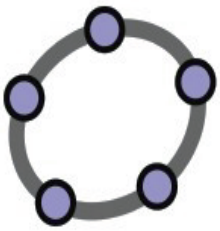
Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen



GeoGebra 6.0 for videregående skole

Av: Tor Espen Kristensen

(C) Tor Espen Kristensen/Matematikksenteret, 2019

6. utgave / 1. opplag 2019

Norsk GeoGebra-institutt
Matematikksenteret NTNU
7491 Trondheim

Materialet er omfattet av åndsverkslovens bestemmelser. Uten særskilt avtale med rettighetshaverne er enhver eksemplarframstilling og tilgjengeliggjøring bare tillatt i den utstrekning det er hjemlet i lov eller tillatt gjennom avtale med Kopinor, interesseorgan for rettighetshavere til åndsverk. Utnyttelse i strid med lov eller avtale kan medføre erstatningsansvar og kan straffes med bøter eller fengsel.

Forord

Denne boka har utviklet seg fra små hefter som jeg har brukt på ulike kurs. Den har blitt oppdatert i takt med GeoGebra fra versjon 3.2 og fram til versjon 6.0. Boka er bygget opp rundt en del tema som er aktuelle for lærere i videregående skole, og jeg har prøvd å veksle mellom eksempler og oppgaver. Jeg håper at du vil få se hvor nyttig program GeoGebra er gjennom arbeidet med de ulike oppgavene og eksemplene. Boka kan brukes til selvstudium, men er først og fremst tenkt som kursmateriell til Norsk GeoGebra-institutt sine kurs. Vi har tatt med en god del oppgaver, men vil poengtere at du ikke finner ferdige undervisningsopplegg i denne boka. Alle eksamensoppgavene er hentet fra Utdanningsdirektoratet (2017). Jeg vil ikke her ta stilling til om dette er den beste måten å løse de ulike oppgavene eller hva som er læringseffekten av å gjøre det ene eller det andre. Her vil vi kun kose oss med selve programmet og løsningene av en del oppgaver.

Før vi setter i gang vil jeg takke for mange gode innspill til denne boka, både fra kursdeltakere og fra kollegaer. Jeg vil spesielt takke for gode kommentarer fra Susanne Stengrundet, Sigbjørn Hals, Torger Nilsen, Anders Sanne, Jostein Våge, Trine Brun og Rikard Stokke.

Dersom du har spørsmål, kommentarer eller forslag til forbedringer av denne boka, så vil vi sette pris på om du sender oss noen ord. Bruk gjerne epostadressen `tork73@gmail.com` til dette.

Du kan laste ned pdf-versjon av boka på Matematikksenterets nettsider (`http://www.matematikksenteret.no/`).

Innhold

1 Å komme i gang med GeoGebra 1
1.1 Grensesnittet 1
1.2 Endre innstillinger 4
1.2.1 Navn på aksene 4
1.3 Algebrafeltet 5
1.4 Larging av filer 6

2 Funksjoner i GeoGebra 9
2.1 Grafisk løsning 9
2.2 Skjæringspunkt mellom to objekt 16
2.3 Ulikheter 17
2.4 Funksjonsanalyse 20
2.5 Oppgaver 22
2.6 Arealet under en graf 24

3 Regnearket 29
3.1 Generelt om regnearket 29
3.2 Statistikk 33
3.3 Vis formlene 39
3.4 Regresjon 41
3.5 Overføre verdier til regnearket 45
3.6 Mer om regresjoner 46

4 Sannsynlighet 49
4.1 Simulering av stokastiske forsøk 49
4.2 Sannsynlighetskalkulatoren 50
4.3 Statistikk i sannsynlighetskalkulatoren 55

5 Geometri 58
5.1 Konstruksjoner 58
5.2 Perspektiver 65
5.3 Sporing 67
5.3.1 Flere oppgaver 69
5.4 Parameterframstillinger 71
5.5 Andre kurver 76

6 Verktøy for objekthandlinger 77
6.1 Glidere 77
6.2 Avkrysningsboks for å vise og skjule objekt 80
6.3 Sett inn et Innsettingsboks 81
6.4 Sett inn en knapp 83
6.5 Eksempel på animasjon 86

7 CAS i GeoGebra 89
7.1 Verktøylinjen i CAS 89
7.2 CAS-kommandoer 95
7.3 Differensiallikninger 99
7.3.1 Ordinære differensiallikninger 99
7.3.2 Retningsdiagram 100
7.4 Oppgaver 101

8 GeoGebra 3D 106
8.1 Grafikkfelt 3D 106
8.2 Verktøy til tegning og konstruksjon av tre-dimensjonale objekter 108
8.3 Flater 111
8.4 Vise plan i 2D 113
8.5 Omdreiingslegemer 115
8.6 Oppgaver 116

9 Følger/Lister 123
9.1 Eksempler 123
9.2 Snorkunst i GeoGebra 125
9.3 Oppgaver 127

10 Egne verktøy i GeoGebra 131
10.1 Eksempler 131

11 Tekst og bilder i GeoGebra 137
11.1 Legge til bilder 137
11.2 Sette inn tekst 138

12 GeoGebra.org 143
12.1 Lag en konto på geogebra.org 143
12.2 Mer om GeoGebra.org 144
12.3 Tilpassing av verktøylinja 147
12.4 GeoGebrabok 147

13 Kopiere og lime inn i en tekstbehandler 150
13.1 Skjermutklipp på Mac 150
13.1.1 Skjermbilde av rektangel 150
13.1.2 Skjermbilde av aktivt vindu 151
13.2 Skjermutklipp i Windows 153
13.2.1 Utklippsverktøy 153
13.2.2 Å sette inn bilder i nyere versjoner av Word 154

14 Tips og triks 155
14.1 Hvor får jeg hjelp? 155
14.2 Lær deg de viktigste hurtigtastene 156
14.3 Bruk hjelp for inntasting 156
14.4 Trykk enter for å fullføre kommandoer 156
14.5 Aldri for sent til å angre 157
14.6 Endre skriftstørrelse 157
14.7 Zoom inn til ønsket område 158
14.8 Bruk punktum som desimalskilletegn 158
14.9 Skriv til celler i regnearket fra inntastingsfeltet 158
14.10 Endre navn på objekter den lette måten 158

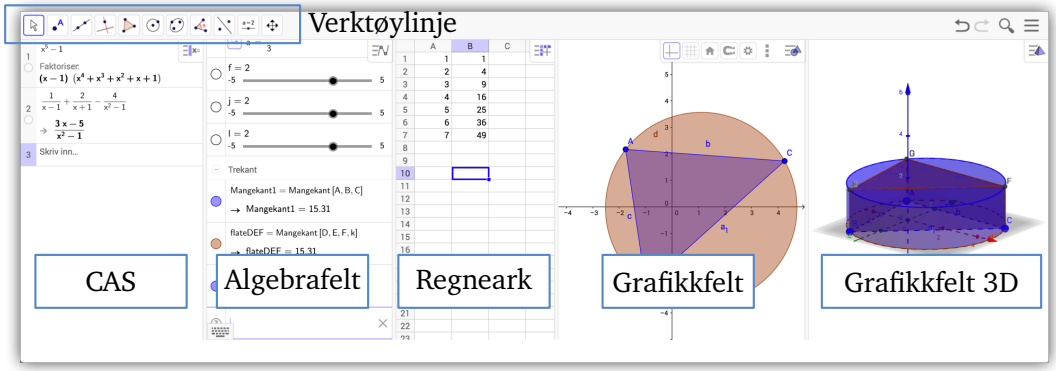
1 Å komme i gang med GeoGebra

GeoGebra er et program som kobler sammen blant annet geometri, algebra og funksjoner. Det inneholder dynamisk geometriprogram (både 2d og 3d), en grafplotter , regneark og et computer algebra system (CAS). Således er det et program som kan passe utmerket i skolesammenheng. Du kan bruke GeoGebra direkte i nettleseren din ved å gå til nettsiden `https://www.geogebra.org/classic`. Dersom du vil laste ned programmet, slik at du kan bruke det uten nett anbefaler vi at du gjør det via enten App Store, Google play eller Microsoft Store. Søk etter «GeoGebra classic 6» om du vil bruke versjon 6.[1]

1.1 Litt om grensesnittet til GeoGebra

GeoGebra er bygget opp rundt flere felt. I inntastingsfeltet kan du skrive inn tall, kommandoer, funksjonsuttrykk, etc. Det største feltet kaller vi for grafikkfeltet. Det er her du kan se grafer, geometriske figurer etc.

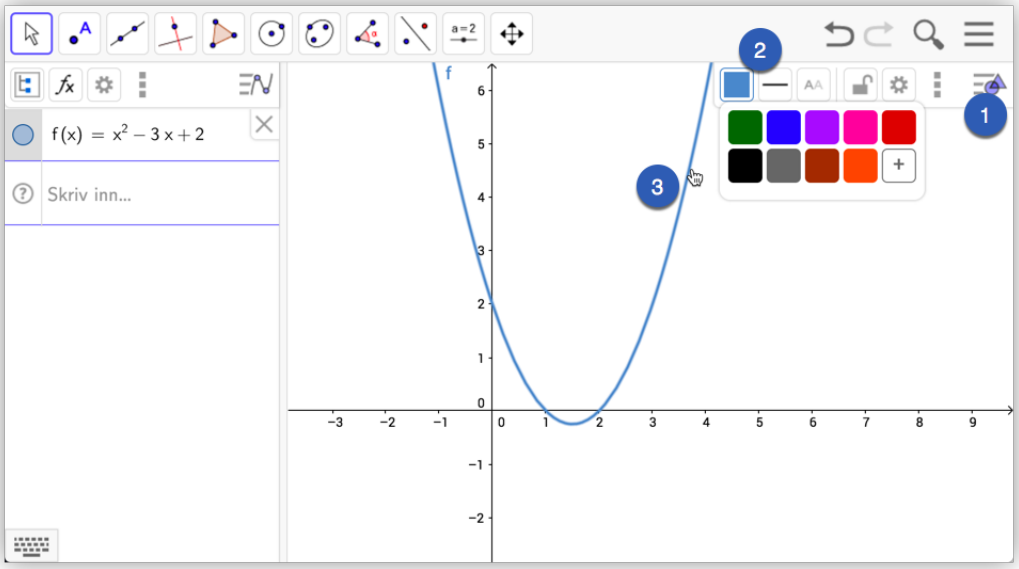
I algebrafeltet ser vi funksjonsuttrykk, tallverdier osv. I verktøylinjen finner vi ulike konstruksjonsverktøy (tegning av linjer, linjestykker, sirkler, normaler etc.) og en del andre verktøy som måling av lengder, areal, innsetting av tekst etc. GeoGebra har også et eget regneark. Dette fungerer på samme måte som andre regneark ved at du kan sette inn tall, tekst og formler. For å vise dette feltet må du gå til «Vis» på menylinjen og hake av for «Regneark». I CAS-feltet kan vi regne symbolsk og løse likninger eksakt og nummerisk. (se kapittel 7).



Figur 1.1: Noen av feltene som er tilgjengelige i GeoGebra

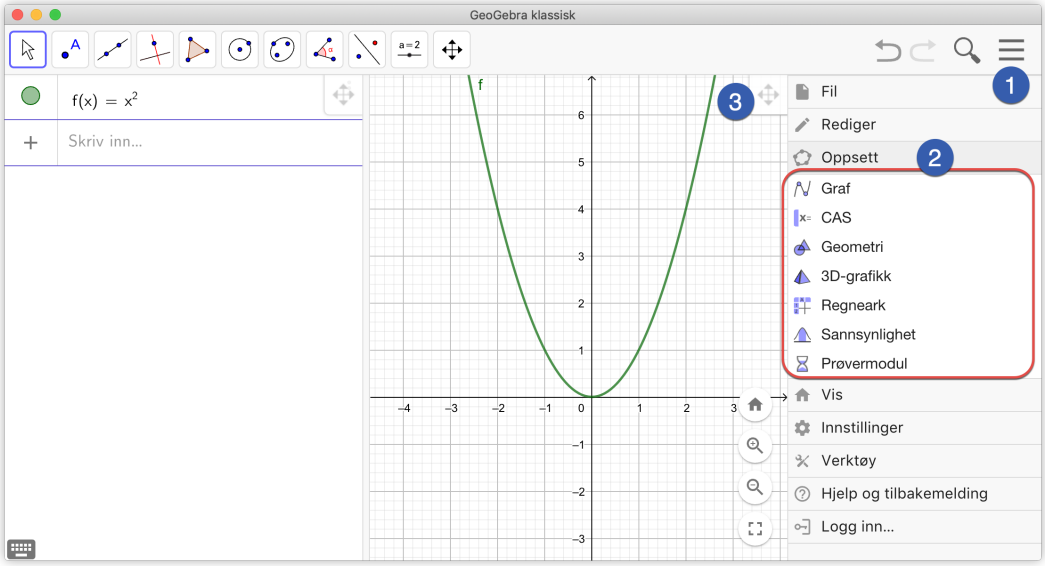
[1] Du kan alternativ laste det ned fra siden `http://download.geogebra.org/installers/6.0/`

Dersom du vil formatere objekter (endre farge på en graf etc) kan du først klikke på «Vis/skjul stilmeny» (1) (Se figur 1.2). Da vil du få fram stilmenyen (2). Klikk så på objektet du vil formatere og velg formatering.



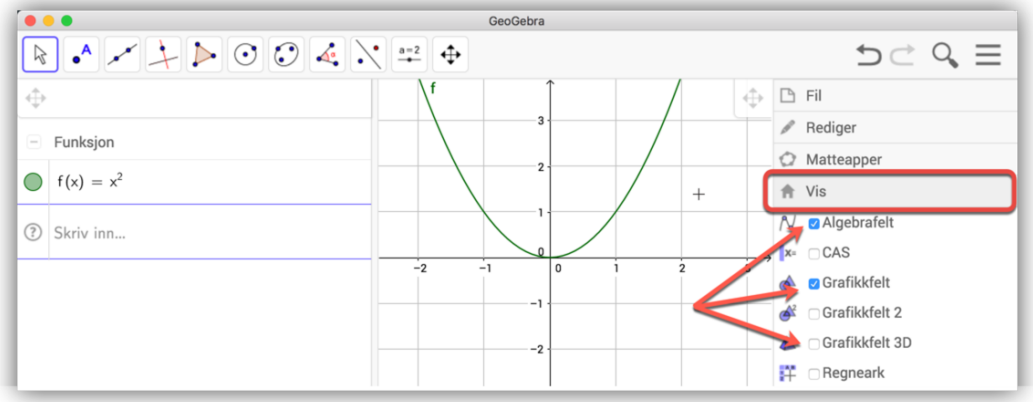
Figur 1.2: Du kan endre farge, tykkelse, skriftstørrelse etc ved å bruke stilmenyen.

I GeoGebra kan du veksle mellom ulike *oppsett*. For å bruke dem klikker du først på menyknappen (1) øverst til høyre og velger deretter «Matteapper» (2). Se figur 1.3. Merk at når denne menyen er aktiv kan du flytte på de ulike vinduene inne i GeoGebra. Dette gjør du ved å dra i (3).



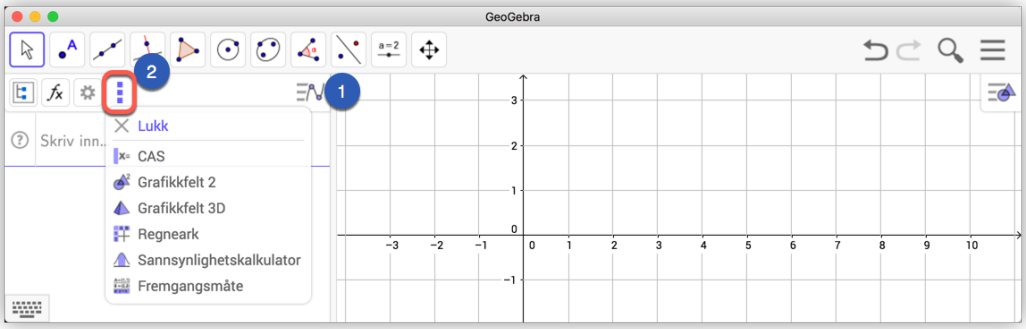
Figur 1.3: Ulike *oppsett* i GeoGebra

Du kan velge hvilke felt som skal vises ved å Velge «Vis» under menyen og deretter velge hvilke felt som skal vises, som vist på figur 1.4. Her kan du få fram inntastingsfeltet om du ønsker det (slik det var på tidligere versjoner). Merk at du da ikke kan skrive inn direkte i algebrafeltet lenger.



Figur 1.4: Du kan velge hvilke felt som skal vises under «Vis»

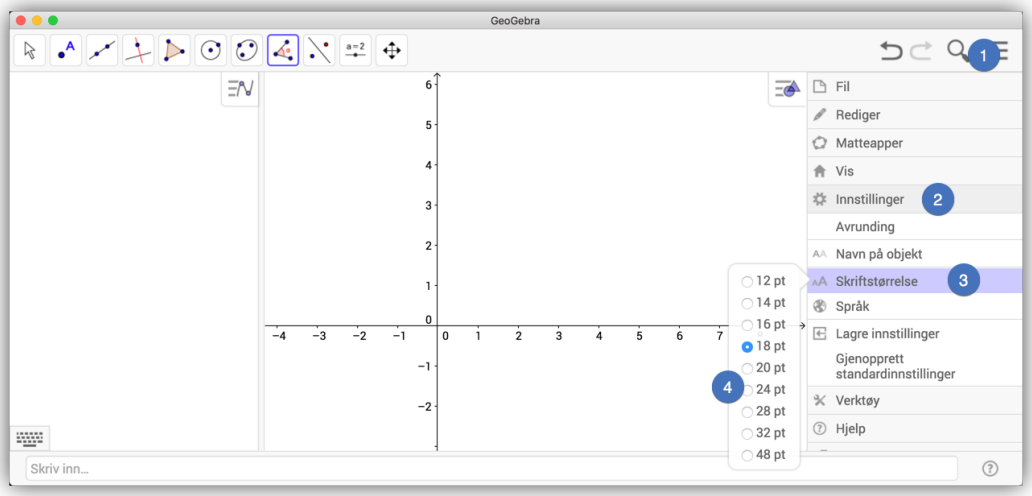
Du kan også velge hvilke felt som skal vises i stilmenyen (1) (se figur 1.5). Klikk på ⋮ (2) som vist på figur 1.5. Her kan du også lukke et felt ved å klikke på «Lukk».



Figur 1.5: Du kan velge hvilke felt som skal vises i stilmenyen. Merk at du også kan krysse ut (lukke) et felt her.

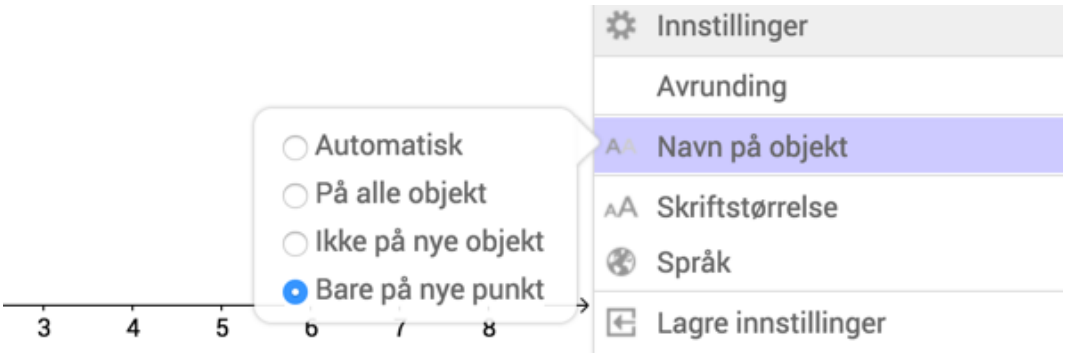
1.2 Endre innstillinger

GeoGebra har 12 pt skriftstørrelse som standard. Dersom du synes dette blir for lite, kan du endre skriftstørrelsen under menyen «Innstillinger» (2) og «Skriftstørrelse» (3).



Figur 1.6: Velg større skriftstørrelse, så vil de bakerste elevene se bedre det du viser!

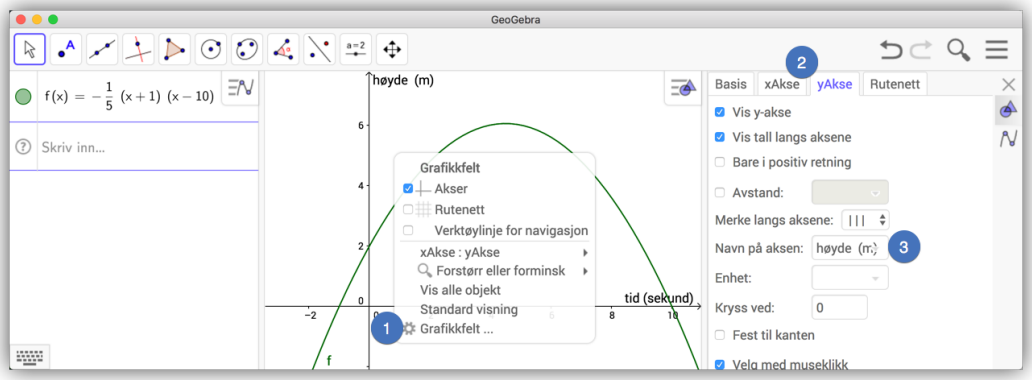
En annen innstilling som kan være lur å endre, er «Navn på objekt». Denne er som standard satt til «automatisk». Det betyr at om algebrafeltet vises, vil de fleste objektene vises med navn. Velger du «Bare på nye punkt» vil du slippe at for eksempel linjestykker i en mangekant blir vist med navn i grafikkfeltet.



Dersom du har gjort endringer i innstillingene som du ønsker skal være standard hver gang du åpner GeoGebra, så klikker du på «Lagre innstillinger».

1.2.1 Navn på aksene

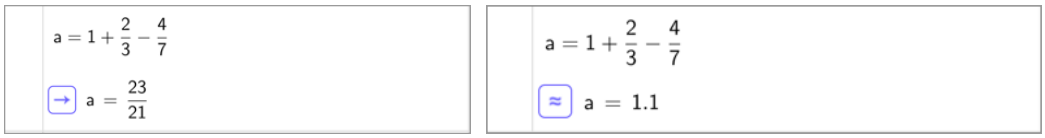
Du kan gi navn på aksene ved å høyreklikke i grafikkfeltet. Da får du opp et vindu (1) der du kan velge «Grafikkfelt». Du får da opp et vindu hvor du kan velge «xAkse»/«yAkse» (2) og hvilke navn du vil ha på aksene (3).



Figur 1.7: Du kan velge navn på aksene.

1.3 Algebrafeltet

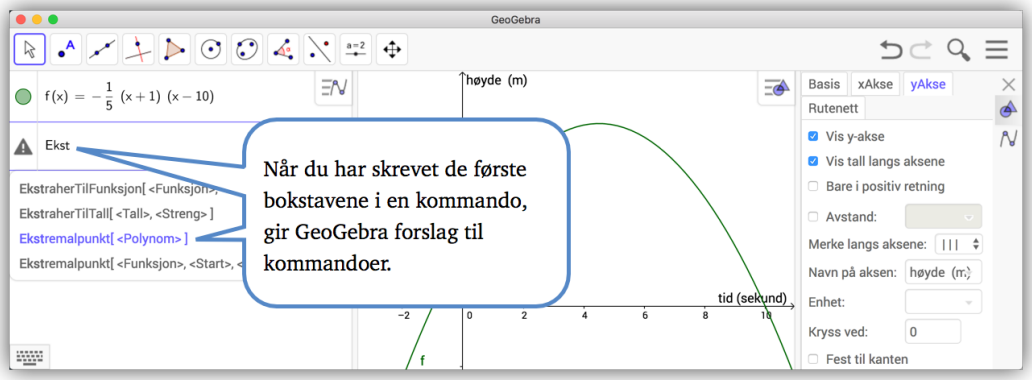
Algebrafeltet har fått en ordentlig overhaling med versjon 6.0. Mange tidligere brukere av GeoGebra vil merke at dette kanskje er en av de store endringene. Nå kan du skrive inn uttrykk rett inn i algebrafeltet (om du ikke har valgt å vise inntastingsfeltet).



Figur 1.8: Ting ser pent ut i algebrafeltet.

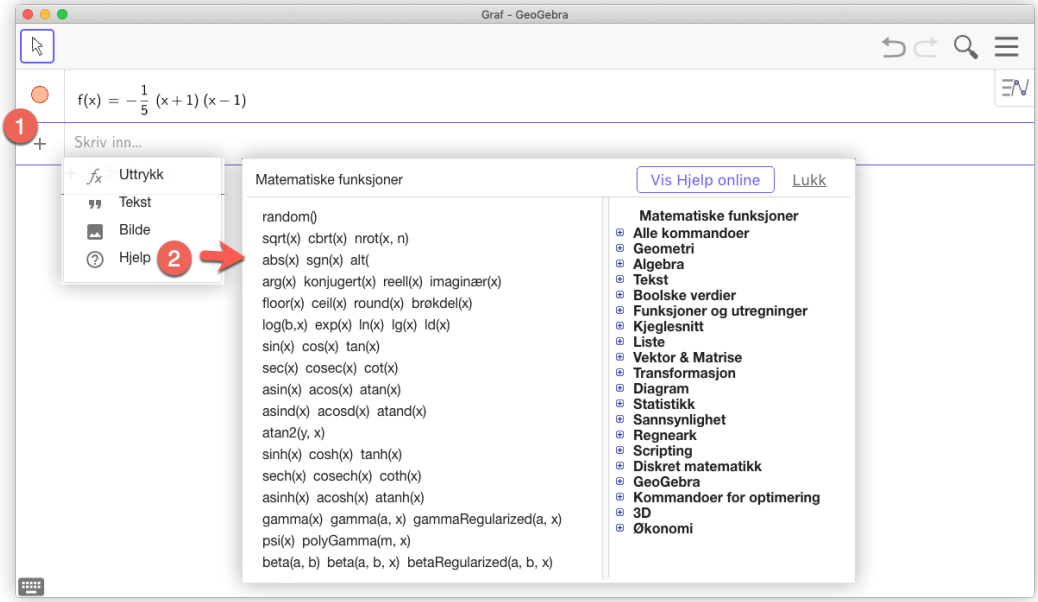
Legg merke til at du nå får eksakte verdier når du regner med brøker. Om du heller vil ha desimaltall, klikker du på →. Se skjermbildet til høyre i figur 1.8

Når du skriver inn en kommando i inntastingsfeltet vil du få opp en liste over alle kommandoer som begynner med de bokstavene du har tastet inn. Skal du for eksempel bruke kommandoen `Ekstremalpunkt` vil du få opp alle kommandoer som begynner med `Eks` når du har skrivet disse tre bokstavene.



Figur 1.9: GeoGebra lister opp mulige kommandoer i algebrafeltet.

Klikker du på plusstegnet (1) til venstre i en linje i algebrafeltet og deretter på spørsmålstegnet (2) vil du få opp «Hjelp for inntasting»:



Figur 1.10: Her finner du en oversikt over alle kommandoene i GeoGebra. Merk at du kan klikke på «Vis Hjelp online»

Her finner du en oversikt over de fleste kommandoer som er i GeoGebra. Noen av disse kan kun brukes i CAS. Mer om dette i kapittel 7, side 89.

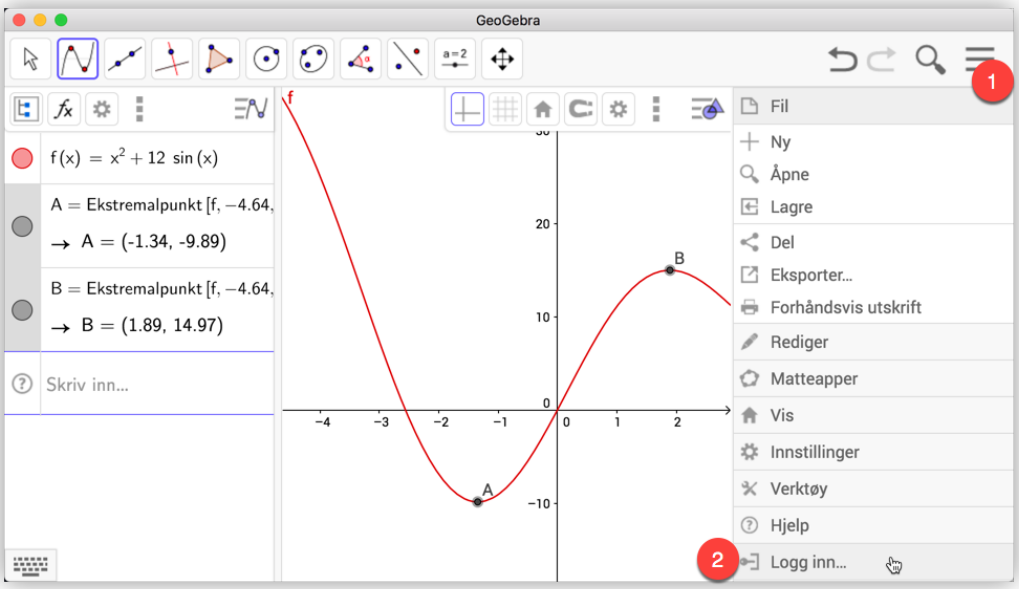
1.4 Larging av filer

Dette er kanskje den største endringen som kom med GeoGebra 6.0. Mens vi tidligere lagret filer i en mappe på en hardisk, så er det nå standard at du lagrer filene i skyen på GeoGebra.org. For å gjøre dette bør du ha en konto der. Dette er strengt tatt ikke nødvendig. Som vist på figur 1.11 kan du fortsette uten å logge inn (1). Da vil filen din bli lagret på maskinen din og ikke i skyen. Du kan også eksportere filen til en geogebra-fil som du lagrer der du måtte ønske på maskinen din. Ulempen med dette er at om du jobber videre med filen, så må du eksportere på nytt om du vil lagre endringene.

Du kan enkelt lage en bruker på GeoGebra.org ved å klikke på «Opprett konto» (2) (se figur 1.11). Du kan da enten registrere deg ved å fylle inn informasjon om deg selv, eller du kan bruke en eksisterende tjeneste om du har det (for eksempel Google, Office 365 eller Facebook, som vist nedenfor).

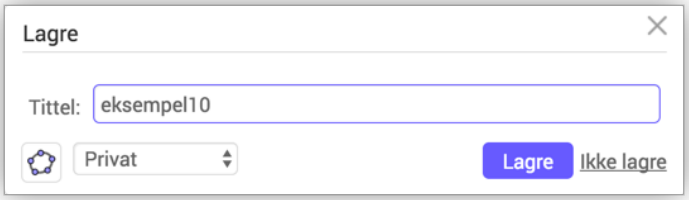
Figur 1.11: Du kan lagre uten å logge inn, men vi anbefaler at du oppretter en konto

Når du har laget en konto kan du logge inn i selve GeoGebra, som vis på figur 1.12

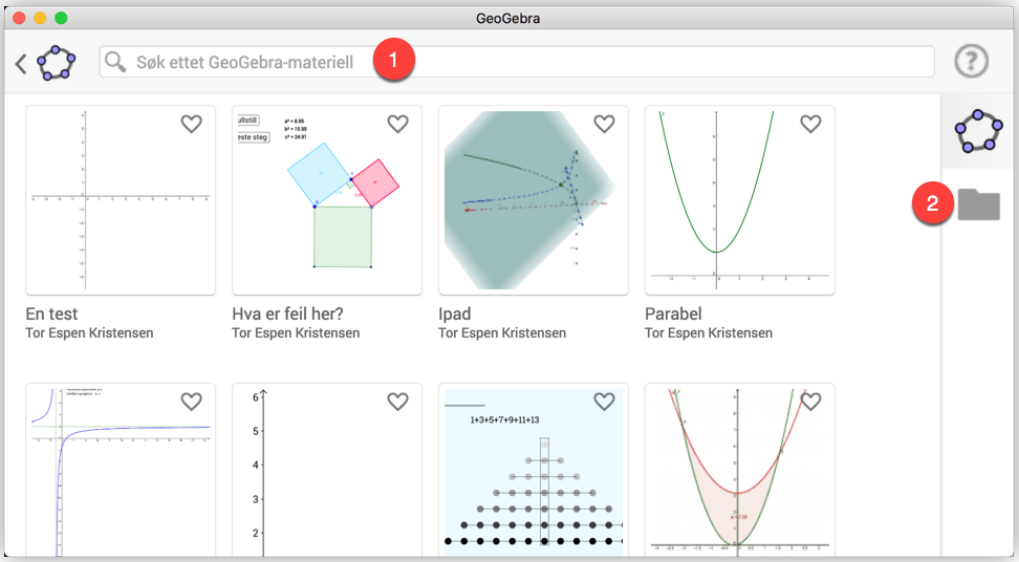


Figur 1.12: Du logger inn ved å velge meny (1) og «Logg inn...» (2)

Når du er logget inn, er det bare å velge «Lagre». Du får da opp følgende vindu:



Her kan du velge om filen skal være privat, delt med lenke eller offentlig. Filen blir da lastet opp på geogebra.org. Denne filen blir så synkronisert med en lokal kopi som ligger på maskinen din. Det betyr at du vil ha tilgang på filene som er laget på maskinen din, selv om du ikke er på nett. Merk at det er kun filer som har blitt åpnet på maskinen du jobber på, som er tilgjengelig offline. Er du på nett, får du tilgang på alle filene som er lagret. Du kan søke etter filer (både dine egne og andres) (1) eller du kan åpne en geogenbra-fil som er eksportert og lagret på din maskin (2).



Figur 1.13: Du kan bla igjennom filene dine (1) eller du kan åpne en .ggb-fil som er lagret på maskinen din

2 Funksjoner i GeoGebra

GeoGebra er et utmerket verktøy til å utforske og analysere funksjoner. I dette kapittelet skal du lære hvordan du kan tegne grafer, bestemme nullpunkt, ekstremalpunkt og andre interessante punkt på grafen til en funksjon. Du skal også lære å løse likningssystem og løse ulikheter grafisk.

2.1 Plotting, nullpunkt og ekstremalpunkt

Eksempel 2.1

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \quad x \in \langle -3, 4 \rangle$$

a) Tegn grafen til f i et koordinatsystem.

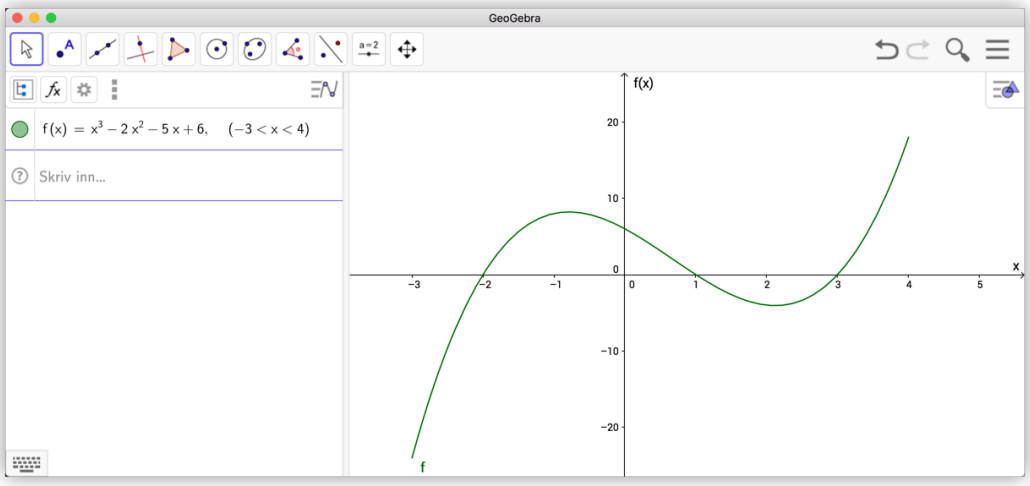
b) Bestem eventuelle nullpunkt til f.

c) Bestem eventuelle topp-/bunnpunkt til grafen til f.

Løsning:

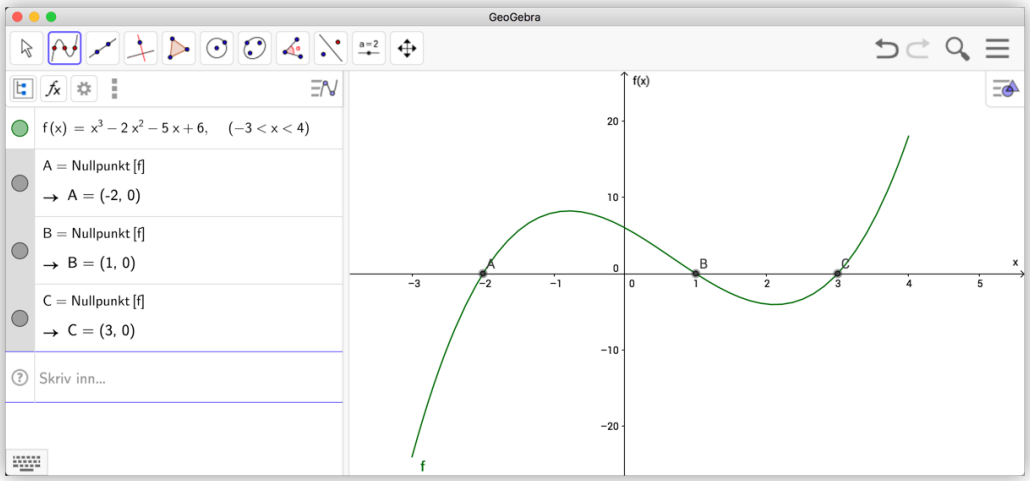
a) Skriver inn $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6, \quad -3 < x < 4$ i algebrafeltet og får tegnet inn grafen til f.

Tips! Eksponenter kan skrives inn ved å trykke inn for Alt + tall. For eksempel vil Alt+2 gi «opphøyd i 2». Du kan også få dette til ved å skrive `x^2` eller `x**2`. Begge gir x^2.



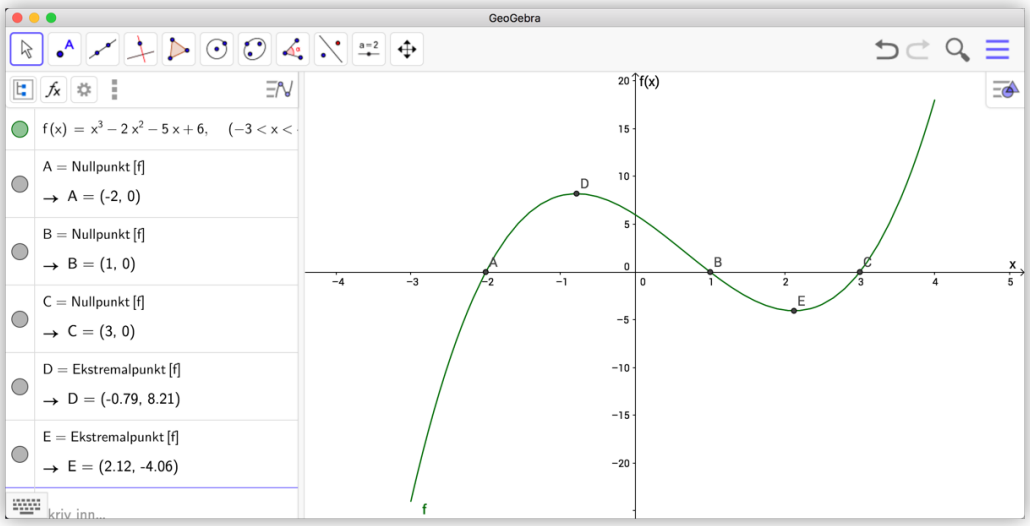
Du kan endre skaleringen på aksene ved å velge verktøyet *Flytt grafikkfeltet*. Når dette er valgt kan du flytte grafikkfeltet eller du kan dra i aksene slik at de bli skalert.

b) Den enkleste måten å finne nullpunkt er å bruke verktøyet *Nullpunkt*. Dette finner du ved å klikke på punktverktøyet *Nytt punkt*. Du får da opp en liste av ulike verktøy. Velg *Nullpunkt* og klikk deretter på grafen til f. Da vil du få alle nullpunktene.

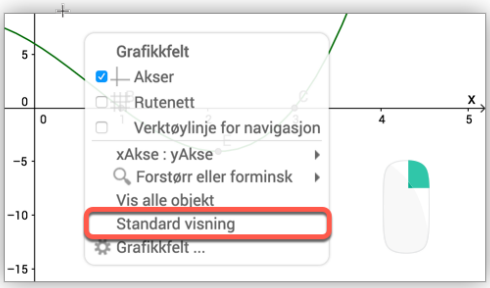


Figur 2.1: Nullpunktene til en funksjon

c) Vi går fram på samme måte som i b), men denne gangen bruker vi verktøyet *Ekstremalpunkt*. Velger dette verktøyet og klikker deretter på grafen til f. Da får vi de to ekstremalpunktene. Vi ser at grafen har toppunkt i $D(-0{,}79,\ 0{,}821)$ og et bunnpunkt i $E(2{,}12,\ -4{,}06)$.



Tips! Du kan justere aksene tilbake til standard visning ved å høyreklikke i grafikkfeltet og velge «Standard visning». Du kan også bruke tastekombinasjonen Ctrl + M.



Figur 2.2: Standard visning zoomer grafikkfeltet tilbake til sist lagrede innstilling.

I neste eksempel vil vi finne blant annet nullpunkt og ekstremalpunkt ved å gi ulike kommandoer i algebrafeltet.

Eksempel 2.2

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - x}$$

a) Bestem eventuelle nullpunkt til f

b) Bestem eventuelle topp- og bunnpunkt til grafen til f

c) Bestem asymptotene til f.

Løsning:

a) Vi skriver først inn funksjonen i algebrafeltet. Deretter bruker vi kommandoen

```
Nullpunkt(<funksjon>, <Start>, <Slutt>)
```

Start- og sluttverdiene er to x-verdier som nullpunktet vil ligge mellom. I dette tilfellet skriver vi inn

```
Nullpunkt(f, -3, 1)
```

og får punktet $(-1, 0)$. Se figur 2.3.

b) Vi kan finne ekstremalpunkt til andre funksjoner enn polynomer. For å finne slike topp- eller bunnpunkt må vi avgrense området som punktet ligger i. Vi bruker kommandoen

```
Ekstremalpunkt(<funksjon>, <fra>, <til>)
```

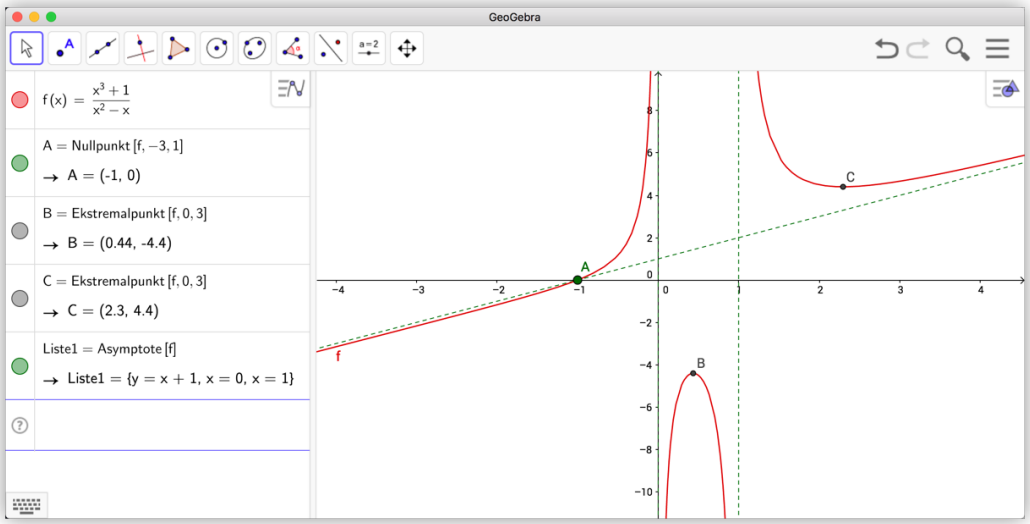
I dette eksempelet ser vi ut fra grafen til f at det er et toppunkt rundt $x = 0{,}5$ og et bunnpunkt rundt $x = 2{,}4$. Vi bruker derfor kommandoene

```
Ekstremalpunkt(f, 0, 3)
```

Vi ser at grafen har et toppunkt i $(0{,}44, -4{,}4)$ og et bunnpunkt i $(2{,}3, 4{,}4)$

c) Vi finner asymptoter til en graf ved å bruke kommandoen `Asymptote(<funksjon>)`. I dette eksempelet skriver vi inn `Asymptote(f)`. Vi får da tegnet opp tre asymptoter. Disse er oppgitt i en liste i algebrafeltet:

$$\{-x + y = 1, x = 0, x = 1\}$$



Figur 2.3: Nullpunkt, ekstemalpunkt og asympoteter til funksjonen i eksempel 2.2

Oppgave 2.1

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2, \qquad x \in [0, 2]$.

a) Tegn grafen til f i et koordinatsystem.

b) Finn eventuelle nullpunkt til f.

c) Finn eventuelle topp-/bunnpunkt til grafen til f.

Oppgave 2.2

Gitt funksjonen $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} - 1$.

a) Bestem eventuelle topp- og bunnpunkt til grafen.

b) Bestem eventuelle asymptoter.

Oppgave 2.3 — Eksempelsettet til MAT1011 Matematikk 1P, Høsten 2009.
En fabrikk produserer CD-stativer. Det koster $K(x)$ kroner å produsere x stativer per måned, der

$$K(x) = 12\,000 + 60x + 0{,}2x^2$$

a) Tegn grafen til K i et koordinatsystem. Velg x-verdier fra 0 til 800.

b) Hvor mange stativer kan produseres for 68 000 kroner?

Fabrikken regner med å selge de x stativene for $I(x)$ kroner per måned, der

$$I(x) = 200x$$

c) Tegn grafen til I i samme koordinatsystem som grafen til K.

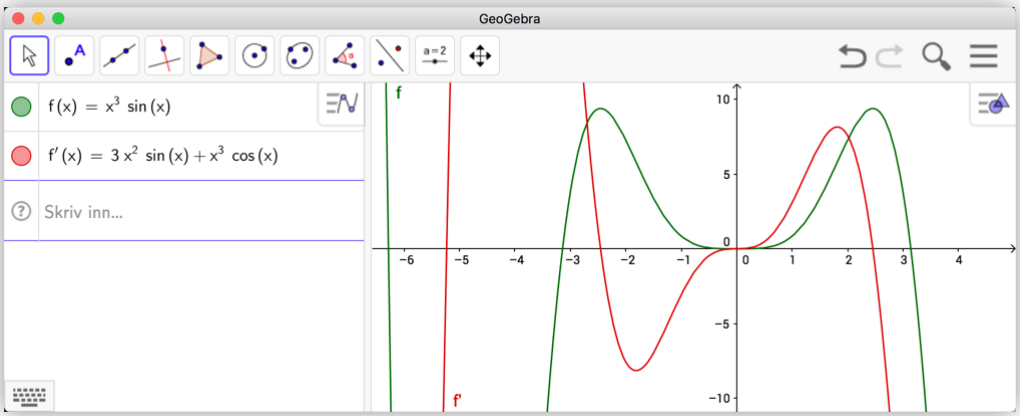
d) Gjør nødvendige beregninger og kom med forslag til hvor mange CD-stativer som fabrikken må produsere for å gå med overskudd.

GeoGebra kan også derivere funksjoner. Har du skrevet inn en funksjon $f(x)$ i algebrafeltet, er det bare til å skrive $f'(x)$ i algebrafeltet og GeoGebra deriverer f. Du kan også derivere en funksjon $f(x)$ ved å bruke kommandoen `Derivert[f]`.

Eksempel 2.3

Deriver funksjonen $f(x) = x^3 \sin(x)$.

Løsning:
Vi skriver først inn funksjonsuttrykket til f i algebrafeltet. For å derivere funksjonen skriver du så inn `f'(x)` i algebrafeltet. Vi kan da lese av svaret i algebrafeltet:



Vi har altså funnet at $f'(x) = 3x^2 \sin(x) + x^3 \cos(x)$.

Tips! Du også kan bruke kommandoen `Derivert(<Funksjon>,<tall>)` for å derivere en funksjon. Tallet du da oppgir er antall ganger du vil derivere funksjonen. Kommandoen `Derivert(f, 2)` gir med andre ord den dobbeltderiverte til f. Dette kunne vi også funnet ved å skrive inn `f''(x)`.

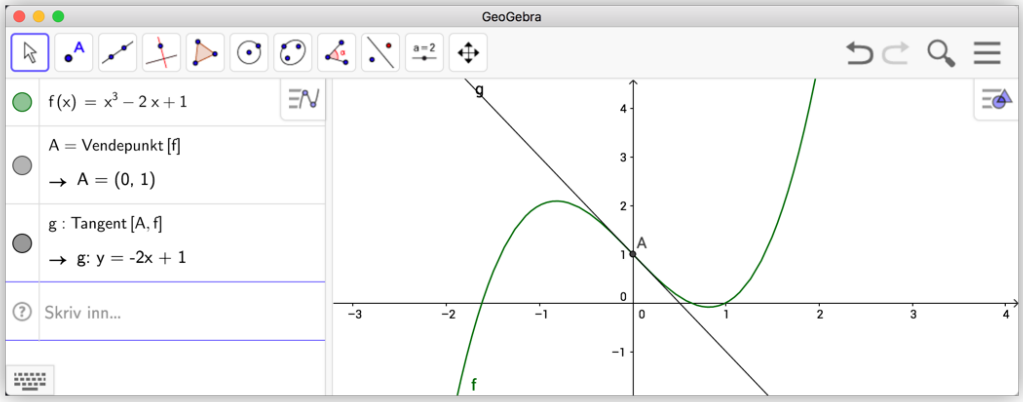
Eksempel 2.4

Finn vendepunktet til funskjonen $f(x) = x^3 - 2x + 1$, og finn likningen til tangenten i vendepunktet.

Løsning:
Vi kan selvsagt finne vendepunkt ved å se hvor den dobbeltderiverte skifter fortegn. Men GeoGebra har en egen kommando som heter `Vendepunkt`. For polynomer er det nok å skrive inn `Vendepunkt[<polynom>]`.

I dette eksempelet skriver vi først inn funksjonen f og deretter kommandoen `Vendepunkt[f]`. Vi finner da at f har vendepunkt i $A = (0, 1)$.

Vi finner tangenten til f i A ved å skrive `Tangent(A,f)`. Vi får da tegnet inn tangenten i grafikkfeltet og kan lese av likningen i algebrafeltet:



Vi ser at likningen til tangenten er $y = -2x + 1$.

Vi kunne også ha funnet likningen til tangenten ved å bruke verktøyet *Tangenter* . Når du har valgt dette verktøyet, klikker du først på et punkt som tangenten skal gå gjennom og deretter på grafen (eller kjeglesnittet).

Oppgave 2.4 — Eksempelsettet til MAT1011 Matematikk 1P, Høsten 2009.

a) Tegn tre rette linjer i tre forskjellige koordinatsystemer og finn stigningstallet til hver av linjene.

b) Tegn linjer som står vinkelrett på linjene i a) og finn stigningstallene til disse linjene også.

c) Multipliser sammen stigningstallene til linjene som står vinkelrett på hverandre. Lag en hypotese om sammenhengen mellom stigningstallene til to linjer som står vinkelrett på hverandre.

Tips! Du trenger ikke å derivere for å finne stigningstallet til ei linje. Du kan skrive `Stigning(a)` for å finne stigningstallet til ei linje a.

Oppgave 2.5
Deriver funksjonene

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3-1}$ b) $g(x) = \sqrt{x^2-2x}$ c) $h(x) = 10^x$

Oppgave 2.6
Funksjonen g er gitt ved

$$g(x) = \frac{2x^2-1}{x+1}$$

a) Tegn grafen til g i et koordinatsystem.

b) Tegn den deriverte $g'(x)$ i samme koordiantsystem.

c) Bruk den deriverte til å bestemme eventuelle topp- eller bunnpunkt på grafen til g.

d) Har grafen til g vendepunkt?

Oppgave 2.7 — Eksempelsettet til MAT1013 Matematikk 1T, Høsten 2009.
La funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

a) Tegn grafen til f. Finn koordinatene til toppunktet og bunnpunktet.

b) Finn stigningstallet til linja l gjennom toppunktet og bunnpunktet.

La m være gjennomsnittet av x-koordinatene til toppunktet og bunnpunktet.

c) Finn stigningstallet til tangenten til grafen til f i punktet $(m, f(m))$. Vis at forholdet mellom stigningstallene til linjene l og t er $\frac{2}{3}$.

d) Finn to andre tredjegradsfunksjoner som har både toppunkt og bunnpunkt. Løs oppgavene a), b) og c) for hver av disse funksjonene.

Sett opp en hypotese om forholdet mellom stigningstallene til linja l og tangenten t.

For et punkt A kan du hente ut x-koordinaten ved å skrive `x(A)` i algebrafeltet. Tilsvarende får du y-koordinaten med kommandoen `y(A)`. Du kan regne med punkt akkurat som vektorer. Det vil si at gjennomsnittet mellom to punkt `A` og `B` er `(A+B)/2`.

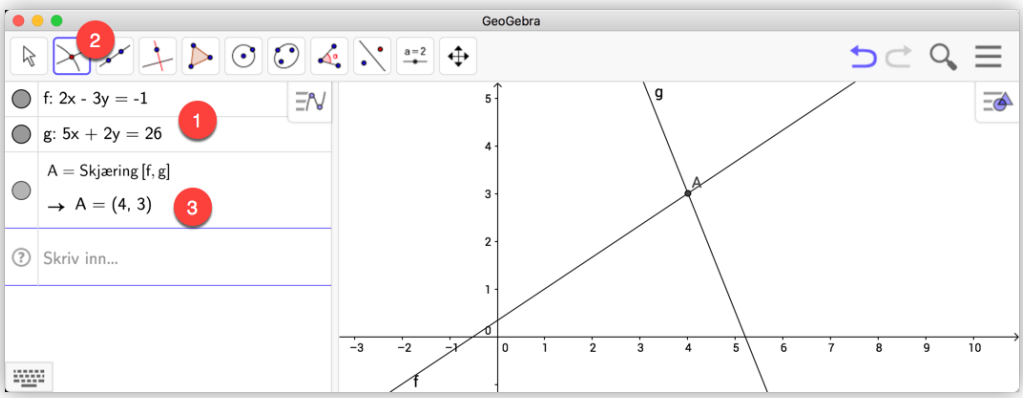
2.2 Skjæringspunkt mellom to objekt

Eksempel 2.5

Løs likningssystemet

$$2x - 3y = -1$$
$$5x + 2y = 26$$

Vi skriver inn likningene en etter en i algebrafeltet (se (1) på figur 2.4). Når vi trykker enter vil linjene som likningene representerer bli tegnet i koordinatsystemet i grafikkfeltet. Vi kan nå velge *Skjæring mellom to objekt* (2) på verktøylinja, klikke først på den ene linja, så den andre, og få markert skjæringspunktet $A = (4, 3)$ (3). Det vil si at $x = 4$ og $y = 3$. Det fins også en egen kommando for skjæring mellom to kurver, nemlig `Skjæring`.



Figur 2.4: Grafisk løsning av et likningssystem

Eksempel 2.6

Gitt funksjonene $f(x) = \sin(x)$ og $g(x) = x - 1$.

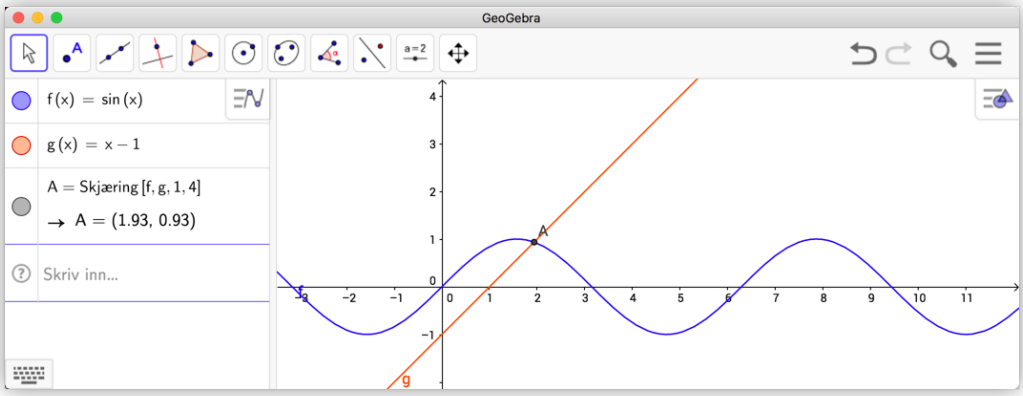
a) Tegn grafen til f og g i samme koordinatsystem.

b) Finn skjæringspunktet til grafene.

Løsning:
Vi skriver inn funksjonene algebrafeltet i GeoGebra. Du kan enten bruke verktøyet *Skjæring mellom to objekt* som beskrevet over, eller du kan skrive inn kommandoen

```
Skjæring[f,g,1,4]
```

i algebrafeltet. Her er tallene 1 og 4 valgt som start- og sluttverdi. Det vil si to x-verdier som skjæringspunktets x-koordinat ligger mellom. Vi får da at skjæringspunktet er $A = (1{,}93,\ 0{,}93)$.



Figur 2.5: Skjæring mellom to grafer.

Oppgave 2.8
Løs likningssettene

a) $x - y = 9$ og $3x + 5y = 11$

b) $y = x^2 - 2$ og $x^2 + y^2 = 8$

2.3 Ulikheter

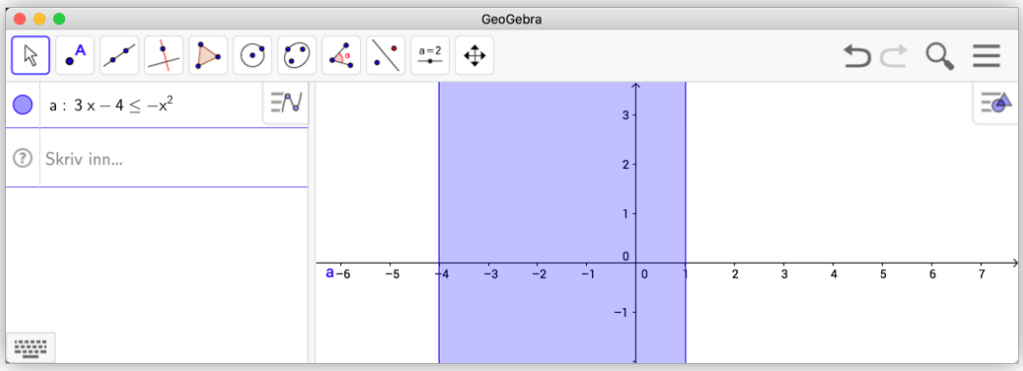
GeoGebra kan være til stor hjelp når vi skal løse ulikheter. Som vanlig tar vi utgangspunkt i noen eksempler.

Eksempel 2.7

Løs ulikheten $3x - 4 \leq -x^2$.

Løsning:
Skriv inn ulikheten i algebrafeltet. For å få $\leq$ kan du enten skrive «<=» eller finne symbolet $\leq$ i det virtuelle tastaturet. [1] Trykk enter og du vil kunne lese av løsningsmengden som det blå området i grafikkfeltet på figur 2.6.

