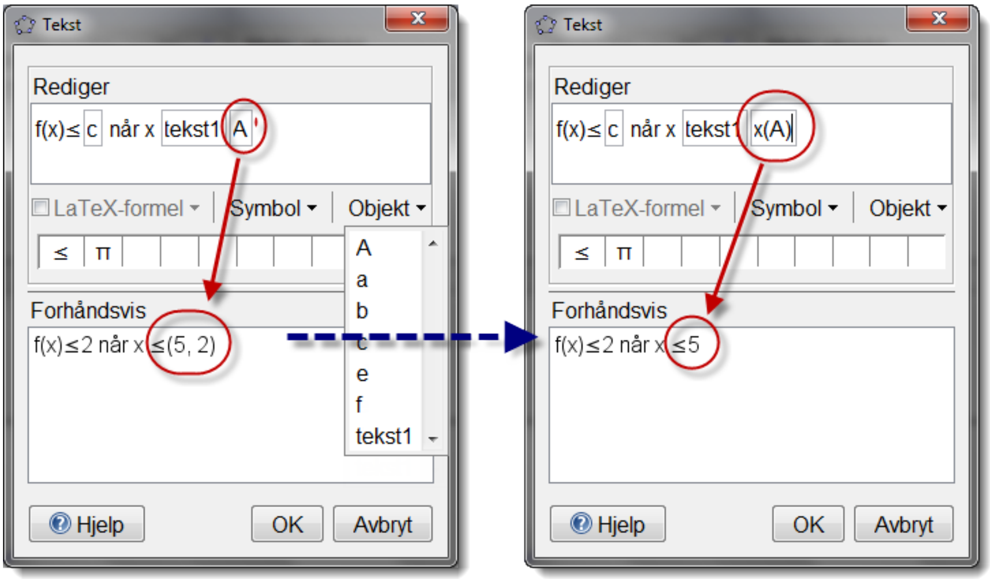
Vi vil da få objektet «tekst1» tegnet i nærheten av origo (enten i Grafikkfelt 1 eller Grafikkfelt 2). Skjul denne teksten.

Skriv inn `y=c` i inntastingsfeltet og finn så skjæringspunktet mellom denne linjen og grafen til f. Du får da et punkt A.

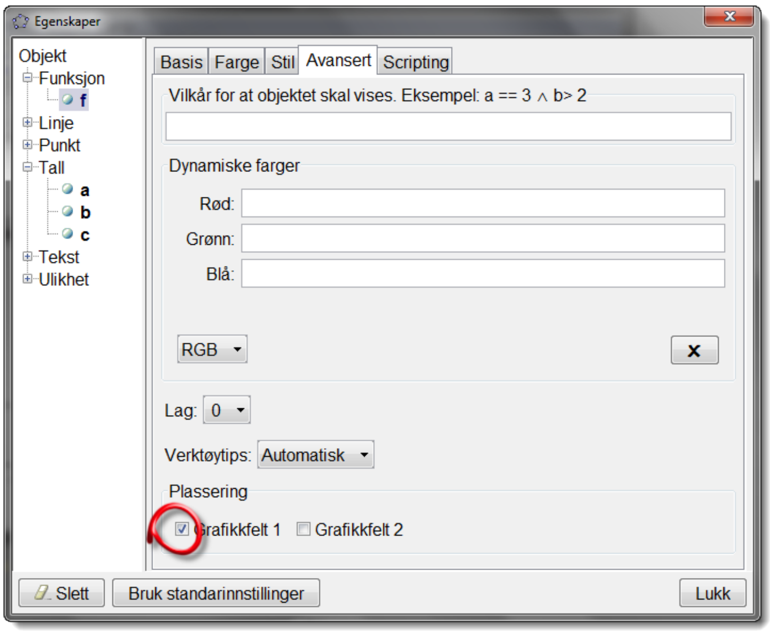
Klikk så på verktøyet *Sett inn tekst* ABC og klikk deretter i Grafikkfelt 1 der hvor du ønsker at teksten skal stå.

I vinduet du da får opp skriver du inn $f(x) \leq$ og henter fram c fra Objektlisten. Deretter skriver du «når x» og henter fram text1 og så A. På grunn av betingelsene som vi satte under Dersom-kommandoen vil ulikheten nå alltid være rett vei. Men det blir feil å ha A etter tekst1. Men dette ordner vi lett ved å klikke på A og skrive inn $x(A)$ som vist på figur 11.10. Det endelige resultat er vist på figuren under.





Figur 11.10: Du kan gjøre utregninger i tekstboksen. Hent fram objektet du vil behandle (i dette tilfellet *A*), klikk på feltet og skriv inn kommandoer etc (i dette tilfellet `x(A)`).

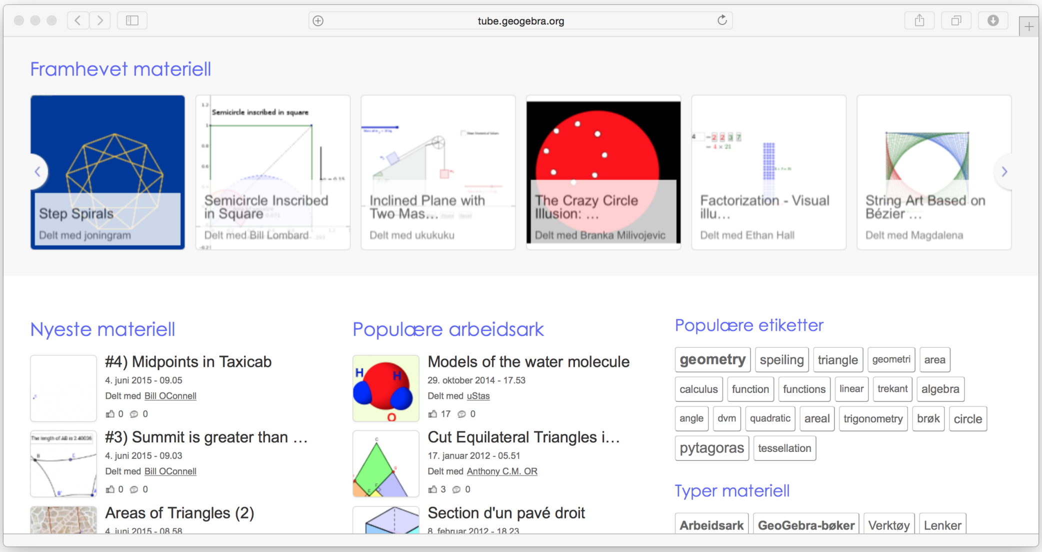


Figur 11.11: Du kan endre plasseringen til et objekt under «Avansert» I «Egenskaper»-vinduet.