[1] Du kan også trykke Alt + ; for å få $\leq$. Bytter du ut ; med . får du $\geq$



Figur 2.6: Du kan løse ulikheter i GeoGebra ved å skrive dem inn i inntastingsfetet

Vi ser at løsningsmengden er gitt ved $-4 \leq x \leq 1$.

Vi kan også løse slike ulikheter i GeoGebra CAS. Dette kan du lese om på side 93.

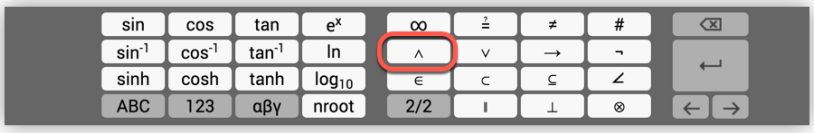
Det neste eksempelet er særdeles relevant i Matematikk S1, hvor elevene må løse lineære optimeringsproblem. Dette innebærer blant annet å finne et område i planet definert av et sett med ulikheter.

Eksempel 2.8

Skraver området definert med ulikhetene

$$0 < x < 5$$
$$0 < y \leq 4$$
$$x + 2y \leq 10$$

Løsning:
I dette tilfellet er det ikke lurt å skrive inn én ulikhet om gangen. I stedet skriver vi alle inn i én omgang. For å gjøre dette må vi fortelle GeoGebra at alle ulikhetene skal være tilfredsstilt samtidig. Vi vil derfor skrive inn det logiske tegnet for *og* mellom ulikhetene. Vi kan finne dette tegnet i det virtuelle tastaturet, men det enkleste er nok å skrive & to ganger, slik: &&.

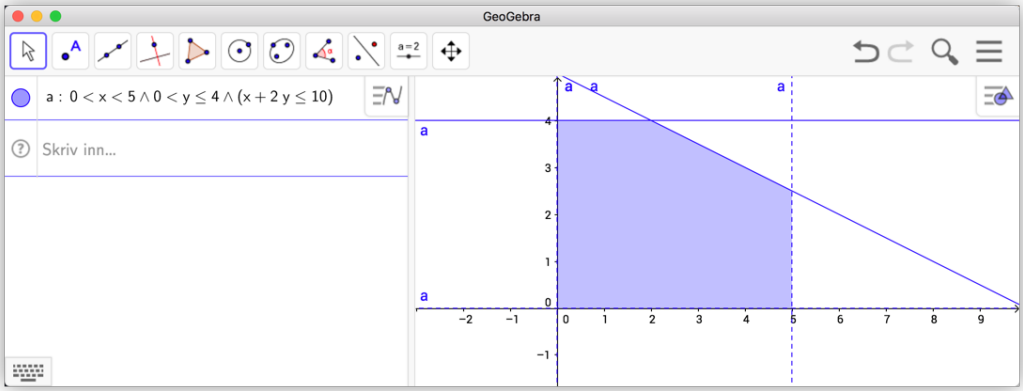


Figur 2.7: Du finner ∧ og mange andre symboler i det virtuelle tastaturet.

Skriv så inn alle ulikhetene i algebrafeltet. I dette tilfellet har vi skrevet inn følgende i algebrafeltet:

```
0<x<5 && 0<y<=4 && x+2y<=10
```

Resultatet ser du på figur 2.8. Vi har fått tegnet opp området som tilfredsstiller alle ulikhetene. Legg merke til at linjene der vi har mindre-eller-lik er heltrukne, mens der vi har ekte ulikhet er stiplet.



Figur 2.8: Bruk ∧ eller && mellom ulikhetene.

Tips! Dersom du ønsker å finne koordinatene til hjørnene til et område definert av ulikheter, kan du bruke kommandoen `Toppunkt`. Skriver vi for eksempel inn `Toppunkt(a)` i eksempelet ovenfor, vil vi få alle skjæringspunktene mellom de ulike linjene.

Oppgave 2.9
Løs ulikheten $x^2 < 5 + 4x$ i GeoGebra.

Oppgave 2.10
Skraver området definert ved ulikhetene

$$\begin{aligned} y &> x^2 \\ -x^2 &< 2y - 3 \end{aligned}$$

Oppgave 2.11
For hvilken x og y vil $F(x, y) = 12x + 8y$ ha sin største verdi dersom

$$\begin{aligned} 0 \leq x &\leq 10 \\ 0 \leq y &\leq 8 \\ 2x + 3y &\leq 36 \\ 6x + y &\leq 60 \end{aligned}$$

Tegn området definert av ulikhetene og bestem punktet som gir den største verdien.

Oppgave 2.12 — Eksamen REA3026 Matematikk S1, Høsten 2010.
En ferje frakter personbiler og lastebiler. En personbil trenger et areal på $15\,\text{m}^2$ når den står parkert på ferja, mens en lastebil trenger $50\,\text{m}^2$. Arealet av hele ferjedekket er $2\,100\,\text{m}^2$.

En personbil veier i gjennomsnitt 1 t (tonn), og en lastebil veier 10 t. Den samlede vekten av bilene på ferja må ikke overstige 250 t.

Det koster 106 kroner for en personbil på denne ferjestrekningen, mens det koster 603 kroner for en lastebil.

La x være antall personbiler og y antall lastebiler om bord på ferja ved en overfart.

a) Sett opp ulikheter som avgrenser antall personbiler og lastebiler det er mulig å ta med på ferja.

b) Tegn grafer som illustrerer ulikhetene i et koordinatsystem. Marker på figuren hvilket område som angir de mulige antallene av personbiler og lastebiler.

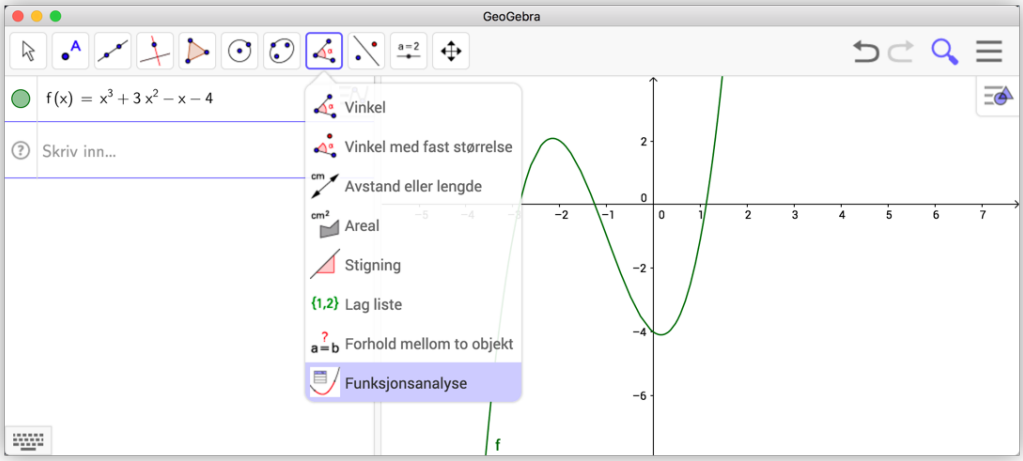
c) Sett opp et uttrykk som viser hvor stor inntekt ferjeselskapet har på en overfart. Finn den fordelingen av personbiler og lastebiler som gir høyest inntekt for selskapet. Hva er den største inntekten selskapet kan oppnå på en overfart?

Det innføres nye regler. Av sikkerhetsgrunner er det ikke lenger tillatt å ta med mer enn 14 lastebiler.

d) Hva blir nå den høyeste inntekten som er mulig å oppnå på en overfart?

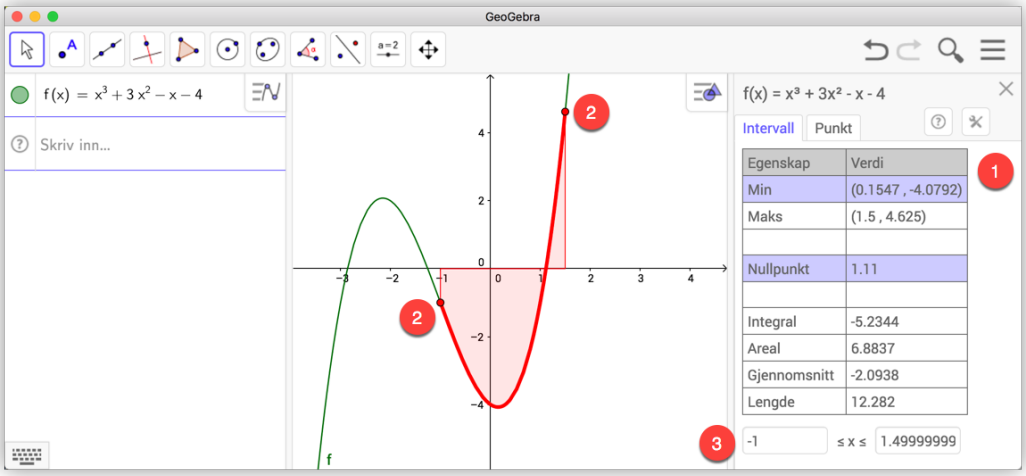
2.4 Funksjonsanalyse

GeoGebra har også et nyttig verktøy til utforsking og undersøkelser av funksjoner. Dette verktøyet ligger i samme gruppe på verktøylinjen som «Vinkel» og har fått navnet «Funksjonsanalyse» .



Figur 2.9: Du finne *Funksjonsanalyse* i samme kategori *Vinkel*

Før du kan bruke dette verktøyet må du skrive inn funksjonen du vil undersøke. Skriv inn funksjonsuttrykket i algebrafeltet, velg *Funksjonsanalyse* og klikk på funksjonen (enten i algebrafeltet eller på grafen). Du vil da få opp et vindu (1) som vist til høyre for grafikkfeltet på figur 2.10.



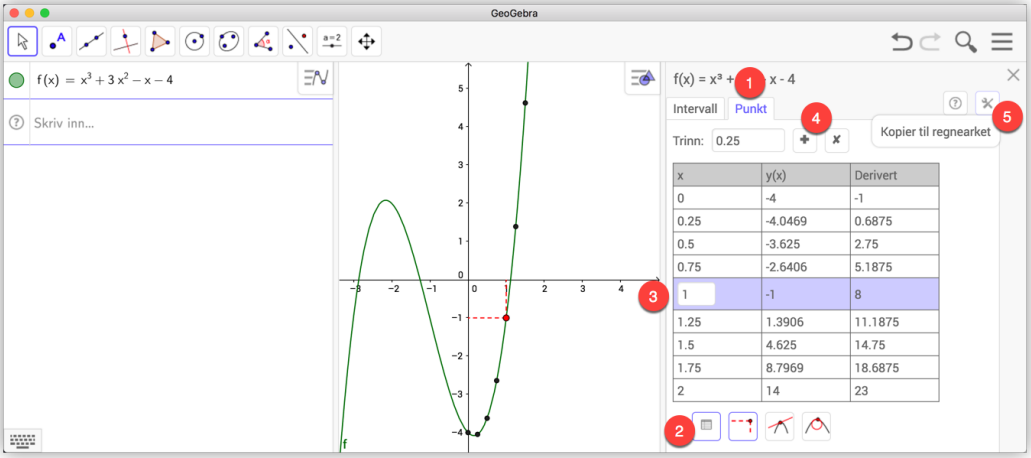
Figur 2.10: Vi må velge intervallet vi vil studere ved enten å skrive inn intervallet eller ved å dra i de to punkta på grafen.

I figur 2.10 har vi skrevet inn funksjonen f gitt ved

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 4$$

La oss si at vi ønsker å studere egeneskapene til denne funksjonen i intervallet $[-1, 1{,}5]$. Vi kan da enten dra i de to røde punkta på grafen (2) eller vi kan skrive inn -1 og 1,5 nederst i Funksjonsanalysevinduet (3). Se figur 2.10. Da kan vi lese av ulike egenskaper til funksjonen i dette intervallet. Vi ser for eksempel at grafen har et bunnpunkt i $(0{,}1547, -4{,}0792)$ og nullpunkt i $x = 1{,}11$. Legg også merke til at vi kan lese av integralet og arealet mellom grafen og x-aksen. Sistnevnte er større enn integralet, siden integralet er negativt mellom $x = -1$ og $x = 1{,}11$.

Under fliken «Punkt» (1) (se figur 2.11) kan vi også få ut lister med verdier tilhørende grafen til f. For å få fram denne listen må vi klikke på knappen (2) nede til venstre i funksjonsanalyse. På figur 2.11 ser vi en liste med ni rader der vi kan lese av verditabell for f og dens deriverte. Du kan dra det midterste punktet rundt på grafen for å få andre punkt med tilhørende verdier eller du kan skrive inn den midterste x-verdien i selve tabellen (3). For å få fram den derivert klikker du på (4) og velger «Derivert». Ønsker du å kopiere tabellen til regnearket i GeoGebra klikker du på (5).



Figur 2.11: Under «Punkt» kan vi lese av ulike verdier til tilhørende f.

2.5 Oppgaver

Oppgave 2.13

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^4 - x^2 + x, \qquad x \in [-2,\ 3]$$

a) Tegn grafen til f.

b) Bestem funksjonenes nullpunkt og grafens ekstremalpunkt og vendepunkt.

Oppgave 2.14 — Eksamen REA3022 Matematikk R1, Våren 2009.

I denne oppgaven skal du studere fjerdegradsfunksjoner som har to vendepunkt.

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \frac{1}{12}(x^4 - 2x^3 - 12x^2)$.

La S og T være de to vendepunktene, med S lengst til venstre på grafen.

a) Tegn grafen til f.

b) Finn $f''(x)$ og tegn fortegnslinja for denne. Bestem koordinatene til vendepunktene S og T.

c) Finn likningen for den rette linja gjennom punktene S og T. Bestem koordinatene til de to andre skjæringspunktene mellom grafen til f og linja. Bruk gjerne digitalt verktøy.

d) Vi lar Q være skjæringspunktet lengst til høyre. Regn ut $\dfrac{ST}{TQ}$.

En annen fjerdegradsfunksjon g er gitt ved $g(x) = x^4 - 6x^2$.

La S_1 og T_1 være de to vendepunktene, med S_1 lengst til venstre på grafen.

Du skal gjennomføre tilsvarende oppgaver som i a), b), c) og d):

e) 1) Tegn grafen til g.

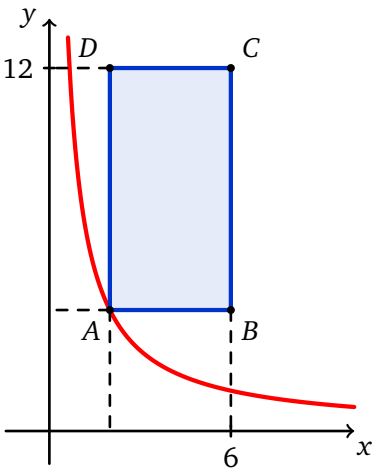
2) Finn $g''(x)$ og tegn fortegnslinja for denne. Bestem koordinatene til vendepunktene S_1 og T_1.

3) Finn likningen for den rette linja gjennom punktene S_1 og T_1. Bestem koordinatene til de to andre skjæringspunktene mellom grafen til g og linja. Bruk gjerne digitalt verktøy.

4) Vi lar Q_1 være skjæringspunktet lengst til høyre. Regn ut $\dfrac{S_1T_1}{T_1Q_1}$.

Kommenter resultatet.

Oppgave 2.15 — Eksamen REA3028 Matematikk S2, Våren 2009.
På figuren har vi tegnet grafen til $f(x) = \frac{8}{x}$ for $x > 0$, og et rektangel $ABCD$. Punktet $A(x, f(x))$ ligger på grafen til f og til venstre for B. Punktene B og C har førstekoordinat 6, og punktene C og D har andrekoordinat 12. Se figuren.



a) Bestem lengden av linjestykkene AB og AD uttrykt ved x.

b) Vis at arealet av rektanglet kan skrives som

$$g(x) = 80 - 12x - \frac{48}{x}$$

Hva er definisjonsmengden til g?

c) Bestem det største arealet rektanglet kan få.

d) Undersøk om rektanglet med størst areal også har størst omkrets.

Oppgave 2.16
Gitt tredjegradsfunksjonen

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

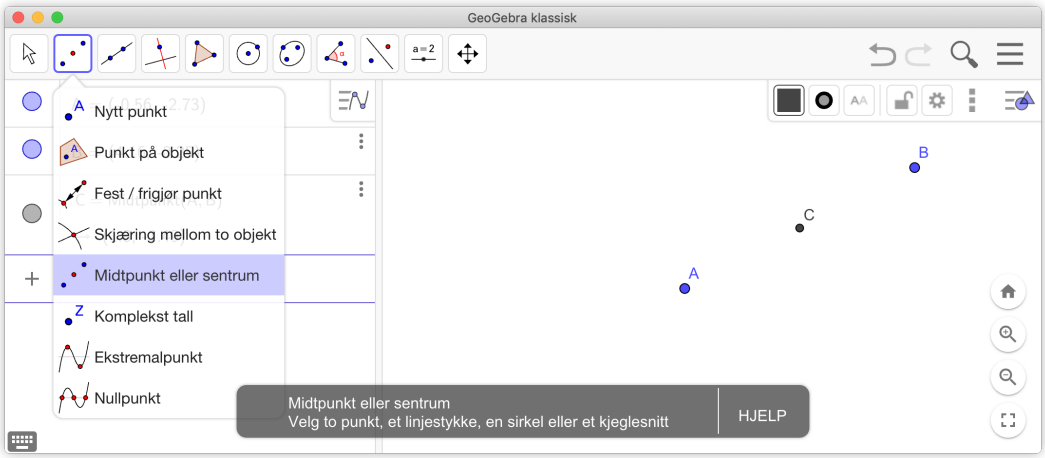
a) Finn nullpunktene til f.

b) Finn midtpunktet D til to av nullpunktene A og B og finn tangenten som tangerer f over D. Det vil si at tangenten tangerer f i $(d, f(d))$ der d er x-koordinaten til D. For å skrive inn dette punktet skriver du `(x(D), f(x(D)))` i algebrafeltet.

Du kan finne midtpunkt ved å velge verktøyet *Midtpunkt eller sentrum*.

c) Hva kan du si om denne tangenten?

Tips! Du kan finne midtpunkt til to punkt med verktøyet *Midtpunkt eller sentrum*



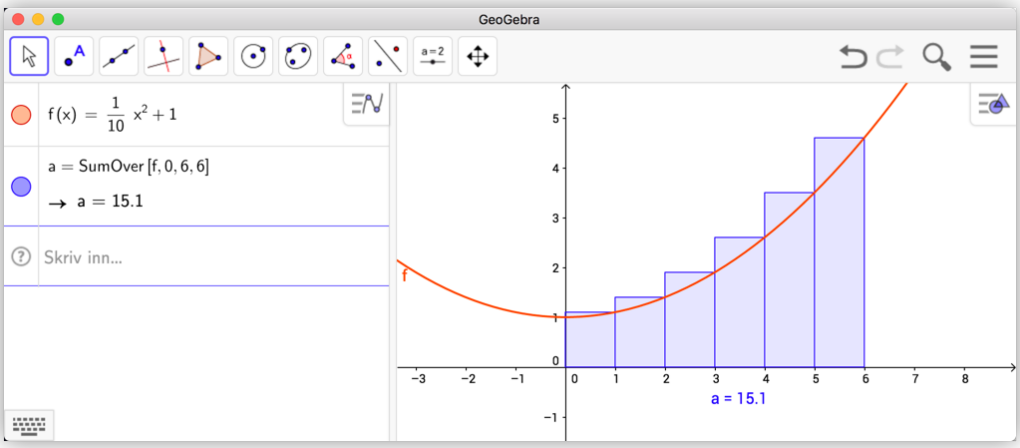
2.6 Arealet under en graf

Vi skal til slutt i dette kapittelet se hvordan vi kan bruke GeoGebra til å beregne arealet under en graf. Vi ønsker at elevene skal få en viss forståelse for hvordan vi kan finne arealet under en graf ved hjelp av Riemannsummer.

Eksempel 2.9

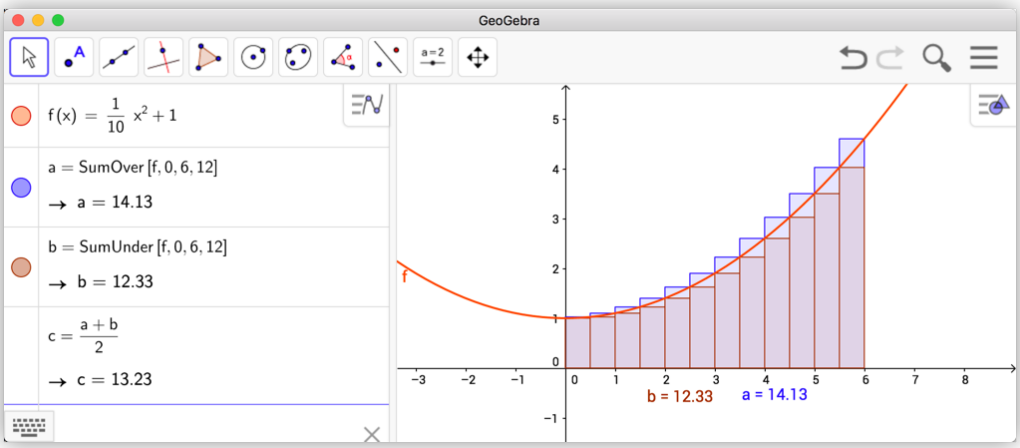
Hva er arealet under grafen til $f(x) = \frac{1}{10}x^2 + 1$ fra $x = 0$ til $x = 6$?

Løsning:
Nedenfor har vi tegnet inn grafen til f. Vi har også tegnet inn en del rektangler som ligger akkurat over grafen til f. Disse gir en god tilnærming til arealet under grafen.



Figur 2.12: `SumOver[f,0,6,6]` gir en tilnærmet verdi for arealet under grafen.

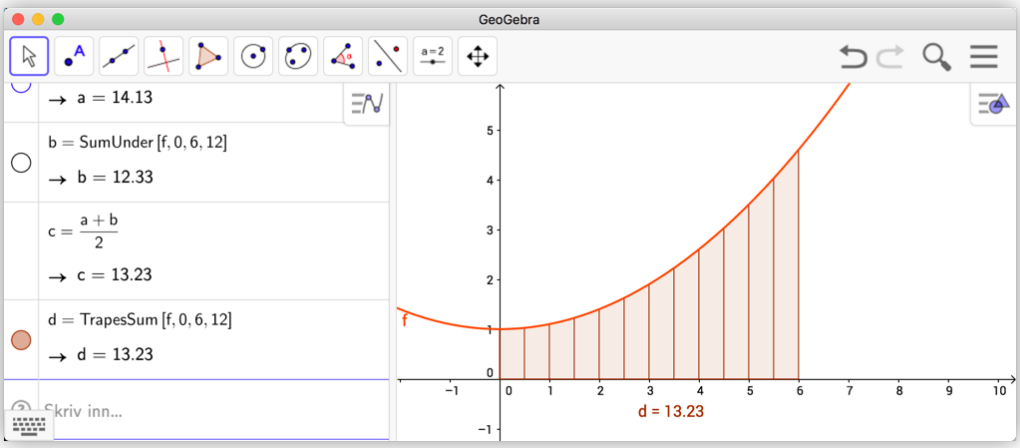
Kommandoene `SumOver(f, a, b, n)` og `SumUnder(f, a, b, n)` fungerer slik at de beregner arealet til n rektangler fra a til b som henholdsvis er tegnet over og under grafen til f. Vi kunne gjort dette enda bedre ved å ta flere rektangler. Vi kunne også beregnet arealet ved å tegne rektanglene inn slik at de ligger under grafen. På figur 2.13 har vi beregnet en tilnærmet verdi for arealet ved å bruke flere rektangler og ved å ta gjennomsnittet mellom øvre sum og nedre sum.



Figur 2.13: Kommandoen `SumOver[f,0,6,12]` og `SumUnder[f,0,6,12]` gir begge en tilnærmet verdi for arealet under grafen.

Dersom vi nå lar n i beregningene ovenfor gå mot uendelig vil differansen mellom de øvre og de nedre rektanglene gå mot null og vi finner arealet under grafen. Dette gjelder for alle stykkevis kontinuerlige funksjoner.

Vi kan også bruke kommandoen `TrapesSum(f,0,6,12)` til å finne en tilnærmet verdi til dette arealet. Denne kommandoen bruker trapeser i stedet for rektangler, som vist på figur 2.14. Vi ser at arealet er ca 13,23.

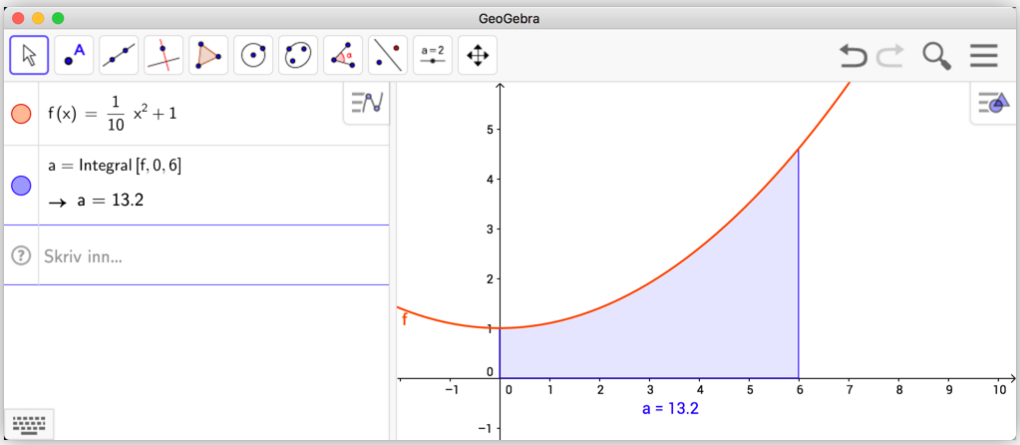


Figur 2.14: `TrapesSum[f,0,6,12]` gir en bra tilnærmet verdi for arealet.

En annen aktuell kommando vi vil nevne er `RektangelSum()`. Du finner mer informasjon om denne ved å klikke «Vis Hjelp online» i «Hjelp for inntasting».

Vi har allerede funnet en god tilnærming for dette arealet ved å bruke `SumOver` og `SumUnder`. Her vil vi bruke en kommando som heter `Integral(f, a, b)`. Denne beregner altså arealet under grafen til f fra $x = a$ til $x = b$. I dette tilfellet får vi

$$\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 13{,}2.$$



Figur 2.15: Kommandoen `Integral[f, 0, 6]` gir oss arealet under f fra $x = 0$ til $x = 6$.

Eksempel 2.10

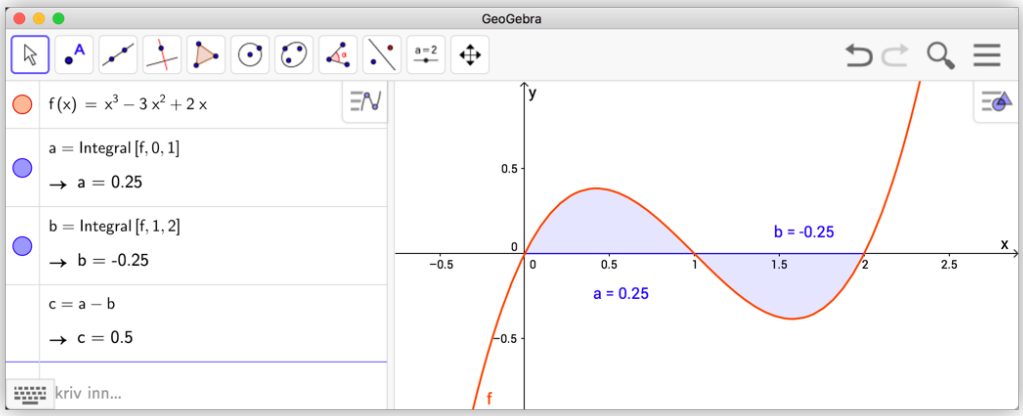
Finn arealet avgrenset av grafen til f, x-aksen, $x = 0$ og $x = 2$ til funksjonen f gitt ved

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

Løsning:
Vi skriver inn $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ i algebrafeltet slik at grafen blir tegnet.

Kommandoen `Integral(f, 0, 2)` gir oss i dette tilfellet 0 som svar. Kan dette stemme? Det som skjer her er at det er like stort areal som ligger over x-aksen som under. Vi må derfor dele opp integralet fra $x = 0$ til $x = 1$ og fra $x = 1$ til $x = 2$. Vi skriver derfor inn kommandoene `Integral(f, 0, 1)` og `Integral(f, 1, 2)` i algebrafeltet. Vi får da henholdsvis $a = -0{,}25$ og $b = 0{,}25$ som svar. Vi får derfor:

$$\begin{aligned}\text{Arealet} &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 0{,}25 - (-0{,}25 \\ &= 0{,}5\end{aligned}$$



Figur 2.16: Arealet begrenset av grafen til funksjonen $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, x-aksen, $x = 0$ og $x = 2$.

Vi kan også finne arealet mellom to grafer. Dersom arealet er begrenset av f, g, $x = a$ og $x = b$, så er arealet gitt ved `IntegralMellom(f, g, a, b)`.

Eksempel 2.11

Finn arealet avgrenset av grafene til funksjonene

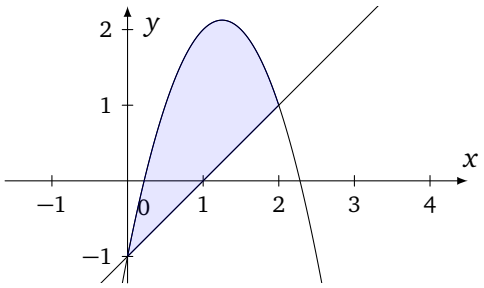
$$f(x) = -2x^2 + 5x - 1 \quad \text{og} \quad g(x) = x - 1$$

Løsning:
Vi må først finne skjæringspunktene mellom grafen til f og g. Det kan vi gjøre ved å skrive inn `Skjæring(f,g)`. Vi ser da at grafene skjærer hverandre i $(0, -1)$ og $(2, 1)$.

For å finne det søkte arealet skriver vi derfor kommandoen

```
IntegralMellom(f, g, 0, 2)
```

i algebrafeltet. Vi finner at arealet er 2,67.



GeoGebra kan også regne ut ubestemte integraler. Dette gjøres ved å gi kommandoen `Integral(<funksjon>)` uten å spesifisere grensene.

Eksempel 2.12

Finn det ubestemte integralet $\int x^3 \sin x \, \mathrm{d}x$

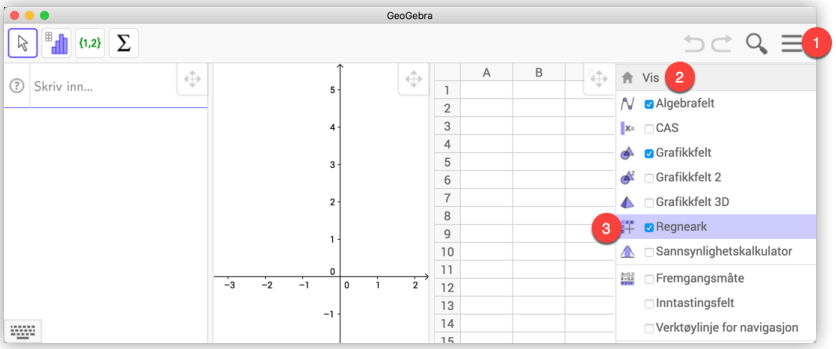
Løsning:
Vi skriver inn kommandoen `Integral(x^3sin(x))` og trykker enter. Vi får da svaret i algebrafeltet, nemlig $(3x^2 - 6)\sin(x) + (6x - x^3)\cos(x)$. Det vil si at

$$\int x^3 \sin x \, \mathrm{d}x = (3x^2 - 6)\sin x + (6x - x^3)\cos x + C$$

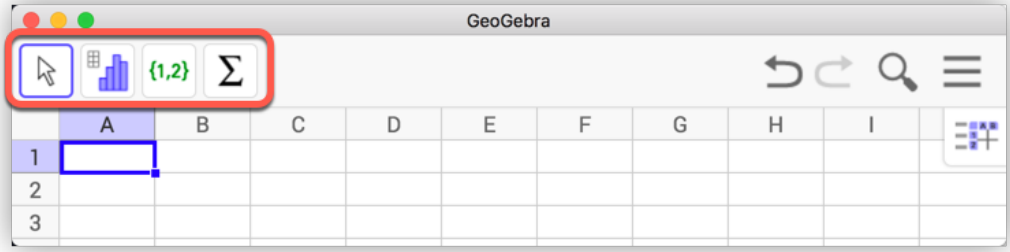
3 Regnearket

3.1 Generelt om regnearket

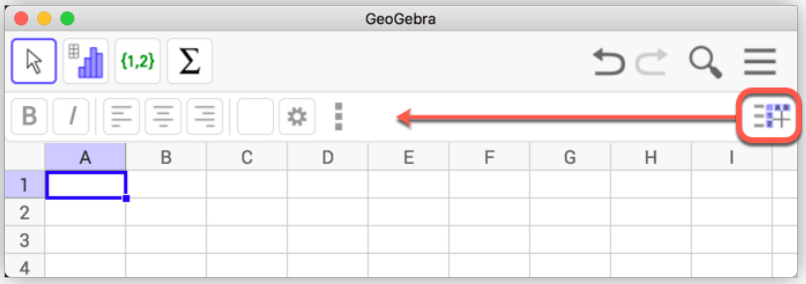
Et regneark kan ses på som en stor tabell med rader og kolonner. På samme måte som i Excel og andre typer regneark, angis en celle i denne tabellen ved å fortelle hvilken kolonne og hvilken rad som det henvises til. Kolonnene angis med bokstaver som A, B, ..., mens radene nummereres med tall 1, 2, ... Vi kan utføre regneoperasjoner på celler (som A3+B5) og vi kan skrive inn tekst i cellene. I GeoGebra blir en celle formatert som tekst dersom du setter teksten i anførselstegn. Vi kan også skrive til en celle fra algebrafeltet. Skriver du `A2=10` i algebrafeltet vil det stå 10 i celle A2. Dette kan være nyttig dersom du skal bruke GeoGebras egne verktøy på cellene. Du kan for eksempel skrive `A1=Integral(x^2-2, 2, 5)`. Svaret vil da stå i celle A1. Du åpner regnearket ved å hake det av under «Vis» (2) i menyen (1):



Merk at dersom du er i regnearket vil menyene endre seg:



Regnearket har også en egen stilmeny. Klikk på stilmenyknappen oppe i høyre hjørne for å få fram stilmenyen. Toppen av regnearket vil da se slik ut:



Vi skal i dette kapittelet bruke regnearket til å løse en del oppgaver. Første eksempelet er hentet fra eksamen i 10. klasse.

Eksempel 3.1

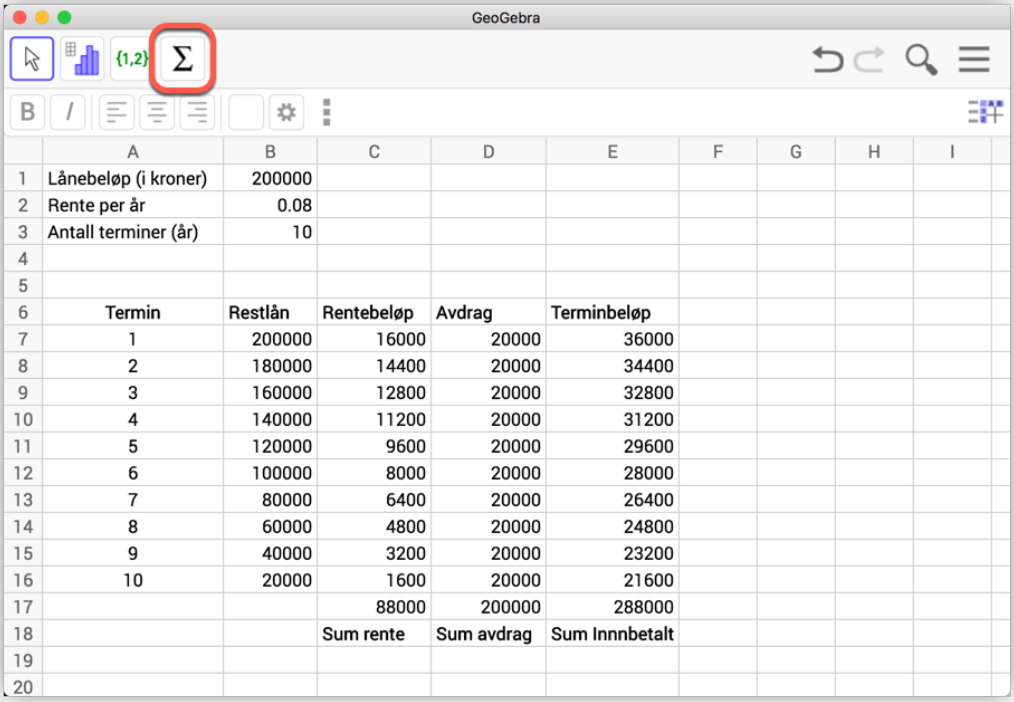
Synne kjøper ny motorsykkel og får et serielån i banken. Lånebeløpet er 200 000 kroner. Hun betaler ned lånet med én termin per år i 10 år. Renten er 8 % per år. Nedenfor ser du begynnelsen på betalingsplanen fra banken. Fullfør betalingsplanen i et regneark.

	A	B	C	D	E
1	Lånebeløp (i kroner)	200000			
2	Rente per år	8 %			
3	Antall terminer (år)	10			
4					
5					
6	Termin	Restlån	Rentebeløp	Avdrag	Terminbeløp
7	1	200000	16000	20000	36000
8	2	180000	14400	20000	34400
9	3	160000			
10	4				
11	5				
12	6				
13	7				
14	8				
15	9				
16	10				
17					
18			Sum rente	Sum avdrag	Sum innbetalt

Løsning:
Vi fører tallene inn i regnearket. I celle C7 har vi skrevet inn `=B7*B$2` og i celle E7 har vi skrevet inn `=C7+D7`. I celle B8 har vi skrevet inn `=B7-D7`.

Merk at dollartegnet er skrevet inn foran to-tallet i den første av disse formlene for å få absolutt referanse til B2. Vi kan nå autokopiere cellene nedover på samme måte som i Excel. Merk at dette fungerer kun om du har valgt to celler.

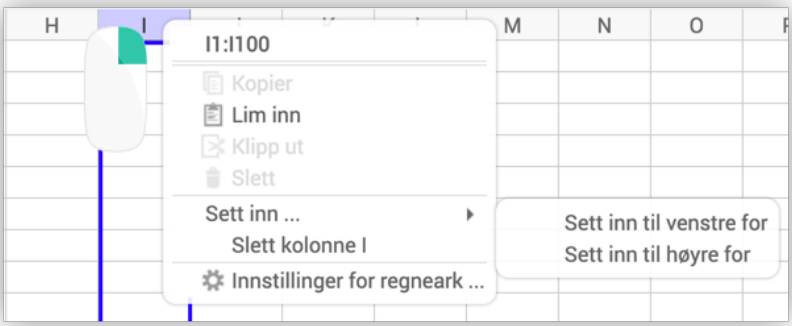
Summene regner vi ut ved enten å markere tallene vi vil legge sammen og klikke på Σ på verktøylinjen (se figur 3.1) eller ved å klikke i cellen du ønsker at summen skal stå i og så skrive inn for eksempel formelen `=Sum(C7:C16)`.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Lånebeløp (i kroner)	200000							
2	Rente per år	0.08							
3	Antall terminer (år)	10							
4									
5									
6	Termin	Restlån	Rentebeløp	Avdrag	Terminbeløp				
7	1	200000	16000	20000	36000				
8	2	180000	14400	20000	34400				
9	3	160000	12800	20000	32800				
10	4	140000	11200	20000	31200				
11	5	120000	9600	20000	29600				
12	6	100000	8000	20000	28000				
13	7	80000	6400	20000	26400				
14	8	60000	4800	20000	24800				
15	9	40000	3200	20000	23200				
16	10	20000	1600	20000	21600				
17			88000	200000	288000				
18			Sum rente	Sum avdrag	Sum Innnbetalt				
19									
20									

Figur 3.1: Du kan summere tall fra en kolonne ved å markere tallene og deretter klikke på Σ. Du får da skrevet inn summen i cellen under de markerte tallene.

Tips! Dersom du ønsker å sette inn en ekstra kolonne eller rad i regnearket kan du gjøre dette ved å høyreklikke på den blå kanten (der hvor rad- eller kolonnenummerene står) og velge «Sett inn».



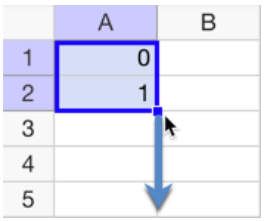
Figur 3.2: Du kan sette inn kolonner (eller rader) ved å høyreklikke øverst i kolonnen og velge «Sett inn...»

I regnearket til GeoGebra er det ikke bare tekst, tall og formler som kan plasseres i de ulike cellene, men alle typer objekter fra GeoGebra.

Eksempel 3.2

Lag en sirkel med sentrum i origo og radius 1. Bruk regnearket til å tegne inn 12 punkt som ligger jevnt fordelt på sirkelen slik at det ene punktet ligger i $(1,0)$. Tegn også inn (ved å bruke regnearket) de elleve linjestykkene som går fra $(1,0)$ og ut til de andre punktene.

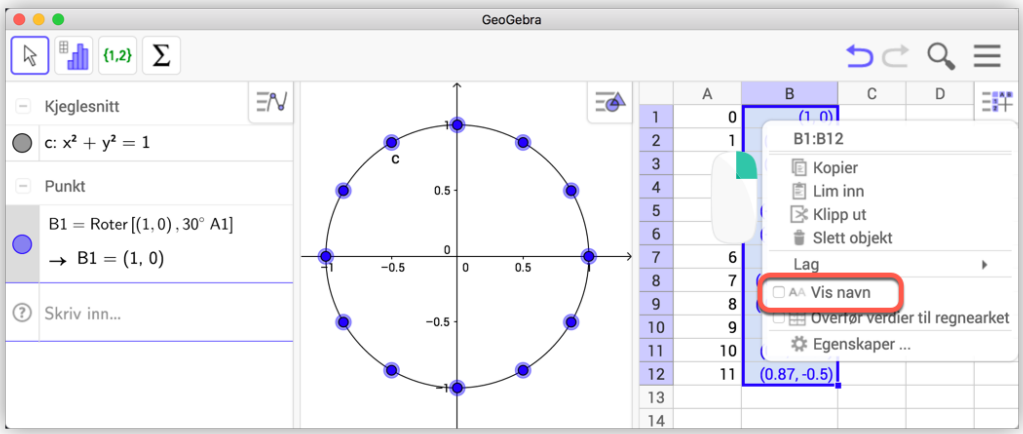
Løsning:
Vi skriver inn $x^2+y^2=1$ i algebrafeltet for å tegne opp sirkelen. Åpner regnearket og skriv inn 0 i celle A1 og 1 i celle A2. Markerer A1 og A2, velger det lille kvadratet nederst i høyre hjørne av A2 og drar nedover slik at vi får tallene 0 til 11 i cellene A1 til A12.



I B1 ønsker vi å skrive Roter((1,0), 30° A1). Her kan det bli en utfordring å få gradetegnet fram. Derfor velger vi å skrive inn

```
B1=Roter((1,0), 30°A1)
```

i algebrafeltet (hvor gradetegnet kommer fram ved å trykke Ctrl + o). Marker deretter celle B1, velg det lille kvadratet i nedre høyre hjørne og dra dette nedover for å autokopiere formelen ned til celle B12. Du vil da få regnet ut koordinatene til punktene. For å få vise dem i grafikkfeltet må du markere cellene B1 til B12, høyreklikke i det blå området og hake av for «Vis objekt». Det kan også være lurt å hake vekk «Vis navn». Se figur 3.3.



Figur 3.3: For å vise punktene laget i regnearket, kan du høyreklikke og hake av for «Vis objekt». Du kan også velge å ikke vise navn.

1

Oppgave 3.1

Lag de elleve linjestykkene som går fra $(1,0)$ til de andre punktene. Hva blir produktet av lengdene til disse linjestykkene? Eksperimenter med andre antall punkt/linjestykker.

3.2 Statistikk

GeoGebra er et flott verktøy til å tegne histogrammer og søylediagrammer. For å gjøre dette, kan det være greit å bruke regnearket i GeoGebra til å føre inn de ulike tallene. Men vi kan også lage lister direkte i algebrafeltet, slik følgende eksempler viser.

Eksempel 3.3

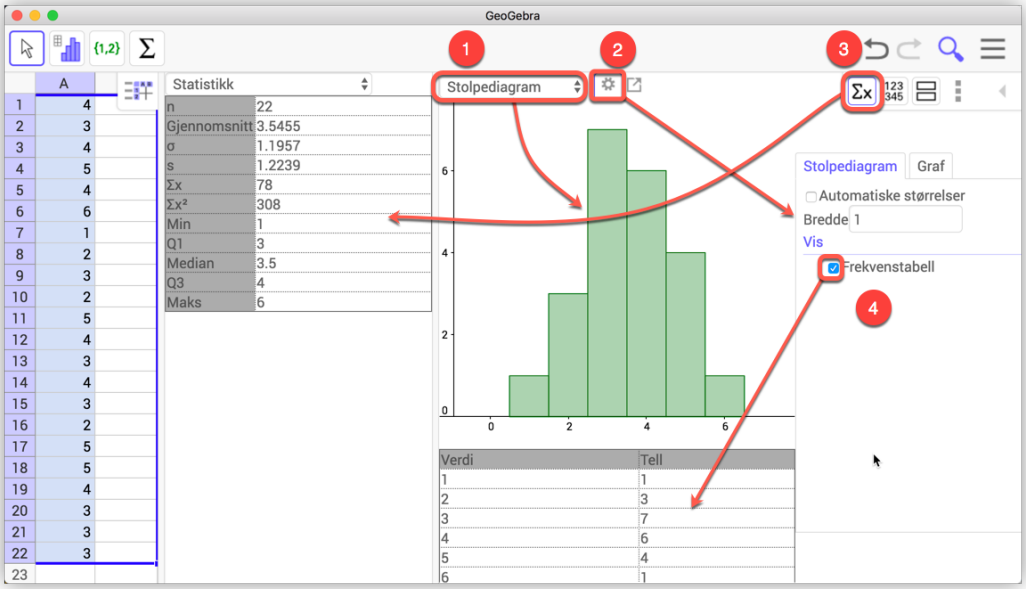
På en prøve har en klasse fått følgende karakterer:
4, 3, 4, 5, 4, 6, 1, 2, 3, 2, 5, 4, 3, 4, 3, 2, 5, 5, 4, 3, 3, 3.

a) Lag en grafisk framstilling av resultatene.

b) Finn gjennomsnittskarakteren og medianen.

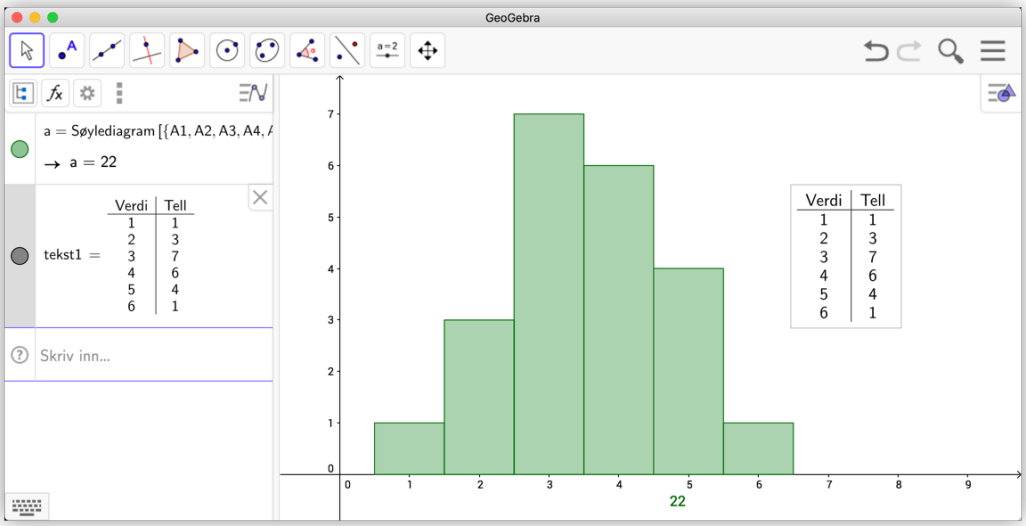
Løsning:

a) Vi bruker GeoGebra til å illustrere resultatene med et søylediagram. Åpne regnearket og før tallene inn i celle A1 til A22. Marker deretter tallene og klikk på verktøyet *Analyse av en variabel* . Du må så velge *Stolpediagram* (se (1) på figur 3.4). Dersom du ønsker å endre bredden på søylene klikker du på innstillinger (2), haker vekk Automatisk størrelse og skriver inn ønsket bredde. Her kan du også velge å få laget en frekvenstabell (4). For å svare på oppgave b) kan vi klikke på *Vis statistikk* Σx (3). Vi ser at gjennomsnittet er ca 3,5 og Medianen er 3,5.



Figur 3.4: I Dataanalyse kan du få mye informasjon om datamaterialet.

Dersom du ønsker å få tegnet opp dette diagrammet i grafikkfeltet klikker du på og velger «Kopier til grafikkfelt». Da får du tegnet opp søylediagrammet og det blir laget en frekvenstabell i grafikkfeltet som vist på figur 3.5 dersom du haket av for *Frekvenstabell* i *Analyse av en variabel* (se (4) på figur 3.4).



Figur 3.5: Søylediagram med frekvenstabell.

b) Når vi krysser ut *Analyse av en variabel* forsvinner alle sentral- og spredningsmål som vi kunne lese av slik vi ser i figur 3.4. Dersom vi ønsker å lagre slike størrelser i algebrafeltet, kan vi gjøre dette ved å skrive inn passende kommandoer. For å finne gjennomsnittet kan vi for eksempel skrive inn

```
g=gsnitt(A1:A22)
```

På samme måte kan vi finne medianen ved å skrive inn

```
m=Median(A1:A22)
```

Vi ser at gjennomsnittet er 3,55 og medianen er 3,5.

Eksempel 3.4

Elevene i en klasse hadde følgende skostørrelser:

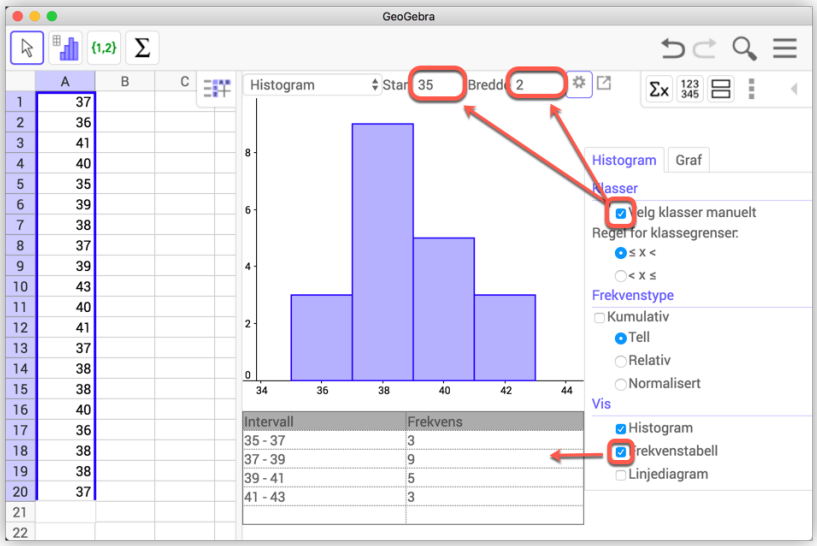
$$37, 36, 41, 40, 35, 39, 38, 37, 39, 43, 40, 41, 41, 37, 38, 38, 40, 36, 38, 38, 37$$

Illustrer tallene med et histogram der klassegrensene er 35, 37, 39, 41, 43 og 45.

Løsning:
Vi skriver inn tallene i regnearket, marker dem og klikker på . Vi får da opp et vindu som vist på figur 3.6. Legg merke til at grensene til histogrammet i utgangspunktet ikke er helt slik som vi ønsker dem. Klikk på innstillinger og velg klasser manuelt. Velg at klassene skal starte på 35 og at bredden skal være 2. På figur 3.6 har vi også valgt å vise Frekvenstabell. Merk at denne metoden går fint dersom klassebredden er lik for hver klasse. Skal du bruke klasser med ulik klassebredde må du bruke Historgram-kommandoen I dette tilfelle kunne vi ha skrevet inn

```
Histogram({35, 37, 39, 41, 43},A1:A21, false)
```

Vi har skrevet inn «false» for å få høyden lik klassefrekvens. Skriver vi «true» (eller ingen ting) blir høydene lik tetthetsfaktor · klassefrekvens/klassebredde.



Figur 3.6: Histogram i Datanalyse

Oppgave 3.2
I en undersøkelse ble en del elever spurt om hvor mange blyanter de hadde med seg på skolen. Her er resultatet:

3, 2, 3, 5, 4, 4, 5, 7, 2, 7, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 5, 4, 3, 3, 4.

a) Lag et histogram som viser hvor mange elever som hadde mellom 0 og 2 blyanter, 3 og 5 blyanter og 6 og 10.

b) Du kan også lage et søylediagram. Skriv inn `Søylediagram(L_1,0.5)`. Du vil da få søyler med bredde lik 0,5.

c) Finn gjennomsnittet ved å bruke kommandoen `gsnitt(L_1)`.

d) Finn typetallet ved å bruke kommandoen `Typetall(L_1)`.

Oppgave 3.3
Listen angir antall timer ulike elever i en klasse bruker på spill i uken:

$$7, 7, 8, 8, 5, 4, 8, 3, 6, 5, 4, 7, 2, 1, 8, 7, 7, 0, 1, 4, 5, 8, 12, 14, 12, 3$$

a) Representer tallene i et histogram med 5 som klassebredde (0-5, 5-10,...).

b) Hvor mange timer bruker elevene i gjennomsnitt?

c) Hva er typetallet?

GeoGebra kan også finne første og tredje kvartil til et datasett. Du bruker da kommandoene `Q1(<liste>)` og `Q3(<liste>)`. Du kan selvsagt også finne andre kvartil ved å bruke kommandoen `Median(liste)`. Variasjonsbredden finner du ved å skrive inn kommandoen `Maks(<liste>)-Min(<liste>)`. Kvartilavviket og standaravvik finner du ved å skrive inn henholdsvis `(Q3(<liste>)-Q1(<liste>))/2` og `stavv(<liste>)`[1].

Eksempel 3.5

Lengdehopp er en gren av friidrett som går ut på å hoppe så langt man kan i et hopp. I konkurranser har man som regel tre hopp, der det beste hoppet teller.

Anna og Petra konkurrerer om å kvalifisere seg til lengdehoppkonkurransen i et friidrettsstevne. De får ti hopp hver, og den beste av dem er kvalifisert til konkurransen. Her er resultatene (oppgitt i meter) fra kvalifiseringen:

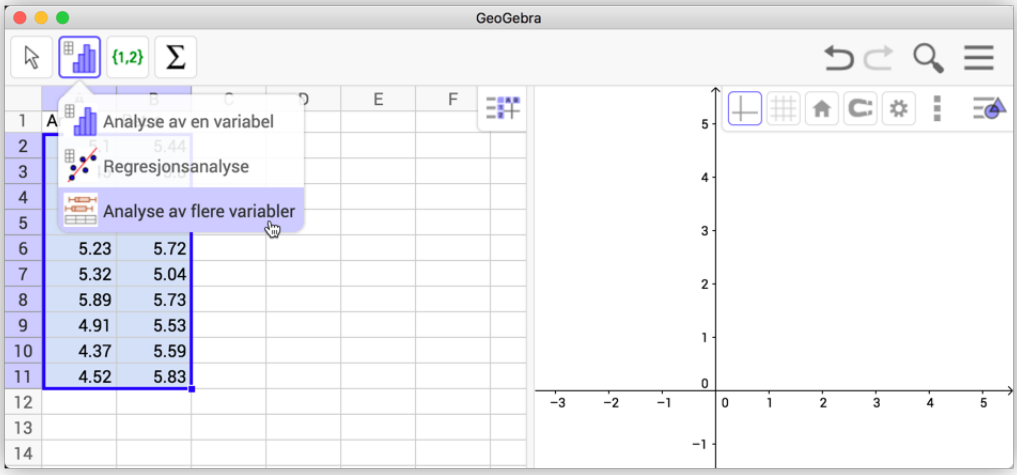
Hopp	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anna	5,10	5,45	5,92	4,10	5,23	5,32	5,89	4,91	4,37	5,42
Petra	5,44	5,80	5,67	5,74	5,72	5,04	5,73	5,53	5,59	5,83

a) Finn gjennomsnitt og median for hver av de to jentenes resultater.

b) Finn variasjonsbredde og standardavvik for hver av de to jentenes resultater.

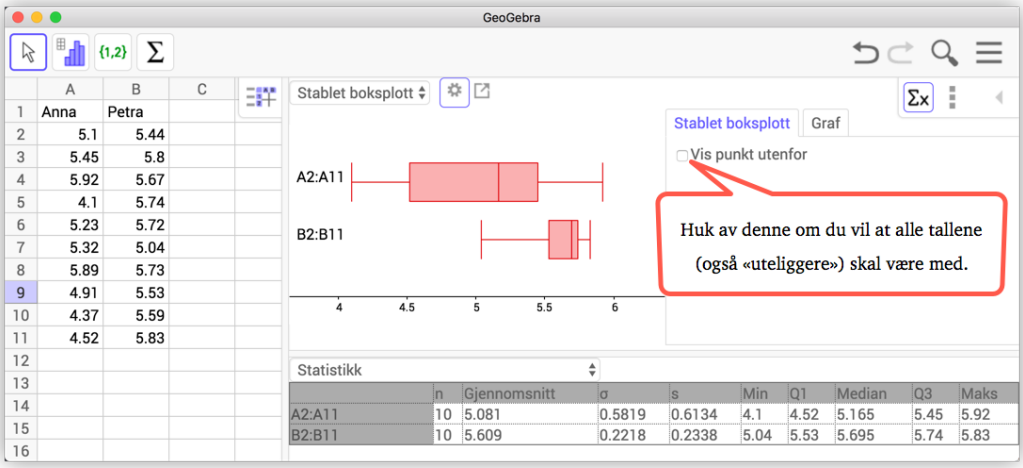
c) Foreta en vurdering av jentenes resultater og det du fant i a) og b), og argumenter for hvem du synes skal bli kvalifisert.

Løsning:
Vi fører tallene inn i regnearket. Deretter markerer vi alle tallene og klikker på verktøyet *Analyse av flere variable* som vi finner i samme gruppe på verktøylinjen som *Analyse av en variabel*.



[1] Om rådata er et utvalg av en større polulasjon kan du bruke `stavvp(<liste>)`

Du får da opp følgende vindu:



	A	B	C
1	Anna	Petra	
2	5.1	5.44	
3	5.45	5.8	
4	5.92	5.67	
5	4.1	5.74	
6	5.23	5.72	
7	5.32	5.04	
8	5.89	5.73	
9	4.91	5.53	
10	4.37	5.59	
11	4.52	5.83	
12			
13			
14			
15			
16			

	n	Gjennomsnitt	σ	s	Min	Q1	Median	Q3	Maks
A2:A11	10	5.081	0.5819	0.6134	4.1	4.52	5.165	5.45	5.92
B2:B11	10	5.609	0.2218	0.2338	5.04	5.53	5.695	5.74	5.83

Figur 3.7: Analyse av flere variable

Vi kan nå lese av alle tallene som det blir spurt om i oppgaven. Unntaket er variasjonsbredden (som vi må regne ut manuelt ut fra tallene i tabellen over).

Vi ser også en grei grafisk framstilling som viser at Petra er jevnt over bedre til å hoppe enn Anna, noe som blir fanget opp av blant annet standardavvik og middelverdi. Men Anna kan vinne en konkurranse der det er det lengste hoppet som er avgjørende!

Neste eksempel er hentet fra eksempelsettet til Matematikk 2P for ny eksamensordning våren 2015. Her får du se at du også lett kan ta utgangspunkt i en frekvenstabell.

Eksempel 3.6

Våren 2012 var klasse 2A og klasse 2B ved en skole oppe til eksamen i matematikk 2P. Tabellen nedenfor viser hvordan karakterene fordelte seg i de to klassene.

Karakter	Klasse 2A (Frekvens)	Klasse 2B (Frekvens)
1	2	0
2	2	0
3	3	6
4	5	8
5	4	6
6	4	0

a) Bruk regneark til å lage en grafisk framstilling som viser karakterfordelingen i de to klassene.

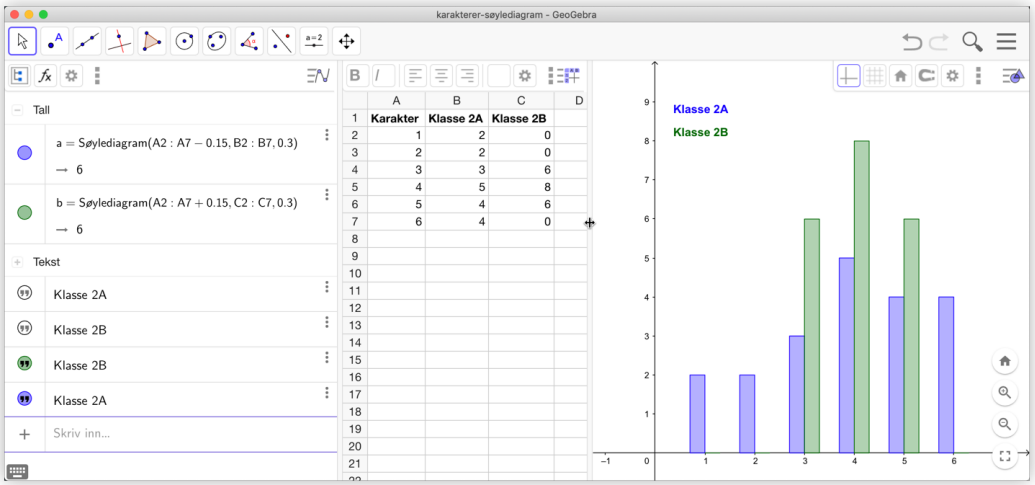
b) Bruk regneark til å bestemme gjennomsnittskarakter, mediankarakter og standardavvik for karakterene i hver av de to klassene. Hva forteller svarene om resultatene i de to klassene?

Løsning:

a) Før tallene inn i regnearket til GeoGebra. Siden vi har to sett med data her (to klasser), så er det ikke så lett å få tegnet opp to søylediagram direkte ved å bruke *Analyse av en variabel*. Derfor vil vi her bruke kommandoer i algebrafeltet for å få tegnet opp søylediagrammene. For å få tegnet inn de to diagrammene pent på siden av hverandre har vi forskjøvet de to diagrammene litt (slik at de ikke ligger oppå hverandre). Dette har vi gjort ved å legge til 0.15 til listen med data (A2:A7). Kommandoene vi har brukt er derfor:

```
Søylediagram(A2:A7-0.15,B2:B7,0.3)
Søylediagram(A2:A7+0.15,C2:C7,0.3)
```

Resulatet blir som vist på figuren nedenfor.



b) Du kan skrive inn formler i regnearket. Dersom formlene er litt lange eller du ikke er sikker på syntaksen, kan det være et godt tips å skrive til cellene fra algebrafeltet.

I cellene på figuren til høyre har jeg skrevet inn følgende kommandoer i algebrafeltet:

```
B9=gsnitt(A2:A7, B2:B7)
C9=gsnitt(A2:A7, C2:C7)
B10=Median(A2:A7, B2:B7)
C10=Median(A2:A7, C2:C7)
B11=stavvp(A2:A7, B2:B7)
C11=stavvp(A2:A7, C2:C7)
```

	A	B	C
1	**Karakter**	**Klasse 2A**	**Klasse 2B**
2	1	2	0
3	2	2	0
4	3	3	6
5	4	5	8
6	5	4	6
7	6	4	0
8			
9	Gjennomsnitt:	3.95	4
10	Median:	4	4
11	Standardavvik:	1.56	0.77

Vi ser at de to klassene har ca samme sentralmål, men det er mye større spredning i klasse 2A. Dette ser vi både grafisk og ved at 2A har mye større standardavvik enn 2B.

Til slutt tar vi med et eksempel der vi regner på et klassedelt materiale. Igjen er det eksempelsettet for 2O15 fra Utdanningsdirektoratet som er utgangspunkt.

Eksempel 3.7

Politiet har gjennomført fartskontroller på to veistrekninger. Den ene veistrekningen har fartsgrense 50 km/h og den andre 80 km/h. Nedenfor ser du resultatene fra hver av de to kontrollene

Fartsgrense 50 km/h	
Fart	Antall biler
$[45, 50\rangle$	25
$[50, 55\rangle$	26
$[55, 60\rangle$	23
$[60, 65\rangle$	3
$[65, 70\rangle$	2
$[70, 75\rangle$	1

Fartsgrense 80 km/h	
Fart	Antall biler
$[70, 75\rangle$	7
$[75, 80\rangle$	43
$[80, 85\rangle$	17
$[85, 90\rangle$	8
$[90, 95\rangle$	0
$[95, 125\rangle$	5

Bestem gjennomsnittsfarten til bilene i hver av de to kontrollene.

Løsning:
Før inn tallene i et regneark som vist på figuren til høyre. Skriv inn følgende kommandoer:

```
B9=gsnitt(A1:A7, B1:B6)
E9=gsnitt(D1:D7, E1:E6)
```

	A	B	C	D	E
1	45	25		70	7
2	50	26		75	43
3	55	23		80	17
4	60	3		85	8
5	65	2		90	0
6	70	1		95	5
7	75			125	

Da kan du lese av at gjennomsnittsfarten i den ene kontrollen var 53 km/h mens den var 81 km/h i den andre kontrollen. Merk at vi her må ha med ett tall mer i kolonne A og D. Dette gjør vi for å markere hvor høyt opp det siste intervallet skal gå.

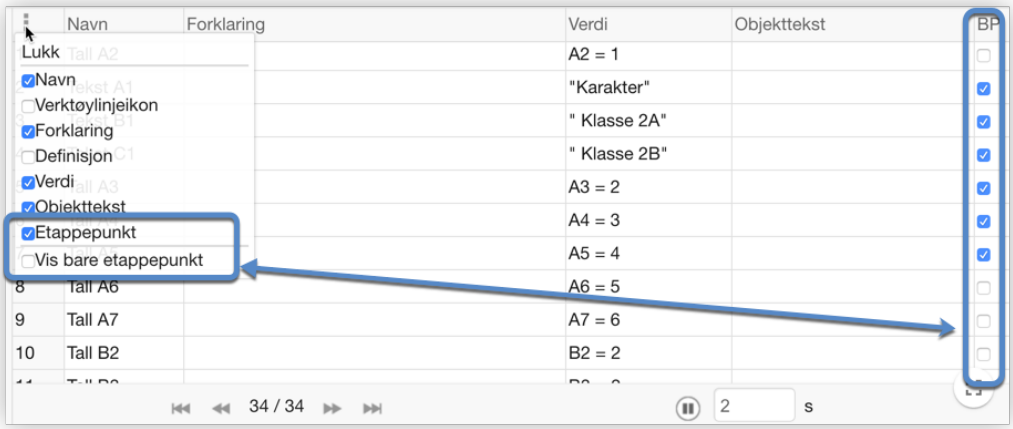
3.3 Vis formlene

På samme måte som du i Excel kan bruke tastekombinasjonen Alt+d for å vise formlene i regnearket. Du tråkler da gjennom tre alternativer: Verdi, Definisjon og Kommando. Merk at du må klikke deg inn i regnearket, slik at dette er aktivt, for at dette skal kunne virke.

	A	B	C
1	**Karakter**	**Klasse 2A**	**Klasse 2B**
2	1	2	0
3	2	2	0
4	3	3	6
5	4	5	8
6	5	4	6
7	6	4	0
8			
9	Gjennomsnitt:	gsnitt(A2:A7, B2:B7)	gsnitt(A2:A7, C2:C7)
10	Median:	Median(A2:A7, B2:B7)	Median(A2:A7, C2:C7)
11	Standardavvik:	stavvp(A2:A7, B2:B7)	stavvp(A2:A7, C2:C7)

Figur 3.8: Her ser du formlene som er brukt i eksempel 3.6

Vi kan også dokumentere hva som er gjort i regnearket (eller andre felt) i «Framgangsmåte». Ulempen med dette er at den blir veldig lang, siden alle cellene som det er skrevet noe i vil få en egen rad. En mulig løsning kan være å lage «etappepunkt». Dette kan du gjøre ved å hake av for etappepunkt under menyen ⋮ øverst til høyre i fremgangsmåte:



Figur 3.9: Du kan velge etappepunkt dersom du har haket av for dette i kolonnefeltet i stilmenyen.

Når du har valgt etappepunkt kan du skjule alle de andre ved å velge «Vis bare etappepunkt» i menyen under ⋮. Se figur 3.9.

3.4 Regresjon

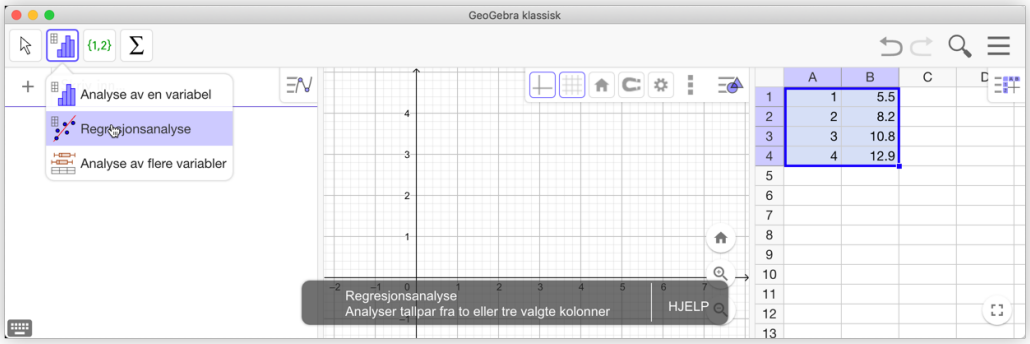
Når vi skal gjennomføre regresjon kan det være en god idé å bruke regnearket til GeoGebra. Vi skal i dette kapittelet bruke regnearket til å føre inn datamaterialet som danner grunnlag for regresjon. Vi tar som vanlig utgangspunkt i noen eksempler.

Eksempel 3.8

Finn en lineær funksjon som passer bra med følgende tall:

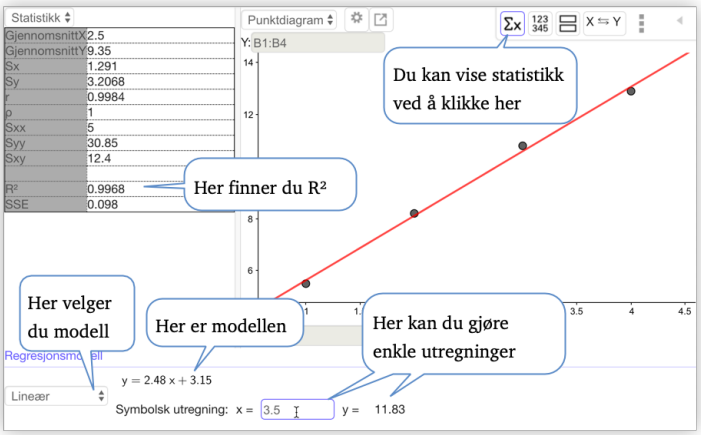
x	1	2	3	4
y	5,5	8,2	10,8	12,9

Løsning:
Vi fører tallene inn i regnearket, markerer dem og velger *Regresjonsanalyse* i verktøymenyen som vist på figur 3.10:



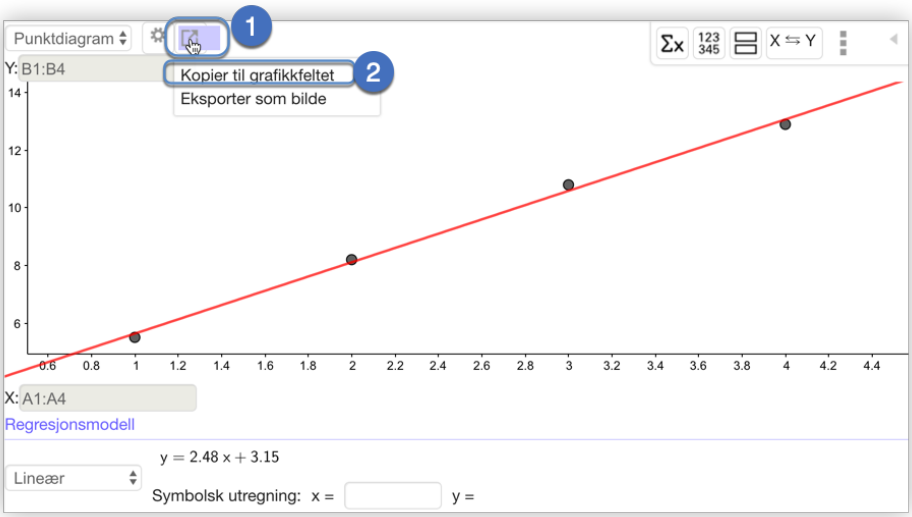
Figur 3.10: Marker tallene i regnearket og velg *Regresjonsanalyse*

Du får da opp et vindu som vist på figur 3.11. Vi velger «Lineær modell» og ser at $y = 2{,}48x + 3{,}15$ passer bra med tallene i tabellen. Også her kan du klikke på Σx for å få fram for eksempel R^2.



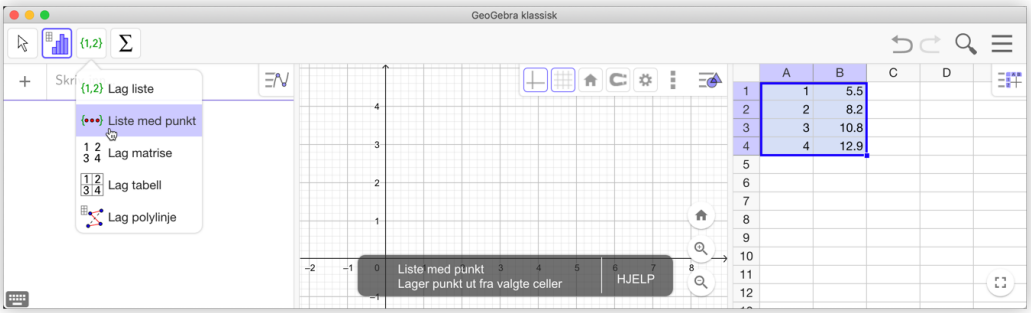
Figur 3.11: *Regresjonsanalyse* er effektiv å bruke.

Du kan kopiere regresjonen du har gjort i Regresjonsanalyse ved å klikke på og velge «Kopier til grafikkfeltet». Du får da laget en liste med punkt og en funksjon definert ut fra regresjonen du har valgt.

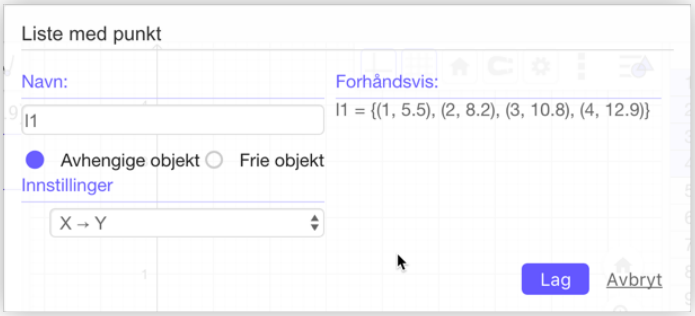


Figur 3.12: Du kan kopiere til grafikkfeltet fra Regresjonsanalyse.

Slike regresjoner kan du også gjøre ved å skrive inn kommandoer. Da må du først lage liste med punkt. Du kan lage slike lister med punkt ved å bruke regnearket. Marker tallene og klikk på verktøyet *Lag liste med punkt* , som vist på figuren nedenfor.



Du får da opp følgende vindu:



Her kan du velge om punktene skal være avhengig eller uavhengig av tallene fra regnearket (Frie objekt). Dersom du velger «Avhengige objekt», så vil punktene automatisk endres dersom du endrer tallene i regnearket. Motsatt gjelder også. Dersom du flytter på et av punktene, så vil tallene i regnearket automatisk bli endret.

Når du så har laget en liste med punkt, kan du bruke kommandoer på denne listen. I dette tilfellet er en av følgende kommandoer aktuelle:

```
RegLin(l1)
```

Merk at svaret blir en linje og ikke en funksjon når vi gir kommandoen `RegLin`. Men ønsker du å finne y når $x = 5$ kan du skrive inn `a(5)` i algebrafeltet (dersom linjen har fått navnet `a`). Du finner da at $y = 15{,}5$.

Gir du derimot kommandoen

```
RegPoly(l1,1)
```

vil du få funksjonen $f(x) = 2{,}48x + 3{,}15$ som svar. Du kan da bruke denne funksjonen til å gjøre ulike beregninger, som for eksempel å regne ut $f(5)$.

Oppgave 3.4
En parabel går gjennom punktene $(2, 1)$, $(4, 4)$ og $(6, -1)$. Åpne et nytt arbeidsark og bruk regresjon til å finne et funksjonsuttrykk for andregradsfunksjonen.

Du trenger ikke å bruke regnearket til å tegne inn punktene. Du kan lage en liste direkte ved å gi kommandoen

```
L={(2, 1), (4, 4), (6, -1)}
```

Du må her bruke kommandoen `RegPoly(L, 2)`.

Oppgave 3.5
Sammenhengen mellom kostnaden $K(x)$ i kroner ved produksjon av en vare og tallet på produserte enheter x er gitt i tabellen nedenfor.

x	0	100	300	500	700
$K(x)$	30 000	83 000	207 000	355 000	527 000

a) Bruk regresjon og finn en god modell for $K(x)$. I GeoGebra kan du velge mellom `RegEksp`, `RegLin`, `RegLog`, `RegLogist`, `RegPoly`, `RegPot` og `RegSin`

b) Finn $K'(300)$.

Oppgave 3.6 — Fra MAT1015 Matematikk 2P, Høsten 2010.

Den mest nøyaktige måten å finne makspulsen din på er å gjennomføre en fysisk test der du presser deg maksimalt for å se hvor høy puls det er mulig å oppnå. Fem personer med ulik alder har gjennomført en slik test. Resultatene ser du i tabellen nedenfor. Finn en lineær sammenheng mellom alder x og makspuls y.

Alder	17	25	37	48	60
Makspuls	195	189	183	175	166

Oppgave 3.7 — Eksamen REA3026 Matematikk S1, Våren 2008.

Tabellen viser antall registrerte personbiler per 1000 innbyggere i Norge for noen år i perioden 1985 - 2005.

x	0	5	10	15	20
$f(x)$	417	418	426	460	496

Her er $f(x)$ antall registrerte personbiler per 1000 innbyggere x år etter 1985.

a) Bestem gjennomsnittlig veksthastighet fra 1990 til 2000. Hva forteller dette tallet oss?

b) Bruk regresjon til å finne en polynomfunksjon f av andre grad som tilnærmet beskriver utviklingen ovenfor.

c) Tegn grafen til f, og marker punktene i tabellen i samme koordinatsystem.

d) Bestem momentan veksthastighet i år 2000. Marker den momentane veksthastigheten på grafen til f.

e) I år 2001 var det ca. 4 500 000 innbyggere i Norge. Bruk d) til å anslå hvor mange registrerte biler det var dette året.

3.5 Overføre verdier til regnearket

Du kan overføre verdier til regnearket.

Eksempel 3.9

Hva er arealet til en rektangulær femkant med side s?

Løsning:
Du kan selvsagt betrakte dette rent teoretisk og komme fram til formelen

$$A(s) = \frac{1}{4}\sqrt{10\sqrt{5}+25}\cdot s^2$$

En annen måte å løse problemet på er å gjøre en del eksempler og så bruke regresjon til å finne formelen.

1. Lag et linjestykke f mellom to punkt A og B.
2. Velg verktøyet *Regulær mangekant* og klikk på A og B. Velg at polygonet skal ha 5 hjørner.
3. Åpne regnearket. Dette må være åpent for at du skal kunne overføre verdier til regnearket.
4. Høyreklikk på linjestykket i algebrafeltet og velg «Overfør verdier til regnearket».
5. Gjør det samme med polygonet: Høyreklikk på Mangekant1 og velg «Overfør verdier til regnearket».
6. Flytt litt rundt på et av hjørnene i polygonet. Du vil da få satt av tilhørende verdier i regnearket.[2]
7. Gjør en regresjon på (f, Mangekant1) ved å markere tallene i regnearket. Velg potensfunksjon. Du vil da få $y = 1{,}7205x^2$. Det vil si at

$$A(s) = 1{,}7205\cdot s^2$$

Oppgave 3.8

Gjør tilsvarende som i eksempel 3.9 med en regulær sekskant. Kan du også finne en eksakt verdi for arealet?

Å overføre verdier til regnearket er en fin måte å samle opp de ulike utfallene vi får når vi simulerer for eksempel et terningkast. La oss si vi ønsker å gjøre et forsøk der vi kaster en terning flere ganger. Vi ønsker da for eksempel å samle opp de ulike tallene i en frekvenstabell. Slik kan vi da gå fram:

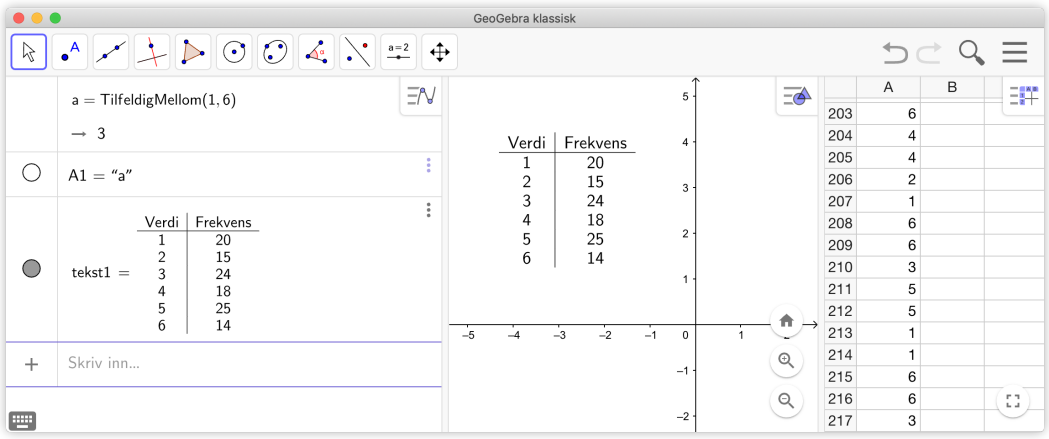
[2] Det forekommer at GeoGebra fører opp en verdi dobbelt. Prøv da å lagre dokumentet, lukke GeoGebra og åpne igjen.

1. Skriv inn kommandoen `TilfeldigMellom(1, 6)` i algebrafeltet og få et tilfeldig tall a.

2. Åpne regnearket og høyreklikk deretter på a og velg «Overfør verdier til regnearket».

3. Når du nå oppdaterer GeoGebra (ved å klikke på ctrl + R), vil du få nye tall skrevet inn i regnearket. Vil du gjøre 100 kast kan du skrive inn `OppdaterFiguren(100)` i algebrafeltet.

4. For å samle alt i en frekvenstabell kan du skrive inn `Frekvenstabell(A1:A1000)` i algebrafeltet. Du får da en pen frekvenstabell plassert i grafikkfeltet. Se figur 3.13. Merk at det ikke er mulig i GeoGebra 6.0 å spore direkte til en liste, slik det er i GeoGebra 5.0. Vi har derfor skrevet inn A1:A1000 i kommandoen ovenfor. Det vil si at vi har bare valgt et stort tall (1000). Gjør vi mer enn 1000 kast, må vi selvsagt øke dette tallet.



Figur 3.13: GeoGebra kan lage frekvenstabeller for deg.

3.6 Mer om regresjoner

GeoGebra har et imponerende utvalg av regresjoner.

Funksjonstype	Kommando	Krav til x og y
$ax + b$	`RegPoly(<liste>, 1)`	ingen
$ax^n + bx^{n-1} + \cdots$	`RegPoly(<liste>, n)`	ingen
$a + b \ln x$	`RegLog(<liste>)`	$x > 0$
$a \cdot e^{bx}$	`RegEksp2(<liste>)`	$y > 0$
$a \cdot b^x$	`RegEksp(<liste>)`	$y > 0$
ax^b	`RegPot(<liste>)`	$x > 0$ og $y > 0$
$a \sin(bx + c) + d$	`RegSin(<liste>)`	ingen
$\frac{a}{1 + be^{cx}}$	`RegLogist(<liste>)`	ingen

Tabell 3.1: Regresjoner i GeoGebra

Med kommandoen `Reg(<liste med punkt>,<Funksjon>)` kan du selv utvide listen i tabell 3.1.

Eksempel 3.10

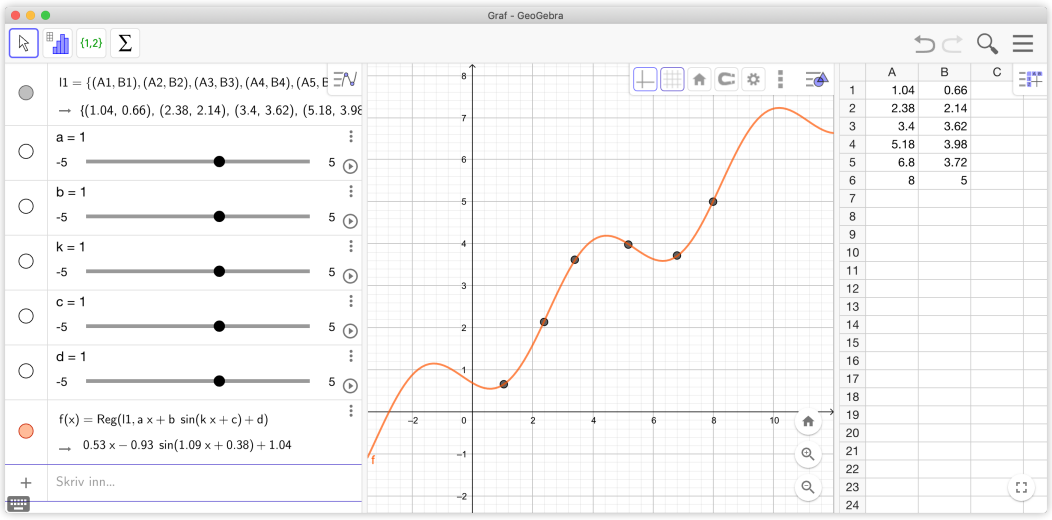
Bestem en funksjon som passer bra med punktene i tabellen nedenfor.

x	1,04	2,38	3,40	5,18	6,80	8,00
y	0,66	2,14	3,62	3,98	3,72	5,00

Før du kan bruke kommandoen `Reg()` må du definere listen med punkt og funksjonene du ønsker å bruke. La oss si at vi ønsker å bruke en regresjon av typen $ax + b\sin(kx + c) + d$. Vi går da fram på følgende måte:

1. Skrive inn noen passelige verdier for a, b, c, d og k i algebrafeltet.
2. Før inn tallene fra tabellen i regnearket og lag en liste l1.
3. Vi kan da bruke kommandoen `Reg(l1,a*x+b*sin(k*x+c)+d)` for å finne regresjonen.

Vi får da at $f(x) = 0{,}52x - 1{,}03\sin(1{,}10x + 0{,}40) + 1{,}13$ som vist på figur 3.14.



Figur 3.14: Regresjon med funksjonen $f(x) = ax + b\sin(kx + c) + d$

Dersom du får et rart resultat kan det hjelpe å endre litt på en eller flere av verdiene for a, b, c, d og k.

Oppgave 3.9
Finn en funksjon som passer bra med punktene i tabellen under.

x	0	2	4	6	8	10	12
y	54	35	25	19	16	14	13

Oppgave 3.10
Temperaturen i en kopp kaffe blir målt hvert fjerde minutt. Resultatene av målingene er vist i tabellen nedenfor.

Tid (i minutt)	0	4	8	12	16
Temperatur (i °C)	70	53	42	35	30

Lag en modell som beskriver temperaturen i koppen som funksjon av tiden.

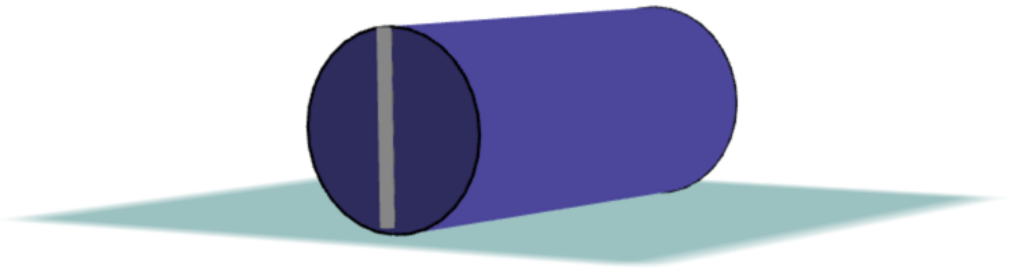
Oppgave 3.11
Bestem en funksjon som passer med tallene i tabellen:

x	−10	−8	−6	−4	−2	−1	0	2	4	6	8
y	−3,8	−4	−4,4	−5,6	−16	10	1,3	−1,1	−1,8	−2,1	−2,3

Oppgave 3.12
Bestem en funksjon som passer med tallene i tabellen:

x	−6	−4	−2	−1	−0,5	0,5	1	2	4	6
y	−9,17	−5,25	−1,5	0	0	6	6	7,5	11,3	15,2

Oppgave 3.13
En stor oljetank er sylinderformet og har lengde lik 5 meter og radius lik 1 meter. Du skal lage en målestav som du skal stikke ned i en åpning på toppen av tanken. Med denne skal du kunne avlese volumet med olje i tanken.



Oppgave 3.14
Finn en formel for arealet til en regulær syvkant med sidelengde s.

4 Sannsynlighet

4.1 Simulering av stokastiske forsøk

GeoGebra er et fint verktøy til å simulere ulike stokastiske forsøk. Fordelen her er at du kan gjøre mange forsøk nok så rakst. Du kan også lett behandle resultatene. Vi starter med et velkjent forsøk: vi kaster en terning.

Eksempel 4.1

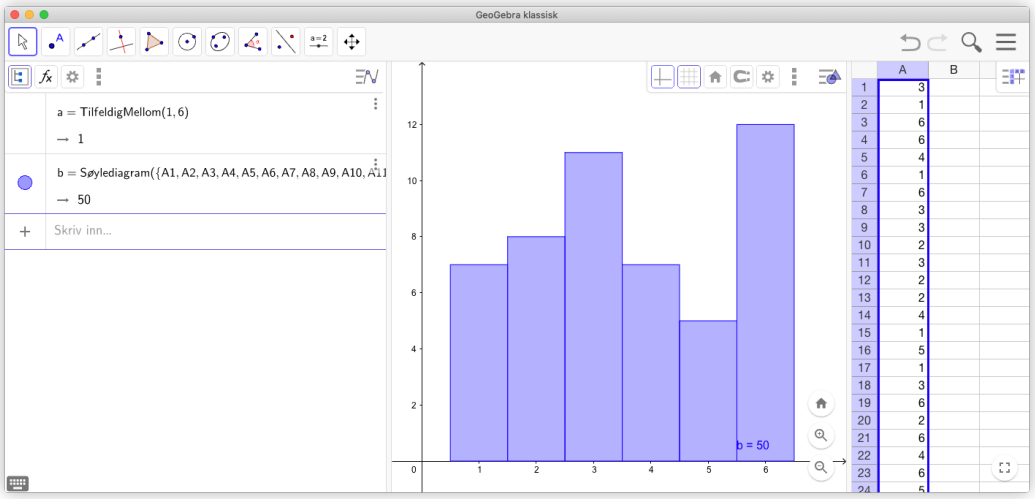
Simuler et terningkastforsøk.

Løsning:
Skriv inn kommandoen `TilfeldigMellom(1,6)`. Du får da et tilfeldig tall blant tallene 1, 2, 3, 4, 5 og 6. Ønsker du å gjenta forsøket kan du klikke inn i algebrafeltet (der du skrev `TilfedigMellom(1, 6)`) og trykke enter. Da gjøres utregningen på nytt. Alternativt kan du skrive inn `OppdaterKonstruksjonen()` i algebrafeltet og trykk enter.

I stedet for å gjøre ett kast om gangen, så kan vi bruke regnearket til å gjøre mange kast samtidig.

– Åpne regnearket og skriv inn `=TilfeldigMellom(1,6)` i celle A1. Autokopier så denne cellen ned til og med celle A50.

– Lag søylediagram av disse tallene ved å bruke verktøyet *Analyse av en variabel* til å lage søyledigram som illustrerer utfallene.



Tips! Du kan også lage lister med tilfeldige tall ved å bruke kommandoen

```
Følge(TilfeldigMellom(1,6), k, 1, 50)
```

Du får da 50 tilfeldige tall mellom 1 og 6.

Lager du en glider n med for eksempel heltallsverdier fra for 1 til 10000 kan du nå simulere n slike kast ved å skrive inn kommandoen

```
Følge(TilfeldigMellom(1,6), k, 1, n)
```

Oppgave 4.1

Simuler et forsøk der du kaster 2 terninger 100 ganger og der du ser på summen av antall øyne i hvert kast. Hvordan fordeler resultatet seg på to øyne, tre øyne, ..., 12 øyne?

Oppgave 4.2

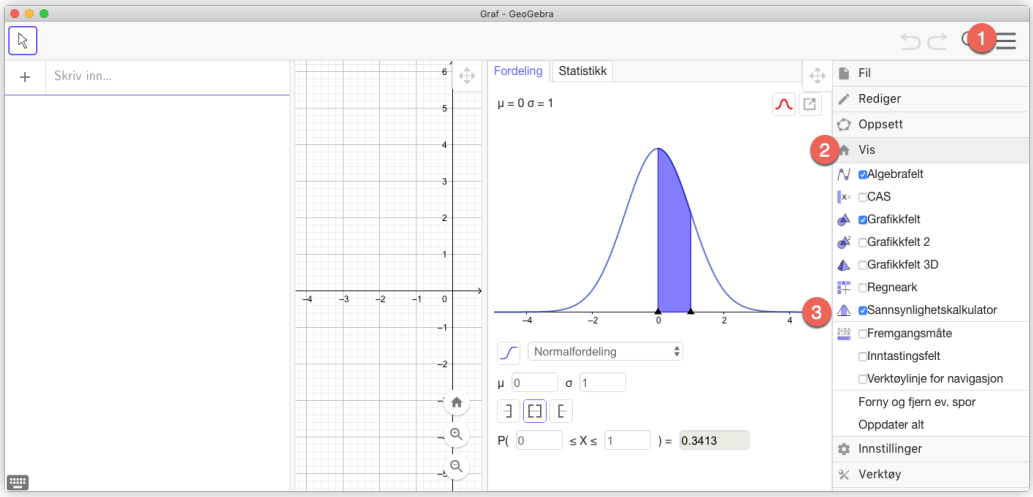
Simuler et forsøk der du kaster to mynter.

Tips! Du kan la 0 stå for kron og 1 stå for mynt og bruke kommandoen

```
TilfeldigMellom(0,1)
```

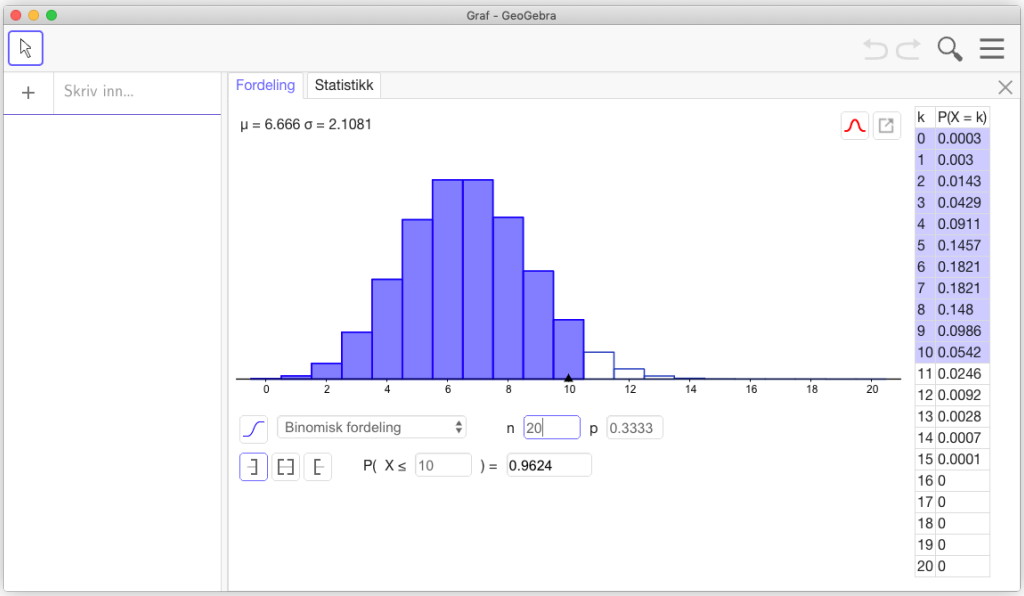
4.2 Sannsynlighetskalkulatoren

GeoGebra har et nyttig verktøy for utregning og presentasjon av sannsynlighetsfordelinger. Du finner dette verktøyet under «Vis» på menylinjen:



Figur 4.1: *Sannsynlighetskalkulator* finner du under «Vis» på menylinjen.

Det er et stort utvalg av fordelinger du kan bruke, men i videregående skole er det nok binomisk, hypergeometrisk og normalfordeling som er viktigst. Figur 4.2 vises binomisk fordeling.



Figur 4.2: GeoGebra gjør utregninger og visualiserer svaret fint.

Eksempel 4.2

Ved en stor videregående skole blir det brukt en nettbasert ressursside. Bruk av ressurssiden forutsetter at hver elev har installert et bestemt program på datamaskinen sin. I klasse 2b fikk 15 av 27 elever hjelp av IKT-seksjonen med installeringen av programmet. Resten av elevene installerte det selv. Det trekkes tilfeldig ut 10 elever i klasse 2b.

a) Finn sannsynligheten for at 6 av de 10 elevene fikk hjelp av IKT-seksjonen.

b) Bestem sannsynligheten for at minst 2 av de 10 elevene installerte programmet selv.

Ved skolen måtte 30 % av alle elevene få hjelp av IKT-seksjonen for å komme inn på ressurssiden.

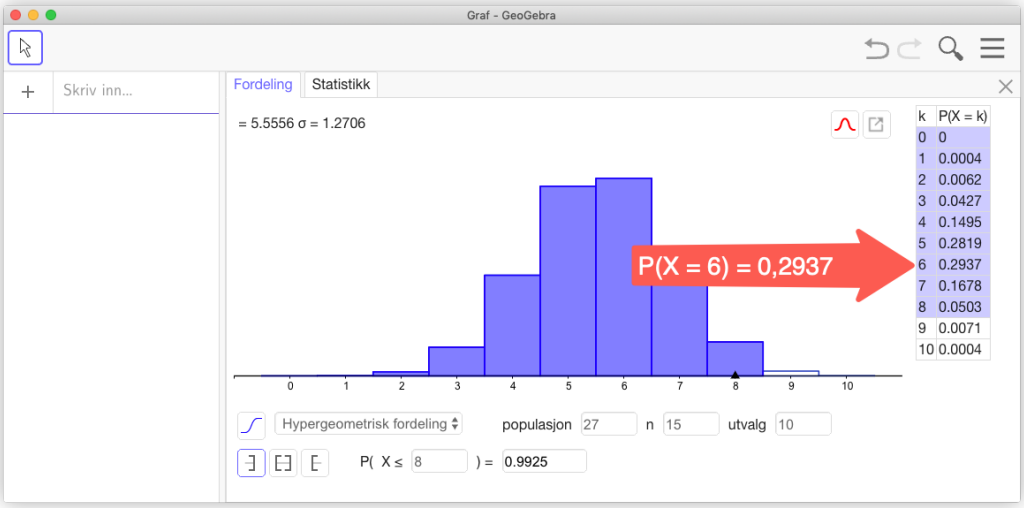
c) Hva er sannsynligheten for at 9 av 24 tilfeldig valgte elever har fått hjelp av IKT-seksjonen? Forklar hvilke forutsetninger du må legge inn for å kunne regne binomisk.

d) Hva er sannsynligheten for at minst 9 av 24 tilfeldig valgte elever har fått hjelp av IKT-seksjonen?

Løsning:

a) Vi åpner sannsynlighetskalkulatoren og velger «Hypergeometrisk fordeling» og skriver inn 27 for populasjon, 15 for antall elever som har fått hjelp og 10 for utvalget vi gjør. Vi ser at $P(X = 6) = 0{,}2937$. Se figure 4.3.

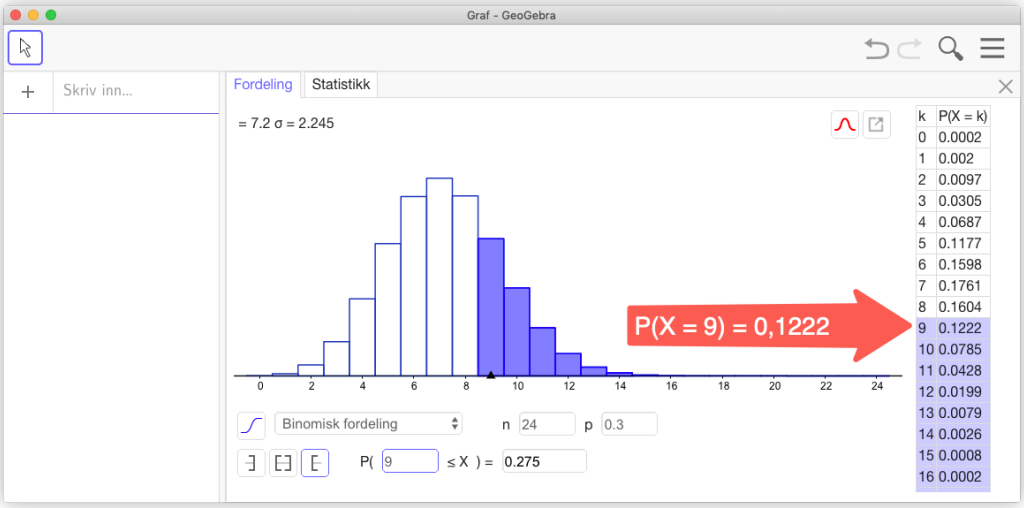
b) Siden $P(\text{minst 2 installerte programmet selv}) = P(\text{høyst 8 fikk hjelp})$, så ser vi at dette blir $P(X \leq 8) = 0{,}9925$. Se figur 4.3.



Figur 4.3: Sannsynlighetskalkulatoren viser at $P(X \leq 8) = 0{,}9925$ og $P(X = 6) = 0{,}2937$

c) Vi kan i dette tilfellet bruke en binomisk sannsynlighetsmodell under forutsetningen at sannsynligheten for at en elev har fått hjelp er 30 %, uavhengig av om de andre elevene som velges ut har fått slik hjelp.

Vi bruker *Sannsynlighetskalkulator* og finner at $P(X = 9) = 0{,}1222$. Det vil si at det er ca 12 % sannsynlig at 9 av 24 tilfeldig valgte elever har fått slik hjelp. Se figur 4.4.



Figur 4.4: Sannsynlighetskalkulatoren viser at $P(X \geq 9) = 0{,}275$ og $P(X = 9) = 0{,}1222$

d) Bruker *Sannsynlighetskalkulator* med binomisk fordeling og finner at $P(X \geq 9) = 0{,}275$. Se figur 4.4.

Eksempel 4.3

Ved et helsestudio registrerte de kroppsvekten til alle de 320 kundene.

Gjennomsnittsvekten var 79,2 kg med et standardavvik på 6,4 kg. Vi antar at kroppsvekten er normalfordelt.

a) 1) Hvor stor andel av kundene veide mellom 75,0 kg og 85,0 kg?

2) Hvor stor andel av kundene veide over 100,0 kg?

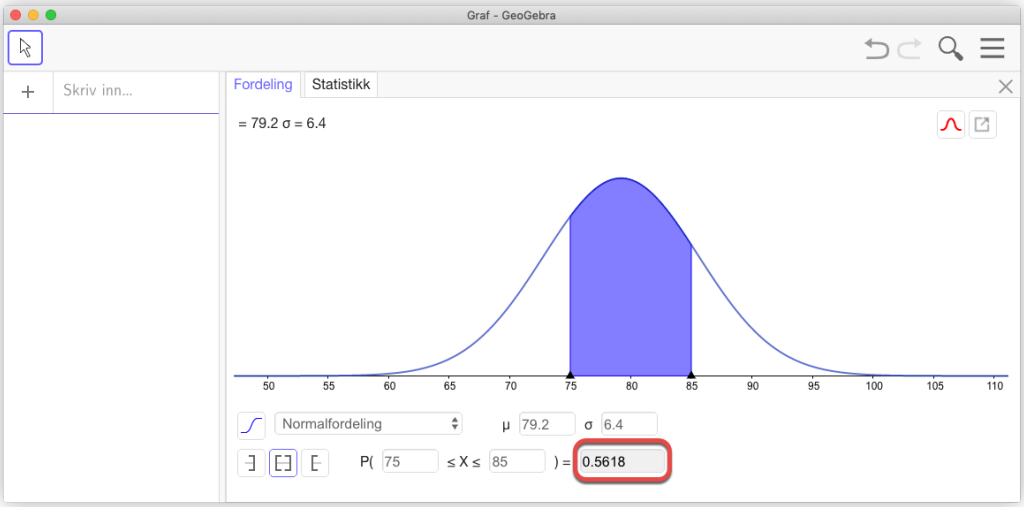
Helsestudioet vil undersøke om treningen påvirker kroppsvekten. De veier derfor 30 tilfeldig valgte kunder etter en periode med jevnlig trening. Gjennomsnittsvekten for disse 30 kundene er 76,0 kg. Vi antar at standardavviket er uendret.

b) Sett opp en nullhypotese og en alternativ hypotese som passer til denne problemstillingen.

c) Undersøk om det er grunnlag for å hevde at gjennomsnittsvekten til kundene i helsestudioet har gått ned. Bruk et signifikansnivå på 5 %.

Løsning:

a) 1) Bruker *Sannsynlighetskalkulator* med Normalfordeling som vist på figur 4.5. Vi ser at $P(75{,}0 \leq X \leq 85{,}0) = 0{,}5618$. Det vil si at 56,2 % av kundene veier mellom 75,0 kg og 85,0 kg. Det vil med andre ord si 180 personer.



Figur 4.5: Vi ser at $P(75{,}0 \leq X \leq 85{,}0 = 0{,}5618$. Legg merke til hvordan dette visualiseres med Gauss-kurven.

2) Vi bruker *Sannsynlighetskalkulator* og ser at $P(X \geq 100) \approx 0{,}0006$. Dette tilsvarer mye mindre enn 1 person. Vi kan derfor konkludere med at ingen av kundene er mer enn 100 kg.

b) Vi lar $\overline{X}$ være gjennomsnittsvekten[1] til de 30 tilfeldig valgte personene.

$$\text{Nullhypotese } H_0 : \mu_{\overline{X}} = 79,2$$
$$\text{Alternativ hypotese } H_1 : \mu_{\overline{X}} < 79,2$$

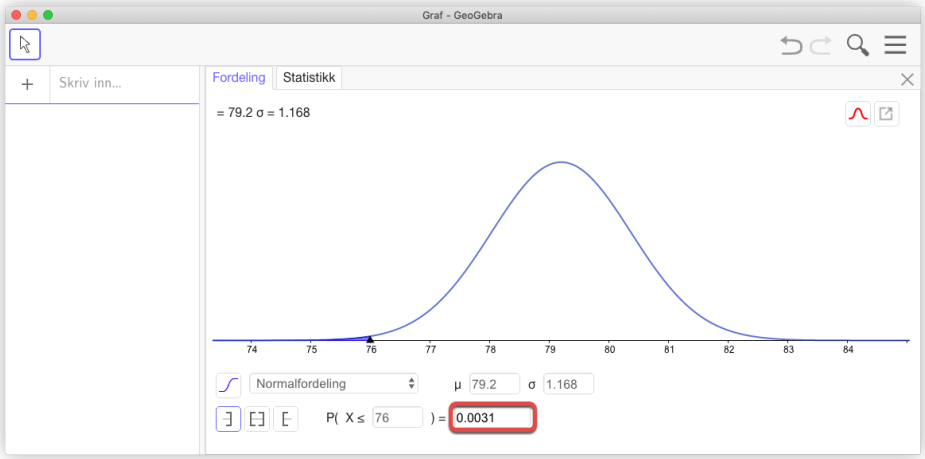
c) Vi antar nullhypotesen gjelder og ønsker å finne ut hva sannsynligheten er for at gjennomsnittsvekten til 30 tilfeldig valgte er mindre eller lik 76,0 kg. Da er forventningsverdien $E(\overline{X}) = 79,2$ (siden vi antar nullhypotesen er sann) og standardavviket er

$$SD(\overline{X}) = \frac{6,4}{\sqrt{30}} = 1,168$$

Bruker *Sannsynlighetskalkulator* og finner at

$$P(X \leq 76,0) = 0,0031 = 0,31\,\%$$

Vi ser at dette er veldig lite, så innenfor et vanlig signifikansnivå på 5 % kan vi forkaste nullhypotesen. Vi kan med andre ord konkludere med at treningen har virket!



Figur 4.6: *Sannsynlighetskalkulator* viser at $P(\overline{X} \leq 76,0) = 0,0031$.

Oppgave 4.3 — Eksempelsett S2, oktober 2008.
Levetiden til en spesiell motor antas å være normalfordelt med en forventningsverdi på 10 år og et standardavvik på 2 år.

a) Finn sannsynligheten for at

1) motoren fungerer mindre enn 8 år

2) motoren fungerer mellom 8 og 11 år

[1] Vi kan også se på variabelen Y = summen av vektene til kundene og bruke at $E(Y) = 30 \cdot \mu = 2376$ og $SD(Y) = \sqrt{30}\sigma = 35,05$. Da skal vi regne ut $P(Y \leq 2280)$.

Motorer som blir defekte før garantitiden går ut, blir erstattet av produsenten. Firmaet som produserer motorene, ønsker ikke å erstatte mer enn 3 % av de motorene som blir defekte.

b) Hvor lang garantitid bør de da tilby?

I firmaet er de usikre på om forventet levetid er så lang som 10 år. De registrerer levetiden i antall år på 10 tilfeldig valgte motorer:

8,3 9,2 7,3 10,1 9,5 8,7 8,4 10,0 9,1 9,4

De antar fortsatt at levetiden til motoren er normalfordelt med standardavvik på 2 år.

c) Still opp en nullhypotese H_0 og en alternativ hypotese H_1 for denne problemstillingen.

d) Velg et signifikansnivå på 5 % og undersøk om firmaet må forkaste hypotesen H_0.

Kommentar: GeoGebra hjelper oss ikke til å finne standardavviket i oppgave d). Dersom vi ser på gjennomsnittet $\overline{X}$ av de 10 motorene, så vil

$$E(\overline{X}) = \mu = 10 \quad \text{og} \quad SD(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{10}} \approx 0,63245$$

4.3 Statistikk i sannsynlighetskalkulatoren

I Sannsynlighetskalkulator er det en egen flik som heter *Statistikk*. Her byr GeoGebra på en del tester og estimater. En del av disse ligger nok utenfor læreplanmåla i matematikk for fagene i skolen, men kan være interessant å se nærmere på likevel. Unntaket er muligens Matematikk X hvor elevene skal kunne gjøre utvalgsundersøkelser.

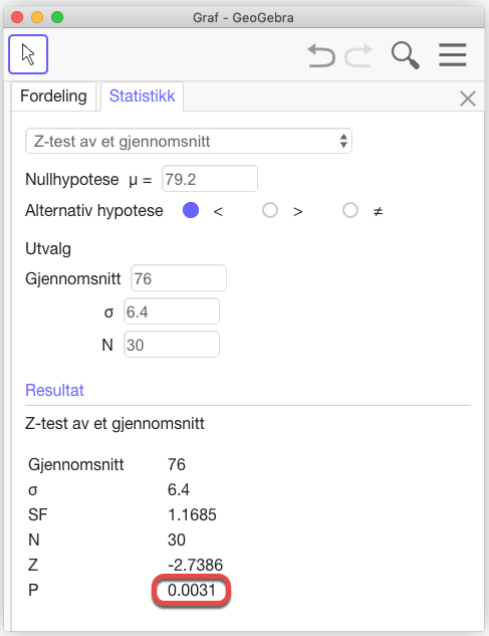
Eksempel 4.4

Vi viser i dette eksempelet hvordan hypotesetesten i eksempel 4.3 kan løses i GeoGebras *Statistikk*-verktøy.

Vi lar $\overline{X}$ være gjennomsnittsvekten til 30 tilfeldig valgte kunder. Vi setter opp nullhypotese og alternativ hypotese:

$$H_0 : \mu_{\overline{X}} = 79,2$$
$$H_1 : \mu_{\overline{X}} < 79,2$$

Sentralgrenseteoremet gir at $\overline{X}$ er tilnærmet normalfordelt. Vi bruker et signifikansnivå på 5% og antar nullhypotesen er sann. Vi velger «Z-test av et gjennomsnitt» i *Statistikk* i Sannsynlighetskalkulator og fører inn de kjente tallene. Vi haker av for « < » i alternativ hypotese.



Vi ser at vi får $P = 0{,}0031$. Det vil si at det er 0,31% sannsynlig at gjennomsnittsvekten til 30 tilfeldig valgte medlemmer er mindre eller lik 76 kg. Vi forkaster derfor nullhypotesen og konkluderer med at det er gode grunner til å si at treningen har ført til at gjennomsnittsvekten har gått ned.

Merk at GeoGebra regner ut standarverdien i dette tilfellet. Det vil si at GeoGebra regner ut det som ofte kalles Standard Feil: $\text{SF}(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

I oppgave 4.3 ble det gjort et utvalg på 10 tilfeldige motorer. I oppgaven står det at vi kan gå ut fra et standardavvik på 2 år. Uten denne opplysningen måtte vi ha gjort et estimat av standardavviket. Vi kan beregne standardavviket til tallene vi fant, nemlig standardavviket til:

8,3 9,2 7,3 10,1 9,5 8,7 8,4 10,0 9,1 9,4

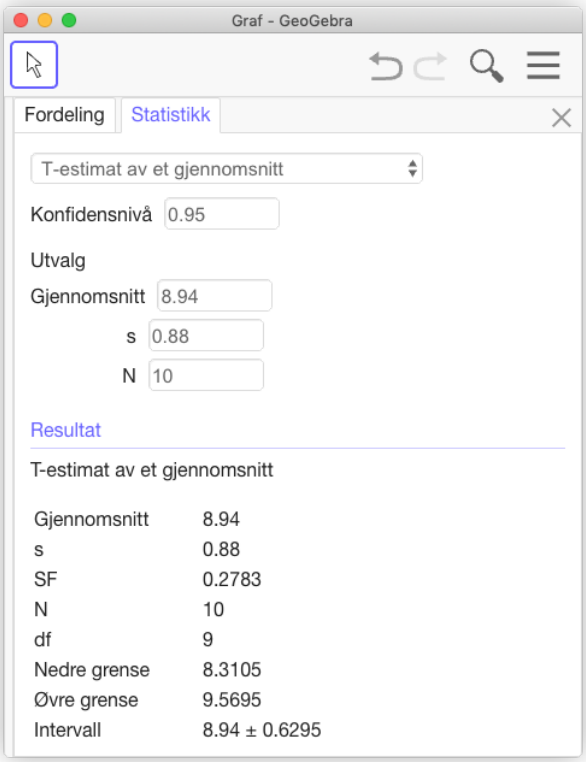
Siden vi i dette tilfelle har et utvalg, må vi bruke det som kalles *utvalgsstandardavvik*. I GeoGebra kan vi regne ut dette ved å bruke kommandoen

```
s=stavvp(8.3, 9.2, 7.3, 10.1, 8.7, 8.4, 10, 9.1, 9.4)
```

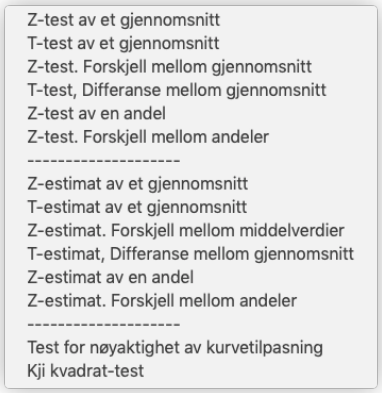
Forskjellen på vanlig standardavvik σ og utvalgsstandardavvik s er at vi i førstnevnte har hele populasjonen, mens i sistnevnte har en del av populasjonen. I vårt eksampel blir $s = 0{,}88$. Dette er større enn 0,63245, slik som i oppgaven. Men dette kan skyldes tilfeldige variasjoner, noe som selvsagt også får innvirkning på s. Når GeoGebra regner ut standardavvik σ og utvalgsstandaravvik s bruker programmet formelene

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Dersom vi ikke kjenner standardavviket, må vi ta til gode med å bruke vårt estimat s for standardsavviket. Når vi i slike situasjoner skal gjøre en hypotesetest, kan vi gjøre et T-esimat av et gjennomsnitt. Bruker vi et konfindensnivå på 95% får vi at konfidensintervallet blir [8,31 , 9,57].



Det er flere slike tester og estimater som kan gjøres i GeoGebra. På bildet til nedenfor ser du de som er tilgjengelige i Sannsynlighetskalkulator. Det ligger utenfor målsettingen til denne boken å gå inn på hver av de ulike testene.



Figur 4.7: Det fins flere ferdigprogrammerte tester vi kan bruke i GeoGebra sin Sannsynlighetskalkulator.

5 Geometri

GeoGebra blir ofte omtalt som et dynamisk geometri-program. Det vil si at vi kan gjøre geometriske konstruksjoner og eksperimentere med disse på en dynamisk måte. I dette kapittelet skal vi jobbe oss gjennom en rekke eksempler på dette. I programmet er det en del innebygde verktøy som for eksempel *Midtnormal* og *Parallell linje*. Disse kan vi selvsagt bruke. Men vi vil først se hvordan vi kan bruke GeoGebra til å gjennomføre slike konstruksjoner «med passer og linjal». Det kan være praktisk å kunne dette dersom vi ønsker å lage et løsningsforslag til elevene som viser hvordan en slik konstruksjon kan se ut om vi brukte kun passer og linjal.