■

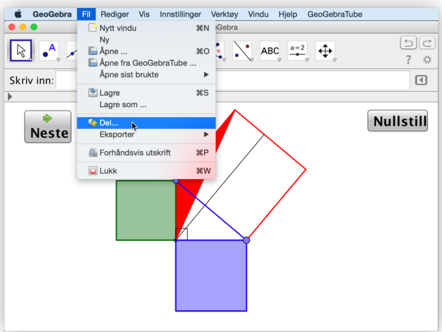
12 GeoGebraTube

Noen ganger vil du kanskje at elevene skal eksperimentere med en animasjon eller simulering som du har laget på forhånd. Du kan da dele selve GeoGebra-filen med elevene. En fin måte å dele slike filer på er å bruke GeoGebraTube. Dette er GeoGebra-verdenens svar på youtube. Her kan du dele dine arbeidsark og du kan søke blant tusenvis av andre slike arbeidsark. I dette kapittelet vil vi vise hvordan du kan laste opp slike ark, tilpasse hvem som skal se arkene og hvordan du kan dele dem med andre.

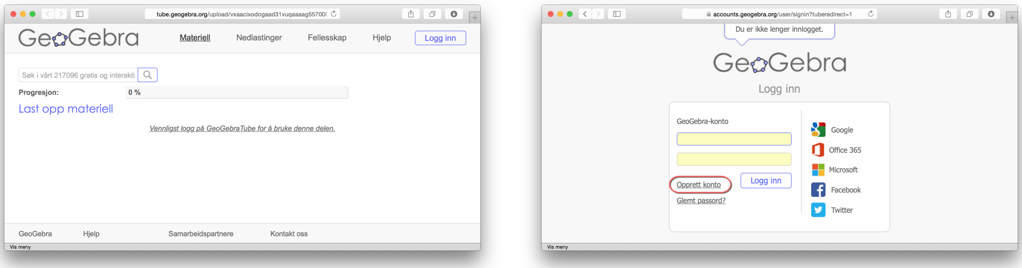


12.1 Lag en konto på geogebra.org

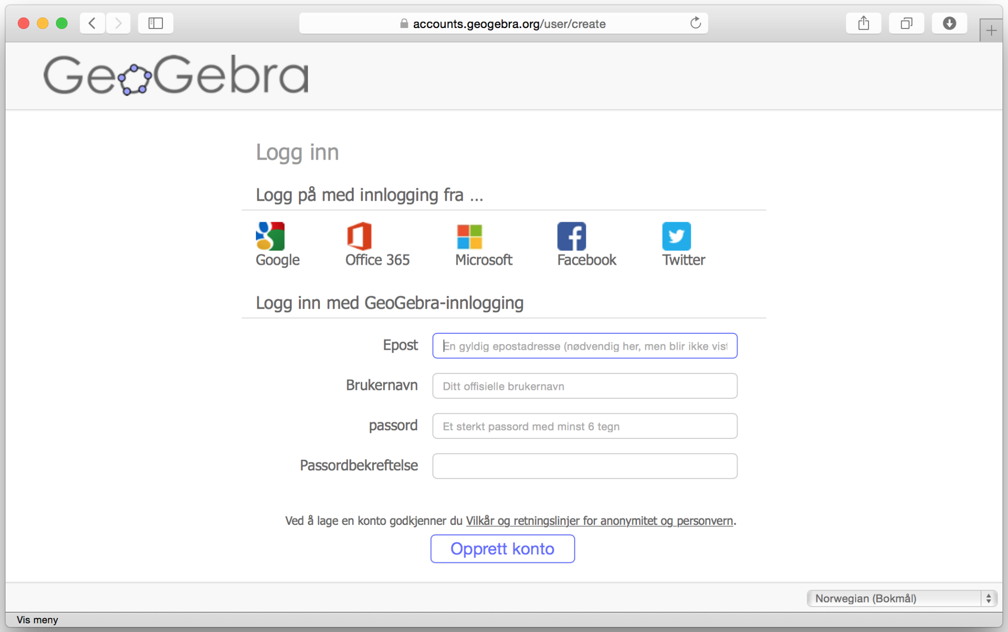
La oss si at du har laget en animasjon som du vil bruke til å bruke i et bevis for Pytagoras setning. For å dele denne på GeoGebraTube velger du Fil på menylinjen og klikker på Del. . . som vist på bildet til høyre. Dersom du ikke allerede er logget inn på geogebra-siden, vil du få opp en melding om å logge deg inn som vist på figur 12.1 på neste side. Klikk på «Vennligs logg på. . . ». Du vil da komme til en side hvor du kan logge deg inn. Har du ikke en konto klikker du på «Opprett konto». På neste side vil du bli bedt om å oppgi



informasjon om deg selv. Her kan du velge å logge inn fra Google, Office 365, Microsoft, Facebook eller Twitter om du allerede har en slik konto. Gjør du dette, vil du slippe å lage et nytt passord og brukernavn på geogebra.org. Når du er ferdig med dette, er du klar til å laste opp filen til tube.geogebra.org.



Figur 12.1: Du må være innlogget på tube.geogebra.org for å kunne dele en fil

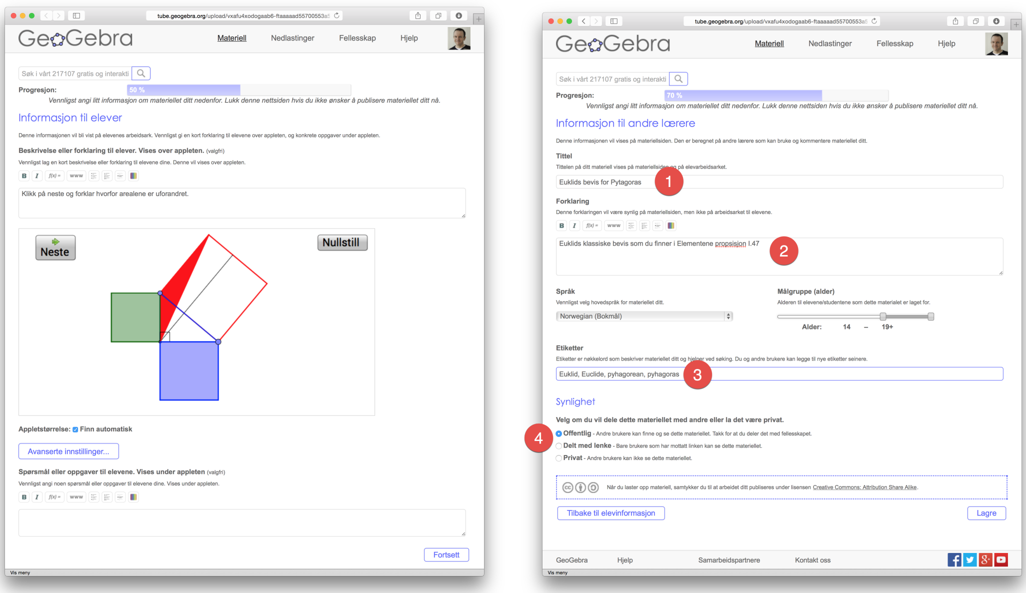


Figur 12.2: Registrering av konto på GeoGebra.org

12.2 Del innhold på GeoGebraTube

Dersom du er innlogget på geogebra.org vil du få opp en side som vist på figur 12.3 når du velger å dele et arbeidsark. Her kan du skrive inn tekst som eventuelt skal stå over og under appletten. Klikker du på «Fortsett» nederst til høyre vil du komme til en side hvor du kan skrive inn informasjon til lærere. Her skriver du en tittel (1), beskrivelse (2) og etiketter