5.1 Konstruksjoner

Vi vil her vise hvordan vi kan bruke GeoGebra til å konstruere ulike objekt. Merk at GeoGebra har en del verktøy tilgjengelig som gjør at noen kan være skeptiske til om det faktisk er konstruksjoner som blir gjort. Vi har en lang tradisjon når det gjelder vår tolkning av hva det vil si å konstruere en figur. Denne tradisjonen går tilbake til Euklid. I en konstruksjon er det i denne tradisjonen kun passer og (umerket) linjal som kan brukes. Det er i denne forstand at ordet konstruksjon skal forstås på en eksamen. Men dersom det står at en figur skal tegnet er det selvsagt fritt fram til å bruke alle verktøyene i GeoGebra. Konstruksjoner vil være mest aktuelt på del 1, mens det vil være mer aktuelt å tegne figurer på del 2. For en utdypning av dette henviser vi til vurderingsveiledningen fra Utdanningsdirektoratet.

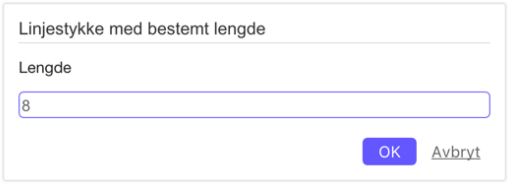
Eksempel 5.1

I $\triangle ABC$ er $AB = 8{,}0\,\text{cm}$, $\angle A = 60^\circ$ og $\angle B = 30^\circ$.

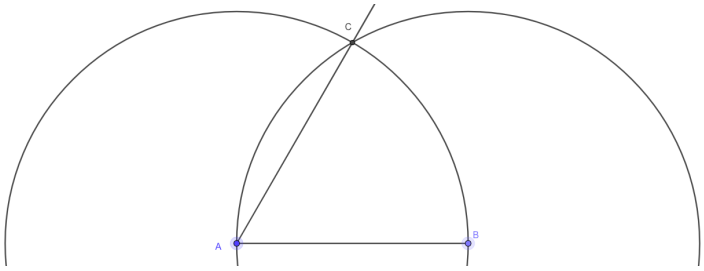
Konstruer $\triangle ABC$

Løsning:
Før vi starter selve konstruksjonen, kan det være en god idé å velge oppsettet *Geometri*.

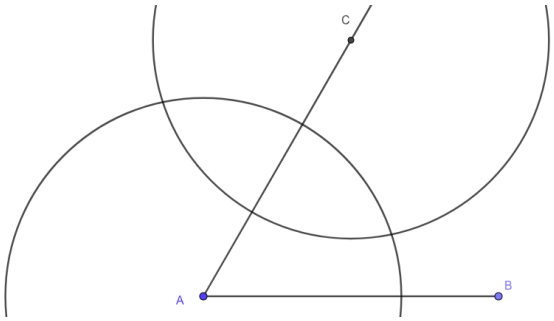
1 Vi setter først av AB ved å bruke verktøyet *Linjestykke med bestemt lengde* . Når dette verktøyet er valgt klikker vi i grafikkfeltet der hvor vi vil ha A. Du får da opp et vindu hvor du skriver inn lengden på AB $(= 8)$.



2 Vi konstruerer så vinkel A ved å først tegne to sirkler med lik radius og sentrum i hunholdsvis A og B. På figuren nedenfor har har vi tegnet to sirkler med radius 8. Vi finner skjæringspunktet mellom sirklene ved å bruke verktøyet *skjæring mellom to objekter*. Vi trekker så en stråle gjennom dette skjæringspunktet. Merk at GeoGebra kaller dette punktet for C. Dette er noe vi må endre på når figuren er ferdig, siden dette ikke er hjørnet C som vi skal finne.

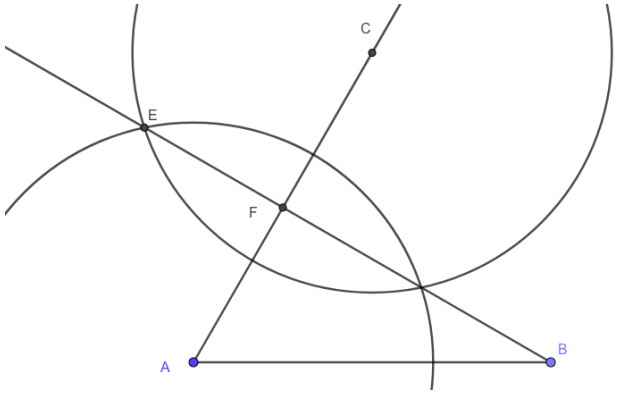


3 Vi konstruerer $\angle B$ ved å halvere vinkel ABC (husk at vi skal endre navn på C til slutt). Dette gjør vi ved å konstruere to sirkler med samme radius gjennom henholdsvis A og «C». Om du konstruer en sirkel med sentrum i C, så kan du bruke verktøyet *Passer* til å tegne en sirkel med samme radius i A. Velger du dette verktøyet er det bare å klikke på sirkelen med sentrum i C og deretter på punktet A (som da blir sentrum til den «kopierte» sirkelen).

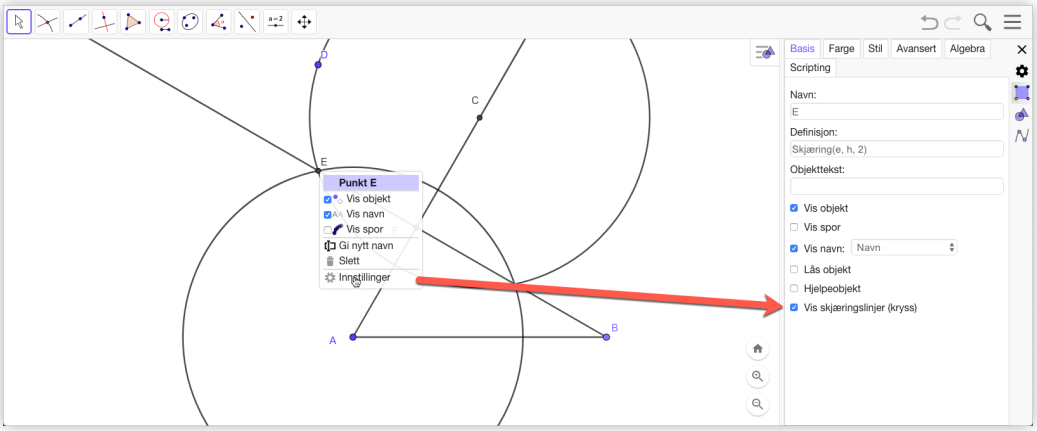


Merk at vi har skjult de to sirklene fra konstruksjonen av $\angle A$. Dette gjør du ved å høyreklikke på sirklene og hake vekk «Vis objekt» Vis objekt .

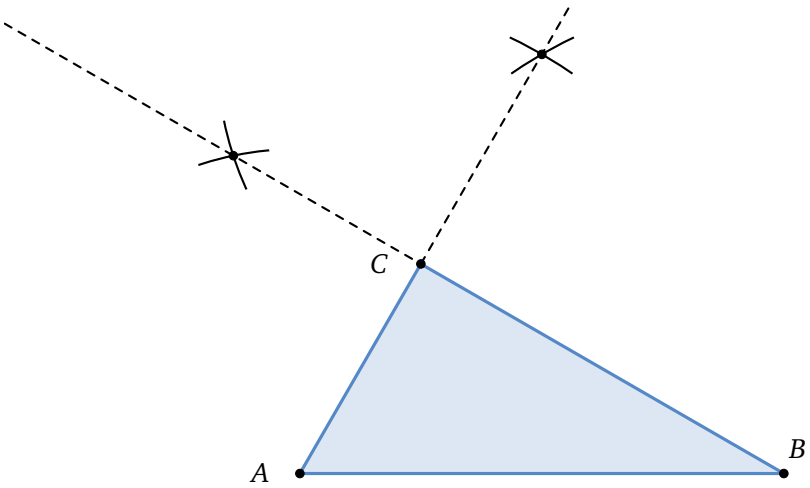
4 Finner et av skjæringspunktene mellom de to sirkelen og tegner en stråle gjennom B og dette punktet. Punktet C i oppgaven vil da være skjæringspunktet mellom de to strålene:



5 Vi rydder litt opp i figuren ved å skjule alle sirklene og endre navn på F (til C og skjuler navn på alle andre punkt enn A, B og C. For å vise hvordan figuren er konstruert høyreklikker jeg så på D og velger egenskaper. Der haker jeg av for «Vis skjæringslinjer (kryss)»:



Gjør det samme for punktet som definerte det andre punktet på strålen gjennom A og C (vårt gamle C). Du vil da få følgende pene figur:



Når alle punkta er tegnet, bruker du verktøyet *Mangekant* for å få tegnet trekanten. Når dette verktøyet er valgt, er det bare å klikke rundt på hjørnene i trekanten. Husk at du må avslutte mangekanten ved å klikke på det første punktet.

Merk at dersom du går til «Rediger» og velger «Kopier grafikkfeltet til utklipstavlen» og så limer dette inn i en tekstbehandler (for eksempel Word), så vil AB bli 8,0 cm på en utskrift dersom du ikke endrer størrelse på bildet som blir limt inn.

Oppgave 5.1
Trekanten ABC fra eksempel 5.1 er en del av trapeset $ABCD$ der $\angle BAD = 90°$.

Konstruer trapeset $ABCD$.

Oppgave 5.2

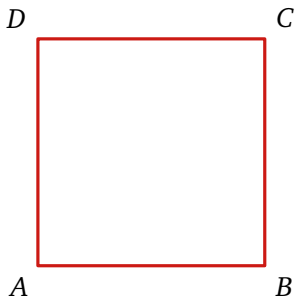
Åpne en ny GeoGebra-fil og slå av aksene og rutenettet (høyreklikk i grafikkfeltet og ta vekk haken for akser og rutenett).

a) Tegn et linjestykke AB og bruk verktøyet *Midtpunkt eller sentrum*. Du finner dette verktøyet i samme gruppe som andre punkt-verktøy.

b) Konstruer en sirkel med AB som diameter.

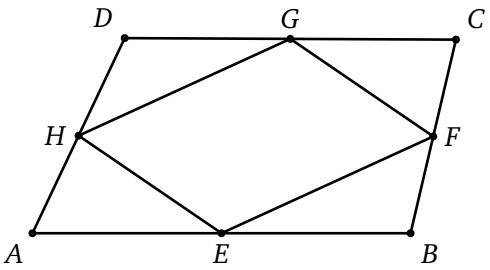
c) Tegn et nytt punkt C på sirkelen. Hva kan du si om trekanten ABC? Ta tak i punktet C og flytt det rundt på sirkelen.

Oppgave 5.3
Gitt to punkt A og C. Konstuer et kvadrat $ABCD$ slik figuren nedenfor viser.



Oppgave 5.4

a) Lag en firkant $ABCD$. Finn midtpunktet på hver av de fire sidene. La disse bli hjørner i en ny firkant. Kall denne $EFGH$.



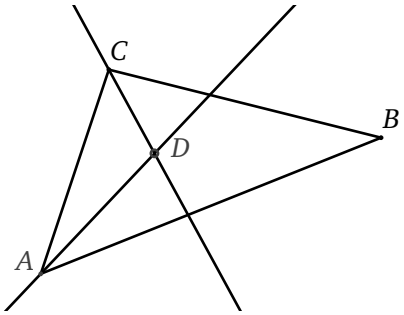
b) Grip fatt i ett av hjørnene av den opprinnelige firkanten, flytt på det og forandre på figuren. Ser du noe?

c) Hvor stort er arealet til firkant $ABCD$ i forhold til firkant $EFGH$?

d) Prøv om du kan forklare det du så i b) og c).

Oppgave 5.5

a) Tegn en trekant. Konstruer vinkelhalveringslinjen til to av sidene i trekanten. Bruk verktøyet «Halveringslinje for vinkel» .

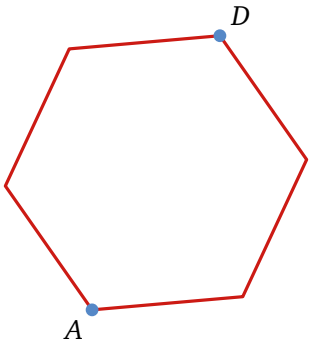


b) Konstruer så den tredje halveringslinjen. Hva ser du? Undersøk om dette gjelder alltid ved å ta tak i hjørnene og forandre på trekanten.

c) Vis at punktet D er sentrum til den innskrevne sirkelen.

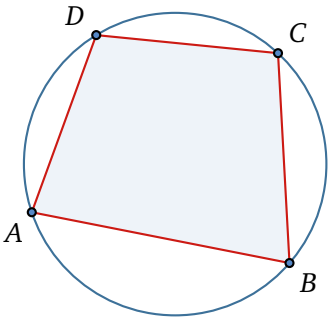
Oppgave 5.6

Gitt to punkt A og D. Konstruer et regulært heksagon $ABCDEF$ som vist på figuren nedenfor.



Oppgave 5.7
Konstruer en likebeina trekant ABC, der $AC = BC = 2AB$.

Oppgave 5.8
I en sirkel har vi tegnet en firkant $ABCD$. Hva kan du si om vinklene i firkanten?



I denne oppgaven kan du få bruk for verktøyet *Vinkel* .

De siste oppgavene viser at du kan bruke GeoGebra til å utforske matematiske sammenhenger. GeoGebra egner seg på den måten utmerket til slike oppgaver. Men vi vil poengtere her at selv om vi kan flytte på hjørner og ta for oss en uendelighet av tilfeller, så vil vi aldri kunne bevise noe med GeoGebra. Den flotteste illustrasjon av Den pytagoreiske læresetning er nettopp en illustrasjon og ikke et bevis. På den måten vil nok aldri program som GeoGebra erstatte vanlig resonnering og bevisførsel. Faktisk kan slike programmer gjøre at elevene blir mindre motivert for å gjennomføre et bevis – hva er poenget med det? De ser jo at sammenhengen «alltid gjelder»...Vi må derfor ha en reflektert holdning til dette og ikke bruke dynamisk programvare som en erstatning for argumentasjon og bevisføring.

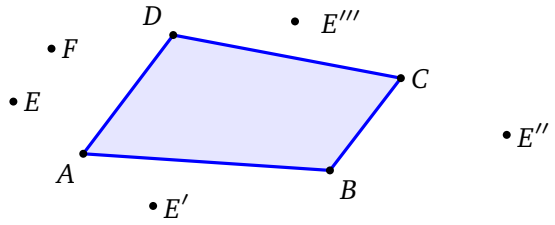
Oppgave 5.9
Tegn en trekant ABC. Konstruer midtnormalen til to av sidene. Konstruer så den tredje midtnormalen. Hva ser du? Gjelder dette alltid? Undersøk dette ved å ta tak i et hjørne og flytt på det.

Vi ønsker å omskrive trekanten ABC med en sirkel. Nå vet vi at sentrum i sirkelen må ligge like langt fra A som fra B. Derfor må midtnormalen til AB gå gjennom sentrum av sirkelen. På samme måte må de andre tre midtnormalene gå gjennom sentrum av sirkelen. Derfor må dette sentrum være O. Bruk dette til å omskrive trekanten.

Oppgave 5.10
Tegn en likesidet trekant. Velg et punkt i det indre og mål avstanden fra dette punktet til de tre sidene. Velg et nytt punkt i det indre og mål igjen avstanden fra sidene. Hva ser du da? Formuler en hypotese. For mer om dette resultatet se Amdal (2009a) og (2009b).

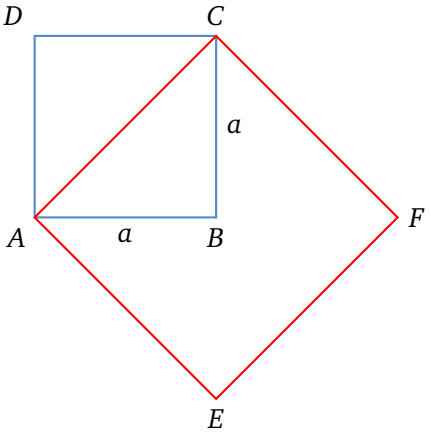
Oppgave 5.11

Tegn en firkant $ABCD$ og et punkt E utenfor firkanten. Bruk verktøyet *Speil objekt om punkt* og speil punktet E om A slik at du får et nytt punkt E'. Speil så E' om B og få E'', som du igjen speiler om C og får E'''. Speil til slutt E''' om D og få punktet F. Eksperimenter med firkanten $ABCD$ og finn ut hva som må til for at F og E skal være sammenfallende. Se figuren nedenfor.



Oppgave 5.12

På figuren nedenfor har vi tegnet kvadratene $ABCD$ og $AEFC$. Vi setter sidene i kvadratet $ABCD$ lik a.

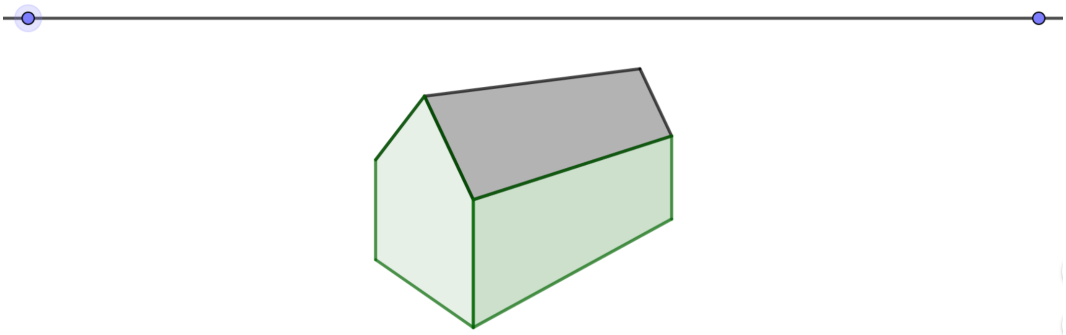


a) Vis at kvadratet $AEFC$ har dobbelt så stort areal som kvadratet $ABCD$.

b) Konstruer et kvdrat med areal lik $50\,\text{cm}^2$.

5.2 Perspektiver

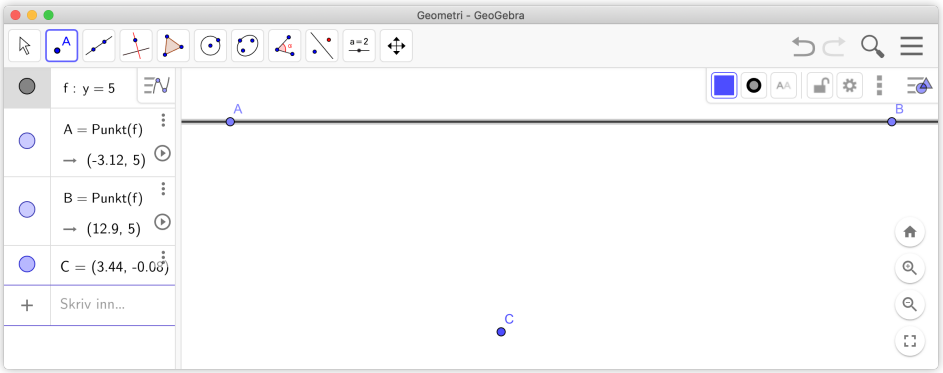
Du kan bruke GeoGebra til å tegne i perspektiv. Vi vil i dette delkapittelet vise hvordan vi går fram for å tegne et hus som ser slik ut:



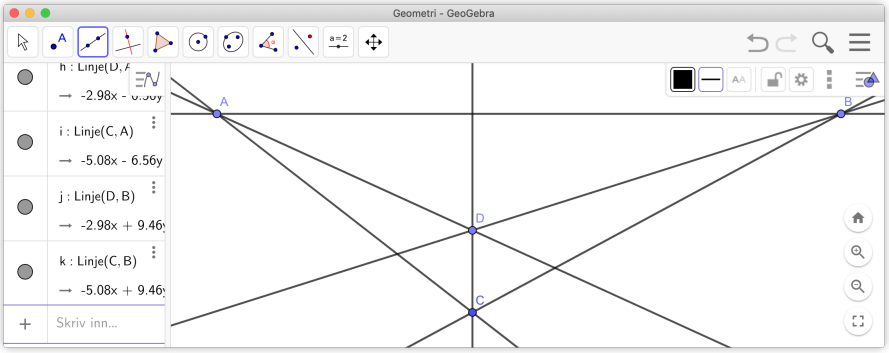
Figur 5.1: Hus med to forsvinningspunkt tegnet med GeoGebra.

Før du starter, så kan det være en god ide å skjule akser og rutenettet. Vi starter med å tegne inn en horisontal linje (horisonten). Skriv inn $y = 5$ i algebrafeltet. På den måten vet vi at vi får en 100 % horisontal linje. Velg så de to forsvinningspunkta (A og B på figuren nedenfor).

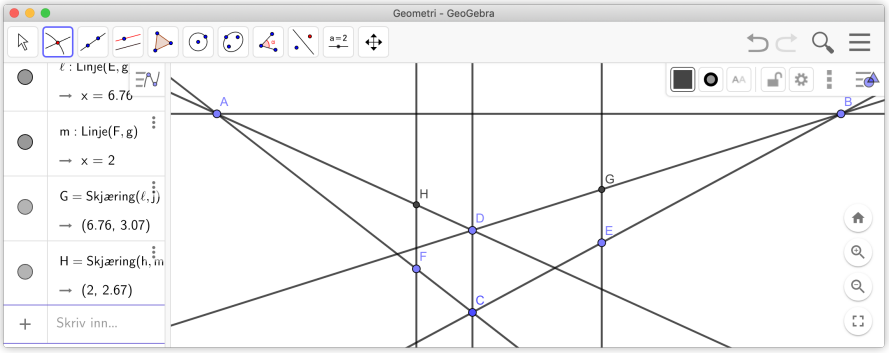
Tegn så det «nedre» hjørnet C i huset:



For å tegne hjørnet mellom de to synlige veggene tegner vi en linje normal på horisonten gjennom punktet C. Tegn et punkt D på denne linjen. Linjestykket mellom C og D er den «fremste» kanten til huset. Tegn så linjer gjennom C og de to forsvinningspunkta og tilsvarende for D som vist på figuren nedenfor:

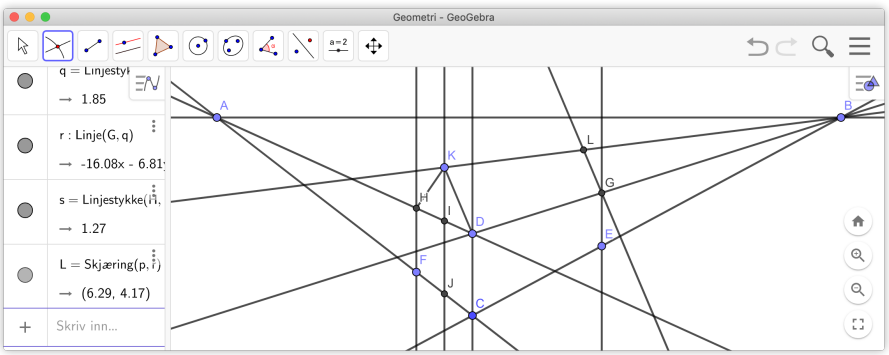


Det neste vi gjør er å tegne inn de to andre «nedre» hjørnene E og F. Deretter tegner vi linjer parallell med CD gjennom disse,og finner skjæringspunkta mellom disse og linjene fra D og forsvinningspunktene:

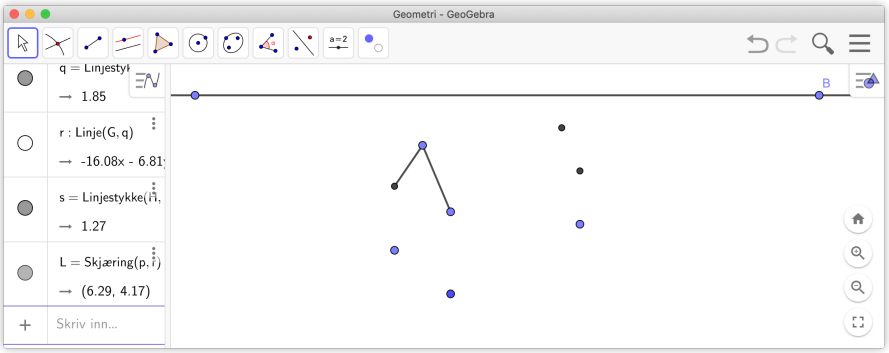


Neste problem er å bestemme hvor mønet til huset kan være. Det er selvsagt midt på den ene veggen. Vi tegner inn midtpunktene på henholdsvis CF og DH. Mønet må da ligge på linjen gjennom disse to midtpunktene. Hvor mønet ligger avhenger av hvor høyd det er på huset. Vi velger derfor en passe høyde.

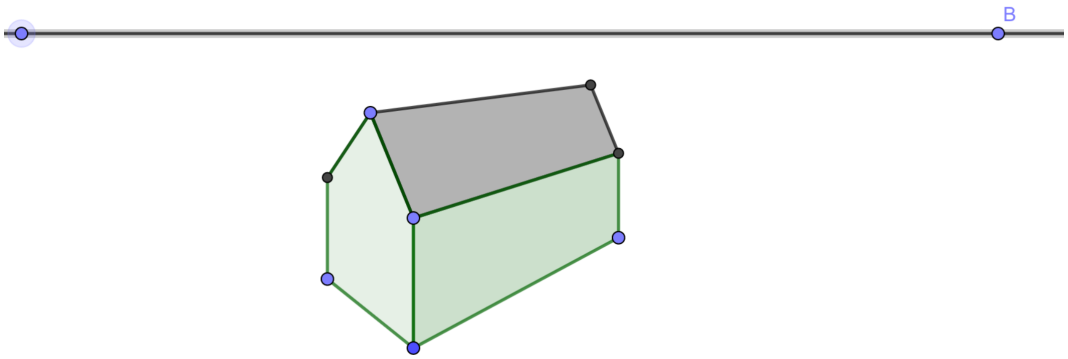
Vi kan nå tegne inn det ene mønet K og linja fra dette til det ene forsvinningspunktet. Vi mangler da kun ett punkt, og det er det andre mønet. Strengt tatt skulle vi ha tegnet inn enda ett forsvinningspunkt for å gjøre dette, men nøyer oss her med å tegne linje parallell med DK.



Vi vil nå skjule alle linjer (men ikke hjørnene i huset). Velg verktøyet *Vis eller skjul objekt* og klikk på alle linjene som du vil skjule. Disse vil da bli feite (og fremdeles synlige) mens du klikker rundt. Når du er ferdig velger du *Flytt*. Da ser figuren slik ut:



Det siste vi gjør er å tegne inn de tre synlige flatene på huset ved hjelp av verktøyet *Mangekant*. Vi får da følgende figur:



Oppgave 5.13
Lag et tilsvarende hus, men bruk tre forsvinningspunkt slik at taket blir korrekt. Tegne også inn vinduer og pipe.

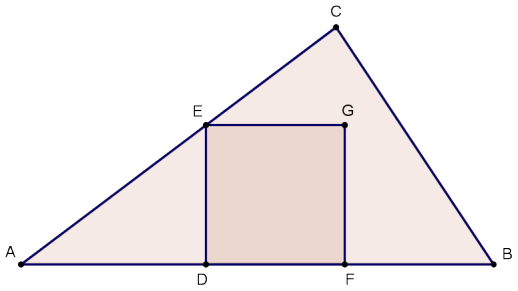
5.3 Sporing

Sporing er et effektivt verktøy når vi skal utforske sammenhenger. Følgende eksempel er hentet fra Polya (1957).

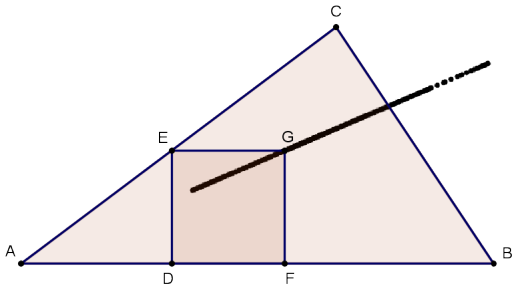
Eksempel 5.2

Gitt en trekant ABC. Konstruer et kvadrat som har hjørnene på sidekantene til trekanten.

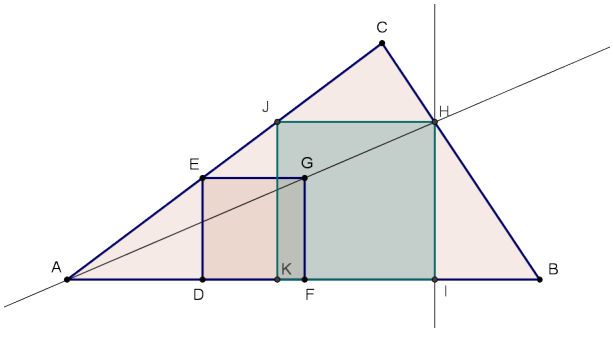
Løsning:
Vi tegner en trekant i GeoGebra ved å bruke verktøyet *Mangekant* . Vi vet ikke hvor på sidekanten AB det ene punktet skal ligge, men velger et punkt D og konstruerer et kvadrat med verktøyet *Regulær mangelant* . Siden en trekant kun har tre sider og et kvadrat har fire, så må to av hjørnene til kvadratet ligge på en av sidene i trekanten. Vi velger dette til å være AB. Vi får da en konstruksjon som vist på figuren nedenfor.



Punktet G skal ligget på BC. Det vil si at D er plassert feil. Men her gjør vi et lite triks. Vi slår på sporing på G (høyreklikk og velg «Vis spor»). Når du nå flytter på D, vil punktet G sette av et spor. Dette gjør at vi oppdager en sammenheng som vi muligens ellers ikke ville ha sett, nemlig at G ligger på en rett linje.



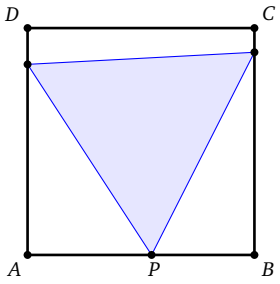
Hvordan løser vi så oppgaven? Vi tegner nå en linje gjennom AG og finner skjæringspunktet H mellom denne og BC. Så feller vi ned en normal fra H ned på AB og får et punkt I. Dette er to av hjørnene i det søkte kvadratet. Vi konstruerer så kvadratet. Neste utfordring blir nå å forklare/argumentere for hvorfor denne konstruksjonen virker. Hvorfor kan vi vite at punktet J på figuren nedenfor faktisk ligger på linjestykket AC?



Nå kan vi ta tak i et av hjørnene i trekanten ABC og flytte det. Kvadratet vil alltid ligge på sidekantene til trekanten. Merk at konstruksjonen virker kun dersom $DE < DB$. Hvorfor det?

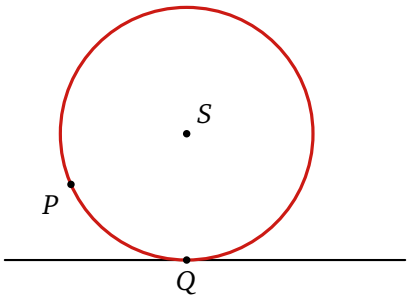
Oppgave 5.14
Gitt et kvadrat $ABCD$. Konstruer en likesida trekant som har det ene hjørnet nær midten av linjestykket AB og de to andre hjørnene på sidene AD og BC.

Hvor langt fra midten kan punktet P ligge?



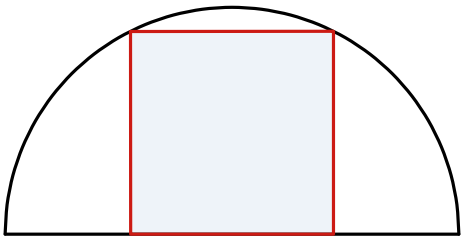
5.3.1 Flere oppgaver

Oppgave 5.15
Gitt en linje ℓ og et punkt P utenfor ℓ. La Q være et punkt på ℓ. Konstruer en sirkel med sentrum S som går gjennom P og som tangerer ℓ i Q.

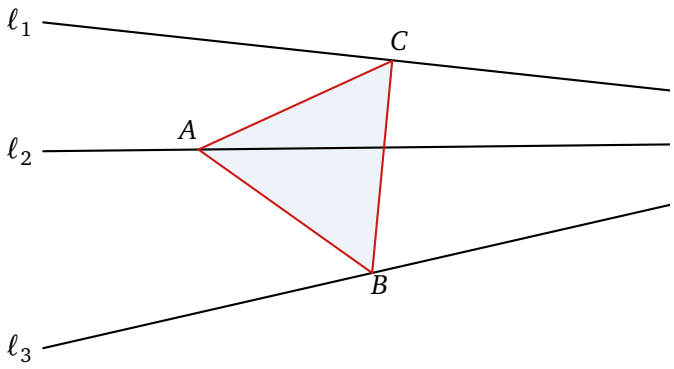


Flytt på Q langs linjen og se hva som skjer med S.

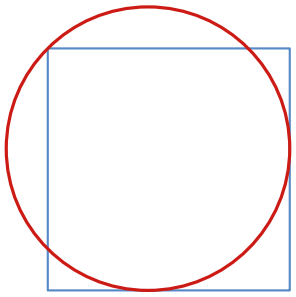
Oppgave 5.16
Konstruer en halvsirkel. Konstuer så det innskrevne kvadratet i halvsirkelen, som vist på figuren.



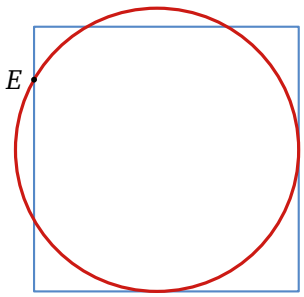
Oppgave 5.17
Gitt tre linjer ℓ_1, ℓ_2 og ℓ_3 og et punkt A på den midterste linjen ℓ_2. Konstruer en likesidet trekant ABC, der A er et av hjørnene og der de to andre hjørnene ligger på henholdsvis ℓ_1 og ℓ_2.



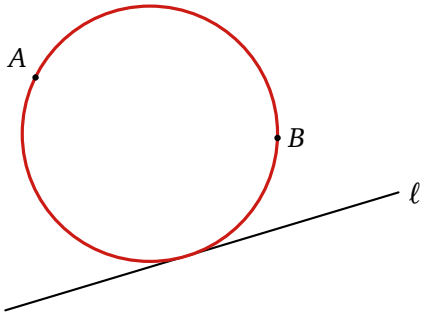
Oppgave 5.18
Gitt et kvadrat. Konstruer en sirkel som går gjennom et hjørne og tangerer to andre sider, som vist på figuren.



Oppgave 5.19
Gitt et kvadrat og et punkt E på den ene siden. Konstruer en sirkel om går gjennom E og som tangerer kvadratet i to punkt, som vist på figuren.

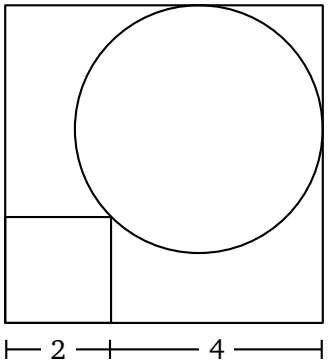


Oppgave 5.20
Gitt en linje ℓ og to punkt A og B som ikke ligger på linjen. Konstruer en sirkel som går gjennom A og B og som tangerer ℓ.



Oppgave 5.21

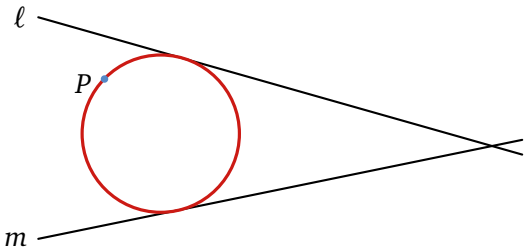
a) Konstruer kvadratene og sirkelen som vist på figuren nedenfor.



b) Regn ut den eksakte verdi for sirkelens radius.

Oppgave 5.22

Gitt to linjer ℓ og m og et punkt P som ligger mellom linjene. Konstruer en sirkel som tangerer ℓ og m og som går gjennom P. Se figuren.



5.4 Parameterframstillinger

Det er selvsagt ikke bare grafer til funksjoner som er mulig å tegne i GeoGebra. Du kan for eksempel også tegne kurver som har en parameterframstilling. I følge LK06 skal elevene «kunne bruke vektorfunksjoner med parameterframstilling for en kurve i planet, tegne kurven og derivere vektorfunksjonen for å finne fart og akselerasjon.» (LK06, kompetansemål for R1). Vi vil her vise noen eksempler på hvordan dette gjøres i GeoGebra.

Eksempel 5.3

En linje l er gitt ved følgende parameterframstilling:

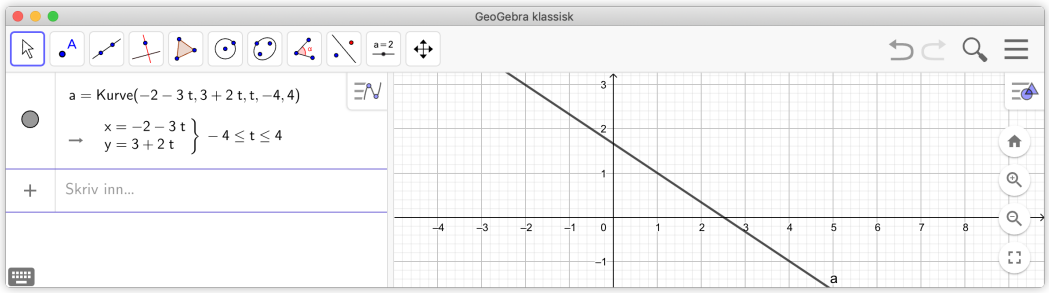
$$x = -2 - 3t \ \wedge \ y = 3 + 2t$$

Tegn linjen i et koordinatsystem.

I GeoGebra kan vi tegne kurver gitt på parameterform ved å bruke kommandoen

```
Kurve(<Uttrykk>,<Uttrykk>,<Parametervariabel>,<Start>,<Slutt>)
```

I dette eksempelet skriver vi kommandoen `Kurve(-2-3t, 3+2t, t,-4,4).` og trykker enter. Vi får da tegnet linjen:



Figur 5.2: Du plotter kurver ved å bruke kommandoen `Kurve( )`

Nå er det kanskje ikke så spennende å tegne inn linjer på denne måten, så derfor må vi prøve oss på litt mer avanserte kurver. Neste eksempel viser en kurve med en kusp[1].

Eksempel 5.4

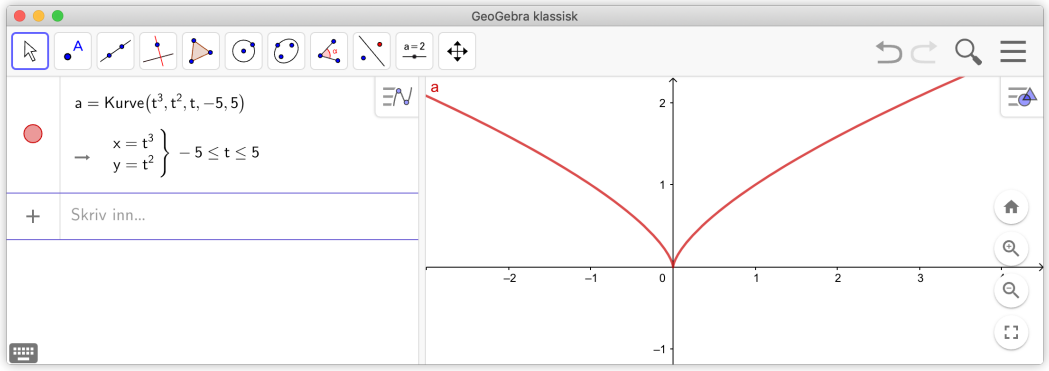
Tegn kurven med parameterframstilling gitt ved

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$$

I dette tilfellet gir vi kommandoen

```
Kurve[t^3, t^2, t, -5, 5]
```

og får følgende kurve:



Figur 5.3: En kusp. Kan du finne likningen for denne kurven?

[1] En kusp er en «spiss» på kurven. Det vil si en singularitet der kurven ikke krysser seg selv.

Tips! Du kan skrive eksponenter i GeoGebra ved å bruke tastekombinasjoner som Alt + 2. Tilsvarende for høyere potenser: Alt + 3 gir eksponent 3 og Alt + 11 gir eksponent 11.

Eksempel 5.5

Tegn kurven med parameterframstilling gitt ved

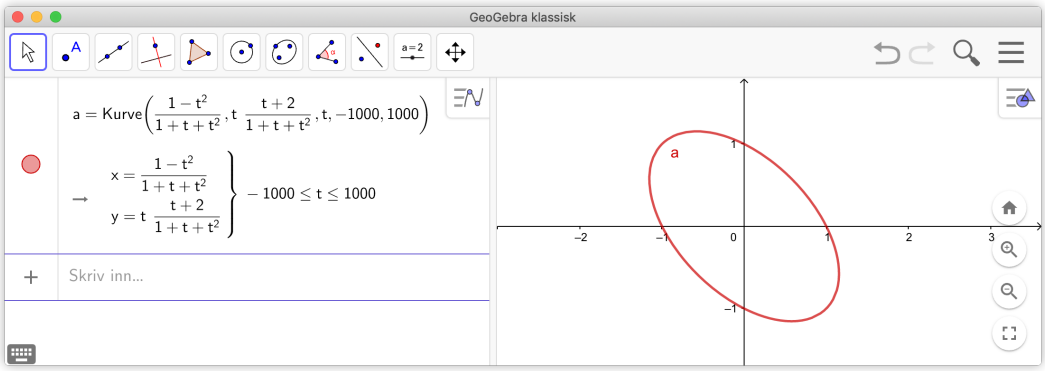
$$x = \frac{1-t^2}{1+t+t^2} \quad \wedge \quad y = \frac{t(t+2)}{1+t+t^2}$$

Her får vi et problem med å velge hvilke grenseverdier vi skal sette inn for parameteren t. For å få hele kurva må parameteren går fra $-\infty$ til ∞. Men dette kan vi ikke sette inn når vi skal tegne kurva.

Vi bruker i stedet verdier fra for eksempel -1000 til 1000:

```
Kurve((1-t^2)/(1+t+t^2), t*(t+2)/(1+t+t^2), t, -1000,1000)
```

Vi får da følgende kurve:



Figur 5.4: Hvilken kurve er dette?

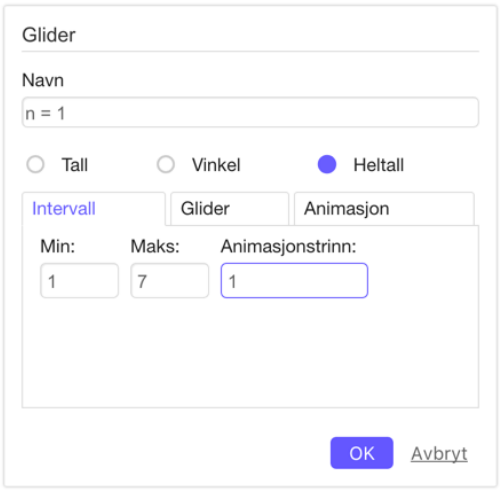
Oppgave 5.23

Plott følgende kurve: $x = \cos(5t) \wedge y = \sin(3t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Oppgave 5.24

I denne oppgaven skal vi utforske en hel familie av kurver.

a) Lag en glider k som kan variere fra 0 til 7. For å gjøre dette kan du velge verktøyet *Glider* og klikke der du vil ha glideren i grafikkfeltet. Du får da opp en meny hvor du kan velge Min, Maks og Animasjonstrinn:

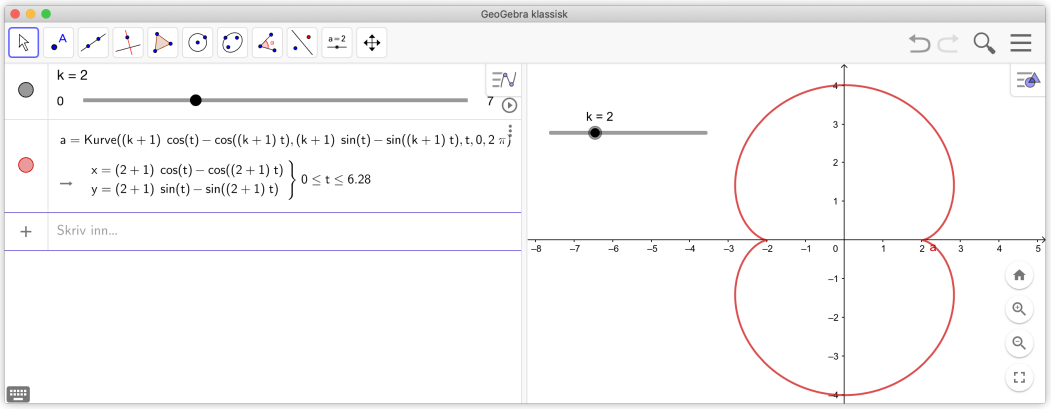


Velg da heltall og Min $= 1$, Maks $= 7$. Animasjonstrinnet blir satt til 1 når du velger Heltall.

b) Plott kurven gitt ved

$$x = (k+1)\cos t - \cos((k+1)t) \ \wedge \ y = (k+1)\sin t - \sin((k+1)t)$$

La t variere fra 0 til 300. Når $k = 2$ får vi kurven vist på figur 5.5.



Figur 5.5: To kusper. . .

c) Varier nå k. Hvor mange kusper får vi når $k = 1$? Hva med $k = 2$? Hva om $k = 6$?

Oppgave 5.25
Tegn følgende to kurver i samme koordinatsystem. La parameteren t gå fra 0 til 50.

$$x = \sqrt{t} \cdot \cos t \quad \wedge \quad y = \sqrt{t} \cdot \sin t$$
$$x = -\sqrt{t} \cdot \cos t \quad \wedge \quad y = -\sqrt{t} \cdot \sin t$$

Oppgave 5.26 — Fermats spiral.
Plott følgende kurve

$$x = r\cos(r^2) \ \wedge \ y = r\sin(r^2)$$

velg r mellom -7 og 7.

Eksempel 5.6

Posisjonsvektoren til ein partikkel er gitt ved

$$\vec{r}(t) = [t^3 + 3, t + 1]$$

a) Tegn grafen til $\vec{r}$ når $t \in [-2, 2]$.

b) Bestem fartsvektoren $\vec{v}(t)$ og akselerasjonsvektoren $\vec{a}(t)$. Marker $\vec{v}(1)$ og $\vec{a}(1)$ på kurven til $\vec{r}$.

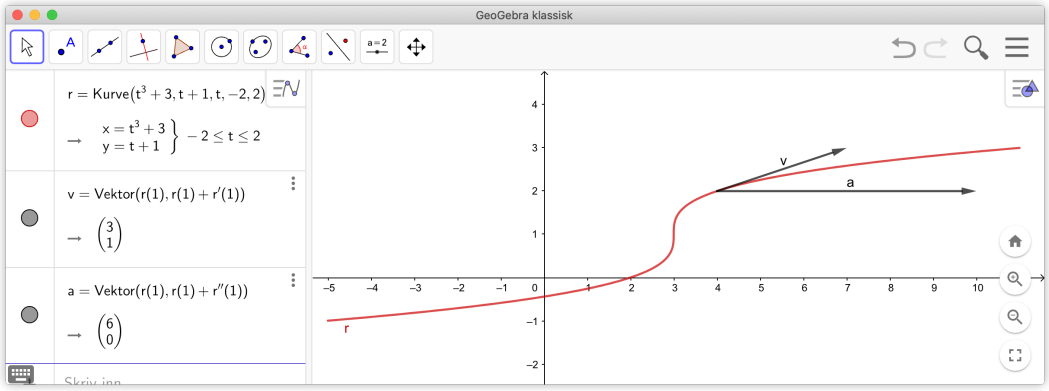
c) Finn ved regning det punktet på kurven der $\vec{v}(t)$ er parallell med y-aksen.

Løsning:

a) Vi plotter grafen ved å bruke kommandoen

```
r=Kurve(t^3+3, t+1, t, -2, 2)
```

Vi får da kurven som vist på figur 5.6.



Figur 5.6: Grafen til $\vec{r}(t)$ sammen med fartsvektor og akselerasjonsvektor i posisjonen $\vec{r}(1)$.

b) Vi kan finne fartsvektoren og akselerasjonsvektoren ved å derivere $\vec{r}$. Dette gjør vi i GeoGebra ved å bruke kommandoene

```
Derivert(r)  og  Derivert(r, 2)
```

I figur 5.6 ser du svaret i algebrafeltet. Vi markerer inn $\vec{v}(1)$ ved å skrive inn kommandoen

```
v = Vektor[r(1), r(1)+r'(1)]
```

Vi får da en vektor som starter i $\vec{r}(1)$ og går til $\vec{r}(1)+\vec{v}(1)$. Merk at det ikke er naturlig å markere inn fartsvektoren i origo.

På samme måte får vi tegnet inn akselerasjonsvektoren ved å skrive inn kommandoen

```
a = Vektor[r(1), r(1)+r''(1)]
```

c) Denne deloppgaven kan ikke løses med GeoGebra. Her gjelder det bare å finne hvilken t som gir x-koordinaten til $\vec{v}(t)$ lik 0. Dette er når $t = 0$.

5.5 Andre kurver

I GeoGebra er det mulig å plotte andre kurver enn de som har en parameterframstilling.

I eksempel 5.4 tegnet vi kurven med parameterframstilling $x = t^3$ og $y = t^2$. Vi ser at denne kurven oppfyller likningen $x^2 - y^3 = 0$. Vi trenger ikke å finne parameterframstillingen for å tegne kurven. I GeoGebra kan vi skrive likningen for kurven direkte inn i algebrafeltet og få tegnet kurven.

For å plotte kuspen skriver vi med andre ord inn

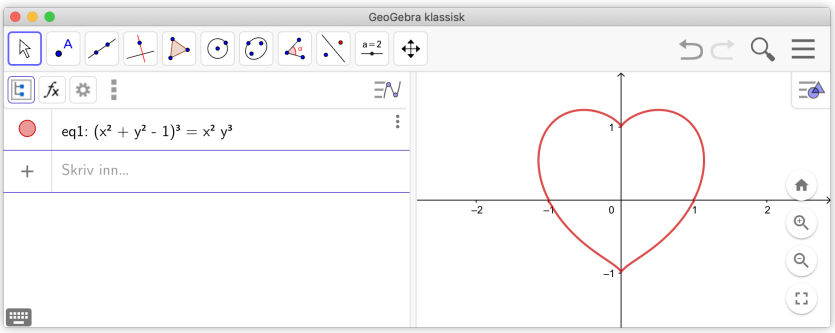
```
x^3=y^2
```

Eksempel 5.7

Tegn kurven som er gitt ved likningen

$$(x^2 + y^2 - 1)^3 = x^2 y^3$$

Skriver du inn likningen får du følgende pene kurve:



Oppgave 5.27

Tegn følgende kurver:

a) $(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$

b) $(x^2 + y^2 - 1)^3 - x^2 y^3 = 0$

6 Verktøy for objekthandlinger

6.1 Glidere

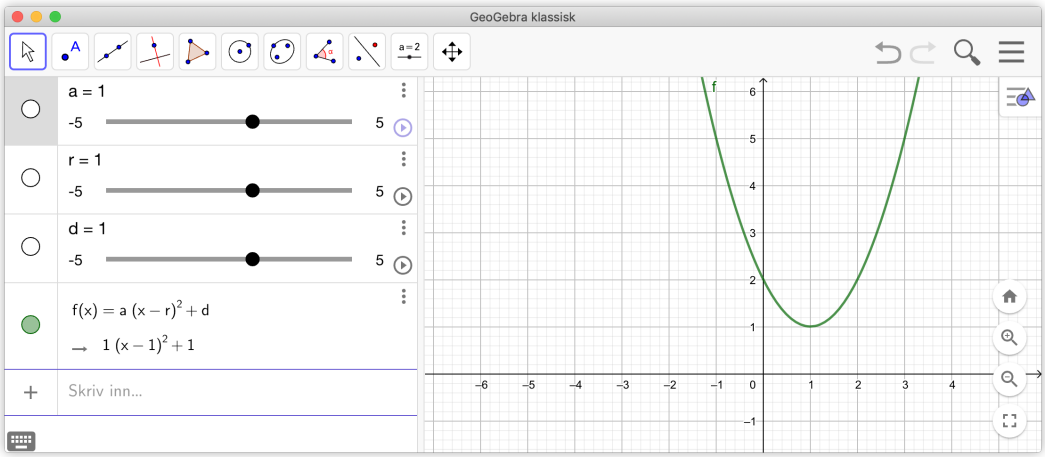
Dersom du vil eksperimentere med ulike verdier som kan variere i et intervall, så er glidere et utmerket verktøy. Som neste eksempel viser, så blir slike glidere laget automatisk dersom du skriver inn bokstaver som ikke allerede er definert i GeoGebra. Du finner et verktøy for å lage glidere under ikonet på verktøylinjen.

Eksempel 6.1

Hvordan vil ulike verdier for a, r og d påvirke grafen til funksjonen f gitt ved

$$f(x) = a(x-r)^2 + d$$

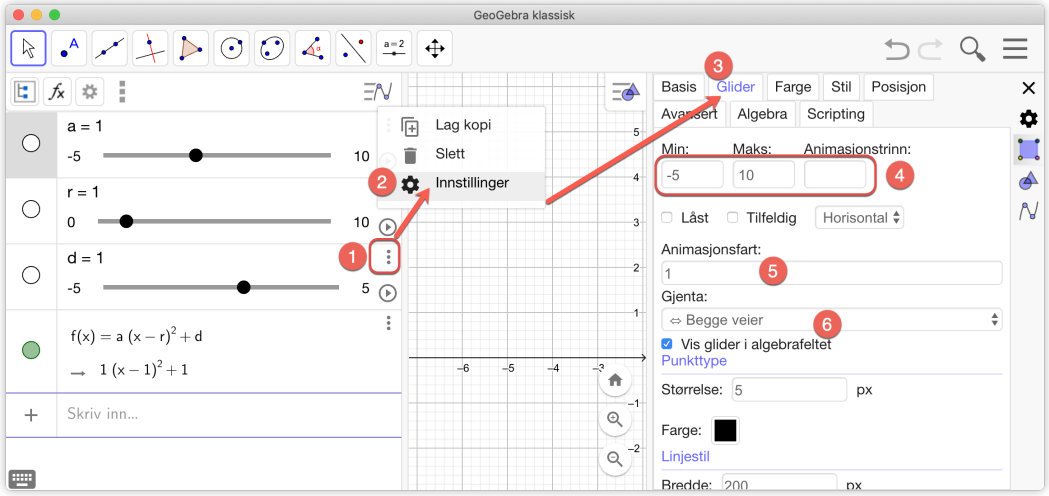
Løsning:
Dersom vi skriver inn `f(x)=a*(x-r)^2 +d` i algebrafeltet, og trykker enter, så vil det automatisk bli laget tre glidere a, r og d i GeoGebra. Disse verdiene vil variere mellom -5 og 5 som standard. Nå er det bare til å endre på disse verdiene og se hva som skjer.



Figur 6.1: Gliderene a, r og d er laget automatisk i GeoGebra.

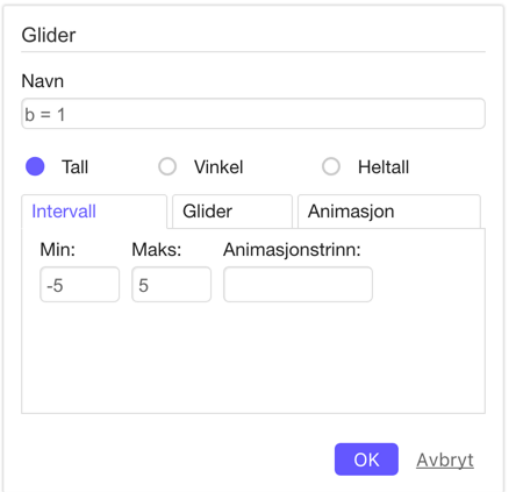
Tips! Det beste er å be elevene prøve å resonnere seg fram til hva som skjer med grafen *før* gliderene blir endret.

Legg merke til at gliderene i eksempel 6.1 er satt til å variere mellom -5 og 5. Vi kan endre dette ved å klikke på de tre prikkene (1) (se figur 6.2), velge Innstillinger (2) og fliken Glider (3). Her kan vi velge hvilke intervall glideren skal variere i (4) og vi kan sette steglengde. Her kan vi også endre animasjonsfart (farten du får på glideren hvis du klikker på play ▶ og hvordan glideren skal oppføre seg (5) (gjenta begge veier, økende, minkende eller økende én gang).



Figur 6.2: Du kan endre innstillingene til en glidere ved å klikke på de tre prikkene (1), velge Innstillinger (2) og fliken Glider (3).

I stedet for å endre innstillingene i etterkant, kan vi bruke verktøyet *glider* . Når dette verktøyet er valgt kan vi klikke en plass i grafikkfeltet hvor vi eventuelt vil ha glideren (denne kan også skjules etterpå om det er ønskelig). Du vil da få opp følgende vindu:



Her kan vi gjøre de samme valgene som under Innstillinger til glideren. Det vil si at vi kan velge minste verdi, største verdi, aninmasjonstrinn etc. Legg også merke til at du kan velge om glideren skal være Tall, Vinkel eller Heltall. Velger du vinkel vil den automatisk variere mellom 0° og 360°.

Oppgave 6.1
Lag en GeoGebra-fil som du kan bruke til å utforske lineære funksjoner på formen $y = ax + b$ for ulike verdier av a og b.

Oppgave 6.2
Lag to glidere a og b og utforsk hvordan ulike verdier av a og b påvirker grafen til

$$g(x) = \frac{ax - ab + 1}{x - b}$$

Oppgave 6.3
Utforsk hva som skjer når vi forandrer A, c, φ og d i uttrykket

$$f(x) = A \cdot \sin(cx + \varphi) + d$$

Tips: du finner φ på det virtuelle tastaturen til GeoGebra under gruppen med alle de andre greske bokstavene.

Oppgave 6.4
Lag to glidere a og b mellom -5 og 5 og tegn ellipsen gitt ved

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Beskriv hvordan kurven endrer seg når a og b varierer.

Oppgave 6.5

a) Lag glidere a, b og c som kan variere mellom -5 og 5. Plott grafen til

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

b) Tegn inn linja som skjærer grafen til f i punkta med x-koordinatene $x = -2$ og $x = 1$.

c) Finn arealet avgrenset av linja og grafen til f. Hva skjer når du endrer på a? Hva med b og c?

6.2 Avkrysningsboks for å vise og skjule objekt

I GeoGebra kan du lage avkrysningsbokser som du kan klikke på om du for eksempel vil vise eller skjule objekter.

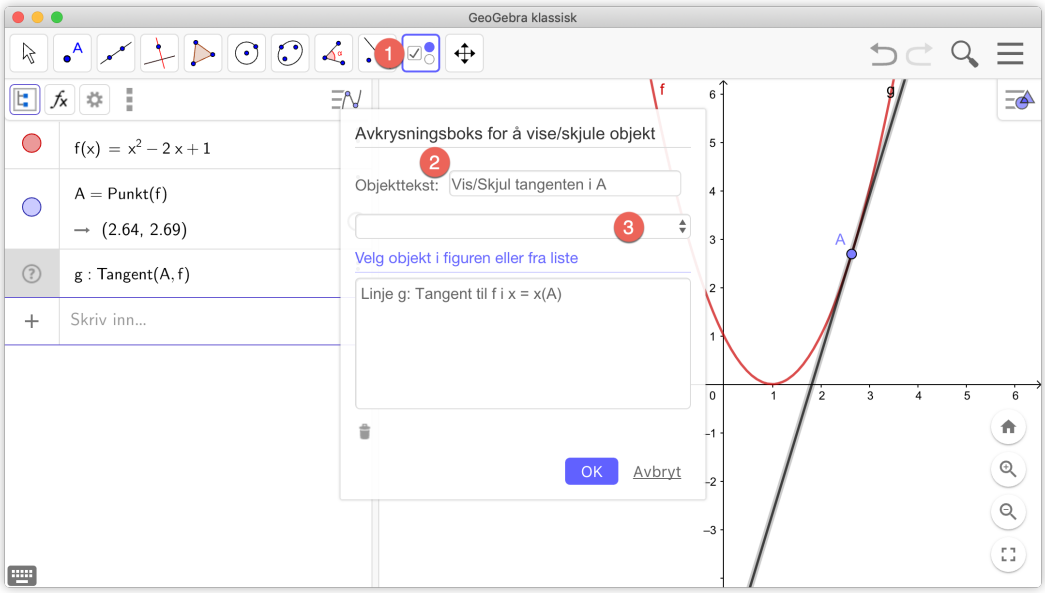
Eksempel 6.2

Tegn grafen til $f(x) = x^2 - 2x + 1$ og lag et punkt på grafen til f sammen med tangenten til grafen i dette punktet. Lag så en avkrysningsboks som viser eller skjuler tangenten.

1. Tegner grafen ved å skrive inn funksjonsuttrykket i algebrafeltet. Velger så verktøyet *Nytt punkt* og klikker en plass på grafen og får et punkt A.

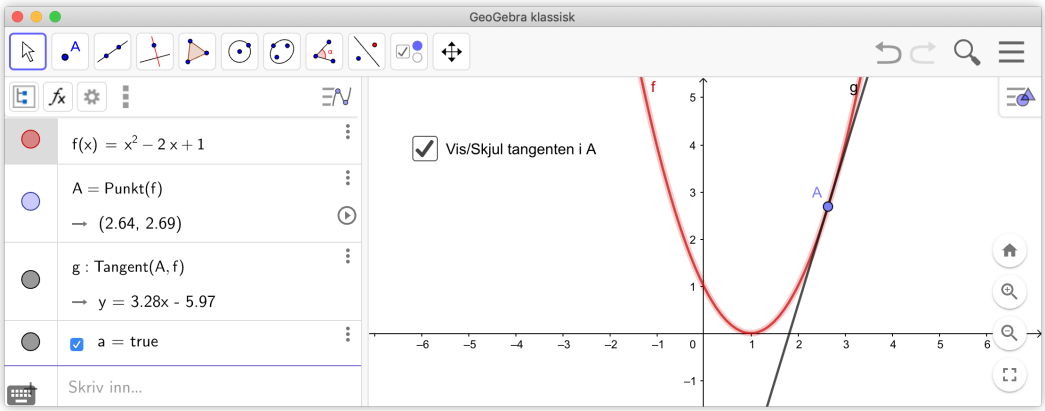
2. Tegn så inn tangenten til grafen i punktet A ved å skrive inn `Tangent(A,f)` i algebrafeltet. Du kan selvsagt også bruke verktøyet *Tangenter* som ligger i samme gruppe som *Normal linje*. Velger du dette verktøyet er det bare å klikke på punktet og deretter på grafen til f.

3. Vi ønsker nå en avkrysningsboks som fungerer slik at tangenten er synlig kun dersom vi har krysset av i boksen. Velg verktøyet *Avkrysningsboks for å vise og skjule objekt*. Du finner denne under samme meny som glidere. Klikk så der hvor du ønsker å plassere boksen. Du vil da få opp et vindu som vist på figur 6.3.



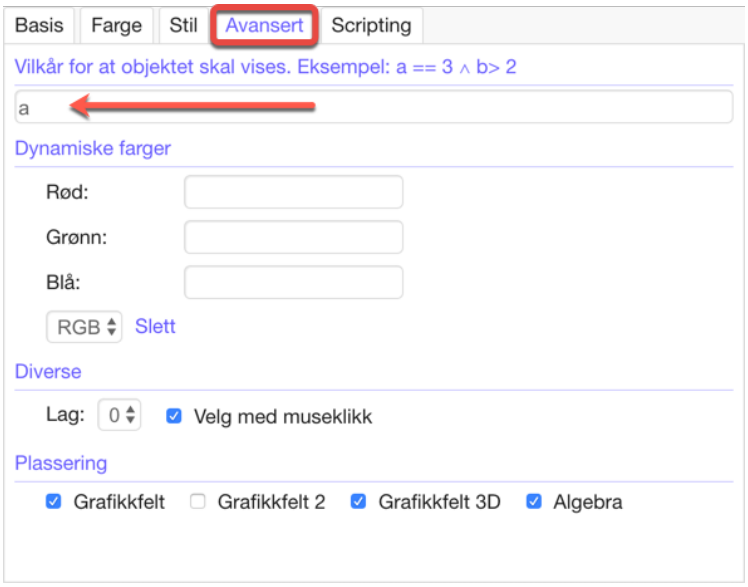
Figur 6.3: Avkrysningsboks for å vise og skjule objekt. I dette tilfellet vil vi vise/skjule tangenten til f i A.

Merk at du kan enten velge hvilket objekt som skal vises/skjules ved å velge det fra nedtrekslisten eller ved å klikke på objektet i algebrafeltet eller grafikkfeltet. Skriv inn ønsket tekst som skal stå ved siden av avkrysningsboksen og klikk på «OK».



Figur 6.4: Avkrysningsboksen er haket av og tangenten vises!

Det som skjer når vi lager en avkrysningsboks er at det blir laget en boolsk variabel. Dette er en variabel som kan ta to verdier: true eller false. De objektene som vi velger skal knyttes til avkrysningsboksen får da endret egenskap til at de skal vises dersom den boolske variabelen er «true». Dette ser vi om vi høyreklikker på tangenten, velger Innstillinger og så fliken Avansert. Der vil vi nå se at det står a i «Vilkår for at objektet skal vises». Det betyr at når a har verdien true (som styres av avkysningsboksen) så vises tangenten. Dersom den er false, så vises den ikke.



Oppgave 6.6
Plott grafen til funksjonen $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ og lag en avkrysningsboks som viser/skjuler topp- og bunnpunktet til funksjonen.

6.3 Sett inn et Innsettingsboks

Noen ganger kan det være greit om vi raskt kan omdefinere et objekt uten å dobbeltklikke eller høyreklikke på objektet i algebrafeltet.

La oss si at vi ønsker at elevene skal finne funksjonsuttrykket til en lineær funksjon som går gjennom to gitte punkt. Det ville da være ok om vi lett kunne skrive inn funksjonsuttrykket uten å måtte lage et nytt objekt (som ville ha skjedd dersom vi hadde skrevet inn funksjonsuttrykket i inntastingsfeltet).

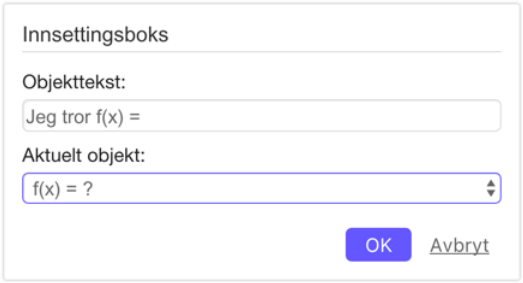
Vi kan gjøre dette på følgende måte:

1 Tegn to punkt i grafikkfeltet.

2 Skriv i inntastingsfeltet `f(x)=?`.

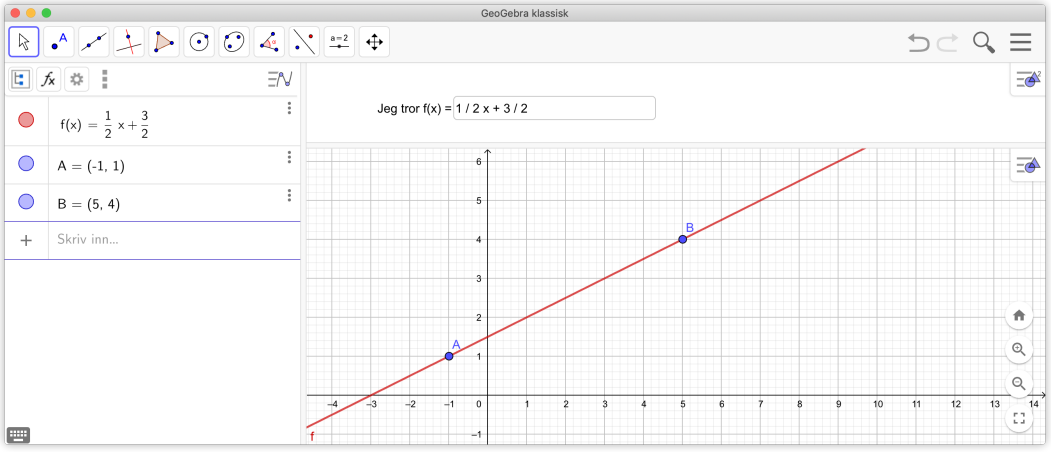
3 Velg så verktøyet *Innsettingsboks* og klikk der hvor du ønsker å plassere dette feltet. Her kan det være en god idé å klikke i Grafikkfelt 2. På den måten vil du være garantert at linjene som du tegner inn ikke vil gå over tekstfeltet. Dersom dette grafikkfeltet ikke vises, så kan du få dette fram ved å hake det av under «Vis» på under menyknappen.

   Når du har klikket der hvor du ønsker å plassere tekstfeltet, vil du få opp et vindu hvor du kan skrive objekttekst og hvilket objekt du vil linke det til. I dette tilfellet skriver vi inn objektteksten «Jeg tror f(x)=» og linker det til `f(x)=?` under «Aktuelt objekt»:

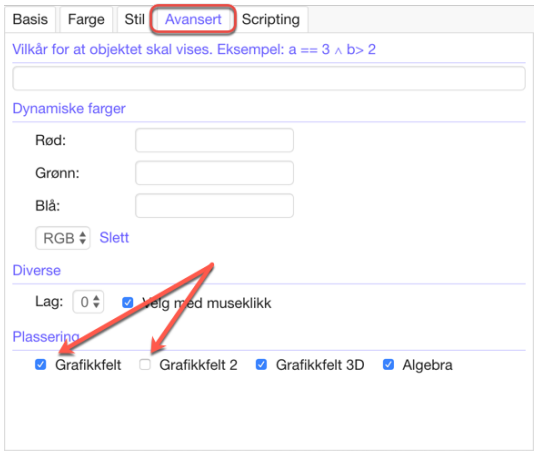


Figur 6.5: Tekstfelt omdefinerer $f(x)$ med det som skrives inn i tekstfeltet.

Resultatet kan se slik ut:



Merk: Dersom linjen blir tegnet i Grafikkfelt 2 må du høyreklikke på linjen og velge «Innstillinger» og «avansert». Nederst i dette vinduet kan du da sette hvilket grafikkfelt du ønsker at linjen skal vises i:



Figur 6.6: Du kan velge hvilket grafikkfelt du ønsker at et objekt skal plasseres i under «egenskaper» og «Avansert». Merk at avkrysningsboksene nederst kun er synlige dersom du viser begge grafikkfeltene.

6.4 Sett inn en knapp

Med verktøyet *Knapp* kan du sette inn en klikkbar knapp. Med denne kan du få GeoGebra til å kjøre en sekvens av kommandoer når knappen blir klikket. Vi tar med noen eksempler som viser hvordan dette fungerer.

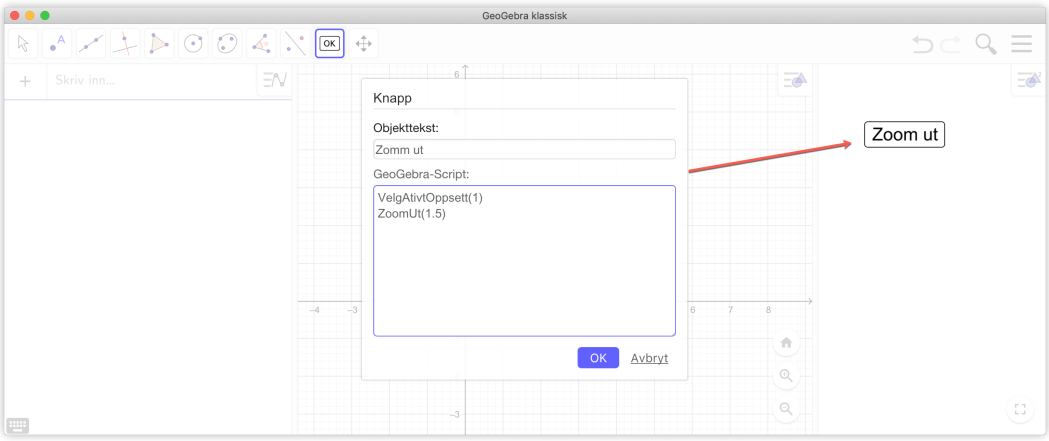
Eksempel 6.3

Lag en knapp som zoomer ut grafikkfeltet.

Løsning:
Velg verktøyet *Knapp* (samme gruppe som glider) og klikk i grafikkfeltet der hvor du ønsker at knappen skal være. I dette eksempelet vil vi plassere den i Grafikkfelt 2. Du vil da få opp et vindu. I dette skriver vi teksten vi vil skal stå på knappen (Zoom ut) under «Objekttekst». I det store feltet har vi skrevet inn

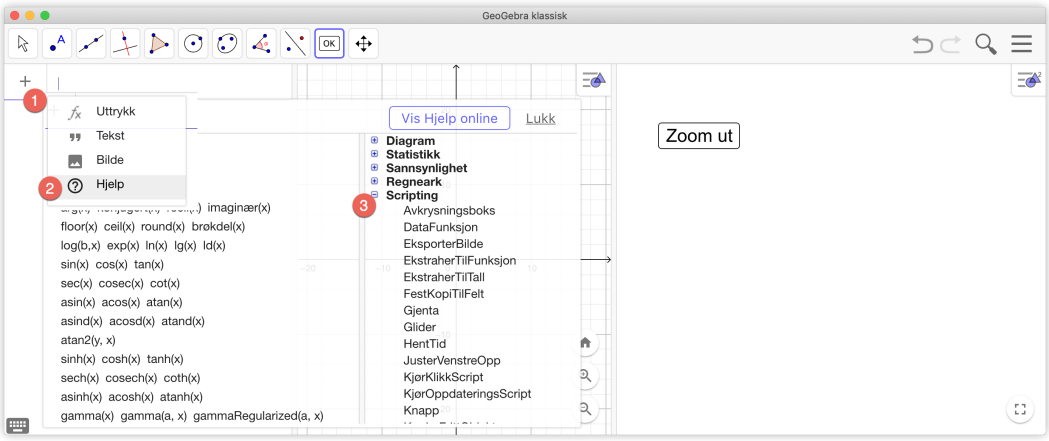
```
VelgAktivtOppsett(1)
ZoomUt(1.5)
```

Poenget med slike GeoGebra-Script (som de kalles) er at du skriver inn et sett med GeoGebra-kommandoer (akkurat som du ville ha gjort i algebrafeltet). Når vi så klikker på knappen, vil disse kommandoene bli kjørt i den rekkefølgen de er listet opp i. På første linje har vi skrevet inn `VelgAktivtOppsett(1)`. Denne kommandoen forteller at kommandoene som er listet opp under skal gjelde Grafikkfelt 1. Hadde vi ikke skrevet inn dette ville grafikkfeltet som knappen er plassert i blitt zoomet ut. Virkningen av kommandoen `ZoomUt(1.5)` vil derfor være at grafikkfelt 1 zoomes ut med en faktor 1,5.



Figur 6.7: Når du klikker på knappen vil du Zoome ut med en faktor 1,5

Det er ikke lett å huske eller vite hvilke kommandoer vi har tilgjengelig. Vi har så langt sett på to: `VelgAktivtOppsett` og `ZoomUt`. Du finner en liste over slike kommandoer under Hjelp (2) som vist på figuren nedenfor. Får å få opp listen klikker du først på plusstegnet (1) i algebrafeltet å deretter på «Hjelp» ⓘ. I listen til høyre kan du nå se ulike Scripting-komanndoer som er tilgjengelig. I neste oppgave kan du få bruk for kommandoer `ZoomInn`.



Oppgave 6.7
Lag en knapp som zoomer inn med en faktor lik 1,5

Oppgave 6.8
Skriv inn $s = 1$ i algebrafeltet. Lag en knapp som øker verdien til s med 1.

Tips: Det er lov å srive $s = s + 1$ i GeoGebra.

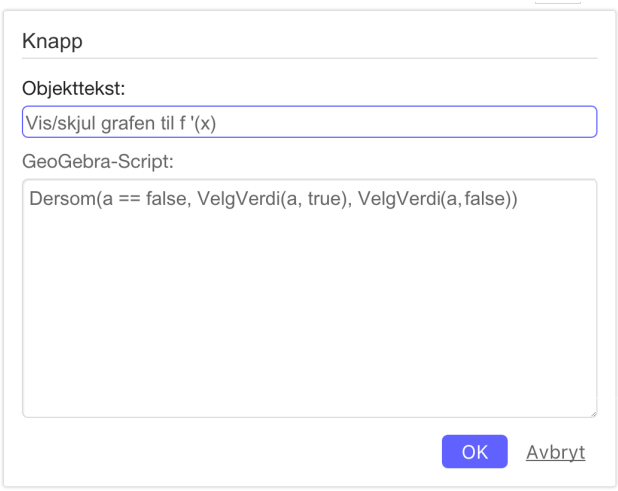
Merk: I GeoGebra 6.0 vil s automatisk bli satt til en glider med verdier mellom -5 og 5. Dersom du klikker på knappen mer enn fire ganger vil den ikke «virke» lenger, siden s har nådd den maksimale verdien. Dette kan du endre ved å endre innstillingene til glideren som vist på figur 6.2.

Eksempel 6.4

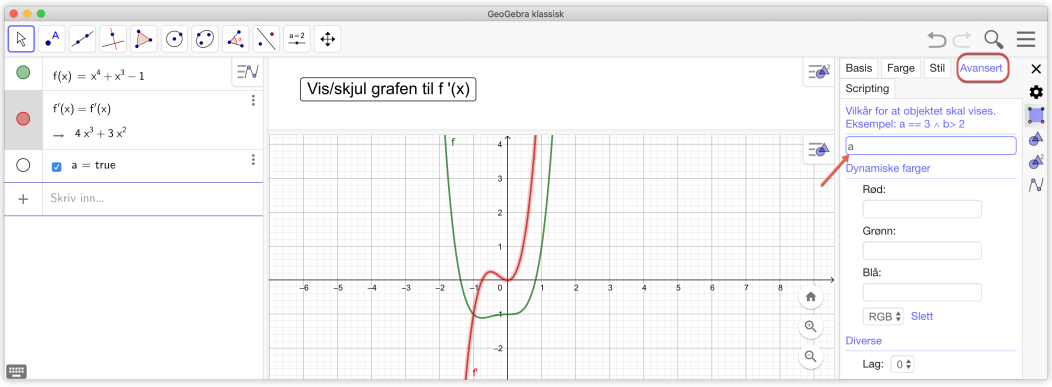
Tegn grafen til funksjonen $f(x) = x^4 + x^3 - 1$ og lag en knapp som viser eller skjuler grafens deriverte.

Løsning:
Vi skriver inn funksjonen i inntastingsfeltet og finner den deriverte ved å skrive inn `f'(x)`. Siden vi vil at knappen skal veksle mellom å vise og skjule den deriverte trenger vi et vilkår som bestemmer når den derivere skal vises og når den ikke skal vises. En måte å gjøre dette på er å lage den boolske variabelen a med verdi false. Vi gjør dette ved å skrive inn `a=false` i algebrafeltet. Velg så *Knapp* og klikk i grafikkfelt 2 der du ønsker å plassere knappen.

I vinduet som du da får opp skriver du inn følgende:



Denne knappen vil nå skifte a fra true (eller 1) til false (eller 0) (eller motsatt). For at dette skal få ønsket effekt må vi nå høyreklikke på den deriverte, velge «Innstillinger» og «avansert»



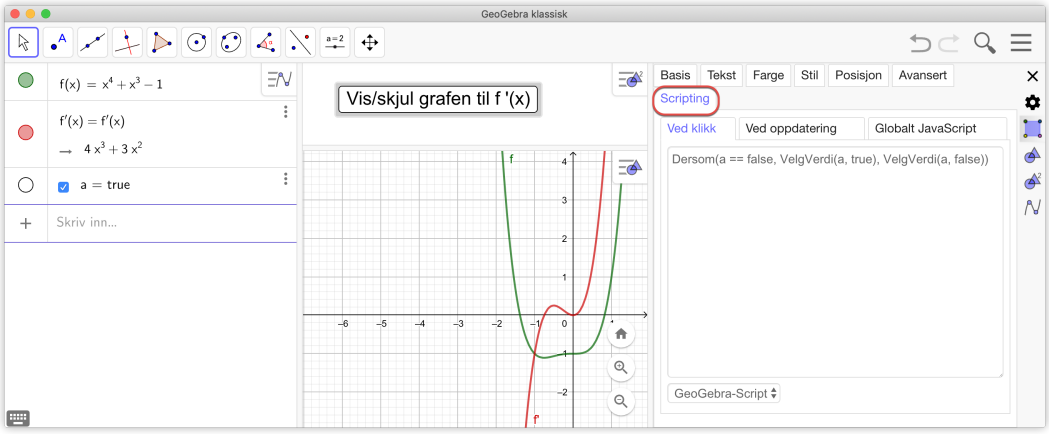
Figur 6.8: Den deriverte blir vist kun dersom a er sann.

Oppgave 6.9
Lag en knapp som viser/skjuler navnet til et punkt A.

Oppgave 6.10
Lag en knapp som gir et tilfeldig tall mellom 1 og 6.

Oppgave 6.11
Legg inn bildene fra `https://tinyurl.com/terningbilder` inn i grafikkfeltet og lag en knapp som viser et tilfeldig bilde når du klikker på knappen.

Dersom du har laget en knapp med et GeoGebra-Script og så senere ønsker å endre på GeoGebra-Scriptet, så kan du gjøre dette ved å høyreklikke på knappen og velge «egenskaper». I vinduet du da får opp finner du en flik med navnet «Scripting». Her kan du redigere GeoGebra-Scriptet som vist på figur 6.9.

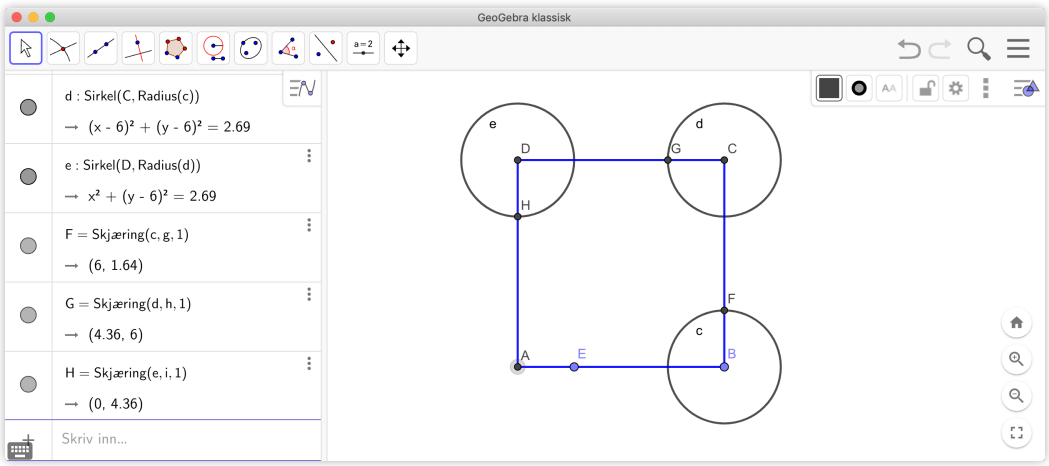


Figur 6.9: Du kan endre GeoGebra-Scriptet ved å høyre-klikke å knappen og velge fliken «Scripting»

6.5 Eksempel på animasjon

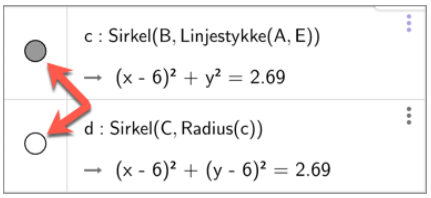
Vi avslutter dette kapitlet ved å vise et litt mer avansert eksempel hvor vi lager en animasjon til et av bevisene til Pytagoras setning.

1. Lag et kvadrat $ABCD$ ved å bruke verktøyet *Regulær mangegant* .
2. Lag et punkt E på AB.
3. Velg verktøyet *Passer* og klikk på A og deretter på E. Du får da en sirkel med radius AE. Klikk på B for å tegne sirkelen med sentrum i B. Klikk på denne sirkelen en gang og deretter på C. Gjenta dette, men klikk på D. Du får da noe som ser slik ut:



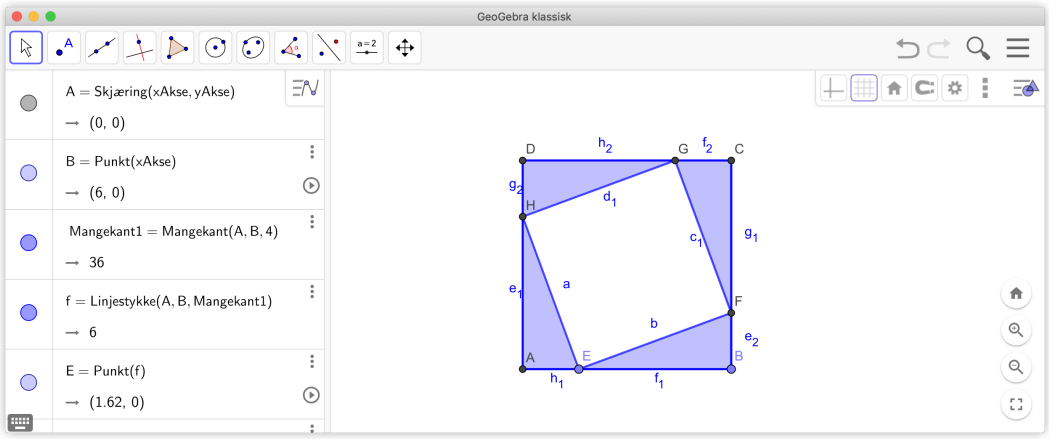
4. Velg verktøyet *Skjæring mellom to objekt* og klikk for å få skjæringspunkta F, G og H som vist på figuren over.

5. Skjul sirklene, enten ved å høyrklikke på dem og hak vek «Vis objekt» eller ved å klikke på kulen til venstre i algebrafeltet:

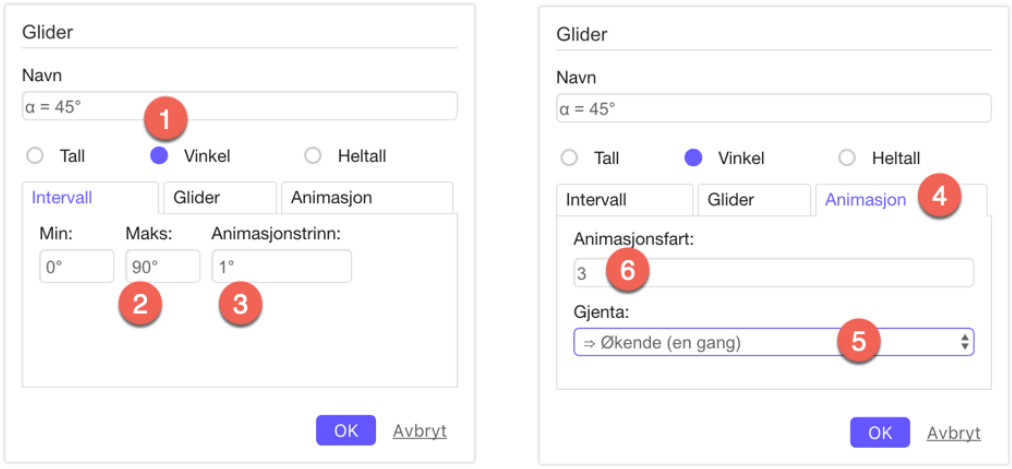


Flytt litt på E og se hva som skjer! Om du har gjort alt korrekt, skal punkta F, G og H flytte seg tilsvarende i kvadratet.

6. Tegn nå inn følgende mangekanter, ved å bruke verktøyet *Mangekant* : $\triangle AEH$, $\triangle BFE$, $\triangle CGF$ og $\triangle DHG$.



7. Lag en glider. Hak av for vinkel (1), velg Maks til å være 90° (2) og animasjonstrinn lik 1° (3). Klikk på på fliken «Animasjon» (4) og velg animasjonsfarten til å være 3 og velg «⇒ Økende (en gang)» (5). Se figur 6.10.



Figur 6.10: Noen tilpassninger av glideren

8. Dersom $\triangle FCG$ heter t3 og $\triangle GDH$ heter t4 skriver du følgende kommandoer i algebrafeltet:

   ```
   Roter(t3,α, F)
   Roter(t4,−α, H)
   ```

   Du vil da få rotert disse to trekantene en vinkel α i henholdsvis positiv og negativ retning. Merk at om du gjør en feil her, så er det litt arbeid å endre opp feilen etterpå, siden det er så mange objekter som blir laget. Har du for eksempel rotert feil vei er det best å bare angre seg tilbake og prøve igjen.

9. Skjul t3 og t4 (altså $\triangle FCG$ og $\triangle GDH$).

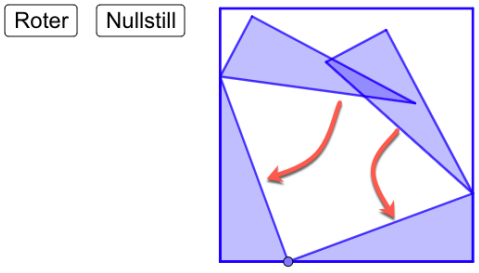
10. Lag en knapp med navn Roter. Skriv inn følgende skript på denne knappen:

    ```
    StartAnimasjon(α)
    ```

    Når du klikke på denne knappen, vil glideren α starte.

11. Lag en ny knapp som du kaller «Nullstill». Skriv inn $\alpha = 0$ som GeoGebra-script og klikk «OK».

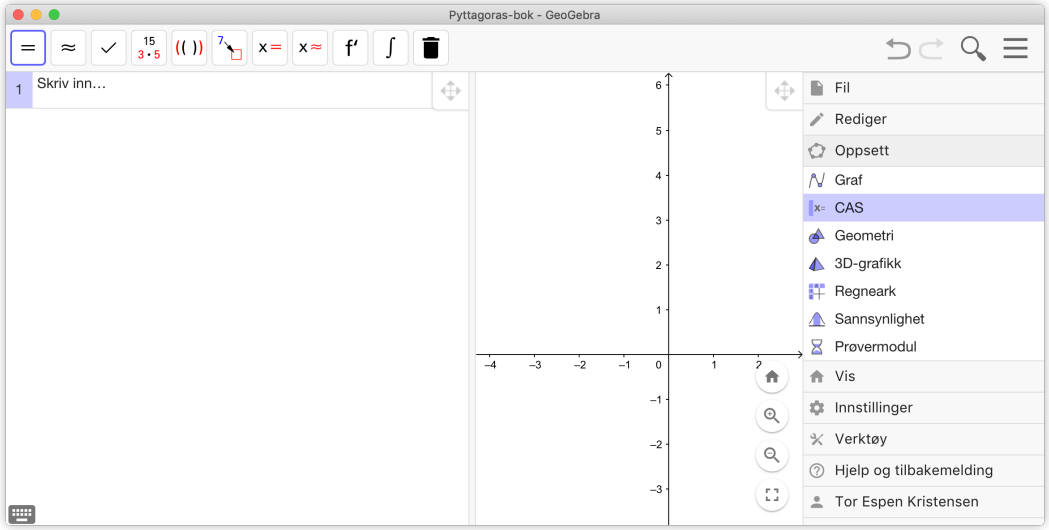
12. Rydd opp i figuren ved å skjule navn på objekter og ved å skjule passende linjestykker. Skjul også glideren α. Du har da fått en animasjon som kan brukes i samtale om hvorfor Pytagoras setning alltid gjelder ved å betrakte arealet til det hvite området inne i kvadratet.



7 CAS i GeoGebra

CAS står for Computer Algebra System og er en betegnelse for programvare som kan gjøre symbolske manipuleringer. Eksempler på slike manipuleringer er å løse likninger med rotutdragning (eksakte verdier), faktorisering av polynomer, integrering og derivering, beregning av summer osv.

I GeoGebra finner du CAS ved å velge CAS som «Oppsett»:



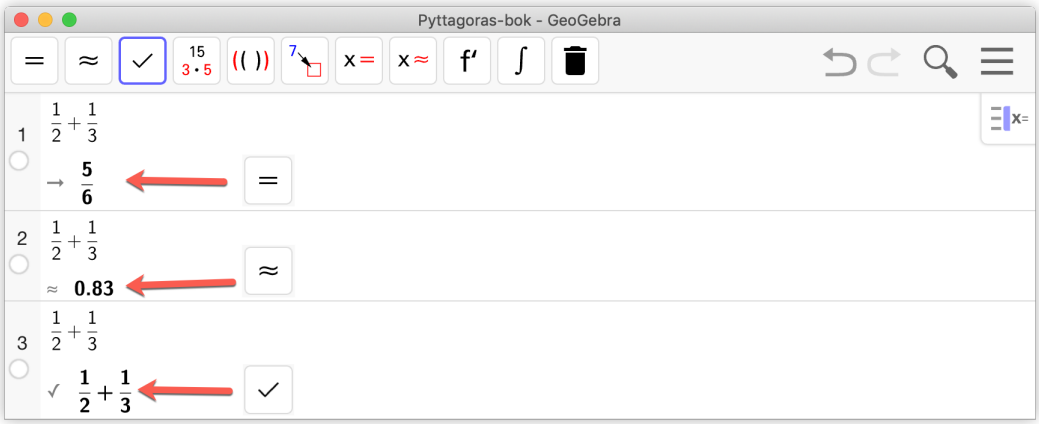
Figur 7.1: Du kan velge oppsettet «CAS» under «Oppsett» på menyknappen.

Du kan også åpne CAS ved å velge det under «Vis» i menyknappen.

7.1 Verktøylinjen i CAS

I dette delkapittelet vil vi ta for oss knapp for knapp på menylinjen:

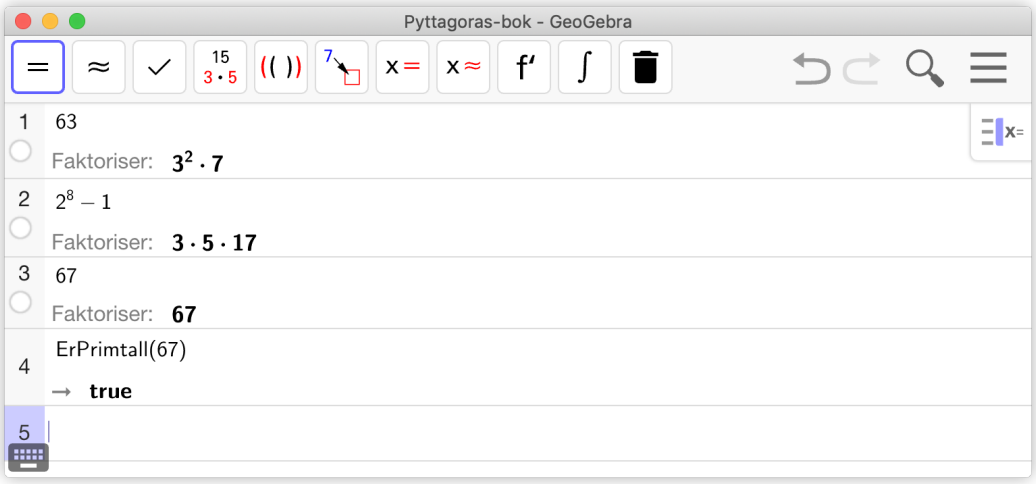
Det er ti CAS-spesifikke verktøy på verktøylinjen. Det første verktøyet er *Regn ut* $=$. Med dette vertøyet blir uttrykk evaluert og regnet ut eksakt. Skriver du for eksempel inn `1/2+1/3` og klikker så på $=$ vil du få $\frac{5}{6}$ som svar. Tilsvarende vil du få 0,8333 som svar dersom du klikker på *Numerisk* $\approx$. Klikker du på *Bruk inntasting* $\checkmark$ vil det ikke bli gjort noe med uttrykket du har skrevet inn. I eksempelet med `1/2+1/3` vil vi få $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ som svar.



Figur 7.2: Du får ulike output alt etter som hvilket verktøy som er valgt.

Merk at du kan enten skrive inn uttrykket og så klikke på ett av disse verktøyene beskrevet over eller du kan aktivere verktøyet, skrive inn uttrykket og så trykke enter. Har du for eksempel aktivert *Numerisk* og skriver inn `4/7` vil du få 0,57 som svar.

Neste verktøy på verktøylinjen er *Faktoriser* $\frac{15}{3\cdot 5}$. Du kan bruke dette til å faktorisere hele tall og algebraiske uttrykk.



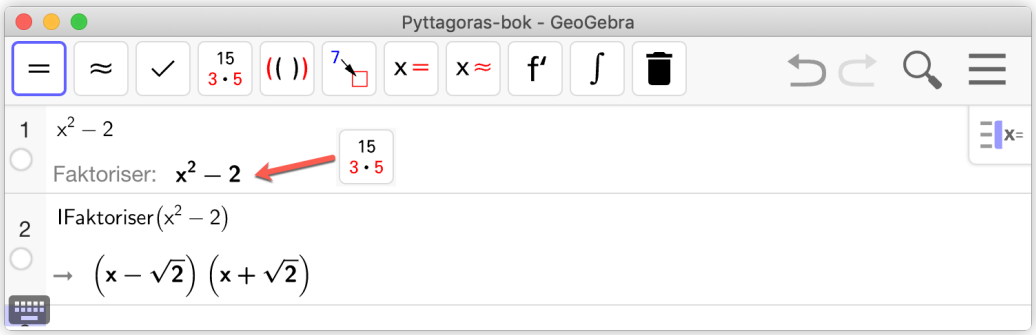
Figur 7.3: Faktorisering av hele tall i GeoGebra. Legg merke til at 67 er et primtall.

Det er verdt å ta med at verktøyet *Faktoriser* kun faktoriserer over de rasjonale tallene. Neste eksempel viser hva som ligger i dette.

Eksempel 7.1

Faktoriser polynomet $x^2 - 2$.

Løsning:
Vi vet at svaret skal være $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$. Men siden $\sqrt{2}$ ikke er et rasjonalt tall, så vil ikke verktøyet *Faktoriser* få dette slik vi ofte ønsker det, som vist i rad 1.



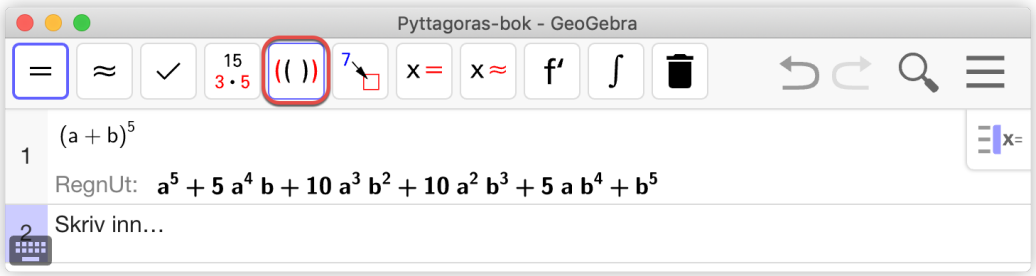
For å løse dette må vi bruke kommandoen `IFaktoriser` som vist på rad 2. «I»-en i denne kommandoen står for Irrasjonal og fortelle GeoGebra at polynomet skal faktoriseres over de reelle tallene (både rasjonale og irrasjonale tall).

Går vi ett hakk til høyre på verktøylinja finner vi verktøyet *Utvid* . Vi bruker dette til å be GeoGebra om å multiplisere ut parenteser etc.

Eksempel 7.2

Multipliser ut $(a + b)^5$

Løsning:
Vi skriver inn `(a+b)^5` og klikker på :



Vi ser at

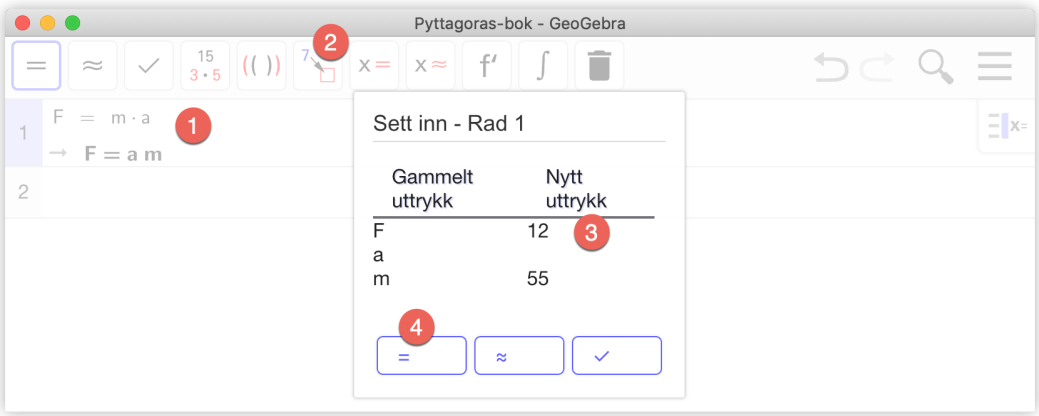
$$(a + b)^5 = a^5 + 5\,a^4\,b + 10\,a^3\,b^2 + 10\,a^2\,b^3 + 5\,a\,b^4 + b^5$$

Neste verktøy er *Sett inn* . Med dette kan du erstatte én eller flere variable med andre variable eller tall.

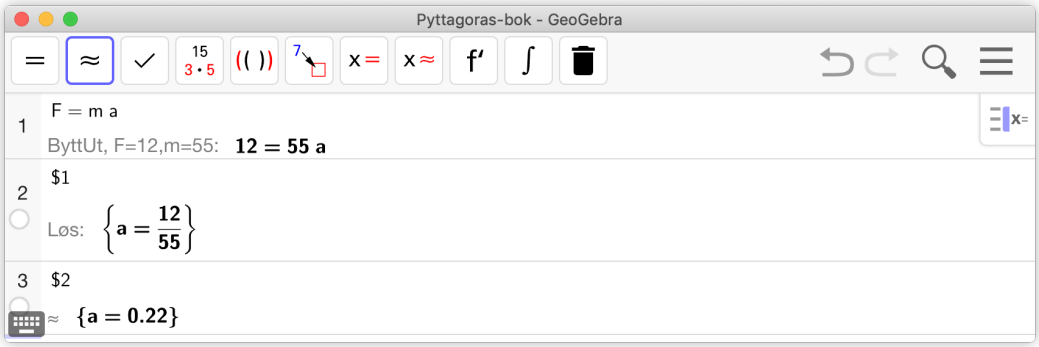
Eksempel 7.3

Skriv inn formelen $F = m \cdot a$ i CAS finn a når $F = 12$ og $m = 55$.

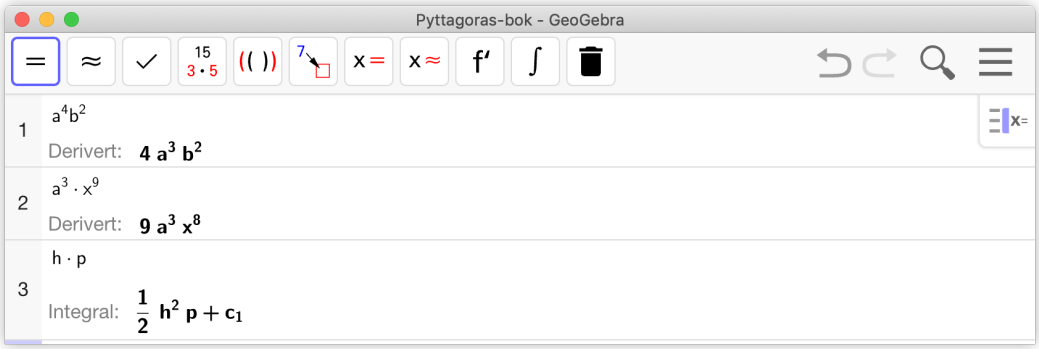
Løsning:
Vi skriver inn `F=m*a` og klikker på . Vi får da opp et vindu der vi kan skrive inn de ønskede substitusjonene:



Klikker vi på får vi svaret $12 = 55a$. Vi løser denne likningen ved å bruke verktøyet *Løs* . Dette gjør du enkelt ved å stå i raden nedenfor (rad 2 på bildet over) og så bare klikke på . Da vil GeoGebra forstå at du ønsker å løse likningen på raden over. Vi får $a = \frac{12}{55}$. Dersom vi ønsker desimaltall trykker vi på og vi får desmialtall i raden nedenfor automatisk.



Helt til høyre på verktøylinja ligger det to verktøy: *Derivert* og *Integral* . For å bruke disse er det bare til å skrive inn et uttrykk og klikke på verktøyet. Uttrykket du skriver inn behøver ikke å være et uttrykk i x, men dersom du skriver inn for eksempel a^4b^2, så vil GeoGebra derivere med hensyn på a. Mer generelt, så vil GeoGebra derivere/integrere med hensyn på den første av varbiablene i lista $x, y, z, a, b, \ldots v, w$ som er uttrykket inneholder.

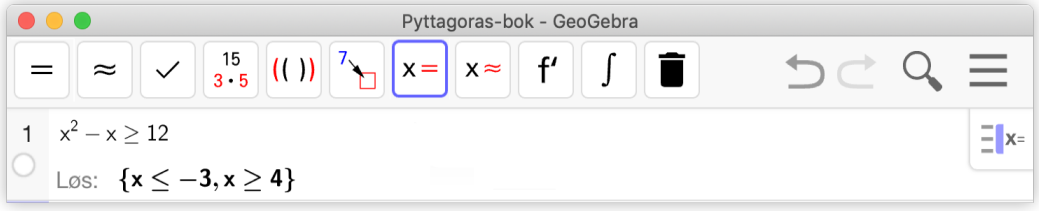


Du kan da bruke vektøyet *Løs* x= til å løse ulikheter på samme måte som løsning av likninger.

Eksempel 7.4

Løs ulikheten $x^2 - x \geq 12$

Løsning:
Skriv inn ulikheten i GeoGebra CAS og trykk på x=. Vi ser at løsningen er alle x slik at $\{x \leq -3, x \geq 4\}$. Det vil si alle $x \in \langle \leftarrow, -3] \cup [4, \rightarrow \rangle$.



Oppgave 7.1

Bruk CAS til å regne ut

a) $\dfrac{12^2}{\sqrt{9}}$ b) $\sqrt{14} - \sqrt{16 - 4\sqrt{7}}$ c) $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$

Tips! Du kan regne ut kvadratrot enten ved å bruke kommandoen `sqrt()` eller ved å bruke tastekombinasjonen Alt + r for å få $\sqrt{\ }$. Husk å bruke parenteser rundt alt du vil ta kvadratroten av. Det også nødvendig å bruke parenteser når vi skal skrive opp en brøk der det er flere ledd i teller eller nevner.

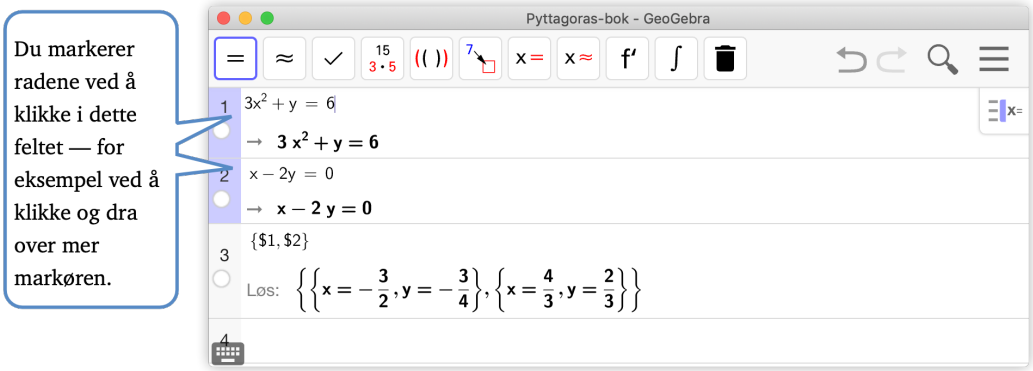
Eksempel 7.5

Løs likningssystemet

$$3x^2 + y = 6$$
$$x - 2y = 0$$

Løsning:

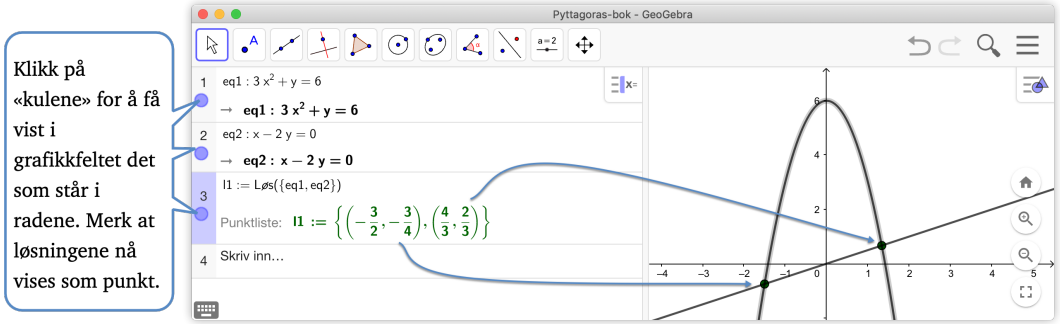
Vi løser likningssystemet ved å skrive inn likningene over i hver sin rad i GeoGebra. Når det er gjort markerer vi radene og trykker på *Løs* x=, som vist på figuren nedenfor.



Figur 7.4: Løsing av likningssystem. Du må markerer radene med likningene i og klikker på verktøyknappen *Løs*

Vi ser at systemet har to løsninger, som vist på rad 3.

Ønsker du en geometrisk tolkning av løsningene er det fint å klikke på sirklene under nummeret på radene:



Oppgave 7.2

a) Multipliser ut $(a+b+c)^3$.

b) Finn de eksakte røttene til likningen $x^3+8x^2-2x-16=0$

c) Deriver funksjonen $f(x)=x^4\ln(x)$.

d) Finn integralet $\int x^4\cdot\sin(2x)\,\mathrm{d}x$

Oppgave 7.3

Løs ulikhetene

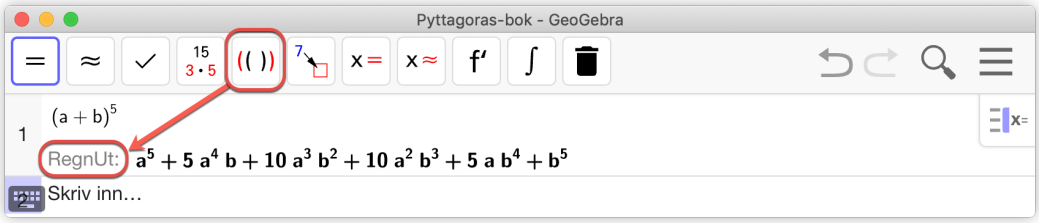
a) $x^2-4<0$ b) $3^x>4$ c) $\dfrac{x-2}{x^2-1}>2$

Oppgave 7.4
Løs likningssystemet

$$x^2 + y^2 = 10$$
$$x - y = 2$$

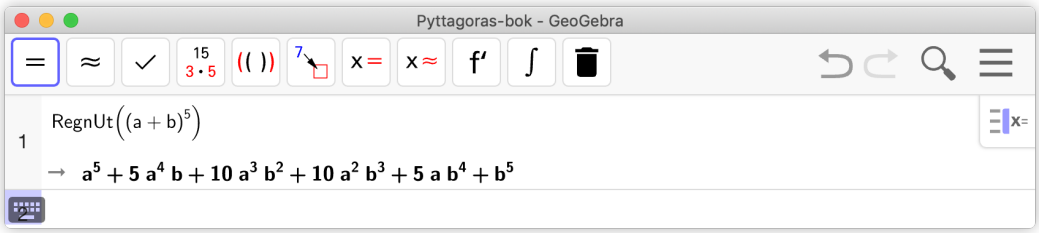
7.2 CAS-kommandoer

Vi har så langt sett hvordan vi kan bruke CAS-verktøyene til å utføre ulike operasjoner på uttrykk. Dersom vi kikker godt etter, ser vi at til de fleste verktøyene har en tilhørende kommando. Når vi utvidet $(a+b)^5$ ved å bruke *Utvid* ser vi at dette verktøyet kjører kommandoen `RegnUt`.



Figur 7.5: Verktøyet *Utvid* kjører kommandoen `RegnUt`

I stedet for å bruke verktøyet *Utvid* kunne vi med andre ord kjørt kommandoen `RegnUt` direkte:



Figur 7.6: Du kan utvide parenteser ved å direkte bruke kommandoen `RegnUt`

Det fins godt over 100 slike kommandoer i GeoGebra og du finner dem alle på nettsiden `http://wiki.geogebra.org/nb/CAS_Spesielle_kommandoer`.

Eksempel 7.6

Faktoriser polynomet $2x^3 + 3x^2 - 32x + 15$.

Løsning:
Vi skriver inn `IFaktoriser(2x^3+3x^2-32x+15)` og trykker enter. Vi får at

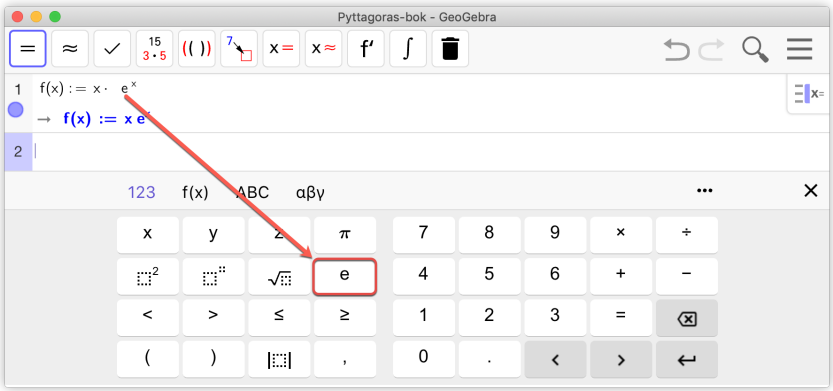
$$2x^3 + 3x^2 - 32x + 15 = (2x-1)(x+5)(x-3)$$

Eksempel 7.7

Finn eventuelle topp- eller bunnpunkter til grafen til $f(x) = xe^x$.

Løsning:
Vi kan definere en funksjon i CAS ved å skrive inn `f(x):=x*e^x`

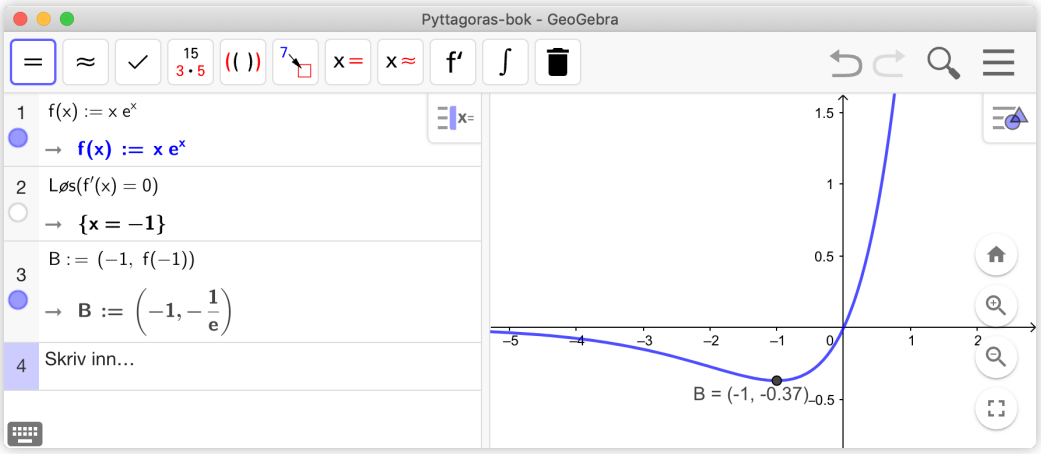
Husk bare at du ikke bruker en vanlig «e» når du skal skrive inn dette uttrykket, men at du trykker Alt + e eller henter e fra det virtuelle tastaturet (se figur 7.7).



Figur 7.7: Euler-tallet er en egen «e» i GeoGebra. Du kan enten hente det i det virtuelle tastaturet eller bruke tastekombinasjonen Alt + e

Når vi definerer en funksjon i CAS, bruker vi kolon foran likhetstegnet (`:=`).

Når funksjonen er definert kan vi skrive inn `Løs(f'(x)=0)` og får $x = -1$ som svar. Det neste vi vil gjøre er å finne punktet på grafen. Siden vi allerede har definert $f(x)$ kan vi nå definere bunnpunktet ved å skrive `B=(-1, f(-1))` i CAS og få at bunnpunktet er $(-1, -1/e)$.



Figur 7.8: Vi har funnet eksakte verdier med CAS.

Merk at vi ikke kan bruke kommandoen `Ekstremalpunkt` i dette tilfellet om vi ønsker eksakte verdier. Kommandoen `Ekstremalpunkt` kan enten brukes direkte på polynomer eller på funksjoner generelt. I sist nevnte tilfellet må vi oppgi en «start» og «slutt». Det vil si at vi må oppgi hvor vi ønsker å finne ekstremalpunktet (mellom «start» og «slutt»). Da vil GeoGebra bruke numeriske metoder og vi får ikke et eksakt svar.