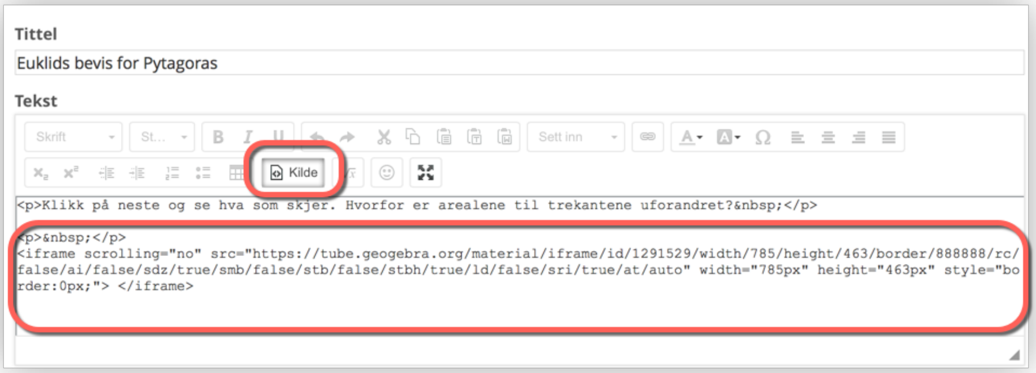
(3). Du kan også velge hvem som skal kunne se det du deler (4). Dersom du kun ønsker at elevene dine skal se innholdet velger du «delt med lenke». Da vil ingen andre kunne søke opp ditt materiale, men dine elever vil kunne se det dersom du deler lenken til innholdet. Klikk til slutt «Lagre».



Figur 12.3: Informasjon til elever. Her kan du skrive det som skal stå over og under selve appletten.

Figur 12.4: Det fins flere måter å dele en arbeidsbok på.

Du er nå klar til å dele innholdet med andre. Dersom du vil bygge inn innholdet i et lms (for eksempel Its learning eller Fronter) kan du velge «Bygg inn (embedd)» (1) (se figure 12.4). Da kan du kopiere koden (html) (3) og lime den inn som html-kode i lms-et som du bruker. Husk at du da ikke må lime det inn som vanlig tekst, men må velge å lime inn som kode. Se figur 12.5. Merk at du kan tilpasse hva som skal være med av menyer, verktøylinjer og liknende (4). Velg «Del» (2) dersom du kun vil dele lenke til GeoGebraTube.



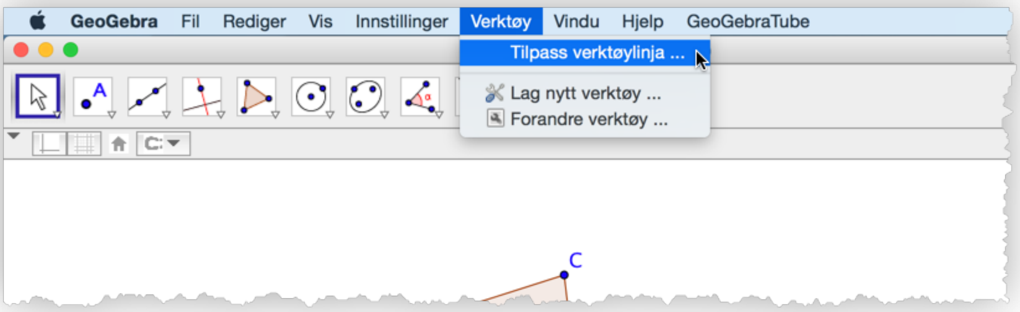
Figur 12.5: Du kan bygge inn GeoGebra-applets i for eksempel Its learning.

12.3 Tilpassing av menyer

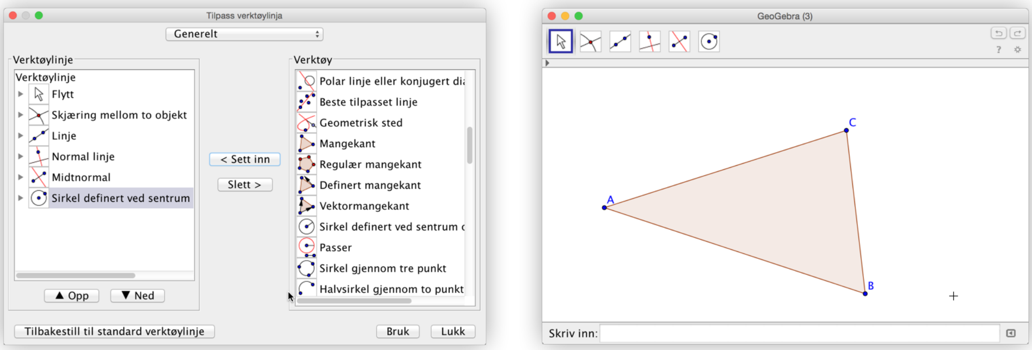
Noen ganger ønsker vi for eksempel at elevene skal konstruere et geometrisk sted uten å bruke allerede ferdige verktøy i GeoGebra. Da kan det være lurt å tilpasse verktøymenyen.

■ **Eksempel 12.1** Vi ønsker å lage et arbeidsark der det er tegnet inn en trekant og hvor vi ønsker at elevene skal konstruere den omskrevne sirkelen. Dette blir trivielt om elevene har tilgang på verktøyet *Sirkel gjennom tre punkt*. Vi ønsker derfor at elevene kun skal ha tilgang på *Flytt*, *Normal linje*, *Midtnormal*, *linje*, *Sirkel definert ved sentrum og periferipunkt* og *Skjæring mellom to objekt*.

Etter å ha laget en trekant velger vi «Verktøy» på menylinjen og «Tilpass verktøylinje. . . »

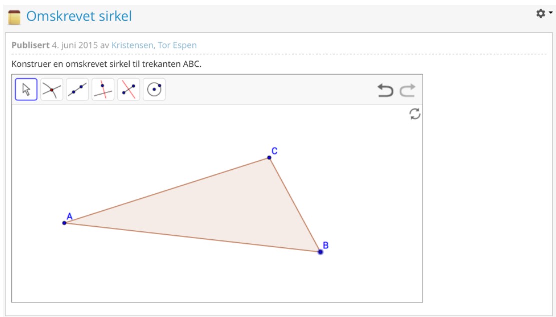


I vinduet som kommer opp kan du nå slette alle verktøy som du ikke vil skal vises og legge til de du ønsker å vise. På figur 12.6 har vi tatt vekk alle verktøyene uten de vi ønsker.



Figur 12.6: Kun seks verktøy er tilgengelig.

Resultatet blir som vist på figur . Her har vi bygget appleten inn i et notat i Its learning.