Oppgave 7.5
Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} 2y - x^2 + 2x &= a \\ y - 2x &= 3 \end{aligned}$$

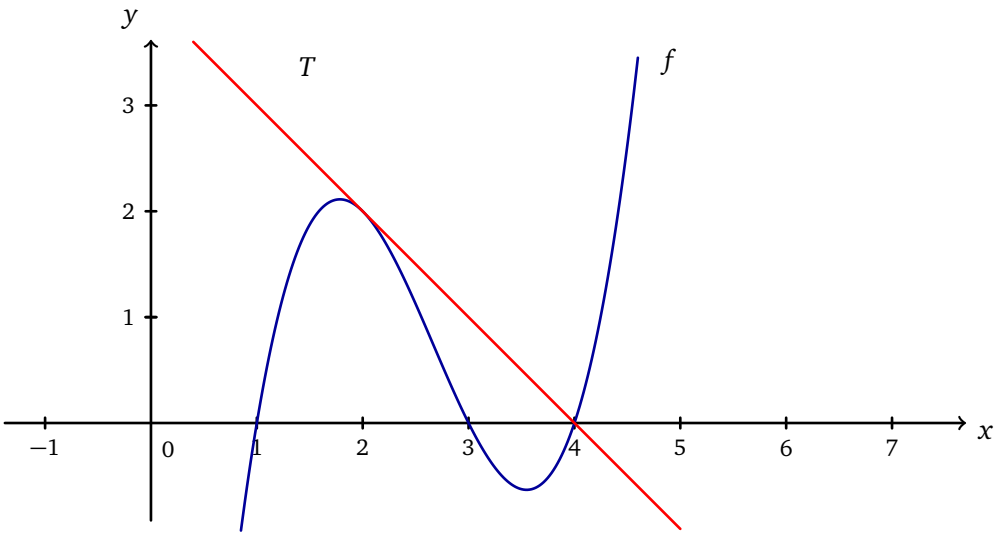
For hvilke verdier har systemet

- én løsning
- to løsninger
- ingen løsninger

Eksempel 7.8

La f være en tredjegradsfunksjon som har tre nullpunkt a, b og c. La T være tangenten til f i $d = \dfrac{a+b}{2}$. Hva kan du si om denne tangenten?

Løsning:
Før vi går i gang med selve løsningen i CAS kan det være en ide å utforske problemet litt. Vi kan for eksempel se på funksjonen $f(x) = (x-1)(x-3)(x-4)$. I dette tilfellet blir $d = 2$ og vi kan tegne og finne tangenten ved å skrive inn kommandoen `Tangent(2,f)` i algebrafeltet.



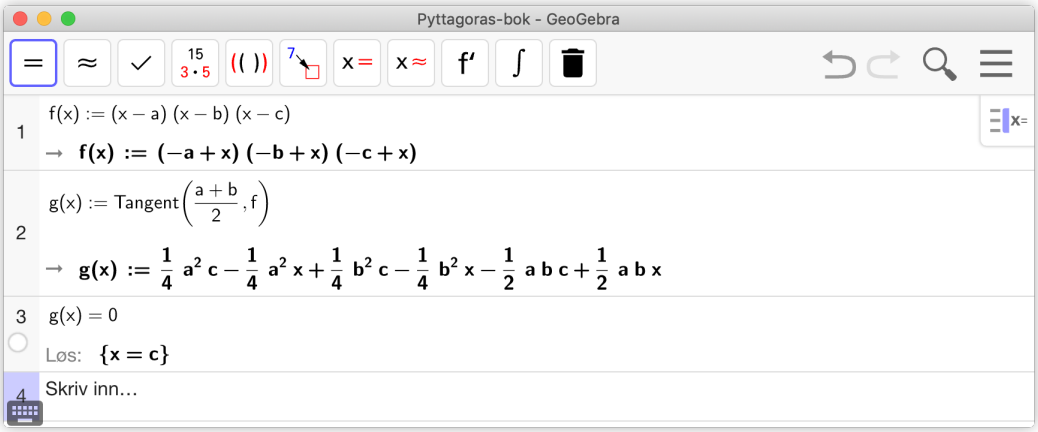
Ut fra denne figuren får vi en mistanke om at tangenten vil gå gjennom det tredje nullpunktet. Vi ønsker derfor å bevise dette ved å bruke et CAS!

Det første vi gjør er å definere funksjonen ved å skrive inn

```
f(x):=(x-a)(x-b)(x-c)
```

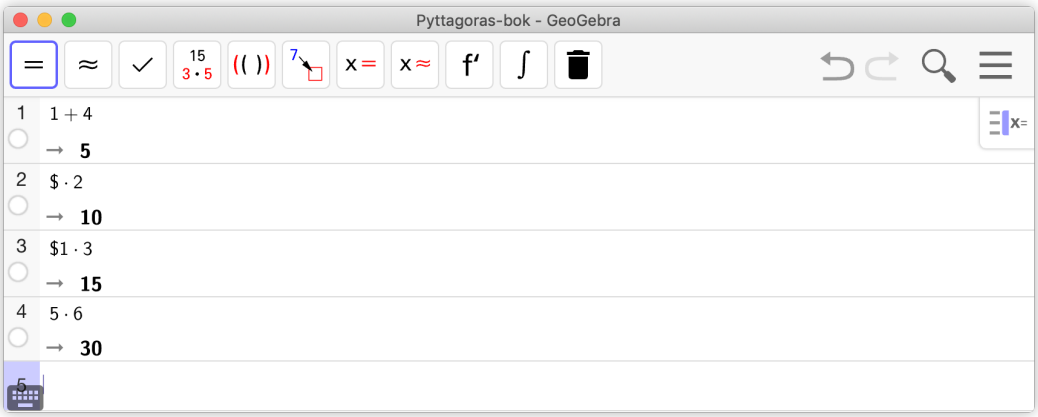
Vi kan finne tangenten i $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ ved å bruke ettpunktsformelen. Men det enkleste er nok å bruke kommandoen `Tangent(<x-verdi>,<funksjon>)`.

Vi ser at tangenten g har $x = c$ som nullpunkt, akkurat som forventet!



Merk at vi har definert tangenten som en funksjon g i rad 2. Dette er et lurt triks, siden vi ellers ville fått tangenten som en linje. Det ville da være vanskeligere å behandle denne videre. Nå kunne vi for eksempel enkelt løse liknignen $g(x) = 0$. Vi kunne også bare ha regnet ut $g(c)$ og sett av ti fikk 0 som svar.

Du kan referere til forrige output ved å skrive enten $ (for dynamisk output) eller # (for statisk output). Tilsvarende kan du referere til output på rad n ved å skrive $n (for dynamisk output) og #n (for statisk output). Forskjellen på disse to er at dersom du går inn og endrer på en verdi slik at output på rad n endres, så vil du også få endring i raden du skrev $n i mens du vil beholde den gamle verdien fra rad n dersom du skrev #n. På figuren nedenfor har vi skrevet inn #1*6 i rad 4. GeoGebra bytter automatisk ut #1 med tallet 5.



7.3 Differensiallikninger

7.3.1 Ordinære differensiallikninger

Kommandoene under fungerer for de fleste likningene vi møter i Matematikk R2:

`LøsOde(<likning>)`

`LøsOde(<likning>,<Punktpå grafen til f>)`

`LøsOde(<likning>,<Punktpå grafen til f>,<Punkt på grafen til f'>)`

Den første gir den generelle løsningen til en ordinær differensiallikning og de to andre gir løsning på initialproblemer. Du kan skrive inn `y'` og `y''` for henholdsvis første- og andrederiverte til y. GeoGebra kan ikke løse differensiallikninger av høyere orden enn 2.

Eksempel 7.9

Løs differensiallikningene $y' - y = x$.

Løsning:
Vi skriver inn kommandoen `LøsODE(y'-y=x)` og får at $y = -x + Ce^x - 1$:

Eksempel 7.10

Løs initialproblemet

$$y'' - 6y' + 5y = x, \quad y(0) = 1 \text{ og } y'(0) = 2$$

Løsning:
Her ser vi at punktet $(0, 1)$ ligger på grafen til funksjonen mens $(0, 2)$ ligger på grafen til den deriverte. Vi skriver derfor inn:

Vi ser at $y = \frac{1}{5}\,x + \frac{13}{50}\,e^{5\,x} + \frac{1}{2}\,e^x + \frac{6}{25}$.

I rad 2 har vi fått svaret med desimaltall ved å trykke på ≈ .

Oppgave 7.6
Løs differensiallikningene

a) $y' + y = 0$ b) $y'' + y = e^x$ c) $y'' - y' + y = 5$

Oppgave 7.7
Løs initialproblemet

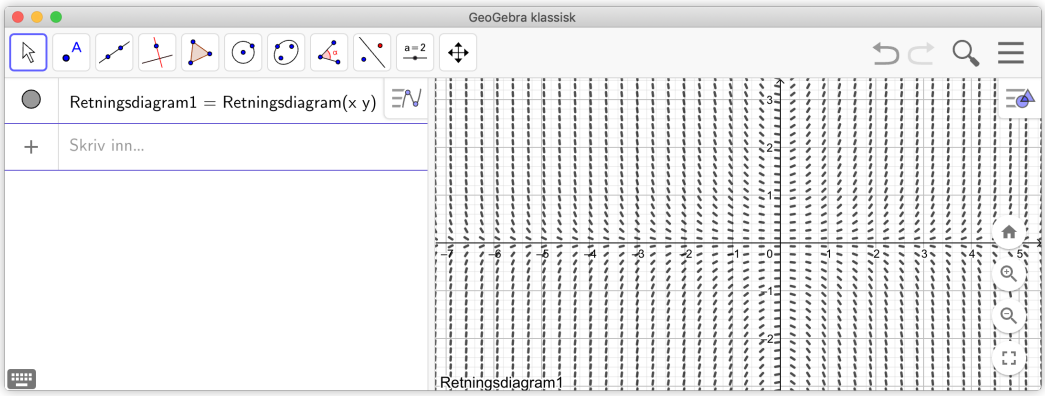
$$y'' + y = 2 \qquad y(\pi) = 1,\ y'(0) = 2$$

7.3.2 Retningsdiagram

Du kan også lage retningsdiagram i GeoGebra. Kommandoen vi da bruker er

`Retningsdiagram[<f(x,y)>]`.

Denne vil tegne opp et retningsdiagram til differnsiallikningen $y' = f(x, y)$. Merk at dette ikke er en CAS-spesifikk kommando, så denne må du skrive inn i algebrafeltet. `Retningsdiagram(x*y)` vil gi retningsdiagrammet til differensiallikningen $y' = xy$:



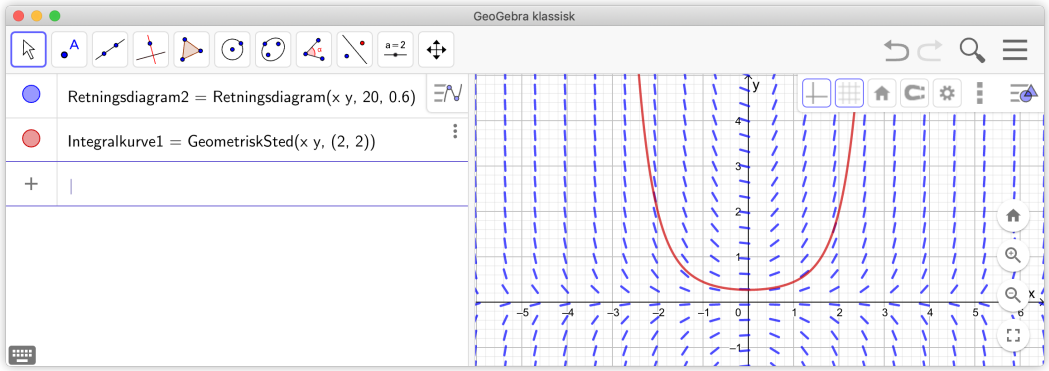
Figur 7.9: Retningsdiagram til differensiallikningen $y' = xy$

Dersom du synes linjestykkene i diagrammet ligger for tett eller har feil lengde (for lange?) kan du endre dette ved å oppgi hvor mange linjer i x- og y-retning som skal tegnet og hvor lange linjestykkene skal være. Kommandoen `Retningsdiagram(x*y, 20, 0.6)` gir kanskje et penere diagram?

Vi kan også tegne inn integralkurver til slike diagrammer. Dersom vi ønsker å tegne inn den integralkurven som går gjennom punktet $(2, 2)$ kan vi bruke kommandoen

`GeometriskSted(x*y,(2,2))`

Se figur 7.10.



Figur 7.10: Retningsdiagram til differensiallikningen $y' = xy$ sammen med integralkurven som går gjennom $(2, 2)$.

7.4 Oppgaver

Oppgave 7.8
Bruk CAS til å forenkle uttrykkene:

a) $\dfrac{x^{12}-1}{x^4-x^2+1}$

b) $\sqrt{(x+1)}^3 - x\sqrt{x+1}$

Oppgave 7.9
Finn de eksakte løsningene til likningene

a) $x^3 + x - 2 = 0$

b) $x^3 + 15x = 2$

Oppgave 7.10
Løs likningene

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$

b) $e^{2x} - e^x + 1 = 6$

Oppgave 7.11
Løs likningssystemet

$$x + y + 3\sqrt{x+y} = 18$$
$$x - y - 2\sqrt{x-y} = 15$$

Oppgave 7.12
Bruk CAS til å faktorisere polynomene:

a) $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + x^2 + 14x - 10$

b) $Q(x) = x^{12} - 1$

De neste tre oppgavene er hentet fra utdanningsdirektoratets forslag til ny eksamensordning for videregående skole.

Oppgave 7.13 — 1T.

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = \frac{2}{x(x-1)} - \frac{3x}{x} + \frac{1}{x^2 - x}$$

Skriv funksjonsuttrykket så enkelt som mulig, og bestem eventuelle vertikale og horisontale asymptoter for grafen til f.

Oppgave 7.14 — S2.
I denne oppgaven skal du finne mønstre og sammenhenger.

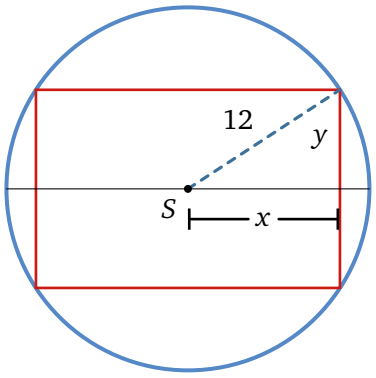
a) Det minste tallet som kan skrives som summen av to kubikktall på to måter er 1729:

$$1729 = 1^3 + n^3$$
$$1729 = m^3 + (m+1)^3$$

Bestem n og m.

b) Det eneste kubikktallet som skrives som summen av tre påfølgende kubikktall, er 6^3.
Bestem de tre kubikktallene ved å løse en likning.

Oppgave 7.15 — R1.
Et rektangel er innskrevet i en sirkel med sentrum i S og med radius 12.



a) Forklar at arealet av rektangelet er gitt ved

$$A(x) = 4x\sqrt{144 - x^2}, \quad x \in \langle 0, 12 \rangle$$

b) Bestem det største arealet rektangelet har.
Kommenter formen på rektangelet.

Oppgave 7.16
La f være en andregradsfunksjon og A og B to punkt på grafen til f. Hvor må et punkt P ligge for at tangenten til grafen i P har samme stigningstall som linjen gjennom A og B?

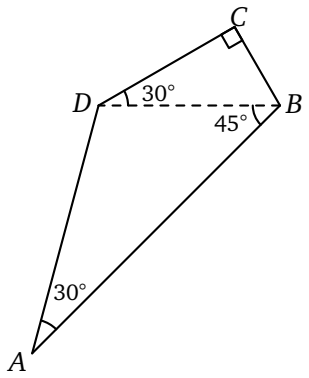
Oppgave 7.17
Grafen til funksjonen f gitt ved

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 21x - 11$$

har tre tangenter som går gjennom $(0, 0)$. Bestem likningene til disse tangentene. Bestem også koordinatene til tangeringspunktene.

Oppgave 7.18
Finn likningen til vendetangenten til funksjonen $f(x) = x^3 - ax + b$.

Oppgave 7.19
Gitt en firkant $ABCD$ som vist på figuren til høyre. Lengden på diagonalen BD er 8. Bruk CAS til å bestemme eksakt lengdene av sidene i firkanten.



Oppgave 7.20
Gitt en tredjegradsfunksjon f. En linje ℓ går gjennom vendepunktet V og skjærer grafen til f i to andre punkt A og B. Et punktet P ligger på grafen til f slik at x-koordinaten til P er lik x-koordinaten til midpunktet mellom A og V.

Hva kan du si om tangenten til grafen til f i P?

Oppgave 7.21
Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

a) Tegn grafen til f. Finn koordinatene til toppunktet og bunnpunktet.

b) Finn stigningstallet til linja l gjennom toppunktet og bunnpunktet.

La m være gjennomsnittet av x-koordinatene til toppunktet og bunnpunktet.

c) Finn stigningstallet til tangenten til grafen til f i punktet $(m, f(m))$. Vis at forholdet mellom stigningstallene til linjene l og t er $\frac{2}{3}$.

d) Kan du vise dette generelt?

Oppgave 7.22
Fermatprimtall er primtall på formen $F_n = 2^{2^n} + 1$.

a) Vis at F_n er primtall når n er 1, 2, 3 og 4.

b) Vis at F_n ikke er primtall når n er 5, 6, 7, 8, 9 og 10.

I denne oppgaven kan du bruke kommandoen `ErPrimtall(<tall>)`.

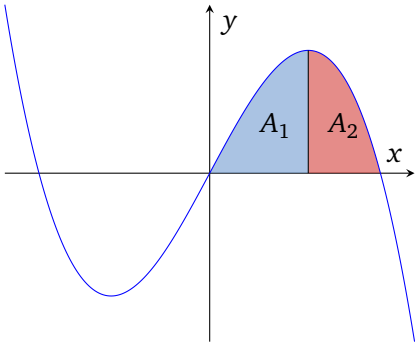
Oppgave 7.23
I denne oppgaven skal vi studere polynomet $P(x) = x^2 - x + 41$.

a) Undersøk om $P(n)$ er primtall for $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$.

b) Finn minste naturlige tall n slik at $P(n)$ ikke er et primtall.

Oppgave 7.24

Grafen til en tredjegradsfunksjon f er symmetrisk om origo. Sammen med x-aksen danner grafen et område A til høyre for y-aksen. Linjen gjennom det ene ekstremalpunktet deler A i to områder A_1 og A_2.



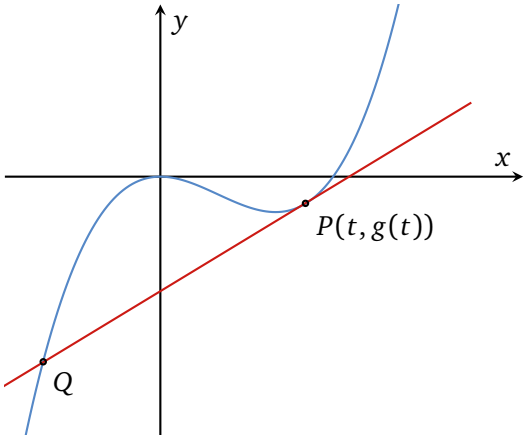
Hva er forholdet mellom de to arealene?

Oppgave 7.25 — R1 Våren 2015.

Funksjonen g er gitt ved

$$g(x) = ax^3 - x^2, \quad D_g = \mathbb{R}$$

Grafen til g har en tangent i punktet $P(t, g(t))$. Tangenten skjærer grafen til g i et annet punkt Q. Se skissen nedenfor.



a) Vis at tangenten har likningen

$$y = (3at^2 - 2t)x + t^2 - 2at^3$$

b) Bruk CAS til å bestemme koordinatene til Q, uttrykt ved a og t.

Oppgave 7.26

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-5)$$

Grafen til f har en tangent som tangerer grafen i to punkt på grafen.

Bestem likningen til denne tangenten.

Oppgave 7.27

Grafen til en tredjegradsfunksjon f ligger symmetrisk om origo og har tre nullpunkt $x = -a$, $x = 0$ og $x = a$. Et parallellogram P har hjørner i $(-a, 0)$, $(a, 0)$ og i topp- og bunnpunktet til grafen.

Hva er forholdet mellom arealet av dette parallellogrammet og arealet til de to områdene som er avgrenset av grafen til f og x-aksen?

Oppgave 7.28
Funksjonene f_a er gitt ved

$$f_a(x) = a^2 \cdot x^3 - a \cdot x^2 + 1, \quad \text{der } a \in \mathbb{R}$$

Vis at vendepunktene V_a alle ligger på en rett linje.
Bestem likningen for denne linjen.

Oppgave 7.29
Faktoriser $x^n - 1$ for $n = 1, 2, \ldots, 10$. Hva kan du si om koeffisientene til faktorene? Gjelder dette generelt?

Herons formel

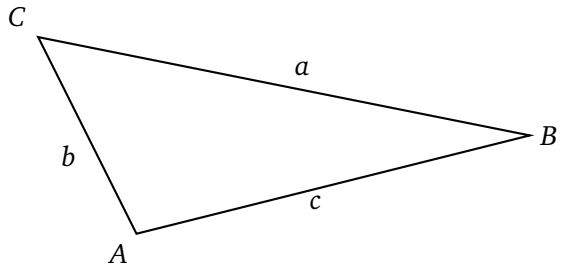
Dersom en trekant har sider a, b og c, så er arealet til trekanten gitt ved

$$\text{Areal} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \text{der} \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

Oppgave 7.30
Lagre Herons formel som en funksjon `heron(a, b, c)`

Regn ut arealet til en trekant med sider 1, 3 og 3.

For hvilke verdier av x fins det en trekant med sider x, $x+1$ og $x+2$



Oppgave 7.31
Vi skal i denne oppgaven bevise Herons formel.

a) Bruk cosinussetningen til å skrive $\cos^2 A$ uttrykt ved a, b og c.

b) Vis at

$$\sin^2 A = 1 - \left(\frac{b^2 - c^2 - a^2}{2bc} \right)^2$$

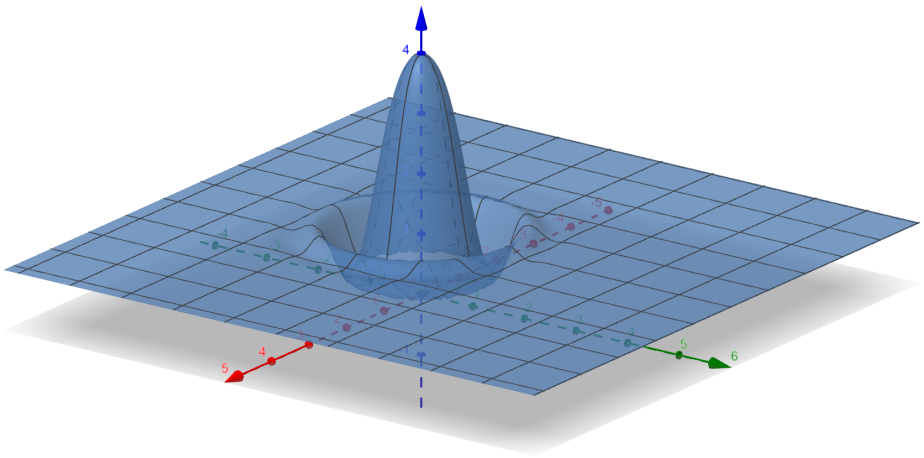
c) Bruk CAS til å bestem et uttrykk for Areal^2 uttrykt ved a, b og c.

d) Bruk CAS ti å vise at Herons formel gir samme areal som i c).

8 GeoGebra 3D

8.1 Grafikkfelt 3D

I GeoGebra kan du tegne og utforske tre-dimensjonale objekter. I tillegg til grafikkfeltet har du også *Grafikkfelt 3D*. Du åpner dette på vanlig måte. Under «Vis» på menyknappen klikker du på «Grafikkfelt 3D». Her kan du gjøre tilsvarende ting som i grafikkfeltet, men med en ekstra dimensjon. På figuren nedenfor har vi for eksempel tegnet inn grafen til funksjonen $f(x, y) = 1 + 3\cos(2x^2 + 2y^2) \cdot e^{-(x^2+y^2)}$.

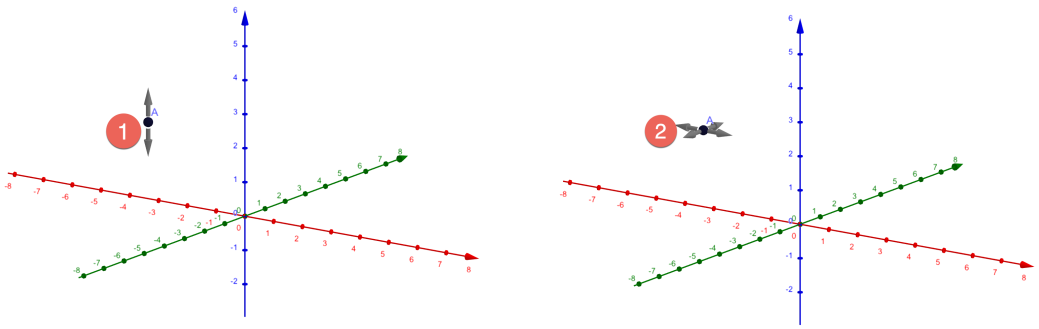


Figur 8.1: En flate gitt ved likningen $z = 1 + 3\cos(2x^2 + 2y^2) \cdot e^{-(x^2+y^2)}$

Når du er i Grafikkfelt 3D har du følgende verktøylinje:

Figur 8.2: Verktøylinjen i GeoGebra 3D

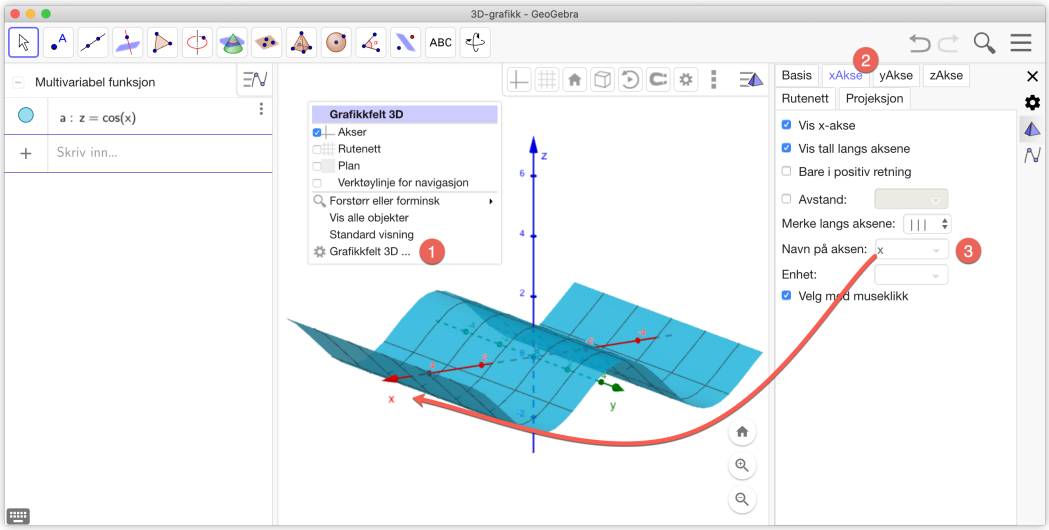
Vi kan bruke disse verktøyene til å tegne punkt, linjer, linjestykker, mangekanter, sirkler, kjegler, plan, pyramider, kuler etc. Dersom du skal tegne punkt i Grafikkfelt 3D kan du velge punktverktøyet og klikke der du vil ha punktet. Du vil da først få tegnet opp punktet i xy-planet. Dersom du vil endre på «høyden» til punktet må du dra det opp. Dersom du klikker en gang til på punktet, så kan du flytte det parallelt med xy-planet. Klikker du enda engang kan du igjen flytte det opp eller ned parallelt med z-aksen. Se figur 8.3.



Figur 8.3: Skal du tegne inn et punkt i *Grafikkfelt 3D* klikker du først i xy-planet og deretter endrer du høyden (z-koordinaten) til punktet.

Dersom du skal tegne inn et punkt med gitte koordinater er det enklest å skrive inn punktet i algebrafeltet.

På samme måte som i det todimensjonale grafikkfeltet, så kan du sette navn på aksene. Høyreklikker du i Grafikkfelt 3D og velger ⚙ Grafikkfelt 3D…, så kan du velge hvilke navnt du vil ha på de ulike aksene.



8.2 Verktøy til tegning og konstruksjon av tre-dimensjonale objekter

Det fins flere nyttige verktøy for å lage tre-dimensjonale objekter. Ni av disse er gruppert sammen på verktøylinjen i samme gruppe som verktøyet *Pyramide* . Tabellen nedenfor gir en oversikt over noen av verktøyene.

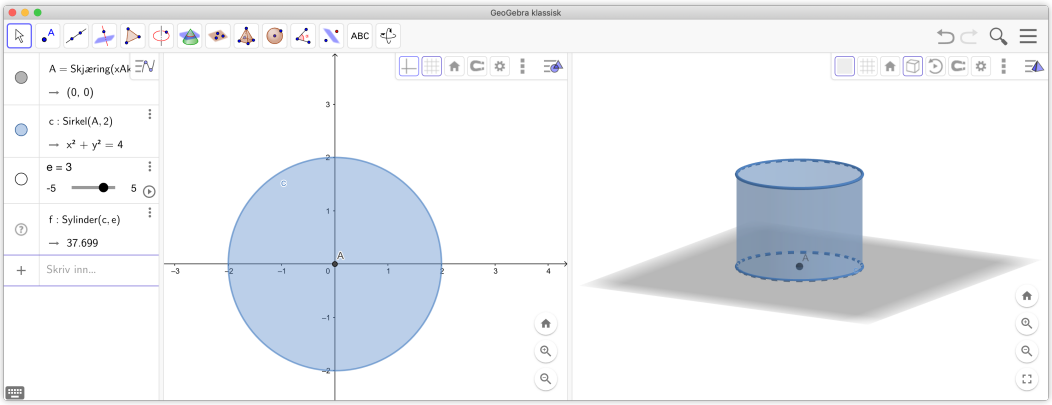
	Pyramide	Velg eller lag en mangekant som skal være bunnen. Velg deretter toppunktet.
	Prisme	Velg en mangekant som skal utgjøre bunnen. Velg deretter toppunktet.
	Ekstruder til pyramide	Velg en mangekant/sirkel. Skriv deretter inn høyden.
	Ekstruder til prisme eller sylinder	Velg en mangekant/sirkel. Skriv deretter inn høyden.
	Kjegle	Velg bunnpunkt, så toppunkt og skriv inn radius.
	Sylinder	Velg to punkt, skriv så inn radius.
	Tetraeder	Velg to punkt eller andre tilhørende objekt.
	Terning	Velg to punkt eller andre tilhørende objekt.
	Brettut	Velg et polyeder.
	Skjæring mellom to overflater	Velg to overflater.
	VinkelrettLinje3D	Velg punkt og vinkelrett linje eller plan.
	Plan gjennom tre punkt	Velg tre punkt.
	Vinkelrett plan	Velg punkt og vinkelrett linje.
	Parallelt plan	Velg punkt og parallelt plan
	Kule med sentrum gjennom punkt	Velg sentrum og deretter punkt på kule.

Tabell 8.1: Noen nyttige verktøy til tegning av tre-dimensjonale objekter.

Eksempel 8.1

Tegn en sylinder med radius 2 og høyde 3.

Løsning:
Lag en sirkel med radius 2 i grafikkfeltet (det to-dimensjonale). Du får da også tegnet en sirkel i xy-planet i Grafikkfelt 3D. Klikk så i Grafikkfelt 3D og velg verktøyet *Ekstruder til prisme eller sylinder* . Klikk så på sirkelen i Grafikkfelt 3D. Skriv inn høyden i vinduet som popper opp og klikk på OK. Du får da tegnet opp sylinderen. Legg merke til at vi har fått laget en glider e i algebrafeltet. Dette er høyden til sylinderen. Du kan endre høyden til sylinderen ved å dra i glideren.



Figur 8.4: Tegning av en sylinder. Vi har skjult aksene og endret farge til blå.

Oppgave 8.1
Tegn en kjegle hvor grunnflaten har radius 4 og høyden er 4. Du kan bruke verktøyet *Ekstruder til pyramide* .

Oppgave 8.2
Lag et regulært tetraeder med sider 2. Du kan bruke verktøyet *Tetraeder* .

Eksempel 8.2

En kule har sentrum i $(2, 0, -1)$ og har radius $r = 3$.

a) Tegn kulen i et koordinatsystem.

b) Bestem kulens volum.

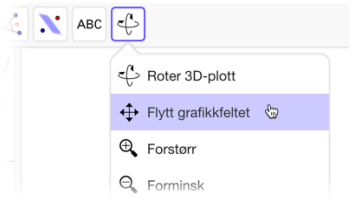
c) Avgjør om punktene $A(3, 1, -2)$ eller $B(2, 3, -1)$ ligger på kulens overflate.

Løsning:

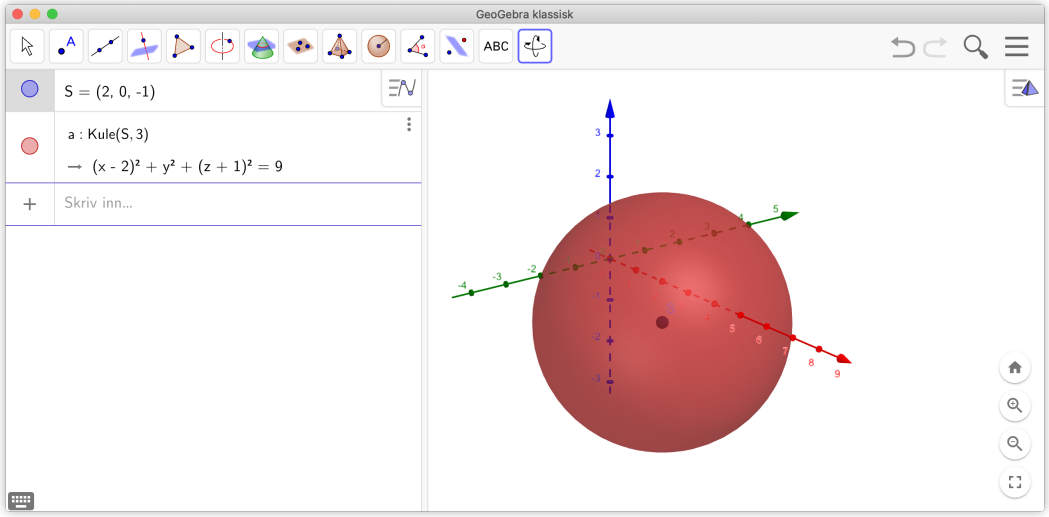
a) For å tegne kula kan du først skrive inn koordinatene til S i algebrafeltet. Skriv inn

```
S=(2, 0, -1)
```

Velg deretter verktøyet *Kule med sentrum og radius* og klikk på punktet S. Du får da opp et vindu hvor du skriver inn kulens radius:



Klikk på OK og kulen blir tegnet opp. Dersom du vil endre litt på plasseringen av koordinatsystem, kan du gjøre dette ved å velge passende verktøy på verktøylinjen. Alternativt kan du holde Shift-knappen inne mens du holder venstsre museknapp inne og drar rundt xy-planet. Ctrl + venstre museknapp (eller høyreklikk) vil rotere rundt z-aksen. På figur 8.5 har ser du en tegning av kulen. Legg merke til at vi også har fått kulens likning med på kjøpet.



Figur 8.5: Kule med sentrum i $S(2, 0, -1)$ og radius 2.

b) Du kan bruke verktøyet *Volum* til å bestemme kulens volum. Dette finner du i samme kategori som vinkelmålingsverktøyet. Velger du dette og deretter klikker på kulen, vil du se at volumet er ca 113,10. Men i dette tilfellet er det kanskje bedre å bruke formelen for volumet av en kule:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi$$

c) Du kan avgjøre om punktene A og B ligger på kulens overflate ved å finne avstanden fra punktene til S. Skriv først inn punktene i algebrafeltet:

```
A=(3, 1, -2)
B=(2, 3, -1)
```

Du kan nå enten måle avstanden ved å bruke verktøyet *Avstand eller lengde* og så klikke på A og deretter på S. Du får da at avstanden er ca 1,73. Dette er mindre en radiusen, så derfor ligger ikke A på kulens overflate.

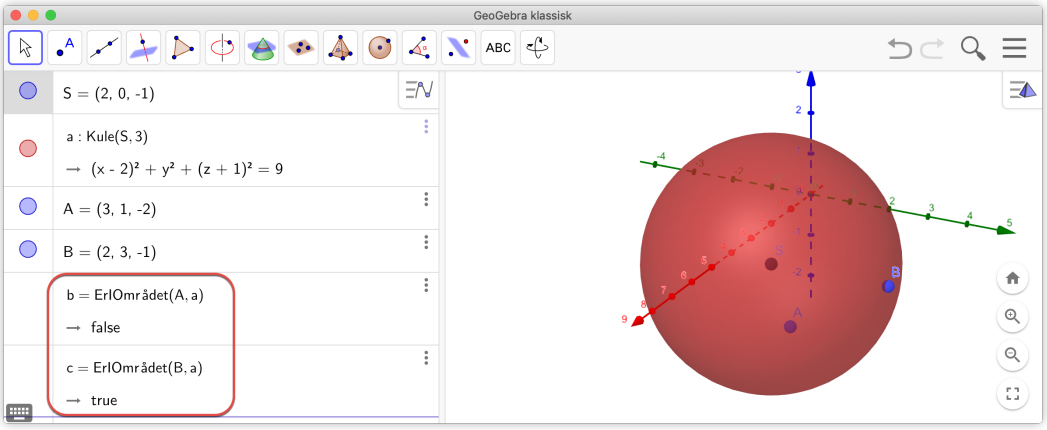
Du kunne også gitt kommandoen `AS=Avstand[A, S]` og fått at $AS = 1{,}73$

Tilsvarende finner du at avstanden fra B til S er 3, som er det samme som radiusen. Vi kan derfor konkludere med at B ligger på kulens overflate.

Nå kunne det tenkes at vi blir litt lurt her. Det kunne være at avstanden mellom B og S er for eksempel 3,0001 og ikke eksakt lik 3. For å være helt sikker, kan vi bruke kommandoen

`ErIOmrådet(<punkt>, <område>)`

i algebrafeltet eller i CAS. I dette tilfellet får vi at `ErIOmrådet((3,1,-2), a)` gir false mens `ErIOmrådet((2,3,-1), a)` gir true.



Figur 8.6: Punktet A ligger ikke på kuleflaten, mens punktet B ligger på kuleflaten. Merk at kuleflaten har fått navnet a.

8.3 Flater

Eksempel 8.3

Et plan p går gjennom punktene $A(1,-1,1)$, $B(4,2,2)$ og $C(-2,3,4)$.

a) Bestem likningen til planet.

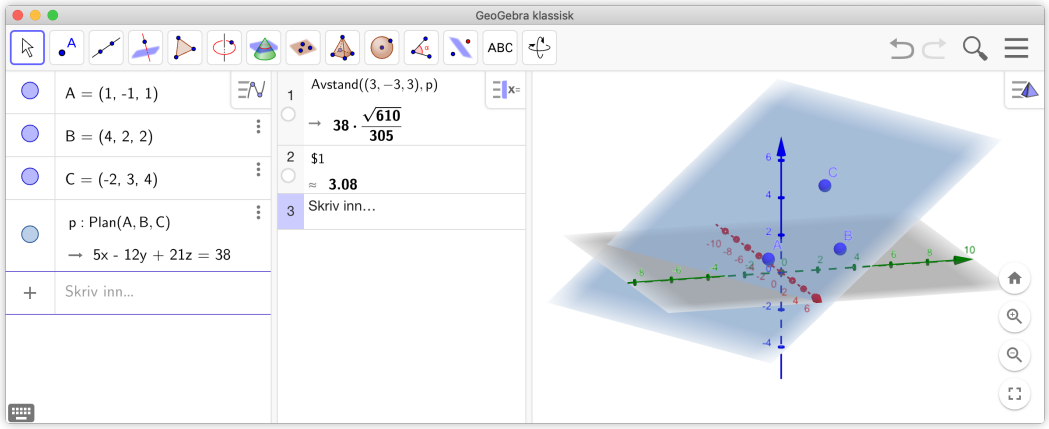
b) Bestem avstanden mellom planet og punktet $Q(3,-3,3)$.

Løsning:

a) Skriv inn punktene i algebrafeltet og velg verktøyet *Plan gjennom tre punkt* . Klikk på de tre punktene. Da får du tegnet planet p og du kan lese av likningen for planet i algebrafeltet. Planet har likning

$$5x - 12y + 21z = 38$$

b) For å bestemme avstanden mellom p og planet åpner du CAS-vinduet og skriver inn kommandoen `Avstand((3,-3,3), p)` som vist på figuren nedenfor. Da finner du at avstanden er $\frac{38}{305}\sqrt{610} \approx 3{,}08$.



Figur 8.7: Et plan gjennom tre punkt og avstanden fra planet til punktet (3, -3, 3)

Eksempel 8.4

Et plan har likningen $2x - y + z = 3$ og en kule $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 5 = 4$

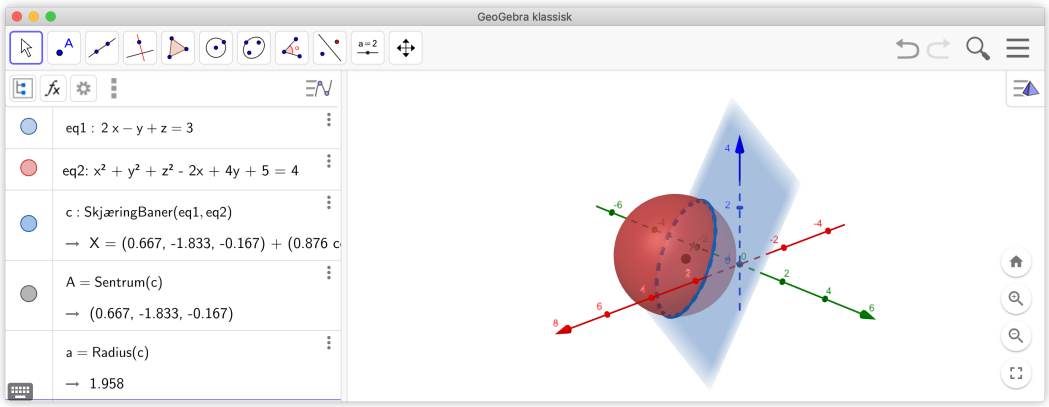
a) Tegn planet og kulen i et koordinatsystem.

b) Kulen skjærer planet i en sirkel. Bestem radiusen til denne sirkelen.

Løsning:

a) Du får tegnet inn de to flatene ved å skrive dem inn i algebrafeltet. Se figuren nedenfor.

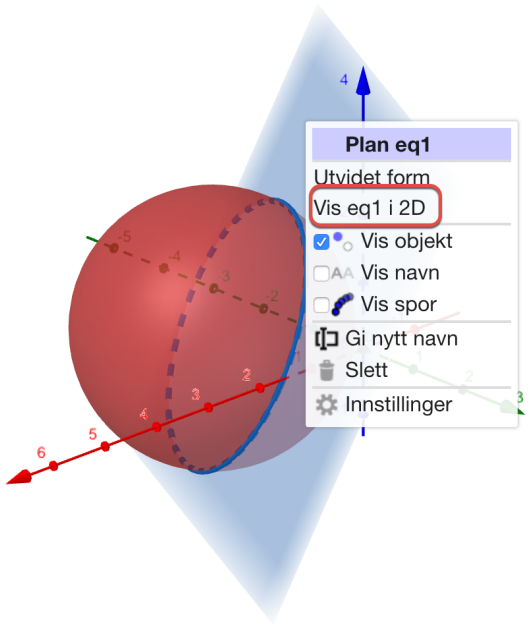
b) Velg verktøyet *Skjæring mellom to overflater* og klikk på kulen og på flaten. Du får da opp et kjeglesnitt c. Vi ser at dette sirkelen har sentrum i $S(0{,}667, -1{,}833, -0{,}167)$ ut fra parameterframstillingen. Vi kan også finne dette ved å bruke kommandoen `Sentrum(c)`. Vi finner radius til sirkelen ved å bruke kommandoen `Radius(c)`. Vi ser at radiusen er ca 1,958.



Figur 8.8: Du kan finne radius og sentrum til en sirkelen som er skjæringskurven mellom kulen og planet

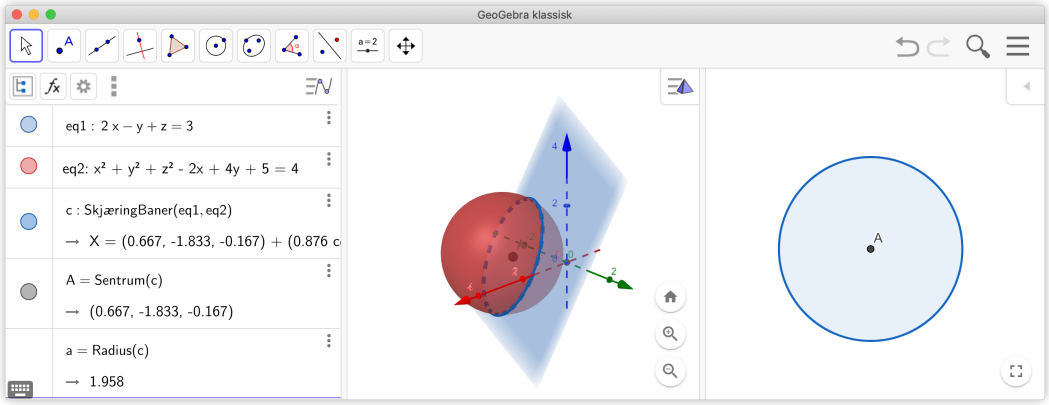
8.4 Vise plan i 2D

Du får en fin visualisering skjæringskurven mellom planet og kulen i eksempel 8.4 ved å høyreklikke på planet og velge «Vis eq1 i 2D»:



Figur 8.9: Du kan få et eget grafikkfelt som viser det som ligger i planet eq1.

Du får da opp et eget grafikkfelt som viser alle objektene som ligger i dette planet.

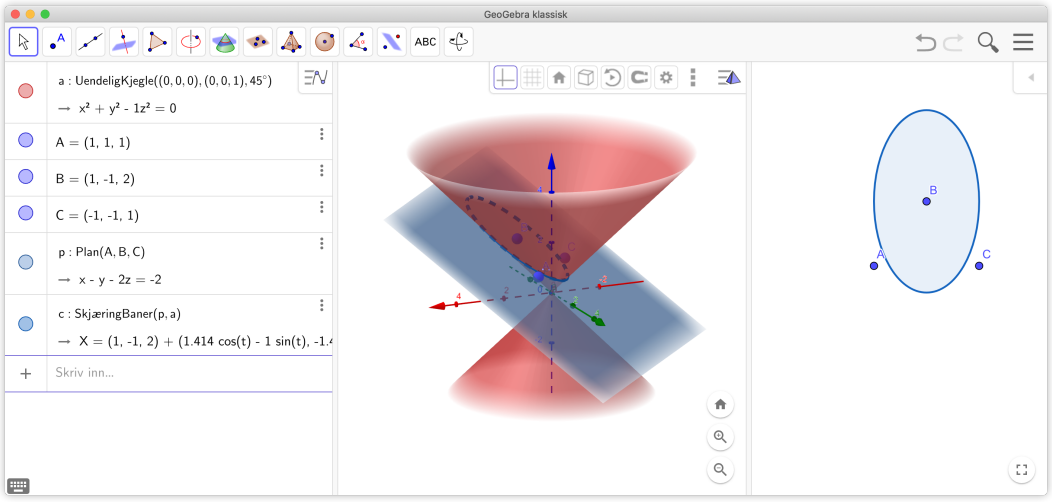


Eksempel 8.5

Å vise et plan i 2D kan være nyttig når vi skal studere kjeglesnitt. Vi kan få tegnet opp en kjegle ved å skrive inn i algebrafeltet:

```
a=UendeligKjegle((0,0,0), (0, 0, 1), 45°]
```

Vi tegner så inn tre punkt og finner planet gjennom disse. Vi kan for eksempel se på planet gjennom $A(1,1,1)$, $B(1,-1,2)$ og $C(-1,-1,1)$. Vi skriver inn disse punktene i algebrafeltet og gir kommandoen `p=Plan(A, B,C)`. Vi får da et plan som snitter kjeglen i en kurve. Bruke vi s verktøyet *Skjæring mellom to overflater* kan vi finne skjæringskurven mellom kjeglen og planet. Høyrklikker vi nå på planet og velger «Vis p i 2D» får vi opp «Grafikkfelt for plan p» som viser de tre punktene og snittet mellom de to overflatene. Vi ser at det er en ellipse i dette tilfellet. Se figur 8.10.



Figur 8.10: Et kjeglesnitt.

Oppgave 8.3
Gjør tilsvarende som over, men med punktene

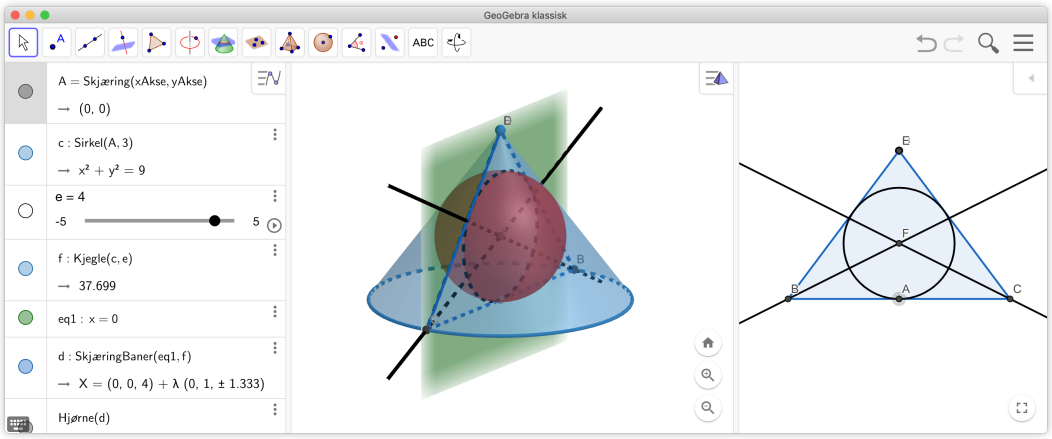
a) $A(0,-4,0)$, $B(6,8,0)$ og $C(4,4,4)$.

b) $A(4,0,0)$, $B(2,3,2)$ og $C(-2,0,6)$.

Eksempel 8.6

Gitt en kjegle med radius 3 og høyde 4. Tegn en innskrevet kule som tangerer bunnen og sideflaten i kjeglen.

Løsning:
Tegn først opp kjeglen ved å tegne en sirkel med radius 3 og sentrum i $(0,0)$ i xy-planet. Tegn derretter kjeglen ved å bruke verktøyet *Ekstruder til pyramide*. Skriv så inn $x = 0$ i algebrafeltet for å få tegnet inn yz-planet. Kulen vil snitte dette planet i en sirkel. Denne må være den innskrevne sirkelen til trekanten som er snittet mellom planet og kjeglen. Finn først skjæringen mellom planet og kjeglen. Dette blir da en likebeinet trekant. Vi konstruerer sentrum S til denne sirkelen i Grafikkfelt for plan eq1. Dette gjør vi ved å finne halveringslinjene til vinklene som sidekantene danner. Disse må skjære hverandre i sentrum til den innskrevne sirkelen. Til slutt tegner vi kulen ved å bruke verktøyet *Kule med sentrum gjennom punkt*. Se figur 8.11.



Figur 8.11: En innskrevet kule i en kjegle. Kulen tangerer bunnen i kjeglen.

8.5 Omdreiingslegemer

Vi kan også illustrere omreiingslegemer i GeoGebra 3D.

Eksempel 8.7

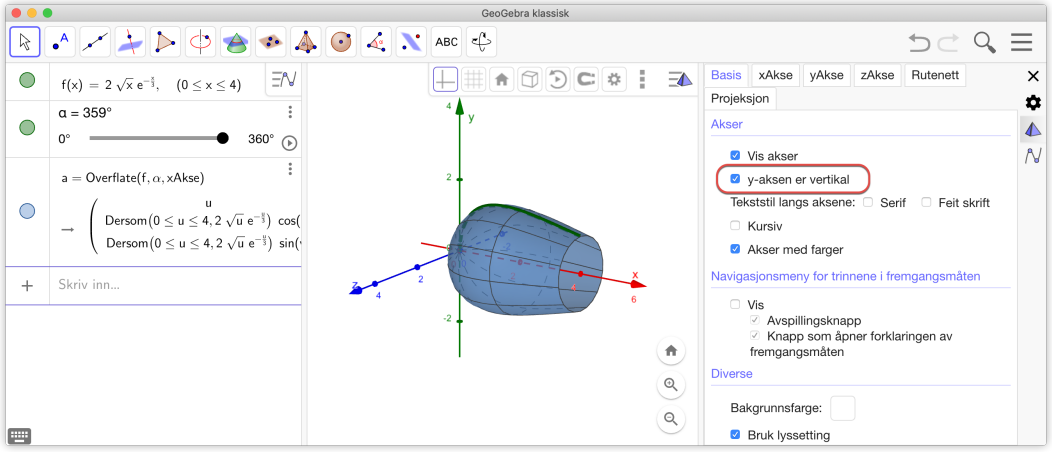
Tegn grafen til funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 2\sqrt{x} \cdot e^{-\frac{x}{3}}, \qquad x \in [0,4]$$

ved å skrive inn i algebrafeltet `f(x)=√x*e^(-x/3), 0<=x<=4`. Lag en glider α. Velg Vinkel med grader mellom 0° og 360° og animasjonstrinn lik 1°. Skriv inn kommandoene

`Overflate(f,α)`.

Du vil da få illustrert hva som skjer når du roterer grafen rundt x-aksen. For å få det riktig så pent vil vi anbefale å la y-aksen være vertikal. Dette får du til ved å høyreklikke i Grafikkfelt 3D, velge «Innstillinger» og så hake av for y-akse er vertikal. Se figur 8.12.



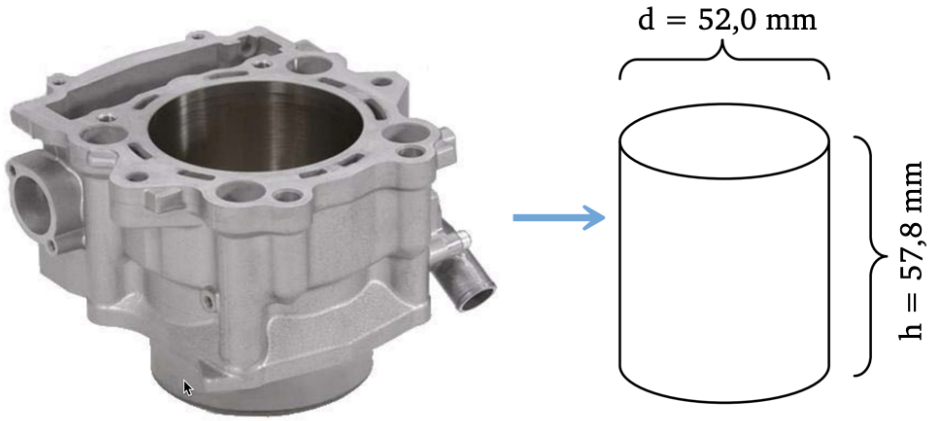
Figur 8.12: En pen illustrasjon av et omdreiingslegeme. Hak av for y-akse er vertikal under «Innstillinger» til Grafikkfelt 3D. Merk at vi også har satt navn på aksene. Dette gjøres på samme måte som i det vanlige grafikkfeltet.

Selve volumet må du regne ut ved for eksempel å bruke CAS:

Figur 8.13: Volum regnet ut i CAS. Siden funksjonen er definert med begrenset definisjonsmengde, får vi ikke eksakt verdi i rad 1. Dersom vi ønsker eksakt verdi må vi bruke en funksjon som ikke har en slik begrensning, som vist på rad 2.

8.6 Oppgaver

Oppgave 8.4 — Bassert på eksamen 10. årstrinn V11.
En lett motorsykkel har en motorsylinder med innvendig volum på maksimalt 125,0 cm^3.

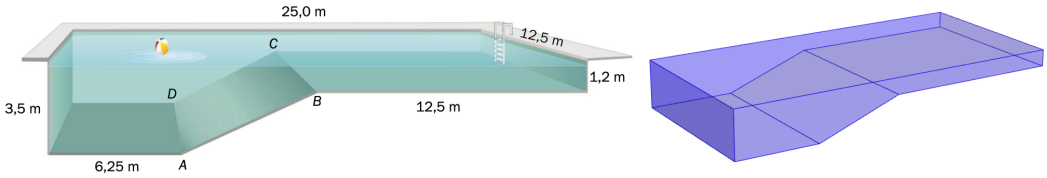


a) Lag en tegning av sylingeren i GeoGebra 3D. Hva er volumet av sylinderen?

Etter en skade i motoren trenger sylinderen reparasjon. Verkstedet ønsker å utvide diameteren, men volumet av motorsylinderen skal fortsatt være maksimalt 125,0 cm^3.

b) Bruke GeoGebra 3D til å illustrere hvordan volumet endres når diameteren endres. Hva er den maksimale diameteren sylinderen kan få?

Oppgave 8.5 — 10. trinn V14.
Lag en 3D-modell i GeoGebra av svømmebassenget:



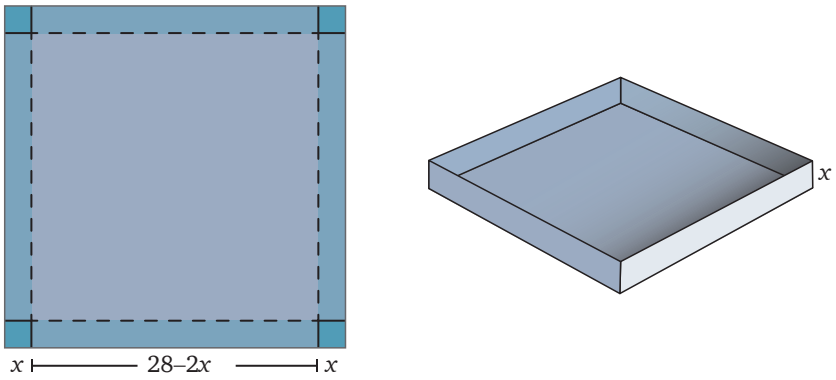
Oppgave 8.6
En åpen boks er laget ved å klippe bort hjørner med side x i et kvadrat med side 28 cm som vist på figuren nedenfor.

a) Hvor langt inn må vi klippe for at volumet skal bli 1 dm^3?

b) Lag en modell av esken i GeoGebra 3D som du kan bruke til å vise hvordan volumet endres når x endres.

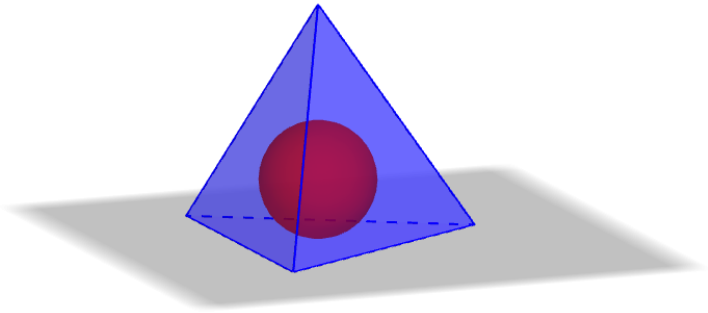
c) Hva er det største volumet vi kan lage?

Tips: se om du kan lage noe som vist her: `https://ggbm.at/vtnhb3yz`



Oppgave 8.7
a) Tegn et regulært tetraeder med sider lik 3.

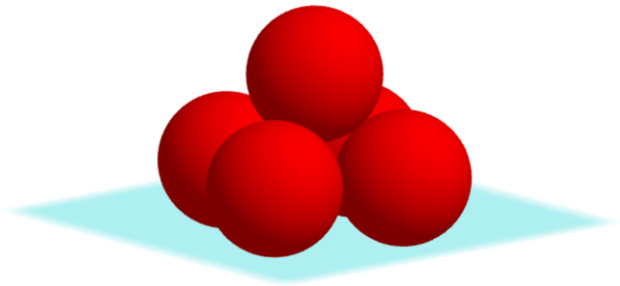
b) Konstruer den innskrevne kulen i tetraederet.