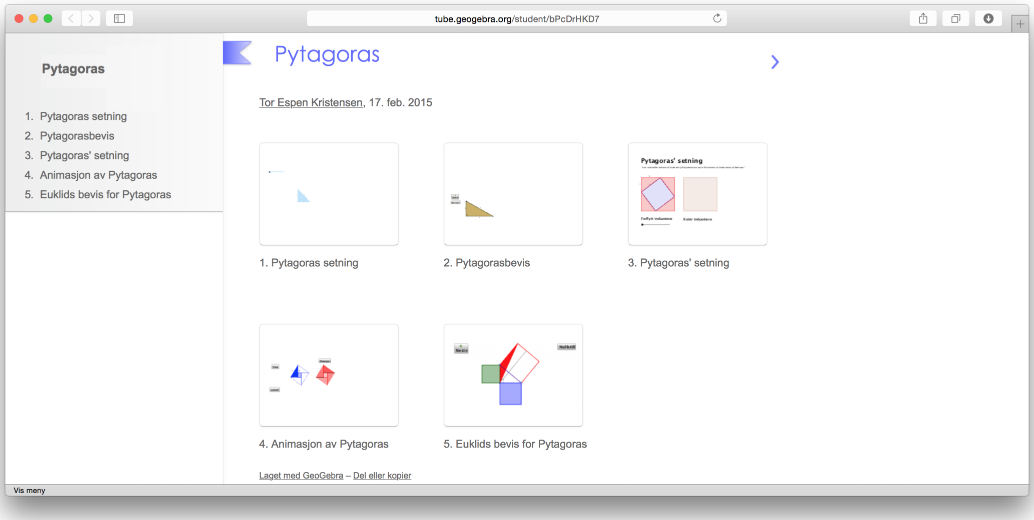
Figur 12.7: GeoGebra-applet bygget inn i et notat i Its Learning

■

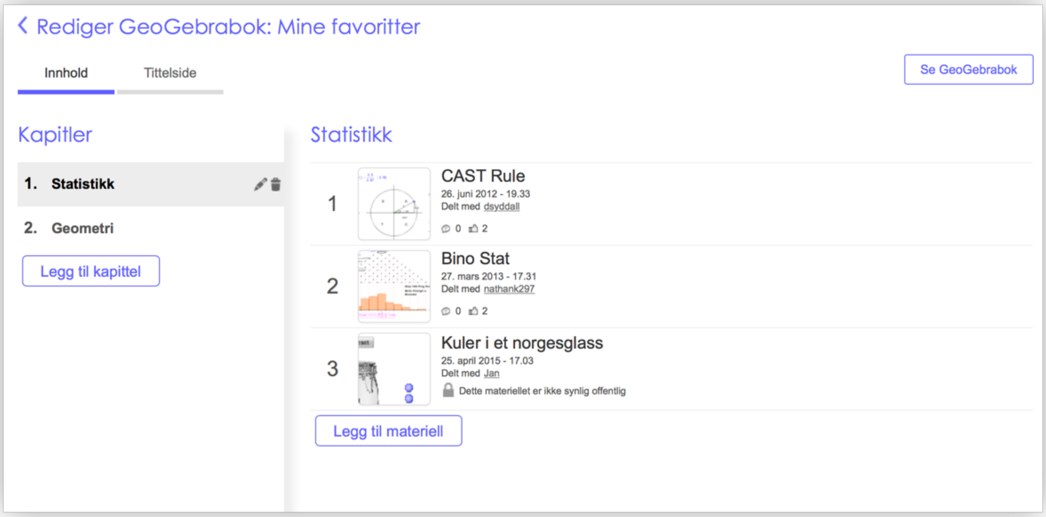
12.4 GeoGebrabok

En GeoGebrabok er en samling av ressurser som er lagt ut på GeoGebra.org. Har du for eksempel laget fire animasjoner til Pytagoras setning, kan du samle disse i en slik bok. Du lager en slik bok ved å klikke på «+Legg til i Geogebrabok».

Du vil da få valget om du vil legge materiellet til en ny GeoGebrabok eller om du skal opprette en ny. Velger du å oprette ny bok må du skrive inn tittel og eventuelt en forklaring til hva boken inneholder. Du kan også bestemme hvem skal kunne se GeoGebraboken. Det ferdige resultatet ser du på figur 12.8. Du kan også legge til kapitler i en GeoGebrabok. Dersom du vil flytte en ressurs fra et kapittel til et annet, kan du dra og slippe ressursen der du måtte ønske den. På samme måte kan du også endre rekkefølgen på ressursene i en bok. Se figur 12.9.



Figur 12.8: En GeoGebrabok.



Figur 12.9: Du kan organisere en GeoGebrabok i kapitler

13 Følger/Lister

Det er ganske mye du kan få til i GeoGebra ved å bruke følger. En følge er i GeoGebra en liste definert ut fra en eksplisitt formel. Du lager en følge ved å skrive kommandoen

```
Følge[<Uttykk>,<Variabel>, <Fra>, <Til>,<Trinnlengde>]
```

Dersom du ikke oppgir trinnlengde blir den satt til 1. Vi illustrerer dette med noen eksempler. Vi skal senere bruke følger til å simulere statistiske forsøk.

Tabell 13.1 side 145 viser en oversikt over de viktigste kommandoene.

13.1 Eksempler

■ **Eksempel 13.1** Lag en liste over de 10 første oddetallene. Lag også en følge der element nummer n er summen av de n første oddetallene.

Løsning:
Vi skriver inn kommandoen `Følge[2n-1, n, 1, 10]`. Her er det med andre ord n som varierer fra 1 til 10, og den eksplisitte formelen er $2n-1$.

Vi får følgende liste:

`liste1= {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19}`

For å finne summene av de k første elementene i denne følgen, bruker vi kommandoen `Sum[liste1, k]`. Dersom du vil finne summen av alle elementene i en liste skriver du `Sum[liste1]`.

I vårt eksempel skriver vi derfor inn `Følge[Sum[liste1, k], k, 1, 10]`. Vi får da listen

`{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}` ■

■ **Eksempel 13.2** En følge er definert ved at $a_1 = 1$ og $a_{n+1} = 3a_n - 1$. Lag en liste over de 10 første elementene. ■

Løsning:
Vi har her en rekursiv formel for følgen. Vi bruker da kommandoen

```
IterasjonListe[<Funksjon>, <Startverdi>, <Tall på iterasjoner>]
```

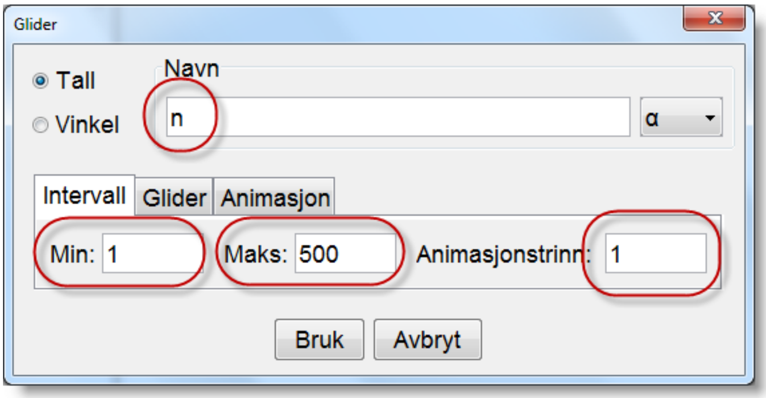
I dette eksempelet skriver vi derfor inn `IterasjonListe[3x-1, 1, 10]`. Merk at vi må bruke x som variabel her.

Oppgave 13.1
Lag en liste bestående av de 100 første kvadrattallene.

Oppgave 13.2

I denne oppgaven skal vi simulere n terningkast, der n er et tall som skal variere på en glider.

a) Velg verktøyet *Glider* og klikk i grafikkfeltet der du ønsker å plassere glideren. I vinduet som da kommer opp kaller du glideren for n, velger «Min» til å være 1 og «Maks» til 500. Sett «Animasjonstrinn» til å være 1. Se figur 13.1.



Figur 13.1: Glideren n kan varieres fra $n = 1$ til $n = 500$.

b) Skriv inn `L=Følge[TilfeldigMellom[1, 6], i, 1, n]` i inntastingsfeltet. Du får da en liste med n tilfeldige tall mellom 1 og 6.

c) Skriv inn tallene fra 1 til 6 i cellene A1 til A6 i regnearket.

d) Skriv inn `TellDersom[x == A1, L]` i B1, og autokopier denne formelen ned til og med celle B6. (To likhetstegn betyr at GeoGebra skal teste om noe er likt). Vi har nå laget en frekvenstabell over alle kastene.

e) Det kan være gunstig å regne ut relativ frekvens slik at radhøydene ikke varierer for mye når vi øker n. I C1 skriver vi derfor `=B1/n`, i C2 skriver `=B2/n` etc. (autokopier).

f) Skriv inn `Søylediagram[{1, 2, 3, 4, 5,6},C1:C6]` i inntastingsfeltet. Du vil da få et søyeldiagram som viser relativ frekvens til antall øyne på terningene.

Det er ikke kun tallfølger vi kan jobbe med i GeoGebra, noe følgende eksempler viser.

Vi vil lage «snorkunst». Skriv inn kommandoene

`Følge[(0,k/10), k, 1, 10]` og `Følge[(k/10,0),k,1,10]`

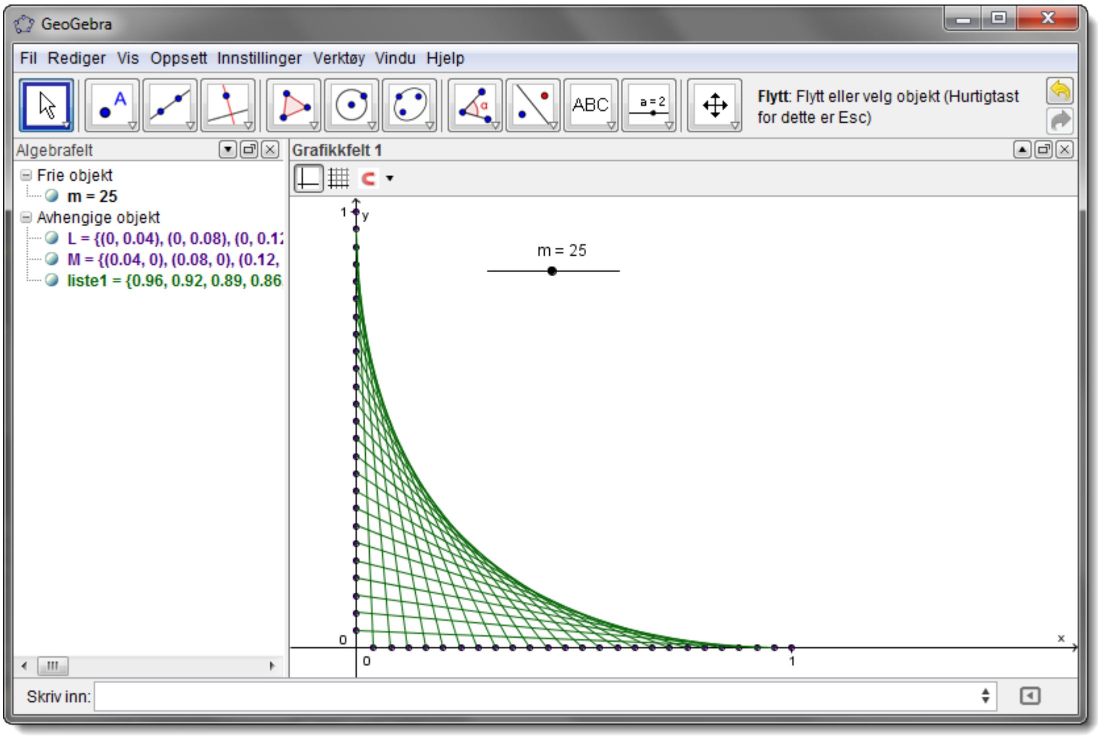
i inntastingsfeltet. Du vil da få to lister `liste1` og `liste2` med punkt. Skriv deretter inn

`Følge[Linjestykke[Element[liste1,i],Element[liste2,11-i]],i,1,10].`

Du vil da få en følge med 10 linjestykker som til sammen utgjør en nokså estetisk figur!

Vi vil nå ta dette et steg videre. Kanskje 10 linjestykker var litt i det minste laget? Vi vil derfor lage m linjestykker, der m varierer langs en glider. Her er hva vi må gjøre:

– Skriv inn `m=50` i inntastingsfeltet



Figur 13.2: Snorkunst! Hvilken kurve får vi langs linjene?

- Klikk på den lille «kula» til venstre for m i algebrafeltet slik at du får en glider i grafikkfeltet.
- Skriv inn kommandoene
  `L=Følge[(0,k/m), k, 1, m]`,
  `M=Følge[(k/m,0), k, 1, m]` og
  `Følge[Linjestykke[Element[L, i], Element[M, m-i]], i, 1, m]`.
- Nå kan du variere glideren m for å endre antall linjestykker. Du kan endre steglengden og hvor stor m kan være ved å høyreklikke på m og velge egenskaper. Under «Glider» kan du endre disse verdiene.