Oppgave 8.8

a) Konstruer fire kuleflater med lik radius og som tangerer hverandre.

b) Konstruer fem kulefalter slik at fire av kulene ligger parallelt, som vist på figuren.



Oppgave 8.9

En juicekartong skal romme 1 liter juice. Hvordan bør kartongen utformes dersom kartongens overflate skal være minst mulig?

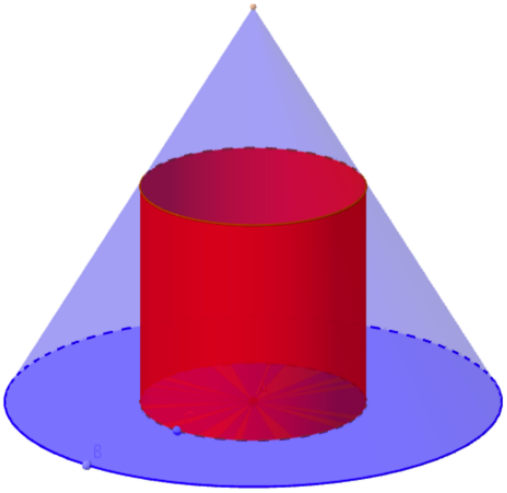
Oppgave 8.10

I en kjegle har bunnen radius lik R og høyden er H. En sylinder med radius r og høyde h er innskrevet i kjeglen.

Hvor stor må r være i forhold til R for at volumet av sylinderen skal være størst mulig?

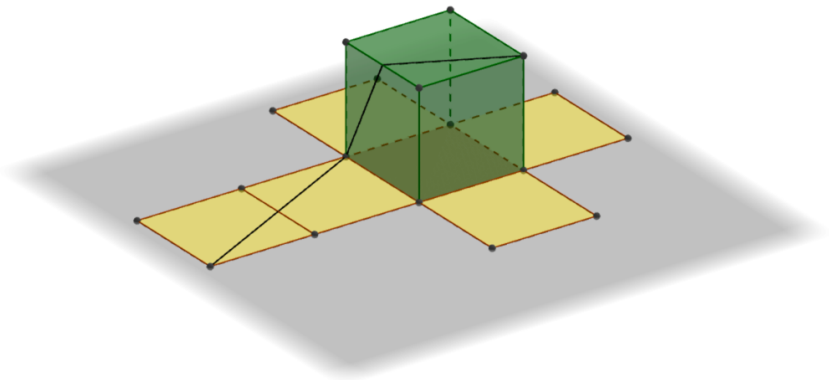
Løs først problemet med konkrete tall. Lag et arbeidsark som du kan bruke til å utforske problemet.

Løs oppgaven symbolsk i GeoGebra CAS.



Oppgave 8.11

En terning har sider med lengde 4. Hva er den korteste avstanden fra et hjørne til hjørnet på motsatt side av terningen? Illustrer løsningen ved å tegne terningen i GeoGebra og bruk verktøyet *BrettUt*



Oppgave 8.12
Lag en animasjon som illustrerer volumet til vanntanken i oppgave 4, del 2 på eksamen for S1 Høsten 2014.

Se `http://ggbtu.be/m3169163`

Oppgave 8.13
Punktene $A(1,1,2)$, $B(0,-2,3)$, $C(4,4,5)$ og $P(7,-2,3)$ er gitt.

a) Bestem likningen for planet som går gjennom A, B og C.

b) Bestem avstanden fra P til planet.

De fire punktene danner en pyramide.

c) Bestem volumet av pyramiden.

Oppgave 8.14
Tegn følgende overflater i GeoGebra

a) $\begin{cases} x = (3+\cos u)\cos v \\ y = (3+\cos u)\sin v \\ z = \sin u \end{cases}$, der $u, v \in [0, 2\pi]$

b) $\begin{cases} x = (3+v\cos 0{,}5u)\cos u \\ y = (3+v\cos 0{,}5u)\sin u \\ z = v\sin 0{,}5u \end{cases}$, der $u \in [0, 2\pi]$ og $v \in [-1, 1]$

Tips: Bruk kommandoen `Overflate`.

Oppgave 8.15
To plan α og β er gitt ved

$$\alpha : x + 2y + z = 3 \quad \text{og} \quad \beta : 2x + z = 3$$

a) Vis at $A(1,-1,4)$ ligger i α.

b) Konstruer en kuleflate som tangerer α i A og β i et punkt B. Hva er koordinatene til B? Er B entydig bestemt?

Oppgave 8.16

Et plan har likningen $x + 2y + 3z = 3$ og en kule $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y = 20$

a) Tegn planet og kulen i et koordinatsystem.

b) Kulen skjærer planet i en sirkel. Bestem radiusen til denne sirkelen.

Oppgave 8.17

To kuleflater K_1 og K_2 er gitt ved

$$K_1 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 16$$
$$K_2 : x^2 + y^2 + 2y + z^2 + 4z = 20$$

a) Bestem sentrum og radius til de to kuleflatene.

b) Vis at kuleflatene skjærer hverandre langs en sirkel.

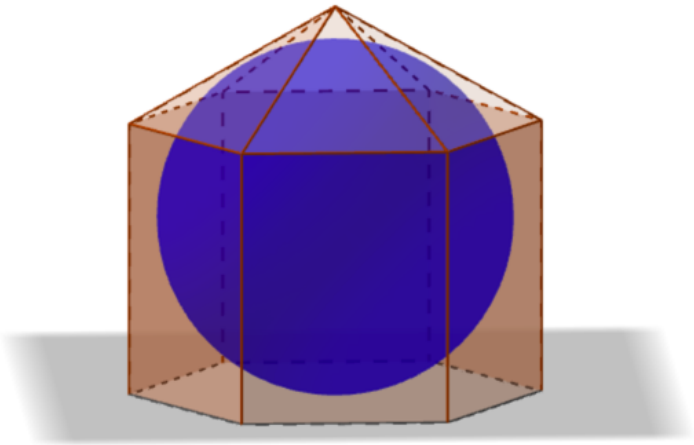
c) Bestem sentrum og radius til denne sirkelen.

Oppgave 8.18

a) Tegn et seks-sidet prisme med sidelengder lik 3 og høyde lik 4.

b) Konstruer en kule som tangerer sidene og bunnen i prismet.

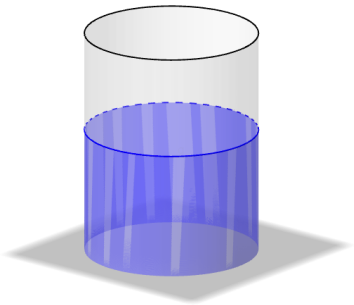
c) Konstruer en pyramide med grunnflate lik toppen av prismet og med høyde slik at pyramiden tangerer kulen.



Oppgave 8.19

Tegn en pyramide med kvadratisk grunnflate med side 2 og med høyde 4. Konstruer en innskrevet kule i pyramiden.

Oppgave 8.20
Lag en sylinder med radius 2 og høyde 5. Lag en glider a som kan variere mellom 0 og 5 og lag en sylinder med samme grunnflate som den første, men med høyde a. Velg passende farger slik at det ser ut som et glass fylt med vann.



Oppgave 8.21 — Eksamen REA3024 Matematikk R2 Våren 2012 – Udir.
I et koordinatsystem er det gitt et punkt $P(5,-1,4)$ og et plan

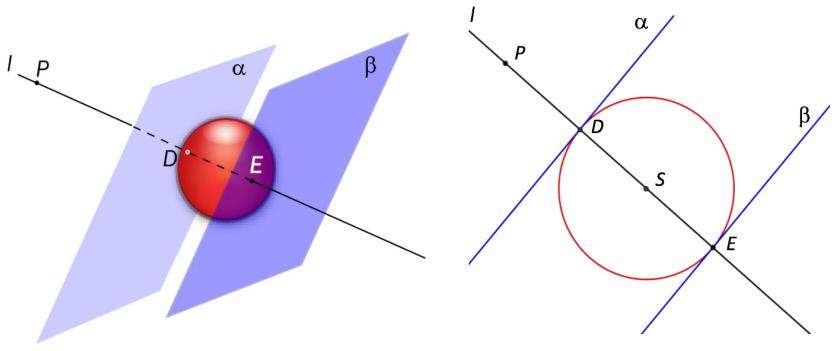
$$\alpha:\ 2x-2y+z+2=0$$

Punktene $A(0,0,4)$, $B(2,0,0)$ og $C(1,1,4)$ ligger i et plan β.

a) Bestem likningen for β, og forklar at $\alpha \parallel \beta$.

b) Regn ut avstanden mellom planene α og β.

Planene α og β er begge tangentplan til en kule. Sentrum S i kula og de to tangeringspunktene D og E ligger på en rett linje l gjennom P. Se figuren nedenfor.



c) Sett opp en parameterframstilling for l.

d) Bestem koordinatene til D og E.

e) Bestem likningen til kula.

Oppgave 8.22 — Eksamen REA3024 Matematikk R2 Høsten 2014 – Udir.
Et plan α er gitt ved likningen

$$2x + y - 2z + 3 = 0$$

a) Bestem likningen for den kuleflaten som har sentrum i punktet $S(11, 2, -6)$ og som har α som tangeringsplan.

b) Bestem koordinatene til tangeringspunktet mellom kuleflaten og planet α.

Et plan β er gitt ved

$$2x + y - 2x = 0$$

Dette planet skjærer kuleflaten langs en sirkel.

c) Bestem radien i denne sirkelen.

9 Følger/Lister

Det er ganske mye du kan få til i GeoGebra ved å bruke følger. En følge er i GeoGebra en liste definert ut fra en eksplisitt formel. Du lager en følge ved å skrive kommandoen

```
Følge(<Uttykk>,<Variabel>,<Fra>,<Til>,<Trinnlengde>)
```

Dersom du ikke oppgir trinnlengde blir den satt til 1. Vi illustrerer dette med noen eksempler. Vi skal senere bruke følger til å simulere statistiske forsøk.

Tabell 9.1 side 127 viser en oversikt over de viktigste kommandoene.

9.1 Eksempler

Eksempel 9.1

Lag en liste over de 10 første oddetallene. Lag også en følge der element nummer n er summen av de n første oddetallene.

Løsning:
Vi skriver inn kommandoen `Følge(2n-1, n, 1, 10)`. Her er det med andre ord n som varierer fra 1 til 10, og den eksplisitte formelen er $2n-1$.

Vi får følgende liste:

```
l1= {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19}
```

For å finne summene av de k første elementene i denne følgen, bruker vi kommandoen `Sum(l1, k)`. Dersom du vil finne summen av alle elementene i en liste skriver du `Sum(l1)`.

I vårt eksempel skriver vi derfor inn `Følge(Sum(l1, k), k, 1, 10)`. Vi får da listen

```
{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}
```

Eksempel 9.2

En følge er definert ved at $a_1 = 1$ og $a_{n+1} = 3a_n - 1$. Lag en liste over de 10 første elementene.

Løsning:
Vi har her en rekursiv formel for følgen. Vi bruker da kommandoen

```
IterasjonListe(<Funksjon>, <Start>, <Antall iterasjoner>)
```

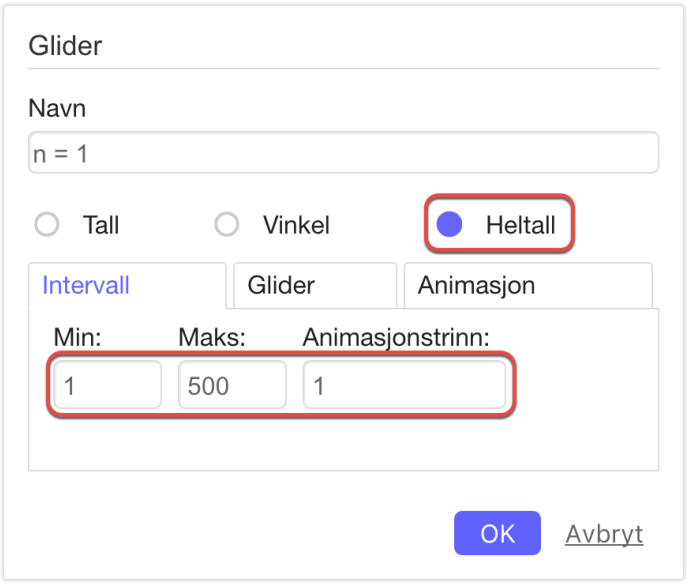
I dette eksempelet skriver vi derfor inn `IterasjonListe[3x-1, 1, 10)`. Merk at vi må bruke x som variabel her.

Oppgave 9.1
Lag en liste bestående av de 100 første kvadrattallene.

Eksempel 9.3

Vi skal i dette eksempelet simulere n terningkast, der n er et tall som skal variere på en glider.

a) Velg verktøyet *Glider* og klikk i grafikkfeltet der du ønsker å plassere glideren. I vinduet som da kommer opp kaller du glideren for n, velger «Min» til å være 1 og «Maks» til 500. Sett «Animasjonstrinn» til å være 1. Se figur 9.1.



Figur 9.1: Glideren n kan varieres fra n = 1 til n = 500.

b) Skriv inn `L=Følge(TilfeldigMellom(1, 6), i, 1, n)` i algebrafeltet. Du får da en liste med n tilfeldige tall mellom 1 og 6.

c) Skriv inn tallene fra 1 til 6 i cellene A1 til A6 i regnearket.

d) Skriv inn `TellDersom(x == A1, L)` i B1, og autokopier denne formelen ned til og med celle B6. (To likhetstegn betyr at GeoGebra skal teste om noe er likt). Vi har nå laget en frekvenstabell over alle kastene.

e) Det kan være gunstig å regne ut relativ frekvens slik at radhøydene ikke varierer for mye når vi øker n. I C1 skriver vi derfor `=B1/n` og autokopierer denne formelen ned til og med C6.

f) Skriv inn `Søylediagram({1, 2, 3, 4, 5, 6},C1:C6)` i algebrafeltet. Du vil da få et søyeldiagram som viser relativ frekvens til antall øyne på terningene.

9.2 Snorkunst i GeoGebra

Det er ikke kun tallfølger vi kan jobbe med i GeoGebra, noe følgende eksempel viser.

For å lage en fin «snorkunst» skriv vi i algebrafeltet:

```
Følge((0,k/10), k, 1, 10) og Følge((k/10,0),k,1,10)
```

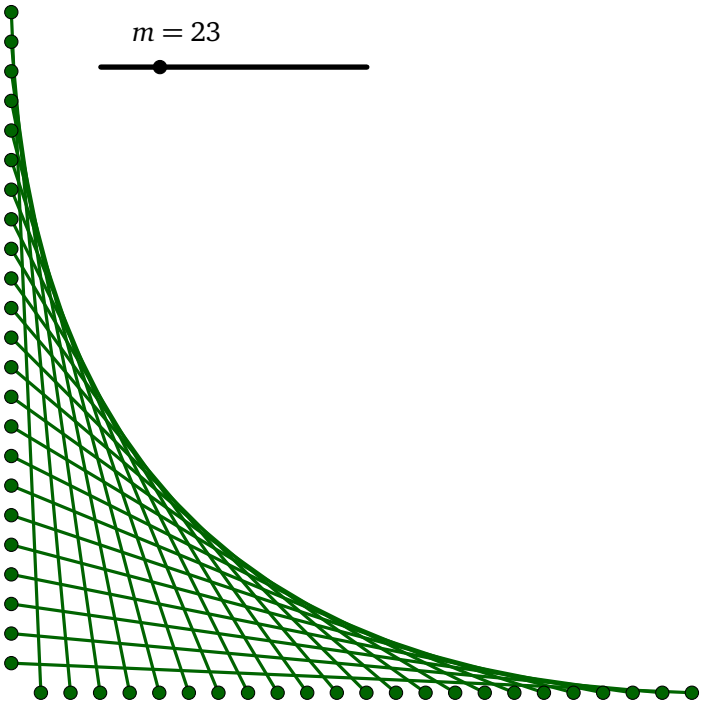
Vi får vil da få to lister `l1` og `l2` med punkt. Skriv deretter inn

```
Følge(Linjestykke(Element(l1,i),Element(l2,11-i)),i,1,10)
```

Vi får da en følge med 10 linjestykker som til sammen utgjør en nokså estetisk figur!

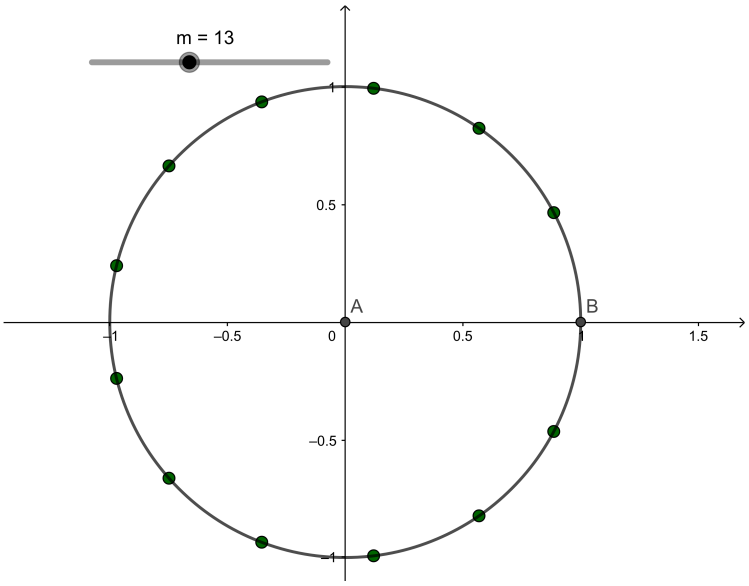
Vi vil nå ta dette et steg videre. Kanskje 10 linjestykker var litt i det minste laget? Vi vil derfor lage m linjestykker, der m varierer langs en glider. Her er hva vi må gjøre:

- Lag en glider m som varierer mellom 1 og 100 og med animasjonstrinn 1.
- Skriv inn kommandoene
  `L=Følge((0,k/m), k, 1, m)`,
  `M=Følge((k/m,0), k, 1, m)` og
  `Følge(Linjestykke(Element(L, i), Element(M, m+1-i)), i, 1, m)`
- Nå kan du variere glideren m for å endre antall linjestykker.



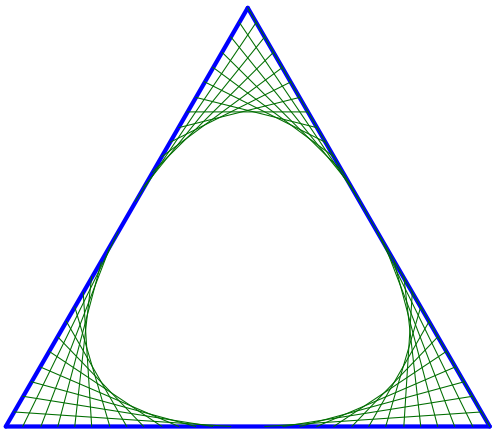
Oppgave 9.2
Tegn en sirkel med radius 1 og sentrum i origo ved skrive inn likningen for sirkelen, $x^2 + y^2 = 1$, i algebrafeltet. Del sirkelen i m like store deler, der m er en glider som varierer fra 1 til 30. (Se figur 9.2)

Tips: Du kan få glede av kommandoen `Roter(<Objekt>,<Vinkel>,<Punkt>)`.



Figur 9.2: Her er m= 13 punkt fordelt likt ut over en sirkel.

Oppgave 9.3
Se om du klarer å lage følgende linjedesign:



Tips: Du kan få glede av kommandoen `Punkt/<Punkt>,<Vektor>)`. Med denne kan du tegne inn m punkt langs en vektor $\vec{u}$ ved å skrive inn

```
Følge(Punkt(A, k/m*u), k, 1, m).
```

I tabell 9.1 finner du en oversikt over de viktigste kommandoene du kan bruke på lister. Du finner en komplett liste under Hjelp for inntasting (under kategorien «Liste»).

Kommando	Forklaring
`Min(<Liste>)`	Gir det minste elementet i listen
`Maks(<Liste>)`	Gir det største elementet i listen
`Følge(<Uttrykk>, <Variabel>,<Fra>,<Til>)`	Gir ei liste av objekter som blir laget ved å anvende det gitte uttrykket i den gitt variabel fra et tall til et annet.
`Følge(<Uttrykk>,<Variabel>,<Fra>,<Til>,t)`	Samme som over, men oppgir i tillegg hva trinnlengden t skal være.
`Sum(<Liste>)`	Beregner summen av alle elementene i lista.
`Sum(<Liste>,<Antall elementer n>)`	Beregner summen av de første n elementene i lista.
`Element(<Liste>,<Posisjonen til elementet>)`	Gir det n-te elementet i lista
`TellDersom(<Vilkår>,<Liste>)`	Teller antall elementer i lista som tilfredsstiller vilkåret.
`IterasjonListe(f(x), a, m)`	Gir ei liste med m elementer der det første elementet a_1 er a, det andre er a_2 er $f(a_1)$. Mer generelt er $a_{n+1} = f(a_n)$.
`Lengde(<Liste>)`	Gir lengden på lista, dvs. antall elementer.
`Sorter(<Liste>)`	Sorterer ei liste av tall, tekstobjekter eller punkter.
`BrukDersom(<Vilkår>,<Liste>)`	Lager ei ny liste som bare inneholder elementene i den opprinnelige lista som oppfyller vilkåret.

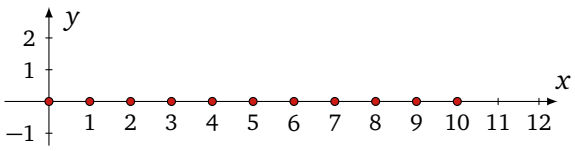
Tabell 9.1: Ulike kommandoer på lister

9.3 Oppgaver

Oppgave 9.4
Lag en liste over de 50 første oddetallene. Kan du gjøre det på mer enn én måte?

Oppgave 9.5
Lag en liste over de 50 første kvadrattallene. Kan du gjøre det på mer enn én måte?

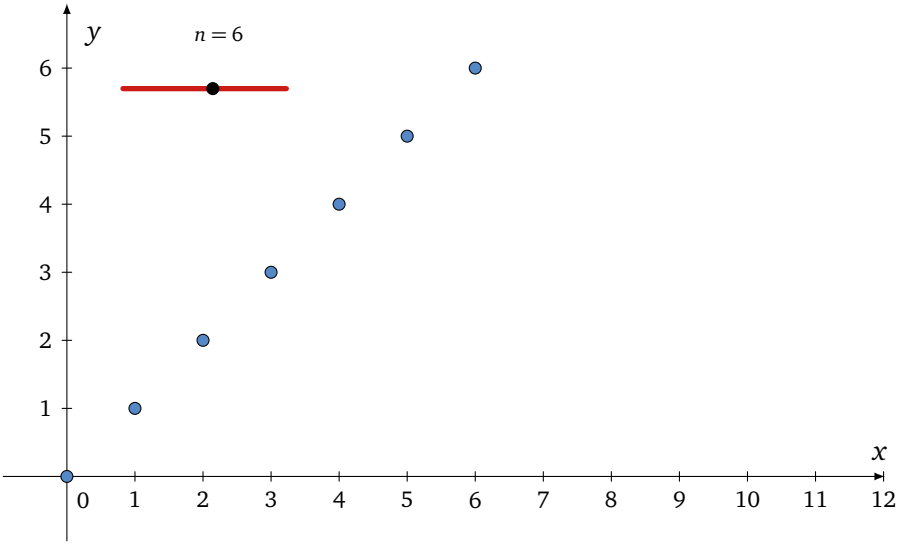
Oppgave 9.6
Bruk følge-kommandoen til å lage 11 punkt på x-aksen som vist nedenfor.



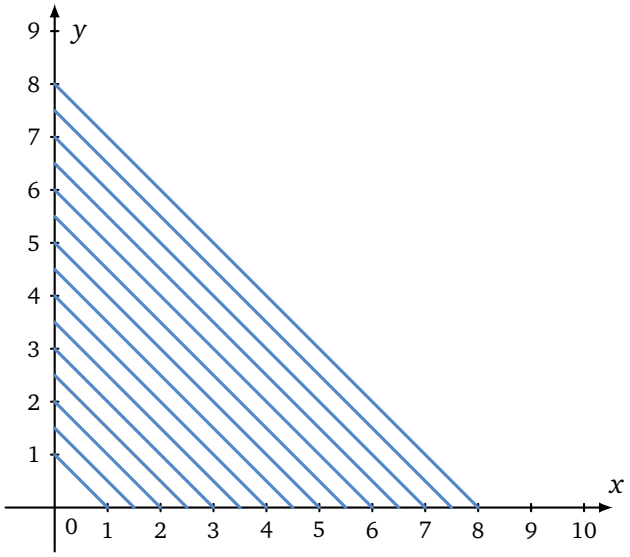
Oppgave 9.7
Lag en liste over alle primtall mindre enn 500. Hva er primtall nummer 30? Hvor mange primtall er det under 500?

Oppgave 9.8
Lag en liste L bestående av elevene i en av gruppene dine. Bruk kommandoen `Utvalg` til å velge 5 tilfeldige elever fra gruppen.

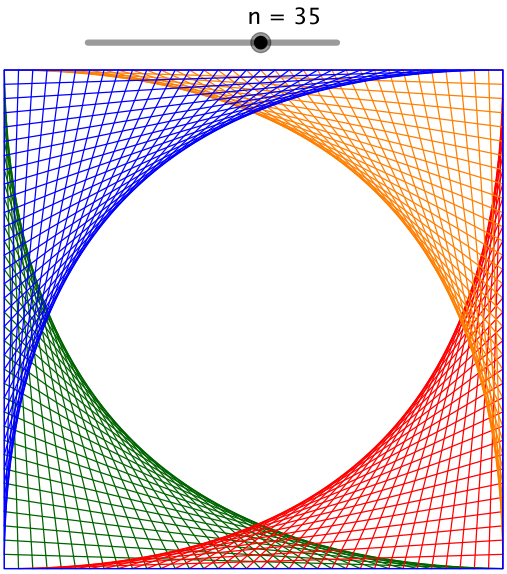
Oppgave 9.9
Lag en liste bestående av n punkt på linjen $y = x$ som vist på figuren nedenfor. Her skal n være en glider med heltallige verdier.



Oppgave 9.10
Lag følgende figur ved å bruke Følge-kommandoen:

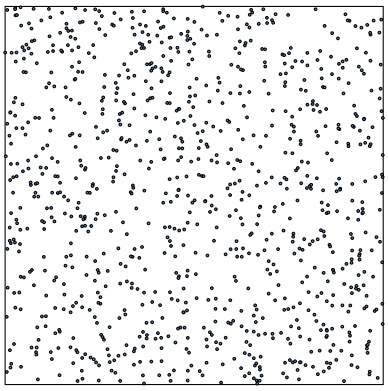


Oppgave 9.11
Lag «snorkunst» som vist på figuren nedenfor.



Oppgave 9.12
Simuler 100 kast med en terning. Representer resultatet grafisk ved hjelp av et søylediagram.

Oppgave 9.13
Lag en simulering der du kaster 1000 punkt tilfeldig ut i et kvadrat med sider lik 10. Du kan bruke kommandoen `random()` til dette.



Oppgave 9.14
Vi kan løse en del likninger ved hjelp av iterasjoner. Anta at vi kan skrive likningen på formen

$$x = f(x)$$

Vi kan da definere følgen a_n ved $a_n = f(a_{n-1})$. Dersom denne konvergerer, så må den konvergere mot en av løsningene til likningen $x = f(x)$ (avhengig av hvilken verdi vi gir a_1).

a) Hvilken likning løses med kommandoen `IterasjonListe[cos(x), 1,100]`?

b) Løs likningen $e^{x-2} - x = 0$ ved hjelp av iterasjoner.

Oppgave 9.15
Vi kan løse en del likninger ved å bruke Newtons metod. Dersom vi skal løse likningen $f(x) = 0$, så definerer vi følgen

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Kommandoen `IterasjonListe` vil da kunne gi oss en liste med stadig bedre løsninger. Her må vi velge en startverdi.

Bruk Newtons metode til å løse likningen $e^x = 3$.

10 Egne verktøy i GeoGebra

Dersom det er en type konstruksjon som du skal gjøre mange ganger, kan det være en god ide å lage et eget verktøy som tar seg av konstruksjonen. Prinsippet for å lage slike verktøy er det samme som for makroer i programmer som Excel. Du gjør konstruksjonen på vanlig måte og forteller så GeoGebra at det skal lage et verktøy basert på de objektene du nå har konstruert. Prinsippet er da at du forteller GeoGebra hvilke objekter alt er bygd på og hvilke objekter som skal være resultatet. Alt du gjør med de opprinnelige objektene er «loggført» og vil bli gjentatt med nye objekter.

10.1 Eksempler

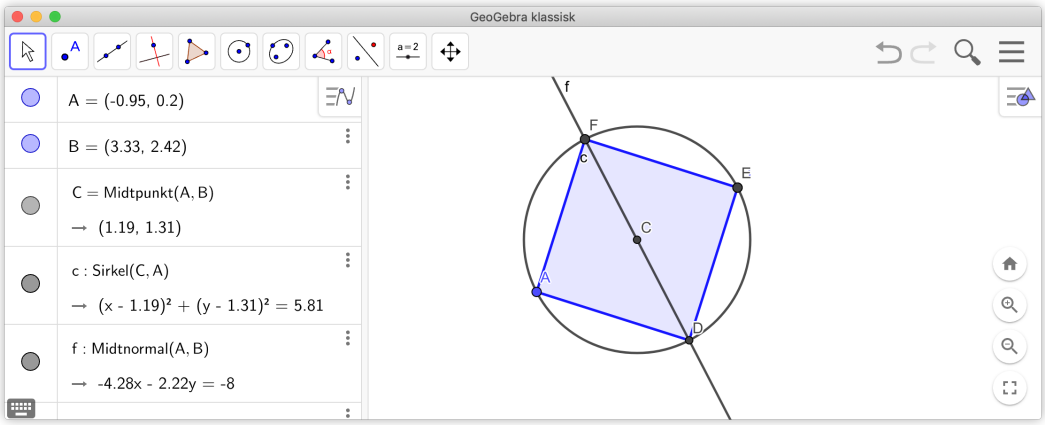
Eksempel 10.1

Lag et verktøy som tegner et kvadrat når to motsatte hjørner er gitt.

Løsning:

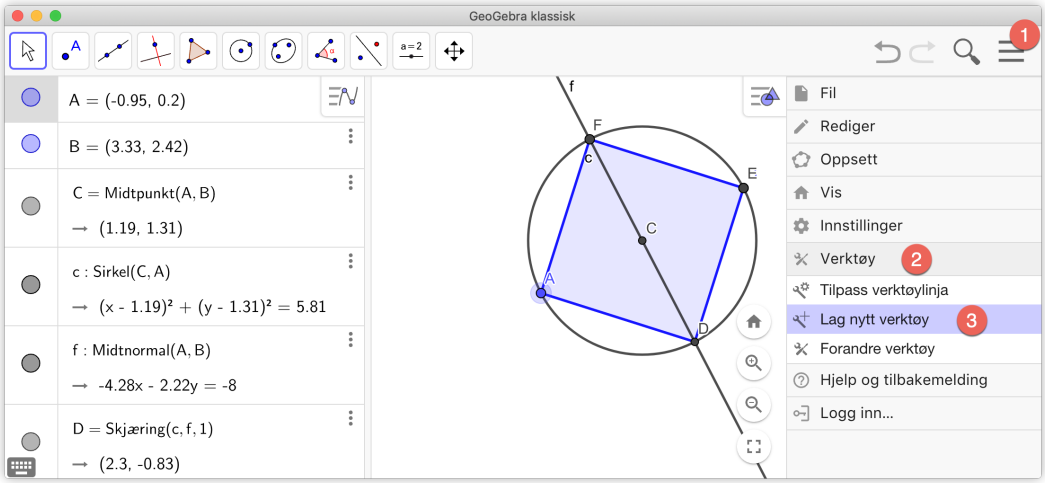
1. Tegn først opp de to hjørnene A og B. Dette er våre startobjekter.

2. Konstruer deretter det ønskede kvadratet på vanlig måte.



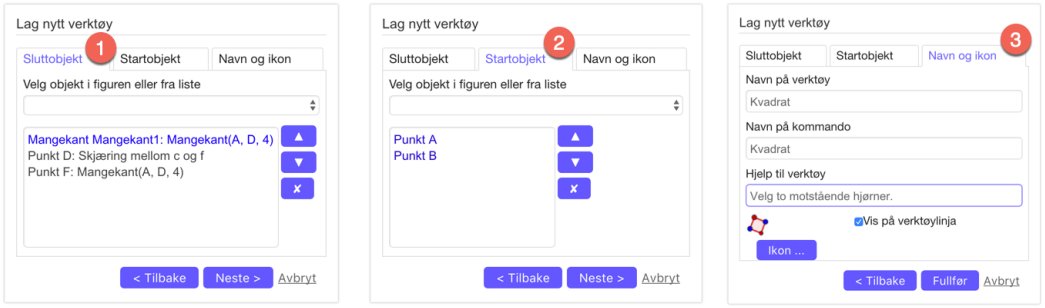
Figur 10.1: Konstruksjon av et kvadrat med utgangspunkt i to motstående hjørner

3. For å lage et nytt verktøy, velger du «Verktøy» på menyknappen og «Lag nytt verktøy…» som vist på figur 10.2. Dette vil lede deg gjennom prosessen. Først blir du bedt om å velge hva som skal være *sluttobjekt* (se figur 10.3). Du kan enten velge Mangekant1 og de to andre hjørnene (dersom du ønsker at også disse skal være med) fra nedtrekksmenyen eller ved å klikke på disse objektene i grafikkfeltet.



Figur 10.2: Du kan lage nye verktøy i GeoGebra

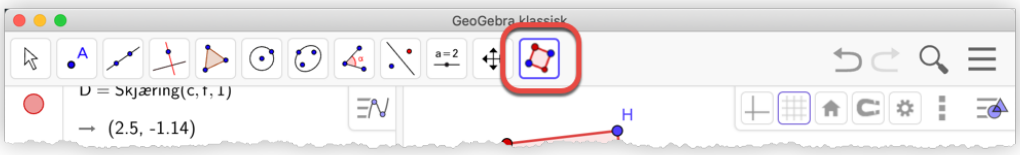
4. Klikk på neste. Da er det på tide å velge*Startobjekt*. Her vil vanligvis de nødvendige objektene allerede være valgt. Dersom dette ikke er tilfelle kan du velge dem på samme måte som du valgte *startobjekt*.



Figur 10.3: Først velge hva som skal være resultatet, så hva som var utgangspunktet. Til slutt må du gi verktøyet et navn og eventuelt et ikon om du ønsker det.

5. Klikk på neste. Nå må du velge navn og kommando for verktøyet. Det kan også være fint å skrive noen ord om hvordan verktøyet virker. Har du et ikon, kan du velge det. Men dette er ikke nødvendig. Klikk på «Fullfør» og verktøyet er laget.

   Du har nå fått et nytt verktøy på verktøylinjen:



Figur 10.4: Vi har laget et nytt verktøy!

Dersom du ønsker at verktøyet skal være tilgjengelig hver gang du åpner GeoGebra, må du lagre innstillinger. Klikk på menynknappen, velg Innstillinger og klikk på «Lagre innstillinger».

Eksempel 10.2

Vi skal i dette eksempelet lage et verktøy som deler et linjestykke i tre.

Her er framgangsmåten vår:

a) Start med å tegne et linjestykke. Velg og klikk på to steder i grafikkfeltet.

b) Tegn en normal til linjestykket i det ene endepunktet. Grunnen til at vi velger en normal, og ikke bare en stråle er at konstruksjonen må være 100% avhengig av kun startobjektene. Hadde vi valgt en stråle måtte vi også gjort et valg for retning til strålen. Vi ønsker at verktøyet skal være uavhengig av et slikt valg.

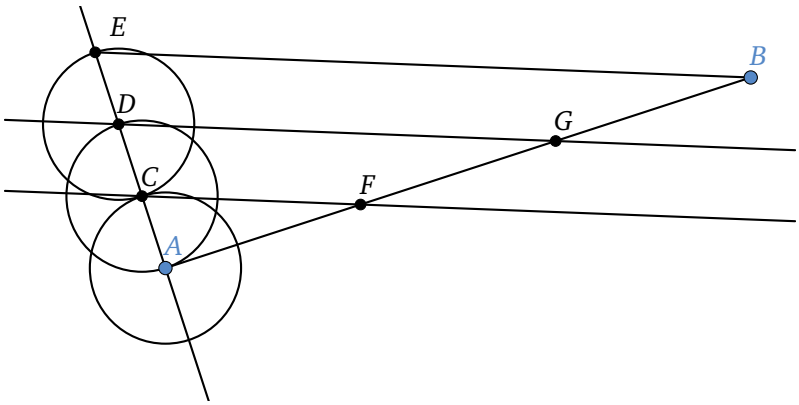
c) Lag en sirkel med sentrum i det samme endepunktet og med radius lik 1. (Bruk Sirkel definert med sentrum og radius)

d) Lag to punkt til på normalen, slik at du får tre punkt etter hverandre med avstand 1 mellom hverandre.

e) Lag så et linjestykke mellom det ene punktet som ligger lengst vekk fra endepunktet til det andre endepunktet.

f) Tegn så linjer gjennom de to andre punkta parallelt med linjestykket du tegnet i e).

g) Marker skjæringspunkta mellom disse linjene og det opprinnelige linjestykket. Du har da to punkt på linjestykket som deler det i tre like deler!

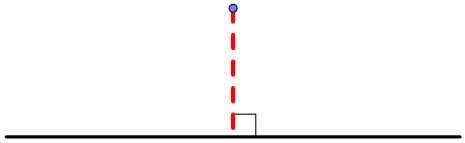


Figur 10.5: Konstruksjon av punkt som deler linjestykke i tre.

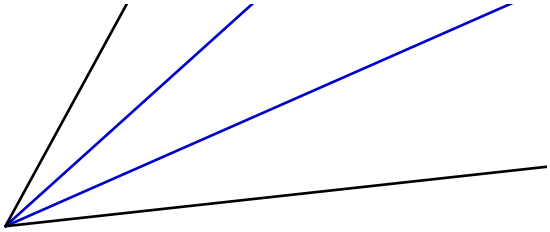
h) Under «Verktøyer» på menylinjen velger du nå «Lag nytt verktøy…». Du må da velge hva som skal være utgangspunktet for konstruksjonen (startobjektene) og hva som skal være resultatet (sluttobjektene). Velg endepunkta på linjestykket som startobjekt og de to punkta som deler linjestykket i tre som sluttobjekter. Skriv en forklarende tekst for hvordan konstruksjonen virker under «Hjelp til verktøy» og velg passe navn på verktøyet. Du kan også lage et eget ikon, men det er som nevnt tidligere ikke nødvendig.[1] Du har nå fått et nytt verktøy helt til høyre på verktøylinja som du kan bruke!

[1] Du kan lage ikon ved å ta et skjermbilde av en figur som viser verktøyet i bruk. Dette skjermbildet kan du så lime inn i for eksempel programmet Paint, beskjære det og lagre det som en png-fil.

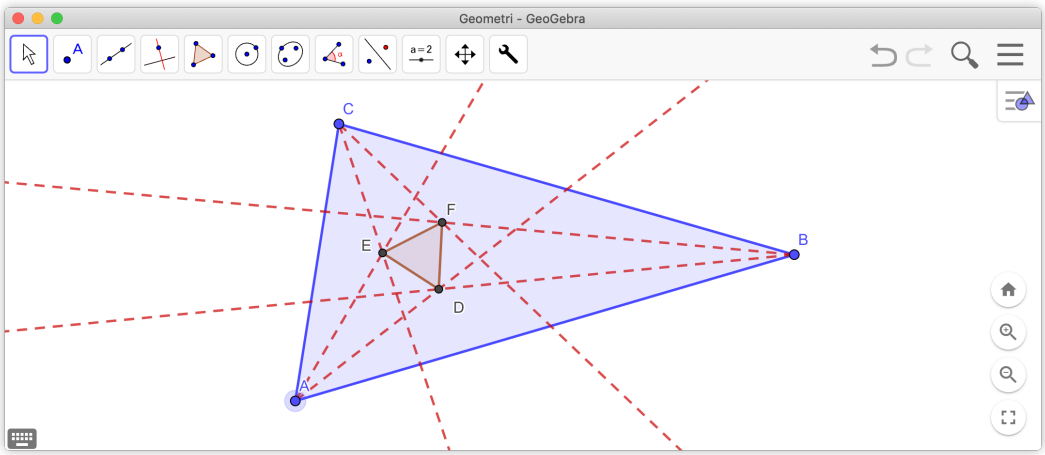
Oppgave 10.1
Lag et verktøy som konstruerer et linjestykke normalt ned fra et gitt punkt til et linjestykke.



Oppgave 10.2
Lag et verktøy som deler en vinkel i tre like store vinkler som vist på figuren nedenfor.



Oppgave 10.3
Tegn en trekant ABC og bruk verktøyet du laget i oppgave 10.2 til å dele de tre vinklene i trekanten. De seks linjene vil parvis krysse hverandre som vist på figuren under. Hva kan du si om den lille trekanten? Se figuren nedenfor.

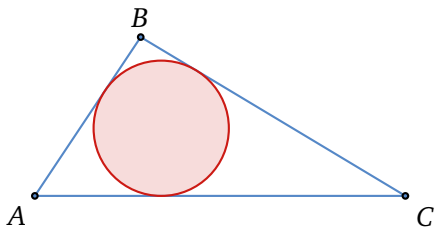


Figur 10.6: Hva sier Morleys teorem? Hva kan du si om trekanten DEF?

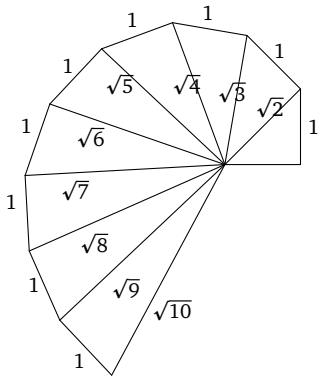
Oppgave 10.4
Lag et verktøy som deler et linjestykke i n like store deler. Startobjektene skal være de to endepunkta og tallet n.

Tips: Du kan få bruk for kommandoen `Følge[A+k/n (B-A), k, 1, n-1]`

Oppgave 10.5
Lag et vertøy som tegner den innskrevne sirkelen til en trekant.



Oppgave 10.6
Lag et verktøy som kan hjelpe deg til å lage følgende figur:



11 Tekst og bilder i GeoGebra

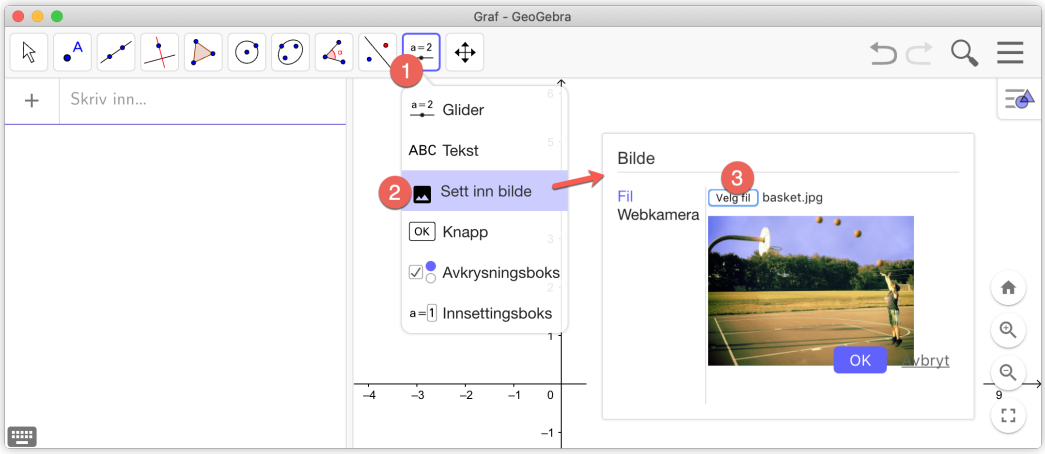
Du kan legge til tekst og bilder i grafikkfeltet i GeoGebra.

11.1 Legge til bilder

Vi ønsker å legge følgende bilde (hentet på nettsiden `http://www.flickr.com`) inn i en GeoGebrafil:

Figur 11.1: Originalbilde: Basketball av Eric Silva på Flickr, Lisens: CC-by-sa 2.0

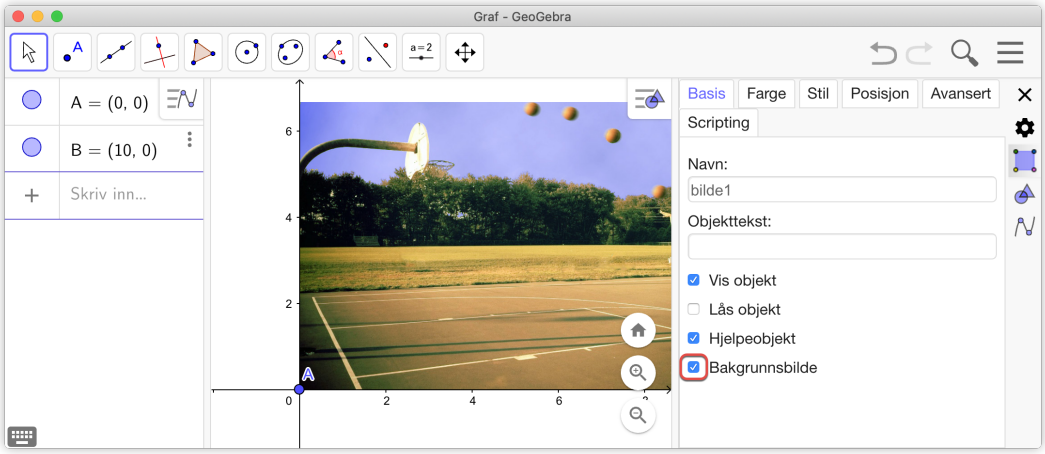
For å gjøre dette åpner vi en ny GeoGebra-fil og velger verktøyet *Sett inn bilde* , som vist på figur 11.2.



Figur 11.2: Du setter inn et bilde ved å bruke verktøyet *Sett inn bilde*.

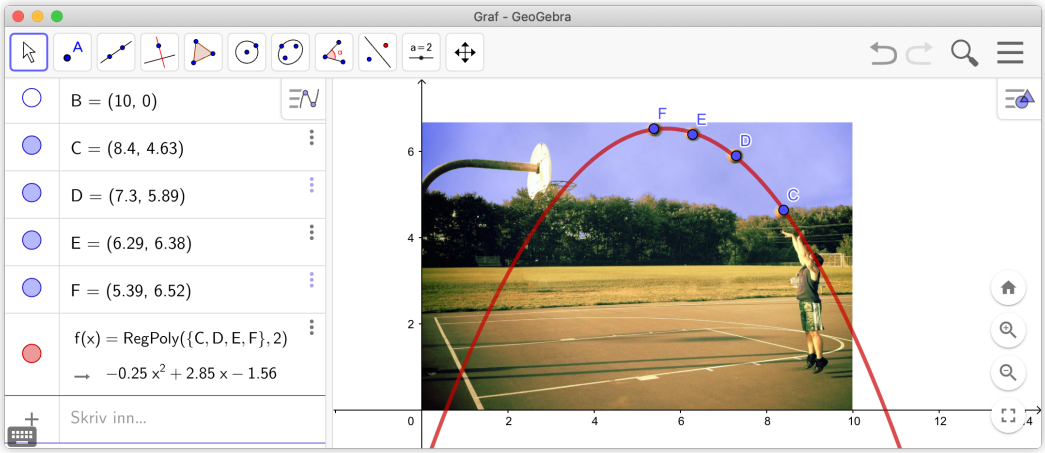
Når du så klikker på OK vil du få bildet plassert i grafikkfeltet. Dette er da plassert ved hjelp av to punkt A og B som angir hvor de to nedre hjørnene skal ligge. Du kan endre plasseringen til bildet ved å flytte på punktene A og B.

Når du har fått plassert bildet og er fornøyd med posisjonen, så kan det være en ide å gjøre bildet om til bakgrunnsbilde. Se figur 11.3. Da vil slike ting som akser og rutenett legge seg over bildet.



Figur 11.3: Bildet kan gjøres om til et bakgrunnsbilde.

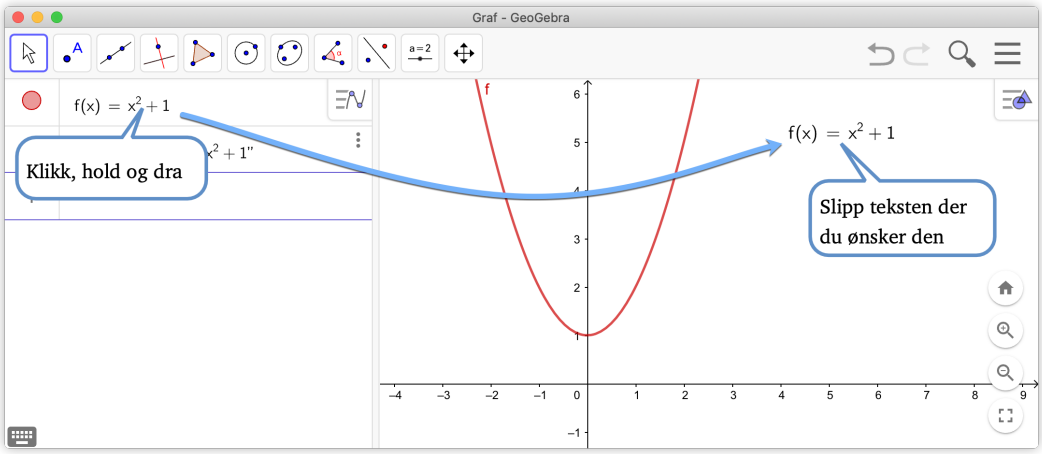
Nedenfor ser du resultatet. Her har vi også lagt til en kurve ved hjelp av regresjon.



Figur 11.4: Vil ballen gå oppi kurven?

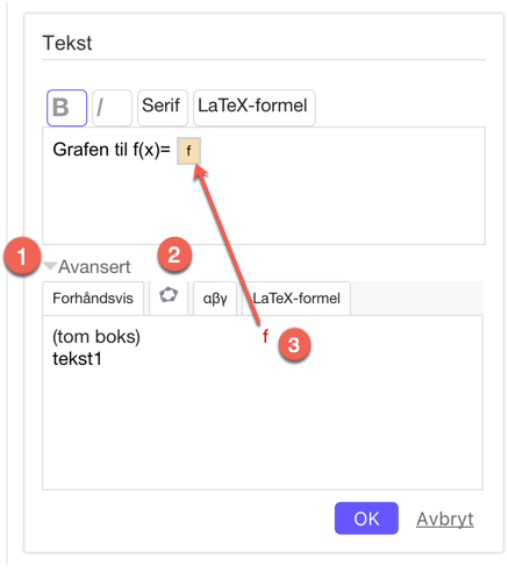
11.2 Sette inn tekst

Dersom vi kun ønsker at det skal stå $f(x) = x^2 + 1$ kan vi nå «dra» funksjonen fra Algebrafeltet over i Grafikkfeltet. Se figur 11.5.



Figur 11.5: Du kan trekke uttrykkene fra Algebrafeltet over i grafikkfeltet.

Det er et også eget verktøy for å sette inn tekst i grafikkfeltet. Velg verktøyet *Sett inn tekst* ABC på verktøylinjen og klikk i grafikkfeltet der hvor du ønsker at teksten skal være. Du får da opp følgende vindu:



Vi har i dette eksempelet skrevet inn teksten *Grafen til* $f(x) = x^2 + 1$. Legg merke til at vi har bedt GeoGebra om å skrive inn $x^2 + 1$ ved å hente fram f ved å velge f under GeoGebra-fliken under avansert. På den måten vil vi få nytt funksjonsuttrykk dersom vi senere endrer f.

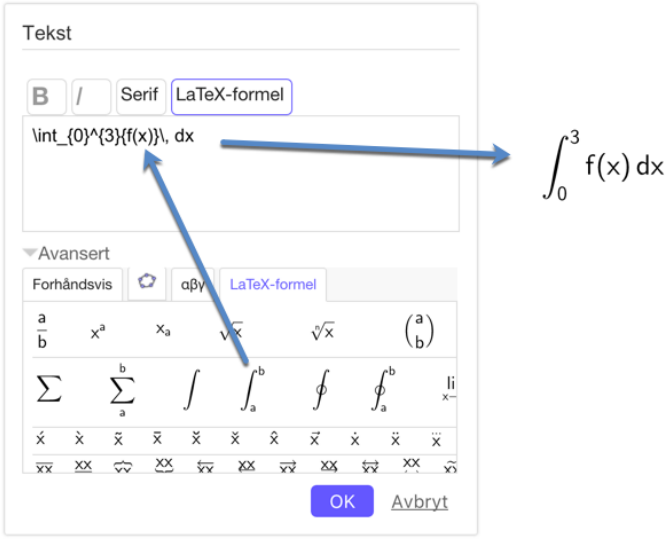
Oppgave 11.1

a) Lag to glidere a og b ved å bruke verktøyet *glidere* a=2.

b) Skriv inn a*x+b i algebrafeltet slik at du får definert funksjonen $f(x) = ax + b$.

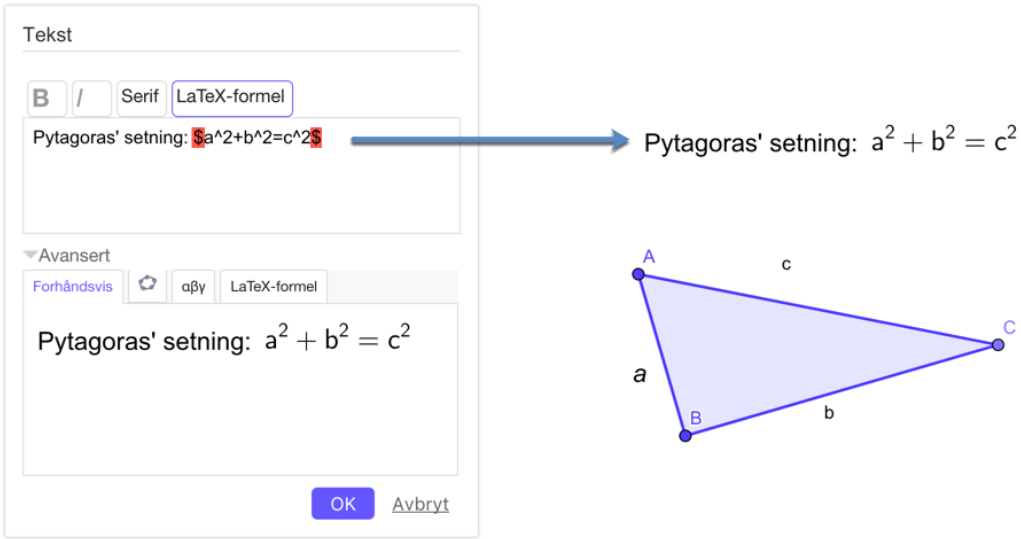
c) Sett inn i grafikkfeltet teksten «Grafen til funksjonen $f(x) = 3x + 2$» (dersom $a = 3$ og $b = 2$).

Dersom du ønsker å sette inn mer avansert matematisk tekst, må du bruke LaTeX-kode. La oss si at du vil skrive inn $\int_0^3 f(x)\,dx$. Du kan da hake av for LaTeX-formel og skrive inn `\int_0^3f(x)\,dx`. Heldigvis trenger du ikke kunne LaTeXfor å få dette til. Når du har haket av for LaTeX-forme blir nedtrekksmenyen aktiv og du kan velge ulike kommandoer fra denne som vist på figur 11.6.



Figur 11.6: GeoGebra kan skrive inn LaTeX-kode.

Pass på at formler og annen matematisk tekst står mellom to dollartegn dersom du vil kombinere vanlig tekst med matematisk tekst. Se figur 11.7.



Figur 11.7: Du må passe på at matematisk tekst står mellom to $-tegn.

Eksempel 11.1

a) Lag gliderne a, b og c. Skriv inn `f(x)=a*x+b` i algebrafeltet.

b) Lag den dynamiske teksten som gir oss løsningsmengden til ulikheten $f(x) \leq c$ (der c er tallet som glideren er satt til).

Løsning:
Vi lager tre glidere a, b og c og skriver inn `f(x)=a*x+b` i algebrafeltet. Vi ønsker å legge inn dynamisk tekst av typen $f(x) \leq 2$ når $x \leq 5$ (som er tilfelle dersom $a = 0{,}5$, $b = -0{,}5$ og $c = 2$.) Problemet er at ulikhetstegnet må snus dersom $a < 0$. For å få dette til kan vi bruke kommandoen

```
Dersom(<Vilkår>,<Så>,<Ellers>).
```

Denne fungerer slik at dersom vilkåret er sant får vi objektet vi skriver som andre argument («så») og dersom det ikke er sant får vi det tredje argumentet («Ellers»). I vårt tilfelle ønsker vi «≤» når $a > 0$

Vi skriver derfor inn følgende kommando i algebrafeltet:

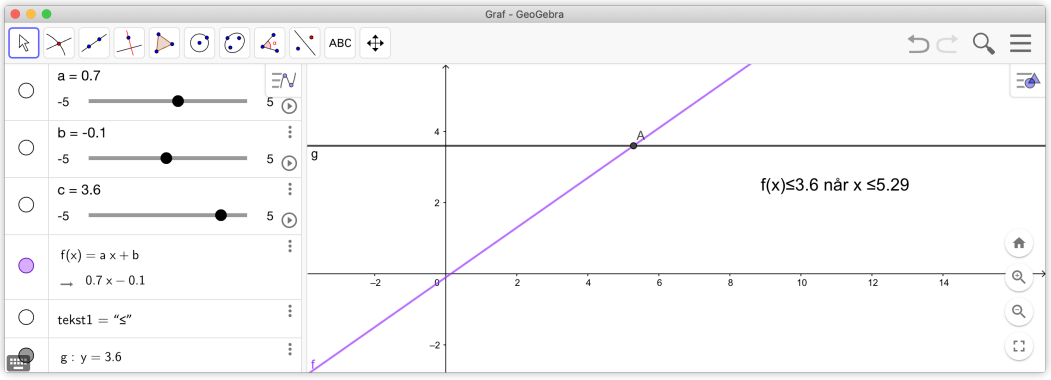
```
Dersom(a>0,"≤","≥")
```

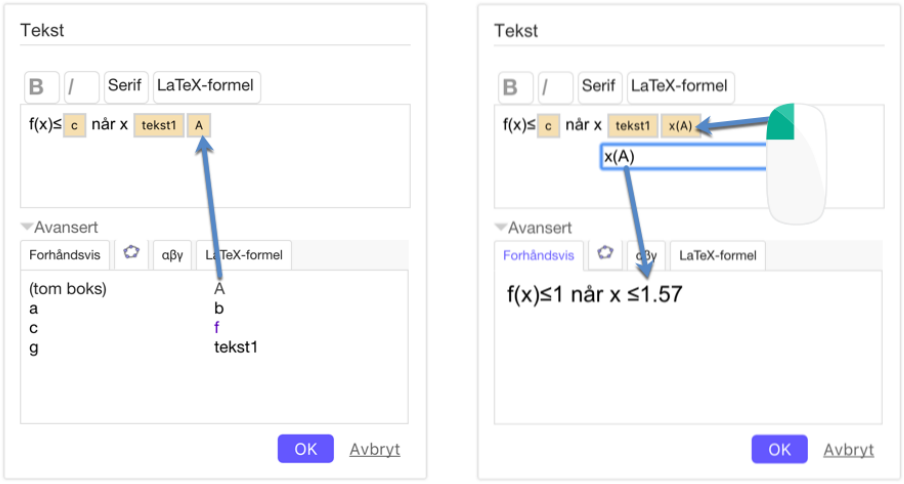
Vi vil da få objektet «tekst1» tegnet i nærheten av origo. Skjul denne teksten.