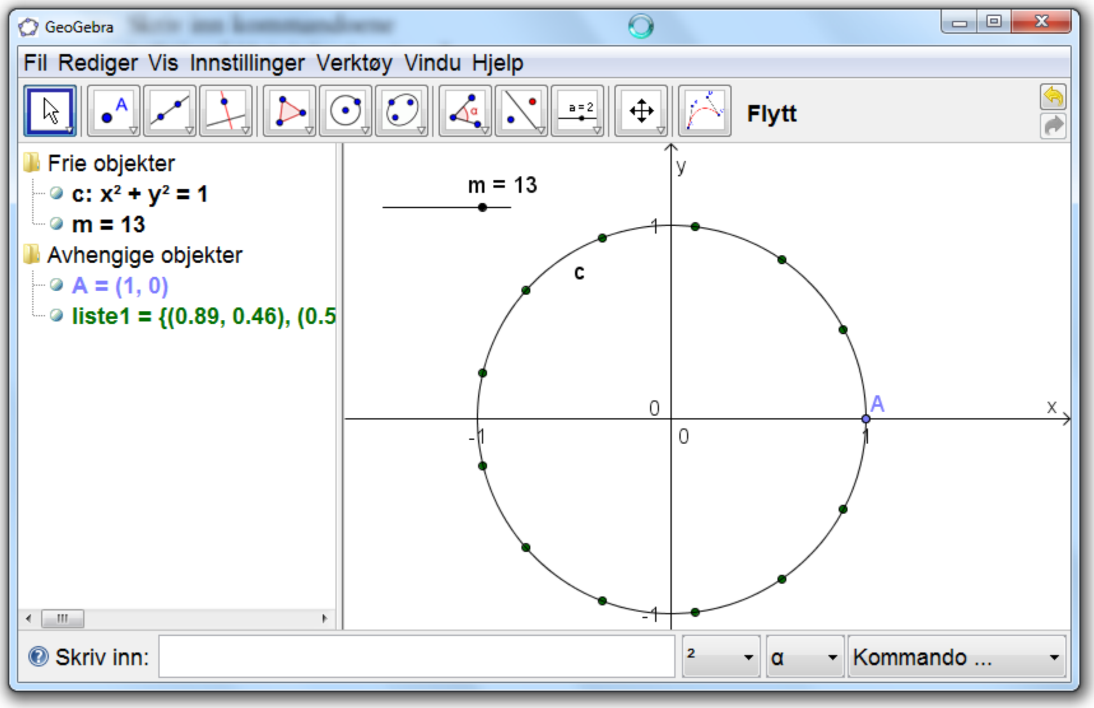
Selv om vi ikke skal gjøre det her, så er det mulig å vise at denne kurven har likningen

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$

Oppgave 13.3

Tegn en sirkel med radius 1 og sentrum i origo ved skrive inn likningen for sirkelen, $x^2 + y^2 = 1$, i inntastingsfeltet. Del sirkelen i m like store deler, der m er en glider som varierer fra 1 til 18. (Se figur 13.3)

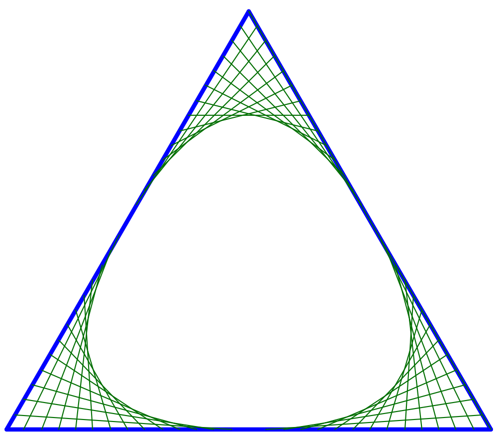
Tips: Du kan få glede av kommandoen `Roter[<Objekt>,<Vinkel>,<Punkt>]`.



Figur 13.3: Her er $m = 13$ punkt fordelt likt ut over en sirkel.

Oppgave 13.4

Se om du klarer å lage følgende linjedesign:



Tips: Du kan få glede av kommandoen Punkt[<Punkt>,<Vektor>]. Med denne kan du tegne inn m punkt langs en vektor $\vec{u}$ ved å skrive inn

```
Følge[Punkt[A, k/m*u], k, 1, m].
```

I tabell 13.1 finner du en oversikt over de viktigste kommandoene du kan bruke på lister. Du finner en komplett liste under Hjelp for inntasting (under kategorien «Liste»).

Kommando	Forklaring
Min[<Liste>]	Gir det minste elementet i listen
Maks[<Liste>]	Gir det største elementet i listen
Følge[<Uttrykk>, <Variabel>,<Fra>,<Til>]	Gir ei liste av objekter som blir laget ved å anvende det gitte uttrykket i den gitt variabel fra et tall til et annet.
Følge[<Uttrykk>,<Variabel>,<Fra>,<Til>,t]	Samme som over, men oppgir i tillegg hva trinnlengden t skal være.
Sum[<Liste>]	Beregner summen av alle elementene i lista.
Sum[<Liste>,<Antall elementer n>]	Beregner summen av de første n elementene i lista.
Element[<Liste>,<Tall n>]	Gir det n-te elementet i lista
TellDersom[<Vilkår>,<Liste>]	Teller antall elementer i lista som tilfredsstiller vilkåret.
IterasjonListe[f(x), a, m]	Gir ei liste med m elementer der det første elementet a_1 er a, det andre er a_2 er $f(a_1)$. Mer generelt er $a_{n+1} = f(a_n)$.
Lengde[<Liste>]	Gir lengden på lista, dvs. antall elementer.
Sorter[<Liste>]	Sorterer ei liste av tall, tekstobjekter eller punkter.
BeholdDersom[<Vilkår>,<Liste>]	Lager ei ny liste som bare inneholder elementene i den opprinnelige lista som oppfyller vilkåret.

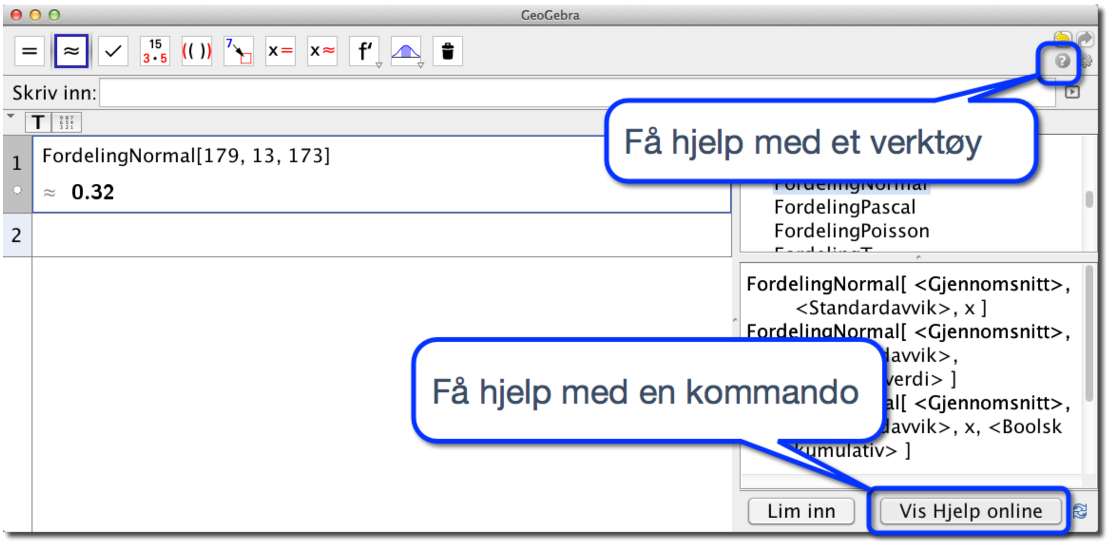
Tabell 13.1: Ulike kommandoer på lister

14 Tips og triks

Det er viktig å få en god arbeidsflyt når du bruker et digitalt verktøy. Jeg vil her dele noen tips og triks som forhåpentligvis kan gjøre arbeidet med GeoGebra enda enklere.

14.1 Hvor får jeg hjelp?

Du kan lett finne hjelp på nettet ved å trykke på en av knappene som vist på figur 14.1 nedenfor.



Figur 14.1: Du kan få hjelp på nettet ved å trykke på en av de to knappene.

Dersom du virkelig står fast, eller det er noe du gjerne skulle ha fått til, men vet ikke helt hvordan det gjøres trykk F1 og du vil få opp (i nettleseren din) brukermanualen til GeoGebra. Her står det meste. Dersom dette ikke hjelper deg er det flere fora hvor du kan henvende deg. Det er nok av frivillige som vil svare! Her er noen steder du kan prøve:

- `http://www.geogebra.org/forum/`. Her er også et eget forum på norsk.
- `https://www.facebook.com/groups/309175558480/`. Dette er en GeoGebra-gruppe på Facebook.
- `http://torespensblogg.blogspot.com`. Dette er undertegnede sin blogg.

14.2 Lær deg de viktigste hurtigtastene

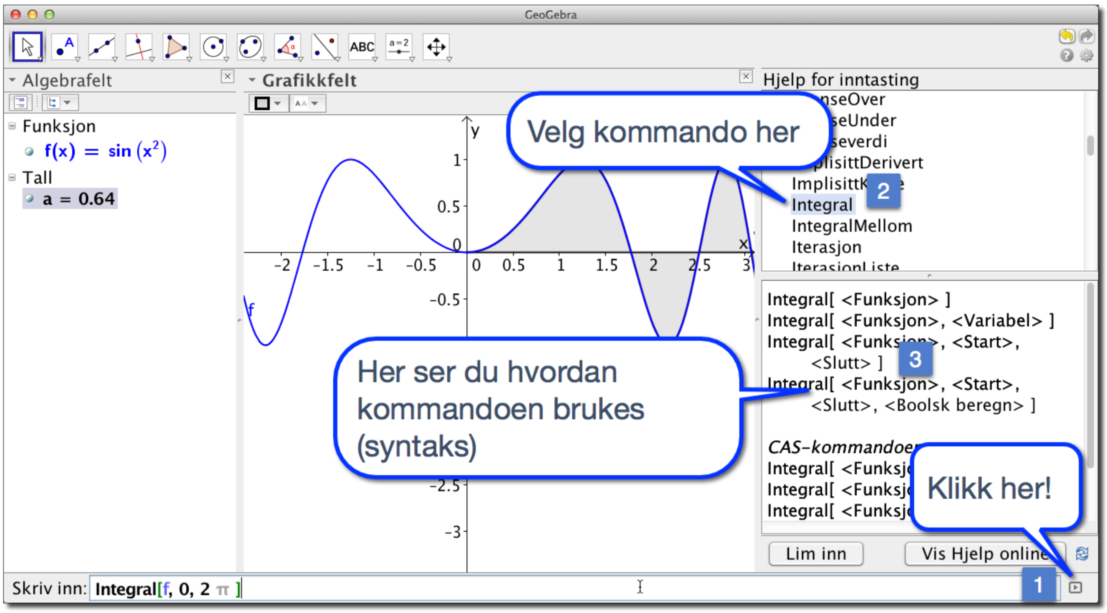
Det fins mange slike hurtigtaster, og jeg vil ikke komme med noen utfyllende liste her. Det er det vel ingen som vil huske uansett? Tabell 14.1 viser de jeg bruker mest.

Windows	Mac	Beskrivelse
Ctrl + +	⌘ cmd + +	Zoom inn
Ctrl + -	⌘ cmd + -	Zoom ut
Enter	Enter	Veksle mellom inntastingfeltet og grafikkfelt
Ctrl + d	⌘ cmd + d	Veksle mellom visning som verdi, kommando eller definisjon (i algebrafeltet og regnearket)
Ctrl + n	⌘ cmd + n	Åpne ny GeoGebrafil i nytt vindu
Ctrl + s	⌘ cmd + s	Lagre
Ctrl + Shift + S	⌘ cmd + Shift + S	Åpne og lukke regnearkvinduet
Ctrl + Shift + A	⌘ cmd + Shift + A	Åpne og lukke algrabravinduet
Ctrl + Shift + C	⌘ cmd + Shift + C	Kopiere geometrifeltet til utklippstavlen slik at du kan lime det inn som bilde i for eksempel en Word-fil (Ctrl+v)
Alt + 2	Ctrl + 2	^{2} (opphøyd i 2)
Alt + 9	Ctrl + 9	^{9} (dvs at dette fungerer for alle tallene fra 2 til 9.)
Alt + p	Ctrl + p	π
Alt + e	Ctrl + e	e (Eulers tall $2,7182818284590\ldots$)
Alt + o	Ctrl + o	«Grader»
Alt + Shift + ;	Ctrl + Shift + ;	$\leq$
Alt + Shift + :	Ctrl + Shift + :	$\geq$
Alt	Ctrl	$\pm$
Alt + Shift + 8	Ctrl + Shift + 8	$\otimes$ (Vektorprodukt)
Alt + a	Ctrl + a	α
Alt + s	Ctrl + s	σ
F1	F1	Hjelp (for valgte verktøy)
F2	F2	Start redigering av valgt objekt
F3	F3	Kopier definisjon av valgt objekt til inntastingsfeltet
F4	F4	Kopier navnet til valgt objekt til inntastingsfeltet
F5	F5	Kopier navn til valgt objekt til inntastingsfeltet
F9	F9	Rekalkuler alle objekt (inkludert tilfeldige tall)

Tabell 14.1: Se `http://wiki.geogebra.org/nn/Tastatursnarvegar` for flere hurtigtaster

14.3 Bruk hjelp for inntasting

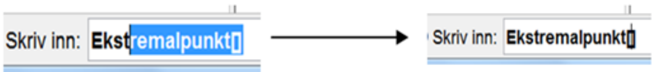
Om du ikke husker en kommando, så finner du alle under «Hjelp for inntasting» nederst til høyre i GeoGebra (som vist på figur 14.2).



Figur 14.2: Du kan bla i kommandoer i listen du får under hjelp for inntastin.

14.4 Trykk enter for å fullføre kommandoer

For å fullføre en kommando i inntastingsfeltet er det bare å tykke på <enter>:



Figur 14.3: Velg foreslåtte kommando ved å trykke enter

14.5 Trykk enter for å skive i inntastingsfeltet

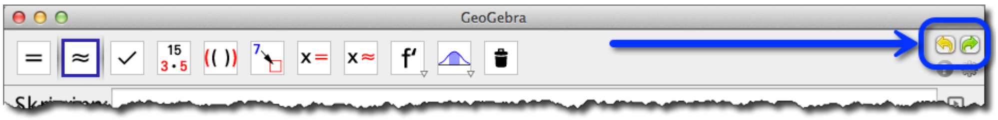
Dersom du skal skrive inn en kommando i inntastingsfeltet er det bare å trykke <enter> og du kan begynne å skrive inn kommandoen.