Skriv inn `y=c` i algebrafeltet og finn så skjæringspunktet mellom denne linjen og grafen til f. Du får da et punkt A.

Klikk så på verktøyet *Sett inn tekst* og klikk deretter i Grafikkfelt 1 der hvor du ønsker at teksten skal stå.

I vinduet du da får opp skriver du inn $f(x) \leq$ og henter fram c fra Objektlisten. Deretter skriver du «når x» og henter fram text1 og så A. På grunn av betingelsene som vi satte under Dersom-kommandoen vil ulikheten nå alltid være rett vei. Men det blir feil å ha A etter tekst1. Men dette ordner vi lett ved å klikke på A og skrive inn $x(A)$ som vist på figur 11.8. Det endelige resultat er vist på figuren under.

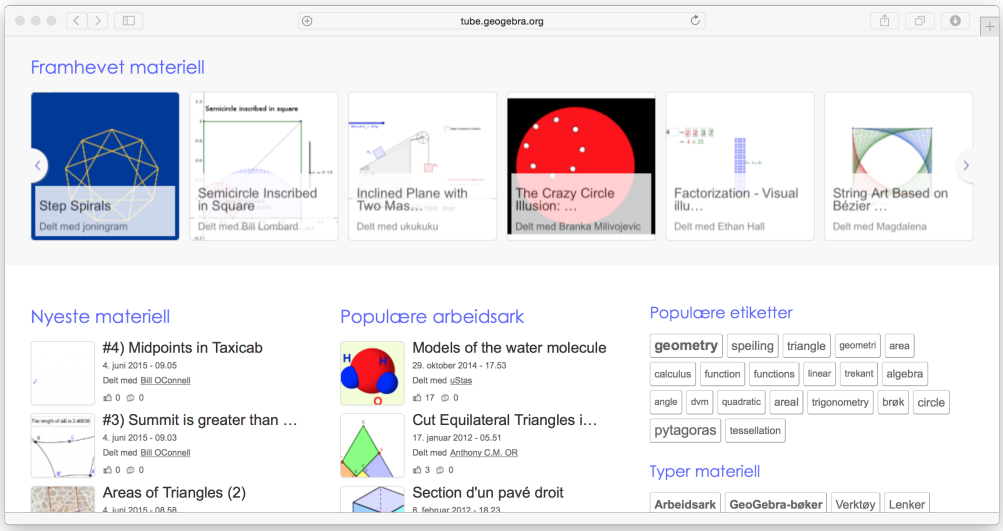




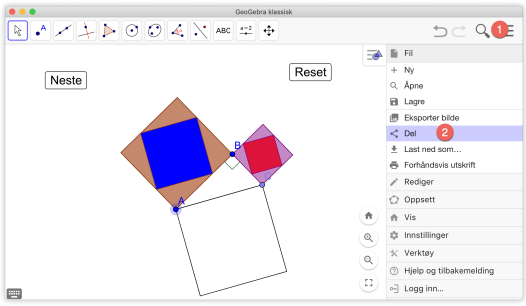
Figur 11.8: Du kan gjøre utregninger i tekstboksen. Hent fram objektet du vil behandle (i dette tilfellet A), klikk på feltet og skriv inn kommandoer etc (i dette tilfellet `x(A)`).

12 GeoGebra.org

Noen ganger vil du kanskje at elevene skal eksperimentere med en animasjon eller simulering som du har laget på forhånd. Du kan da dele selve GeoGebra-filen med elevene. En fin måte å dele slike filer på er å bruke GeoGebra.org. Her kan du dele dine arbeidsark og du kan søke blant tusenvis av andre slike arbeidsark. I dette kapittelet vil vi vise hvordan du kan laste opp slike ark, tilpasse hvem som skal se arkene og hvordan du kan dele dem med andre.

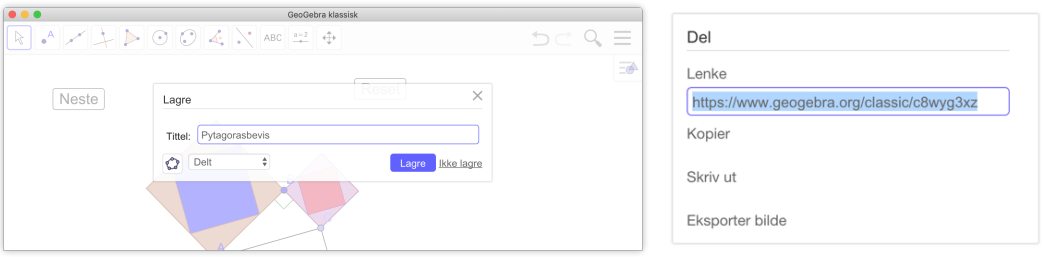


12.1 Lag en konto på geogebra.org



La oss si at du har laget en animasjon som du vil bruke til å bruke i et bevis for Pytagoras setning. For å dele denne på GeoGebra.org velger «Del» på menyknappen som vist på bildet til høyre. Dersom du ikke allerede er logget inn på geogebra-siden, vil du få opp en melding om å logge deg inn. Om du ikke er logget inn, må du gjøre dette først. Har du ikke en konto, må du lage en. Se delkapittel 1.4 side 6 om hvordan du lager en konto på GeoGebra.org.

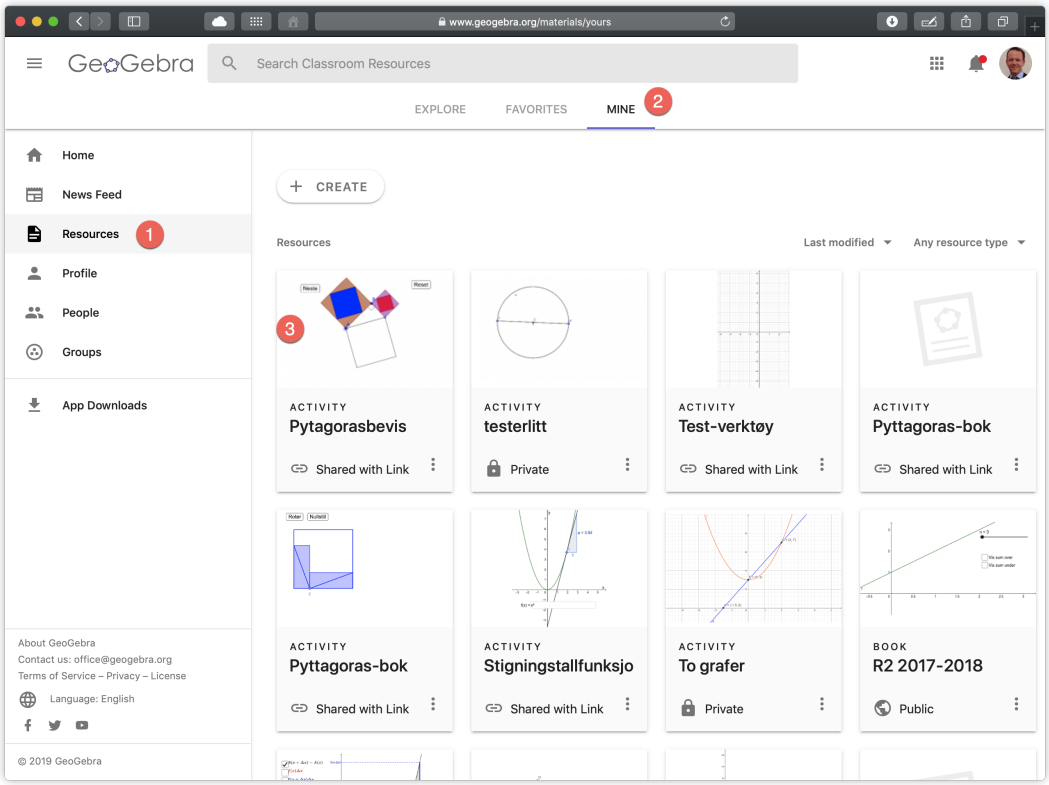
Dersom du er logget inn vil filen bli lagret på GeoGebra.org og du får opp et vindu hvor du kan kopiere en lenke til siden med animasjonen.



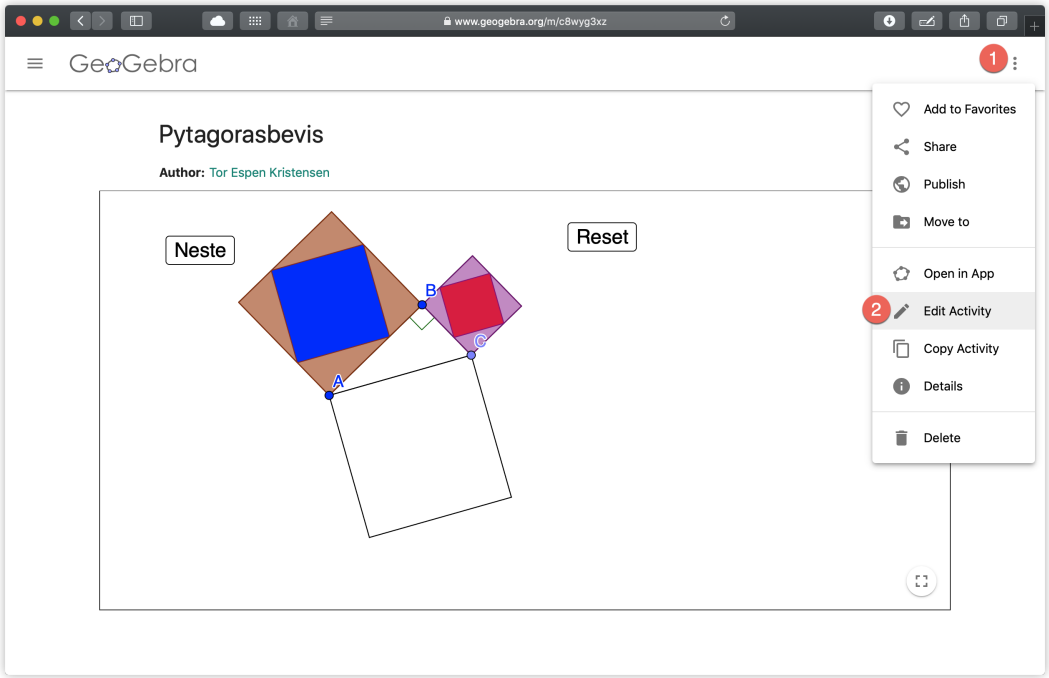
Figur 12.1: Du kan lett dele en fil på GeoGebra.org

12.2 Mer om GeoGebra.org

Du kan bearbeide det du vil dele på GeoGebra.org. Går du inn på denne siden og er innlogget, får du tilgang på alt du har lastet opp på GeoGebra.org. For å finne det du har lastet opp klikker du på (1) «Resources» og (2) «MINE». Da vil du få en oversikt over det du har laget. Vi ser at filen vi delte ligger som første element i listen (3).



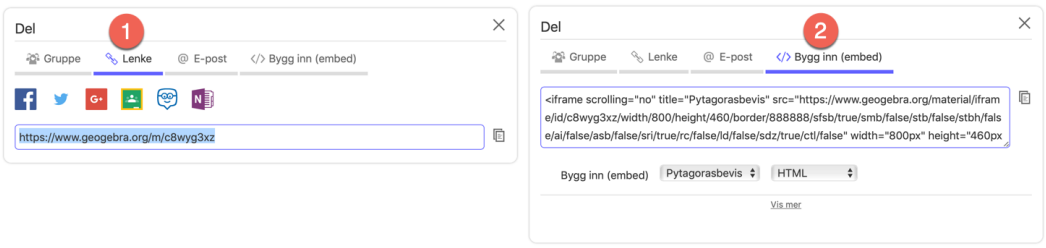
Klikker du på aktiviteten du vil bearbeide, kommer du til en side som vist på figur 12.2 nedenfor. For å gjøre endringer på siden som vises, klikker du på de tre prikkene øverst til høyre på denne siden. Se (1) på figur 12.2. Klikk deretter på «Edit Activity» (2). Du vil da komme til en side som vist på figur 12.4.



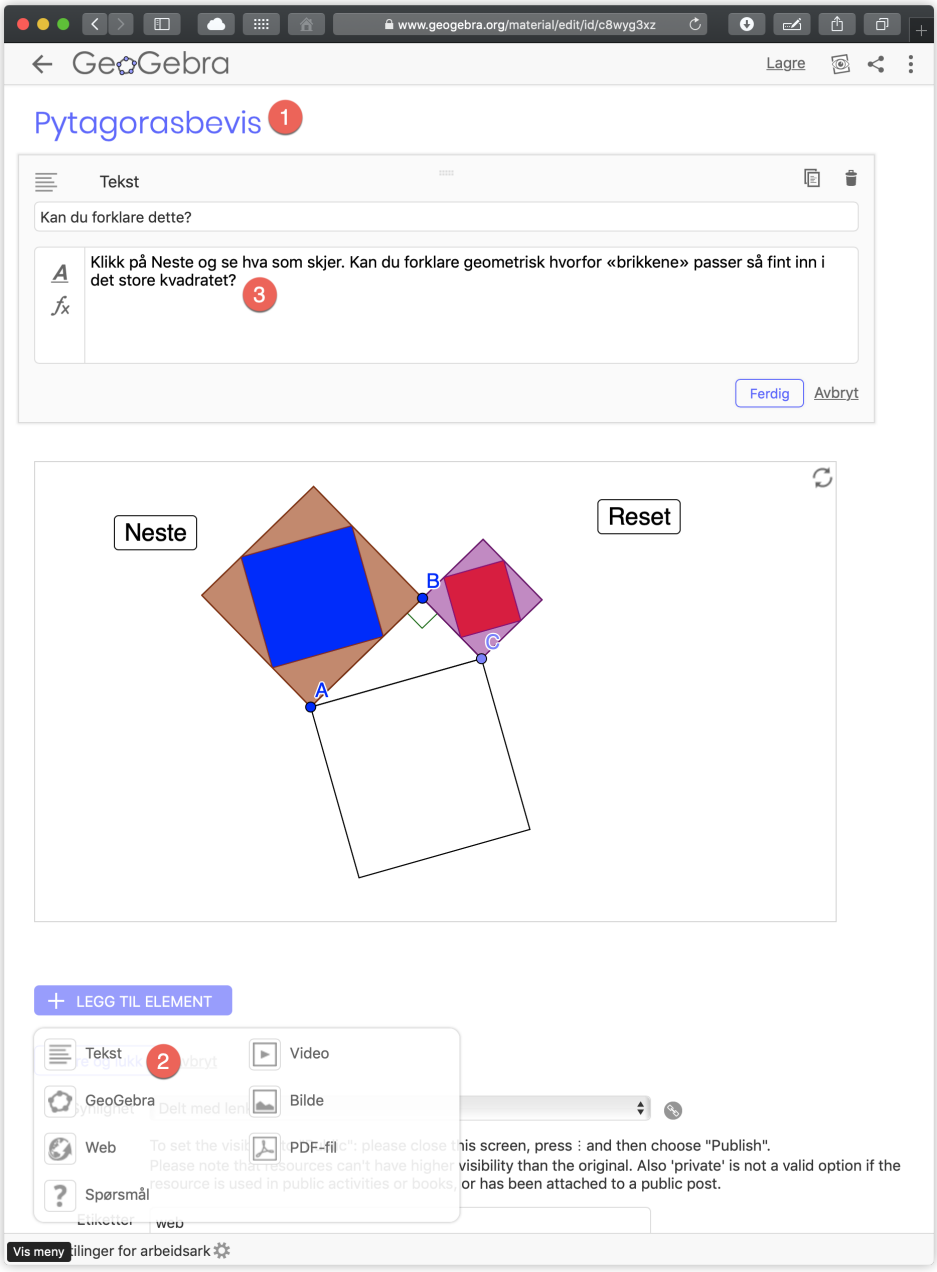
Figur 12.2: Du kan redigere aktiviteten ved å klikke på de tre punktene øverst til høyre (1) og velge (2) «Edit Activity»

Du får nå mulighet til å legge til ulike elementer, som tekst, video (lenke til for eksempel youtube), bilde, pdf-fil etc. Se (2) på figur 12.4. De ulike elementene kan dras rundt på siden slik at du får plassert dem der du måtte ønske dem. På figur 12.4 har vi lagte til en tekst som vi har flyttet over selve GeoGebra-appleten.

Når du er ferdig med å redigere denne siden, kan du dele den ved å trykke på dele-symbolet opp til høyre på siden. Der har du flere valg. Vi vil spesielt nevne at du kan dele lenke og du kan bygge hele siden inn i en nettside ved å kopiere en så kalt iframe-kode. (2). Denne koden kan du lime inn som html-kode i notater på for eksempel Itslearning.



Figur 12.3: Du kan dele lenke og du kan «Bygge inn (embed)».



Figur 12.4: Redigering av siden som aktiviteten vises på

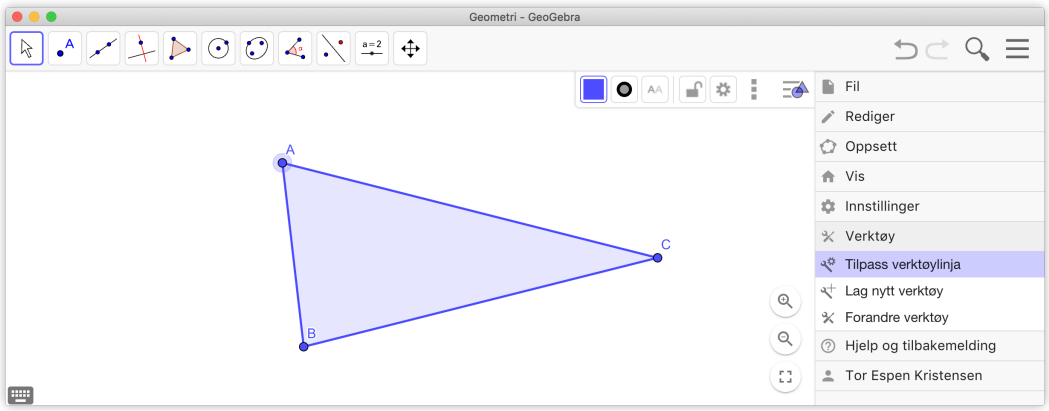
12.3 Tilpassing av verktøylinja

Noen ganger ønsker vi for eksempel at elevene skal konstruere et geometrisk sted uten å bruke allerede ferdige verktøy i GeoGebra. Da kan det være lurt å tilpasse verktøymenyen.

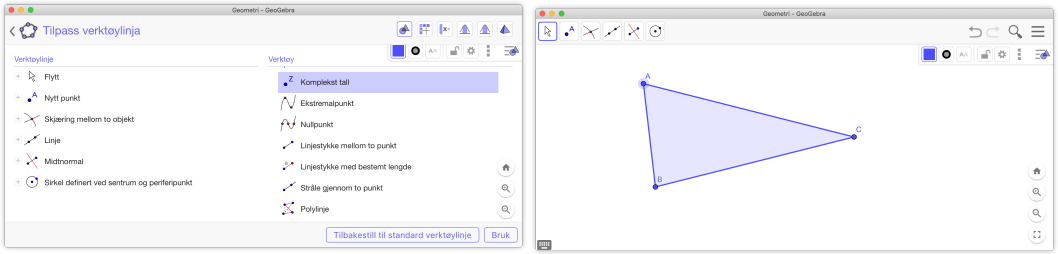
Eksempel 12.1

Vi ønsker å lage et arbeidsark der det er tegnet inn en trekant og hvor vi ønsker at elevene skal konstruere den omskrevne sirkelen. Dette blir trivielt om elevene har tilgang på verktøyet *Sirkel gjennom tre punkt*. Vi ønsker derfor at elevene kun skal ha tilgang på *Flytt*, *Normal linje*, *Midtnormal*, *linje*, *Sirkel definert ved sentrum og periferipunkt* og *Skjæring mellom to objekt*.

Etter å ha laget en trekant velger vi «Verktøy» på menylinjen og «Tilpass verktøylinja…»



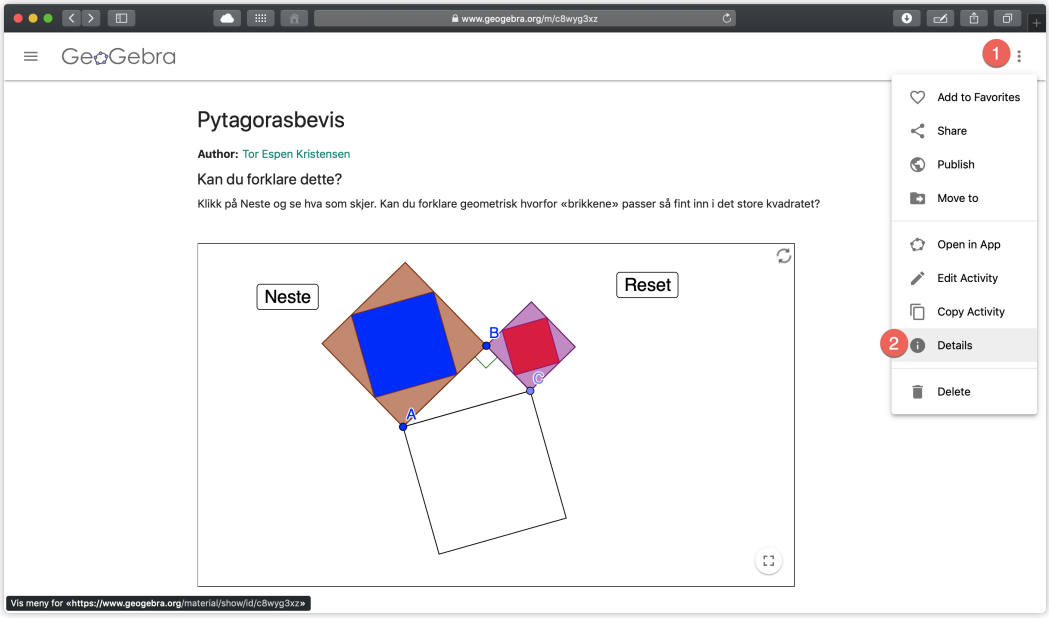
I vinduet som kommer opp kan du nå slette alle verktøy som du ikke vil skal vises og legge til de du ønsker å vise. På figur 12.5 har vi tatt vekk alle verktøyene uten de vi ønsker. Resultatet blir som vist til høyre på figuren. Dette kan være



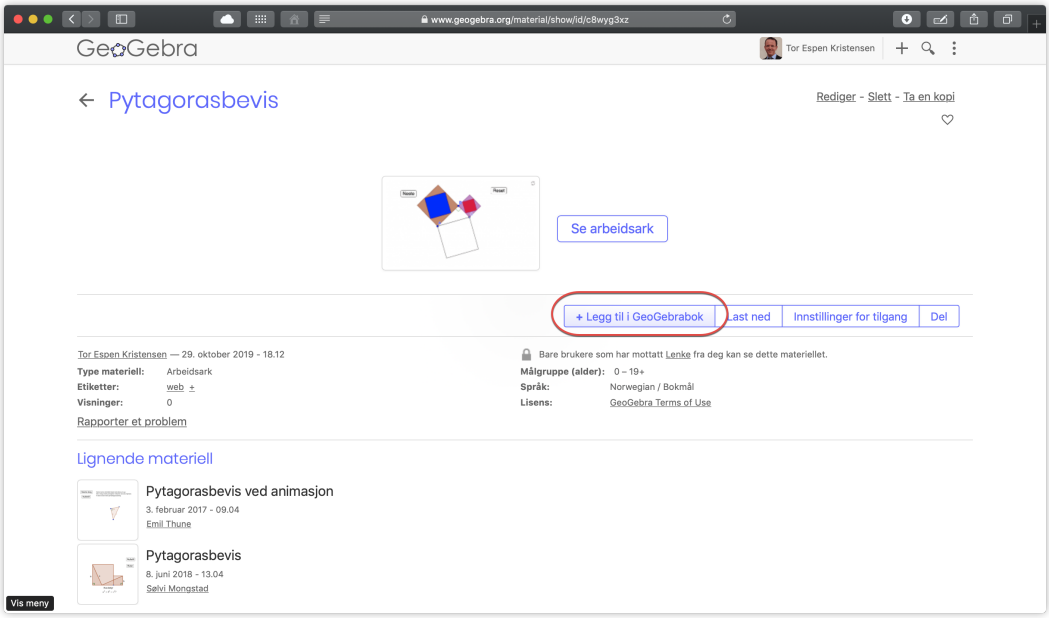
Figur 12.5: Kun seks verktøy er tilgengelig.

12.4 GeoGebrabok

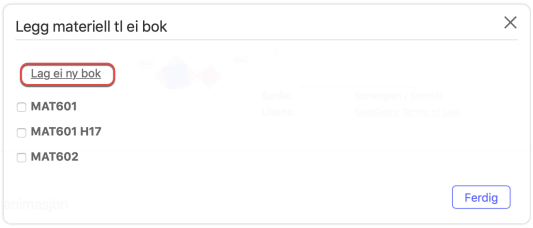
En GeoGebrabok er en samling av ressurser som er lagt ut på GeoGebra.org. Har du for eksempel laget fire animasjoner til Pytagoras setning, kan du samle disse i en slik bok. Du kan gå fram på følgende måte. Klikk på de tre prikken øverst til høyre i aktiviteten du vil dele og velg «Details».



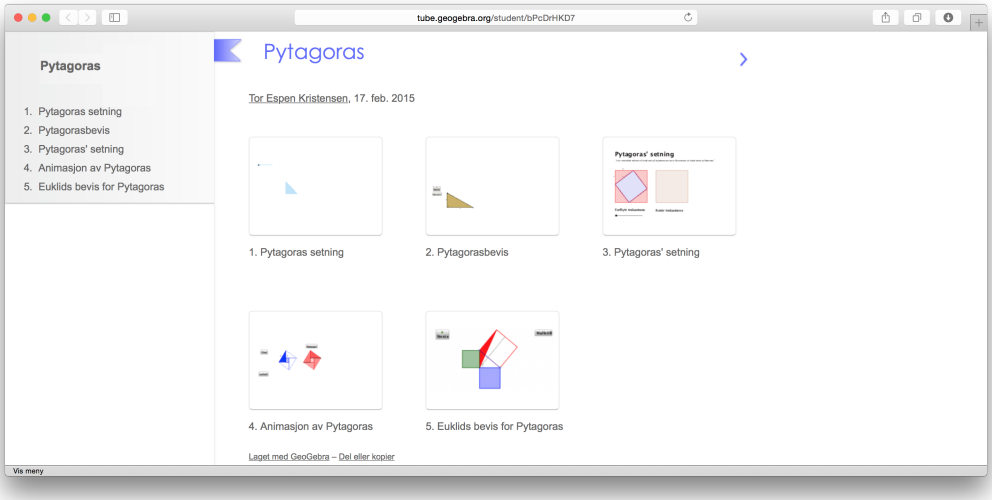
Du får da opp følgeden side:



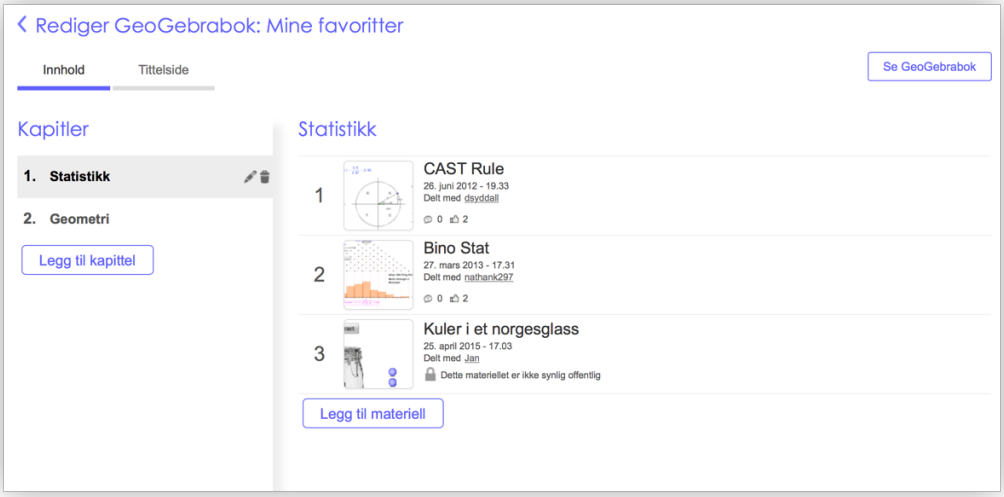
Klikk på «+ Legg til i GeoGebrabok». Du får da opp en liste over de bøkene du eventuelt har laget.



Du vil da få valget om du vil legge materiellet til en ny GeoGebrabok eller om du skal lage en ny. Velger du å lage ny bok må du skrive inn tittel og eventuelt en forklaring til hva boken inneholder. Du kan også bestemme hvem skal kunne se GeoGebraboken. Det ferdige resultatet ser du på figur 12.6. Du kan også legge til kapitler i en GeoGebrabok. Dersom du vil flytte en ressurs fra et kapittel til et annet, kan du dra og slippe ressursen der du måtte ønske den. På samme måte kan du også endre rekkefølgen på ressursene i en bok. Se figur 12.7.



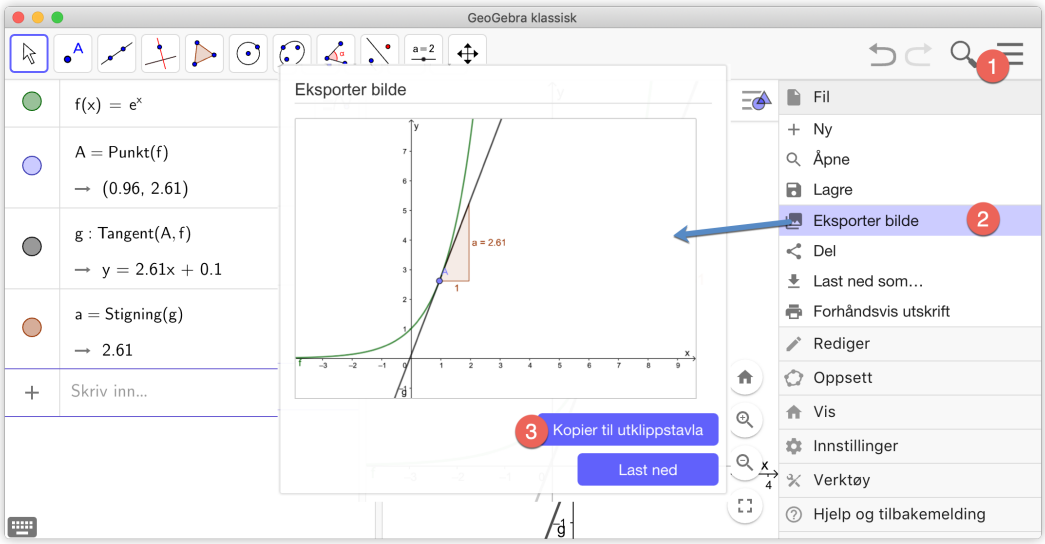
Figur 12.6: En GeoGebrabok.



Figur 12.7: Du kan organisere en GeoGebrabok i kapitler

13 Kopiere og lime inn i en tekstbehandler

Dersom du bruker Word (eller andre tekstbehandlere) og ønsker å få det du har i grafikkfeltet inn i et dokument anbefaler vi at du eksporterer grafikkfeltet til utklippstavlen. Du gjør dette ved å (1) klikke på menyknappen, (2) velge «Eksporter bilder» og velger (3) «Kopier til utklipstavlen». Se figuren nedenfor.



Figur 13.1: Du kan kopiere det som vises i grafikkfeltet til utklippstavla.

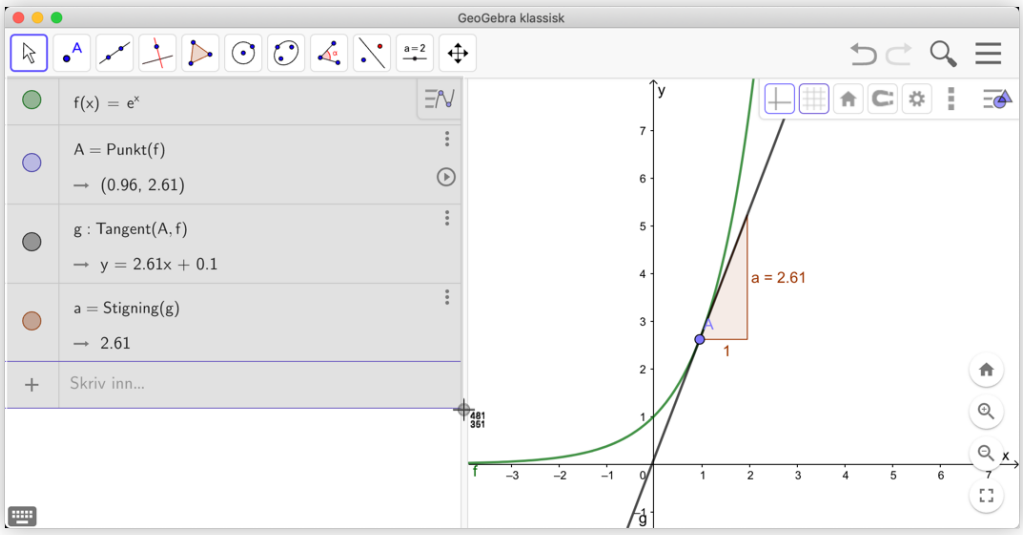
Dersom du bruker program som GeoGebra eller Excel under eksamen, kan det være lurt å lære seg hvordan du pent kan ta skjermdump av det du gjør slik at du kan lime det inn i en tekstbehandler (som for eksempel Word). Vi viser først hvordan dette kan gjøres på en Mac.

13.1 Skjermutklipp på Mac

Det fins essensielt to metoder for å ta skjermbilder på. (1) som et selvvalgt rektangel eller (2) som utklipp av aktive vindu.

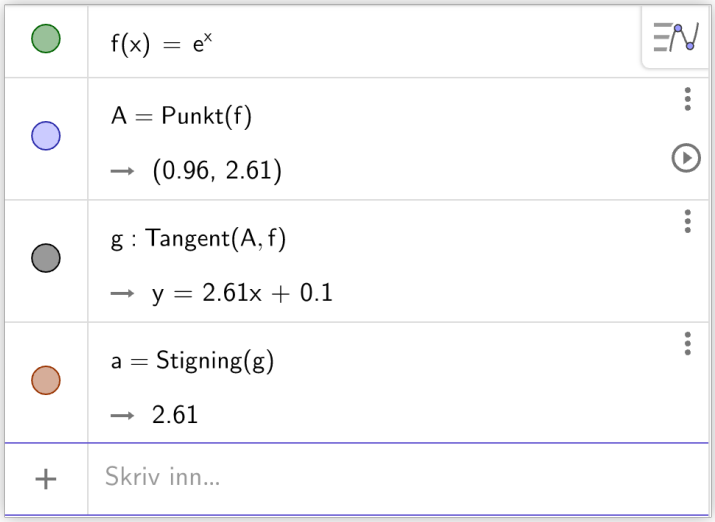
13.1.1 Skjermbilde av rektangel

For å velge ut et rektangel som du vil kopiere til utklipstavlen, trykker du kombinasjonen cmd ⌘ + shift ⇧ + ctrl + 4 og velger området du vil ta bilde av.



Figur 13.2: Skjermbilde av en bit av algebrafeltet

På figur 13.2 vil vi få følgende skjermbilde på utklipstavlen:

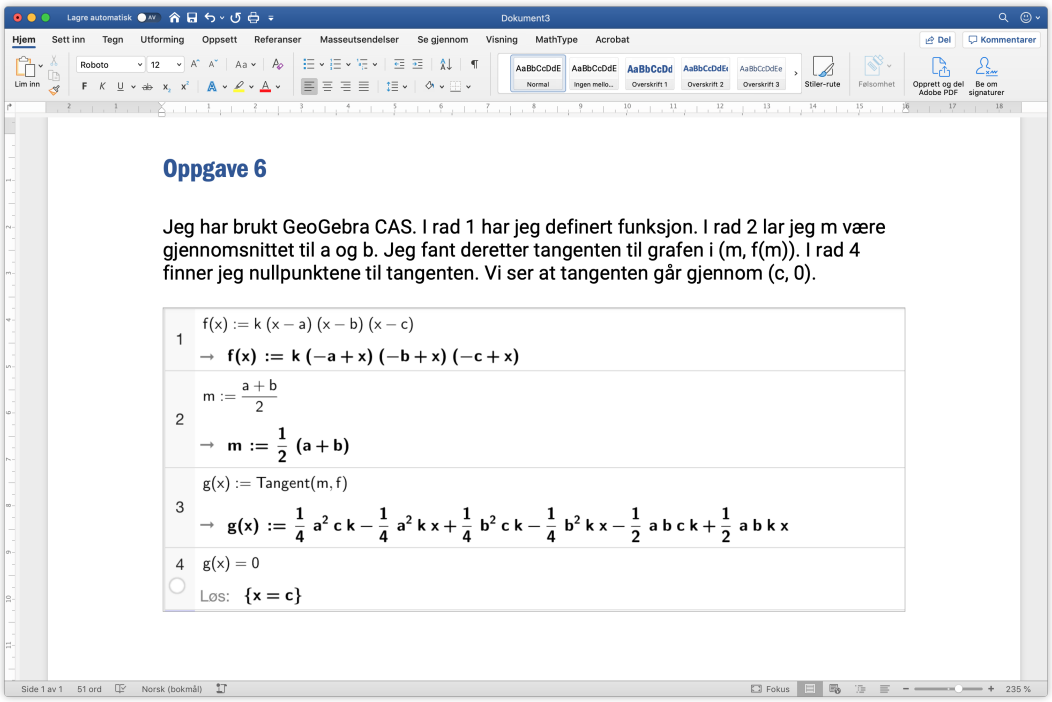


For å få dette inn i for eksempel Word, er det bare til å plassere markøren der du vil ha bildet og lime inn. Se figur 13.3.

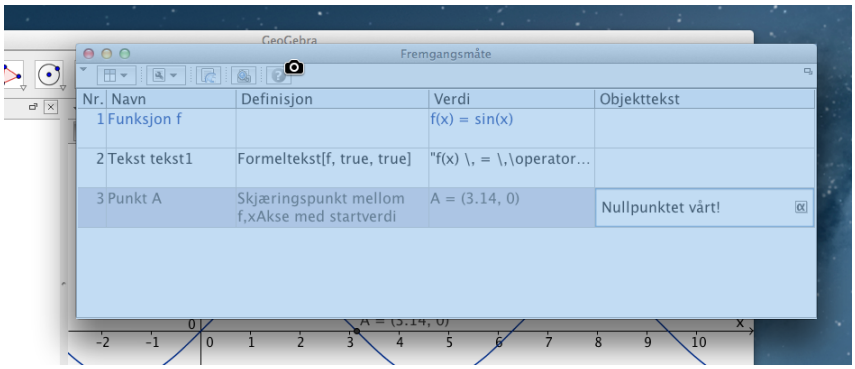
13.1.2 Skjermbilde av aktivt vindu

Noen ganger ønsker vi å ta bilde av et helt vindu fra skjermen. For å gjøre dette trykker du følgende tastekombinasjon: cmd ⌘ + shift ⇧ + ctrl + 4 og deretter spacebar (mellomromstastet). Du kan da velge hvilket vindu du ønsker å ta skjermbilde fra, slik figur 13.4 nedenfor viser.

Resultatet blir da lagret til utklipstavlen. Dette kan du deretter sette inn i tekstbehandleren din (Word).



Figur 13.3: Pent lite skjermbilde limt inn i Word.



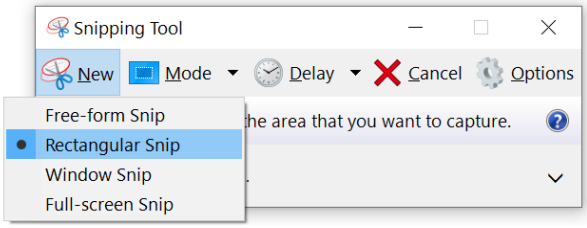
Figur 13.4: Skjærmbilde av et vindu.

Tastekombinasjon	handling
cmd ⌘ + Shift ⇧ + 3	Tar bilde av hele skjermen og lagrer på skrivebordet
cmd ⌘ + Shift ⇧ + 4	Velg rektangel som du vil ta bilde av. Blir lagret på skrivebordet
cmd ⌘ + Shift ⇧ + 4 og så mellomromstast	Velg vindu du vil ta bilde av. Blir lagret på skrivebordet.
cmd ⌘ + ctrl + Shift ⇧ + 3	Tar bilde av hele skjermen og kopierer til utklipstavlen
cmd ⌘ + ctrl + Shift ⇧ + 4	Velg rektangel som du vil ta bilde av. Blir kopiert til utklipstavlen.

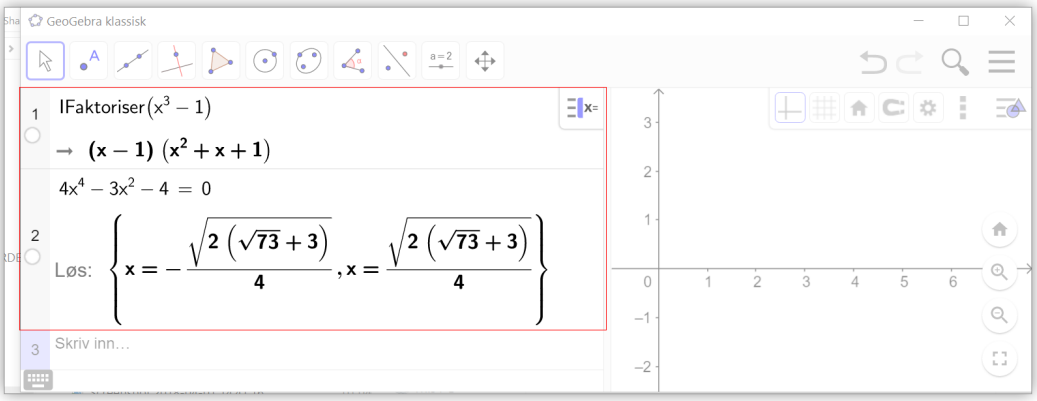
13.2 Skjermutklipp i Windows

13.2.1 Utklippsverktøy

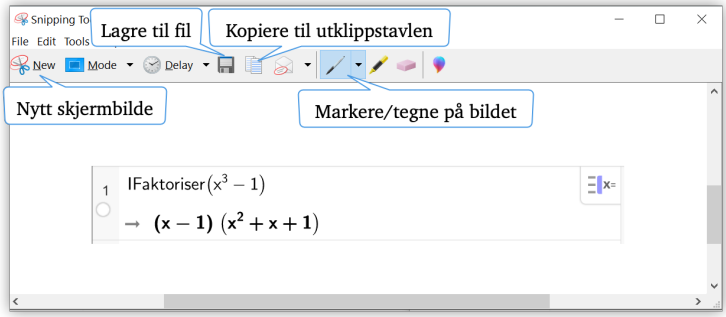
I windows kan du klikke på «Print screen» knappen. Du vil da ta bilde av hele skrivebordet ditt. Dette er i de fleste tilfeller ikke ønskelig. Du kan i stedet klikke på Alt-knappen og så Print Screen. Resultatet av dette blir et skjermbilde av det aktive vinduet. Dette kan virke enkelt nok, men jeg vil likevel anbefale deg å bruke et eget verktøy som ligger i Windows som heter *Snipping Tool*. For å åpne dette klikker du på Windowstasten og skriver inn Snipping. Du vil da få opp programmet i listen som dukker opp.



I dette programmet kan du så velge om du vil ta bilde av hele skjermen, vindusklipp, rektangulært klipp eller frihånd. I de fleste tilfellene vil rektangulært klipp fungere godt. Dersom du velger rektangulært klipp er det bare til å dra markøren over området du ønsker å ta bilde av.



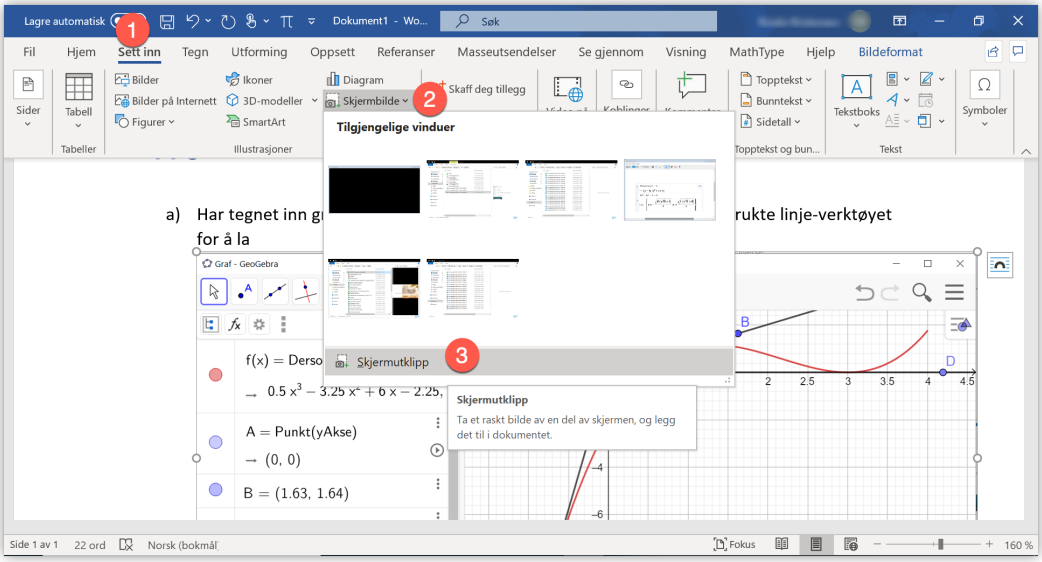
Når dette er gjort får du opp ett lite redigeringsvindu hvor du får mulighet til å markere inn med enten penn eller merkepenn (gule ut).



Etter å ha gjort ønskelige redigeringer kan du kopiere eller lagre bildet for så å sette dette inn i en tekstbehandler (Word).

13.2.2 Å sette inn bilder i nyere versjoner av Word

Du kan sette inn bilder direkte fra Word. Du går til «Sett inn» fliken på båndet (1) og og velger Skjermbildet (2). Du får da opp en forhåndsvisning av tilgjengelige vinduer. Skal du ta skjermbilde av et helt vindu kan du velge det her. Du vil da få skjermbildet satt inn direkte der du er i dokumentet. Ønsker du å ta skjermbilde av et rektangel, velger du Skjermutklipp (3). Da vil Word bli skjult og alt litt grått. Trekk så rektangel over det området du ønsker å ta skjermbilde av. Når du har gjort dette vil skjermbildet automatisk bli satt inn der du er i word-dokumentet.

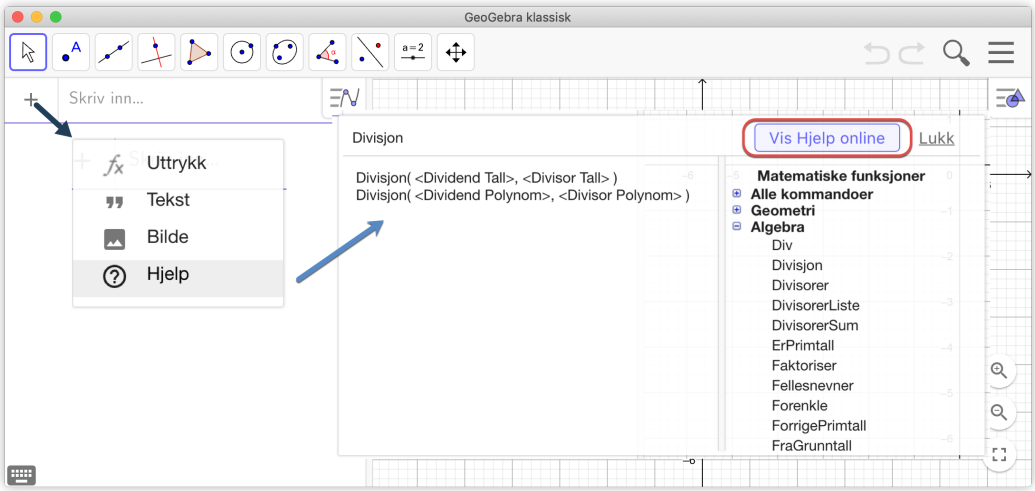


14 Tips og triks

Det er viktig å få en god arbeidsflyt når du bruker et digitalt verktøy. Jeg vil her dele noen tips og triks som forhåpentligvis kan gjøre arbeidet med GeoGebra enda enklere.

14.1 Hvor får jeg hjelp?

Du kan lett finne hjelp på nettet ved å trykke på en av knappene som vist på figur 14.1 nedenfor.



Figur 14.1: Du kan få hjelp på nettet ved å trykke på en av de to knappene.

Dersom du virkelig står fast, eller det er noe du gjerne skulle ha fått til, men vet ikke helt hvordan det gjøres trykk F1 og du vil få opp (i nettleseren din) brukermanualen til GeoGebra. Her står det meste. Dersom dette ikke hjelper deg er det flere fora hvor du kan henvende deg. Det er nok av frivillige som vil svare! Her er noen steder du kan prøve:

- `http://help.geogebra.org`.
- `https://www.facebook.com/groups/309175558480/`. Dette er en GeoGebra-gruppe på Facebook.

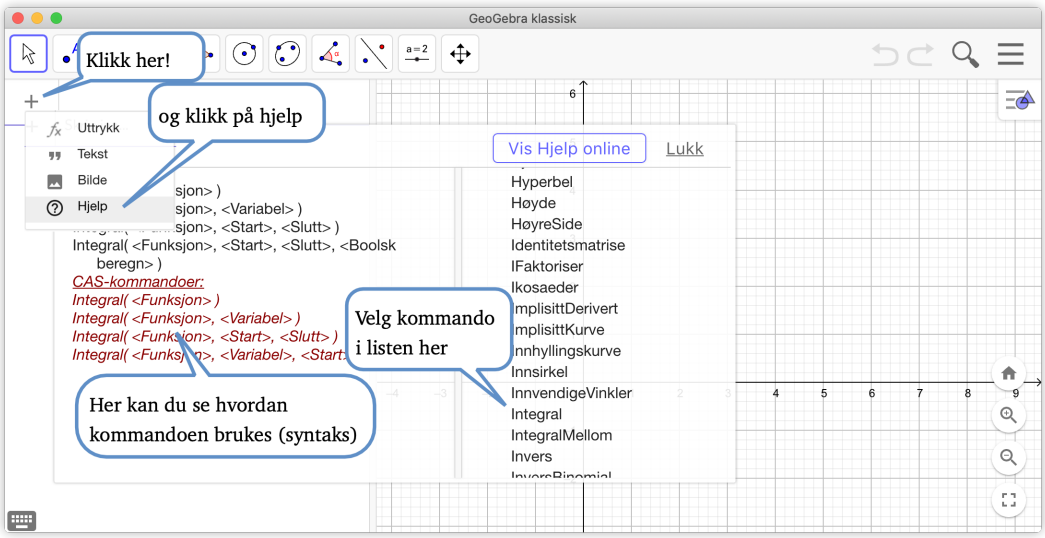
14.2 Lær deg de viktigste hurtigtastene

Det fins mange slike hurtigtaster, og jeg vil ikke komme med noen utfyllende liste her. Det er det vel ingen som vil huske uansett? Tabellen nedenfor viser de jeg bruker mest.

Hurtigtast	**Beskrivelse**
Alt + 2	^{2} (opphøyd i 2)
Alt + 3	(opphøyd i 3)
Alt + p	π
Alt + e	e (Eulers tall 2, 7182818284590…)
Alt + o	«Grader»
Alt + Shift + 8	$\otimes$ (Vektorprodukt)
Alt + a	α
Alt + s	σ

14.3 Bruk hjelp for inntasting

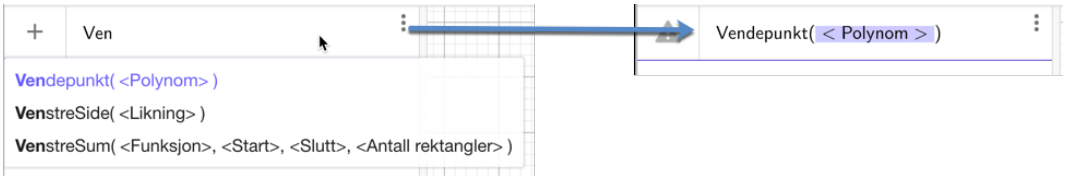
Om du ikke husker en kommando, så finner du alle under «Hjelp for inntasting» nederst til høyre i GeoGebra (som vist på figur 14.2).



Figur 14.2: Du kan bla i kommandoer i listen du får når du klikker hjelp.

14.4 Trykk enter for å fullføre kommandoer

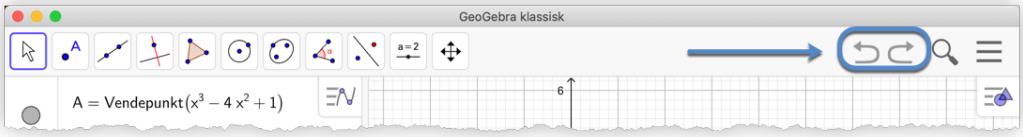
For å fullføre en kommando i inntastingsfeltet er det bare å tykke på <enter>:



Figur 14.3: Velg foreslåtte kommando ved å trykke enter

14.5 Aldri for sent til å angre

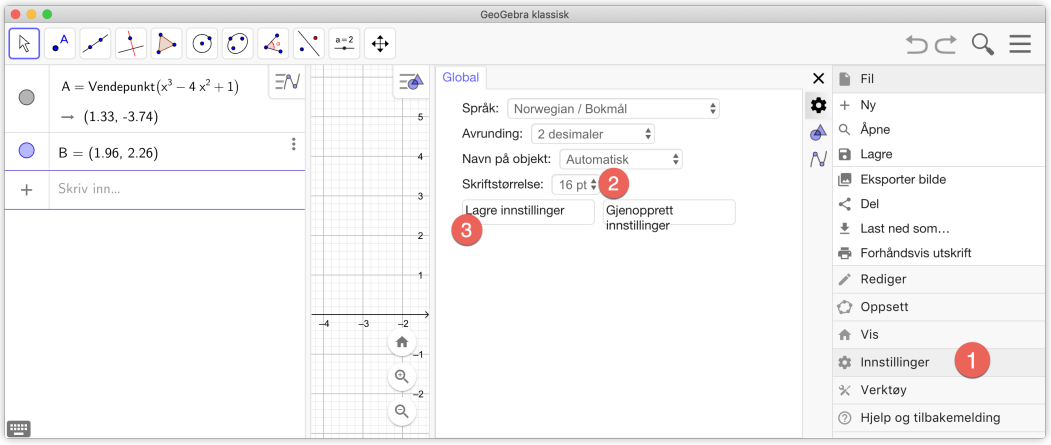
Du kan angre noe du har gjort i GeoGebra ved å trykke Ctrl+z eller klikke på knappene øverst til høyre i GeoGebra.



Figur 14.4: Du kan angre på at du angret også. . . .

14.6 Endre skriftstørrelse

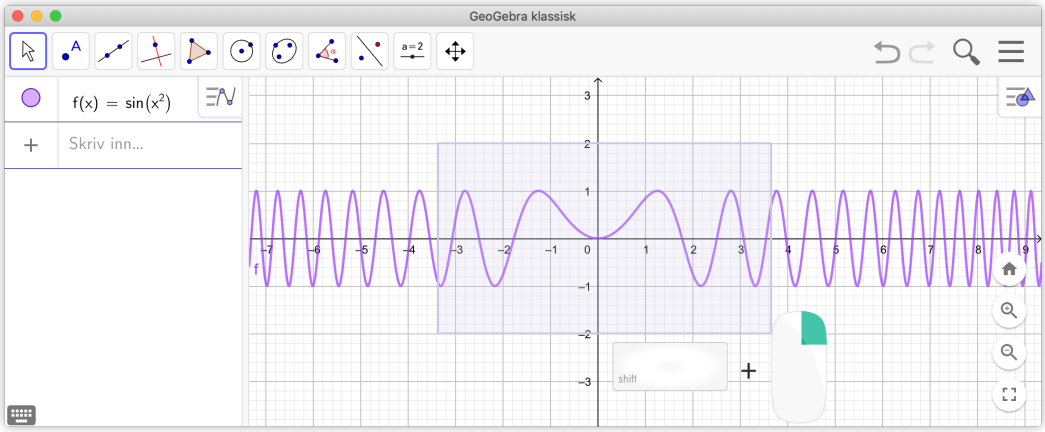
Du kan endre skriftstørrelsen til menyer etc. i GeoGebra under innstillinger (1), som vist på figur 14.5. Velg passe skriftstørrelse (2) og lagre innstillinger (3) for at endringene skal gjelde neste gang du åpner GeoGebra.



Figur 14.5: Det kan være en god ide å bruke litt større skriftstørrelse dersom du vil vise noe for en hel klasse.

14.7 Zoom inn til ønsket område

Du kan zoome inn til et ønsket område i geometrivinduet ved å holde Shift og dra et rektangel over det ønskede området. Merk at forholdet mellom høyde og bredde vil bli bevart.



Figur 14.6: Du kan zoome inn til et området ved å holde inne shift, holde høyre musetast nede mens du drar rektangel over området.

Du kan også få tilbake standard visning ved å klikke Ctrl + m

14.8 Bruk punktum som desimalskilletegn

Dersom du får en feil, eller noe ikke helt fungerer, så har du kanskje brukt komma som desimalskille og ikke punktum...

14.9 Skriv til celler i regnearket fra inntastingsfeltet

Du kan skrive til en celle i regnearket fra kommandofeltet. Dette kan være nyttig dersom du skal bruke litt lange kommandoer. Skriver du for eksempel

```
A1=Integral(f, 0, 2)
```

så vil svaret på denne kommandoen stå i A1.

14.10 Endre navn på objekter den lette måten

Du kan endre navn på ting som nettopp er laget ved å skrive inn navnet rett etter at det er laget. Senere kan du selvsagt også skifte navn på objektet. Da kan du først klikke på det i algebrafeltet (slik at det blir aktivert) og så begynne å skrive inn det nye navnet.

Bibliografi

Amdal, A. (2009a). Vincenzo vivianis setning. *Tangenten*, (3).

Amdal, A. (2009b). Vincenzo vivianis setning – del 2. *Tangenten*, (4).

Gjøvik, Ø. and Sanne, A. (2009). Skriving i matematikkfaget. *Tangenten*, (4). Artikkelen kan lastes ned fra http://www.caspar.no/tangenten/2009/Gjovik-Sanne-409.pdf.

Polya, G. (1957). *How to solve it*. Princeton University Press, second edition.

Utdanningsdirektoratet (2017). Eksamensoppgaver for grunnskole og videregående skole. `http://www.udir.no/`.