14.6 Bla i tidligere brukte kommandoer

Du kan bla i tidligere kommandoer som du har skrevet i inntastingsfeltet ved å bruke piltastene (opp for tilbake i tid).

14.7 Aldri for sent til å angre

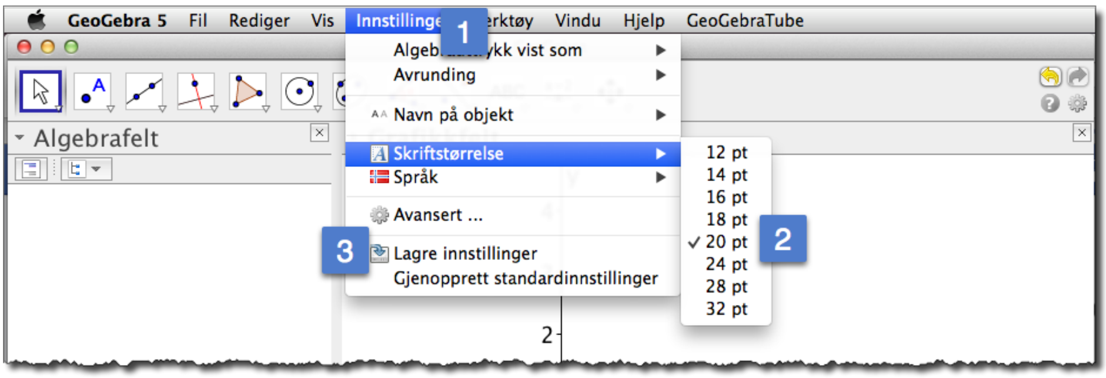
Du kan angre noe du har gjort i GeoGebra ved å trykke Ctrl+z eller klikke på knappene øverst til høyre i GeoGebra.



Figur 14.4: Du kan angre på at du angret også. . . .

14.8 Endre skriftstørrelse

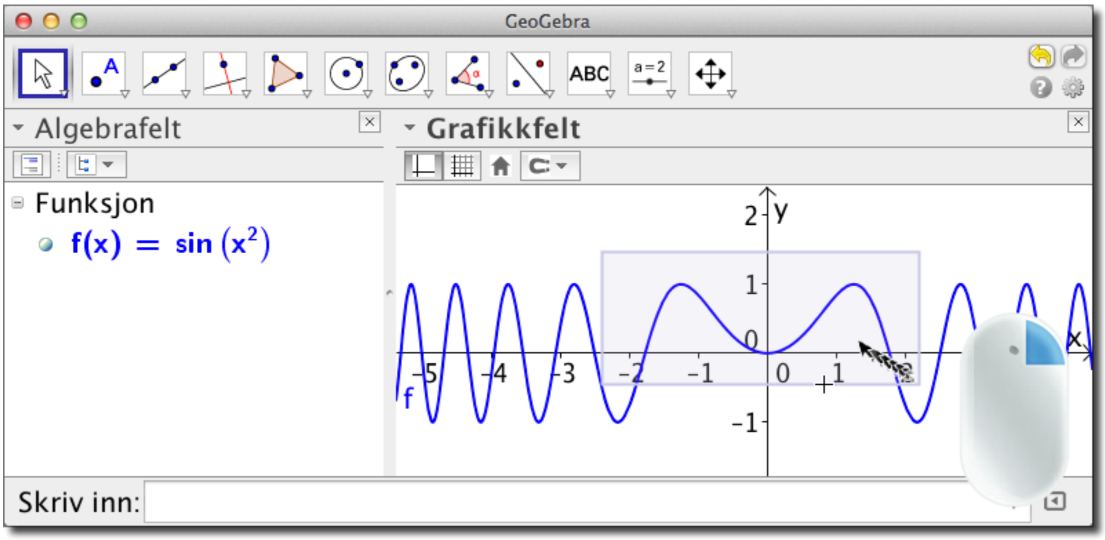
Du kan endre skriftstørrelsen til menyer etc. i GeoGebra under innstillinger (1), som vist på figur 14.5. Velg passe skriftstørrelse (2) og lagre innstillinger (3) for at endringene skal gjelde neste gang du åpner GeoGebra.



Figur 14.5: Det kan være en god ide å bruke litt større skriftstørrelse dersom du vil vise noe for en hel klasse.

14.9 Zoom inn til ønsket område

Du kan zoome inn til et ønsket område i geometrivinduet ved å holde høyreknappen nede på musa og dra rektangel over det ønskede området. Merk at forholdet mellom høyde og bredde vil bli bevart.



Figur 14.6: Du kan zoome inn til et området ved å holde høyre musetast nede mens du drar rektangel over området.

14.10 Bruk punktum som desimalskilletegn

Dersom du får en feil, eller noe ikke helt fungerer, så har du kanskje brukt komma som desimalskille og ikke punktum...

14.11 Skriv til celler i regnearket fra inntastingsfeltet

Du kan skrive til en celle i regnearket fra kommandofeltet. Dette kan være nyttig dersom du skal bruke litt lange kommandoer. Skriver du for eksempel

```
A1=Integral[f, 0, 2]
```

så vil svaret på denne kommandoen stå i A1.

14.12 Endre navn på objekter den lette måten

Du kan endre navn på ting som nettopp er laget ved å skrive inn navnet rett etter at det er laget. Senere kan du selvsagt også skifte navn på objektet. Da kan du først klikke på det i algebrafeltet (slik at det blir aktivert) og så begynne å skrive inn det nye navnet.

Bibliografi

Amdal, A. (2009a). Vincenzo vivianis setning. *Tangenten*, (3).

Amdal, A. (2009b). Vincenzo vivianis setning – del 2. *Tangenten*, (4).

Gjøvik, Ø. and Sanne, A. (2009). Skriving i matematikkfaget. *Tangenten*, (4). Artikkelen kan lastes ned fra http://www.caspar.no/tangenten/2009/Gjovik-Sanne-409.pdf.

Polya, G. (1957). *How to solve it*. Princeton University Press, second edition.

Utdanningsdirektoratet (2015). Eksamensoppgaver for grunnskole og videregående skole. http://www.udir.no/.

Boka gir en grundig innføring i matematikkprogrammet GeoGebra. Den er bygget opp rundt tema som er aktuelle for lærere i videregående skole. Forfatteren veksler mellom ferdige eksempler og øvingsoppgaver, og han har også tatt med en del eksamensoppgaver. Boka kan gjerne brukes til selvstudium, men er først og fremst tenkt som kursmateriell til Norsk GeoGebra-institutt sine kurs.

Boka kan lastes fra Matematikksenterets nettsider (www.matematikksenteret.no) Der kan du også bestille trykt versjon av boka.

Om forfatteren

Tor Espen Kristensen er lektor ved Stord vidaregåande skule med undervisningsfagene matematikk og fysikk. Tor Espen er en erfaren og etterspurt kursholder, og han er sertifisert GeoGebra Institute Trainer.

Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

ISBN 978-82-997448-4-3 (Bok)
ISBN 978-82-997448-5-0 (PDF)