KappAbel

2005 - 2006

En nordisk matematikk-konkurranse for hele klassen!

Oppgavesamling fra KappAbel-konkurransen 2005-2006

KappAbel

Matematikksenteret
Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Bruk boka til glede og inspirasjon,

til samarbeid og moro med matematikk.

Ingvill M. Stedøy-Johansen

Faglig ansvarlig: Ingvill M. Stedøy-Johansen.

Fotografiene er tatt av May Renate Settemsdal om ikke annet er angitt.

Heftet er redigert av Pål Erik Lauritzen Ekholm.

2006© Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen
Trykk: NTNU-trykk
ISBN: 82-471-6041-2

Innledning

Bakgrunn

Målgruppen for KappAbel er elever i nest siste år av den obligatoriske skolen. I Norge er dette 9. klasse, og elevene er 14 til 15 år (fyller 14 år det året de starter 9. klasse). Nettopp i denne aldersgruppen finner vi mange umotiverte elever som kjeder seg på skolen. Mange lærere finner det vanskelig å få dem til å gløde for matematikken. Motivasjonen er ofte bygd opp med trussel om dårlige karakterer hvis de ikke jobber, og at ”alle” sier at matematikk er viktig.

Mange elever oppfatter matematikk som kjedelig og lite relevant. Det er ofte lærebokstyrt undervisning, og lærerne føler et tidspress i forhold til de faglige målene i læreplanene.

En ting som kjennetegner aldersgruppen, er behov for aksept av jevnaldrende. Venner er viktigere enn alt annet, og gruppetilhørighet preger deres hverdag. Dette er momenter vi har tatt hensyn til når vi utviklet konkurransen som en konkurranse der hele klassen deltar som et samlet lag.

I 1997 ble KappAbel ”født” på initiativ av lærer Ivar Salvesen ved Froland ungdomsskole. Hans bekymring for svake resultater blant norske elever i internasjonale undersøkelser, gjorde at han tok initiativet til en konkurranse for elever i 9. klasse i de to Agder-fylkene. De første årene eksisterte KappAbel som en oppgavekonkurranse for lag.

KappAbel har eksistert i sin nåværende form siden Verdens matematikkår i 2000, da konkurransen for første gang ble nasjonal. Den gangen hadde Institutt for matematiske fag ved Norges teknisk- naturvitenskapelige universitet (NTNU) i Trondheim ansvaret for hele konkurransen, både det faglige ansvaret, og regien og gjennomføringen av det praktiske arrangementet. Det ble etablert et samarbeid med Knut Hassel-Nielsen ved Institutt for datateknikk og informatikk (IDI), og dette samarbeidet har fortsatt siden. Han har utviklet systemet for den nettbaserte delen av konkurransen.

Fra 2003 har konkurransen vært drevet som et samarbeidsprosjekt mellom Froland verk kultursenter og matematikkmiljøet ved NTNU. Froland verk kultursenter har hatt ansvaret for alt det praktiske i forbindelse med arrangementet og for den direkte kontakten med skolene. De har også stått for organiseringen av utstillingen i forbindelse med prosjektkonkurransen. Froland har de siste årene ansatt en prosjektleder på heltid. Han er administrativt ansvarlig for gjennomføringen av konkurransen hvert år, og er også med som konsulent på oppgavene. Prosjektlederen, Roald Buvig, har også bidratt med oppgaver til innledende runder.

Institutt for matematiske fag ved NTNU er faglig ansvarlig for konkurransen. Ingvill M. Stedøy-Johansen ved Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen (NSMO) er ansvarlig for utvikling av oppgavene og tema for prosjektarbeidet for hele konkurransen, og for utvikling av materiell til semifinalene og finalene. Dette skjer i nært samarbeid med LAMIS, der spesielt Svein Torkildsen har vært og er en viktig del av gruppa som har utarbeidet oppgavene. Nils Kristian Rossing ved Skolelaboratoriet ved NTNU og Vitensenteret i Trondheim var med på den faglige delen av KappAbel de tre første årene. Han gjorde en fantastisk jobb og hadde hovedansvaret for finaleoppgavene. Vitensenteret var arena for prosjektfremføring og -utstlling i 2000. Institutt for matematiske fag har hvert år stilt med fagdommer, Lisa Lorentzen, til finalen.

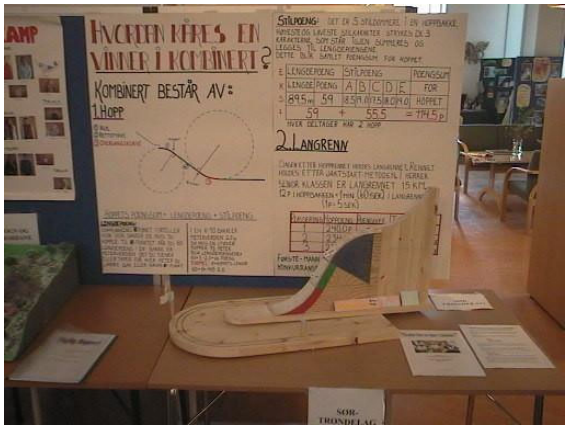
Innledende runder

Konkurransen starter hvert år om høsten (november) med den første innledende runden. Da blir åtte oppgaver lagt ut på nettsidene til KappAbel. Klassene som vil være med, får utdelt et passord, slik at klassens matematikklærer kan få tilgang til oppgavene og skrive dem ut til klassen. Hele klassen skal arbeide med oppgavene, gjerne i grupper, og bli enige om hva de skal svare på hver av de åtte oppgavene i løpet av 90 minutter. Læreren sender inn klassens besvarelse via internett, og får umiddelbart tilbakemelding om hvor mange poeng klassen har oppnådd. Elevene vet ikke hvilke oppgaver de eventuelt har svart feil på, og dette gir spennende og livlige diskusjoner i klassen fram til et løsningsforslag blir lagt ut to uker etter at oppgavene ble tilgjengelige for deltakerskolene.

Alle klassene går videre til andre runde. Oppgavene for denne runden har de siste årene blitt lagt ut på nettsidene i januar. Andre runde foregår på nøyaktig samme måte som første runde. Den samlede poengsummen for de to innledende rundene avgjør hvilke klasser som går videre til semifinalen. I de innledende rundene konkurrerer klassene fylkesvis, og klassene med høyest poengsum i hvert fylke går videre. Dersom flere klasser har samme poengsum, blir det avgjort ved loddtrekning.

Semifinalen

Klassene som går videre i konkurransen, skal gjennomføre et klasseprosjekt med oppgitt tema. Prosjektet skal føre fram til et produkt som skal sendes inn til en jury, vurderes, og bli en del av en utstilling som er åpen for publikum under finaledagene. I tillegg skal de levere en prosesslogg med beskrivelse av arbeidet, og en faglogg der matematikkinnholdet i prosjektet skal synliggjøres. Disse blir også vurdert av en jury.



Matematikk og sport var tema for prosjektet i 2002. Her er produktet til laget fra Selbu ungdomsskole i Sør-Trøndelag. *Foto: Nils Kristian Rossing*

I april skal klassene sende to jenter og to gutter til Arendal og Froland, der de skal representere klassene sine under semifinale- og finalearrangementet. I løpet av en dag skal disse gruppene delta i oppgavedelen av semifinalen og presentere prosjektene sine muntlig for en jury, og med de andre semifinalistene til stede som publikum. Oppgavedelen foregår i en stor idrettshall der hver gruppe sitter sammen rundt et bord. Det er en slags matematikkstafett der en og en oppgave skal løses og leveres skriftlig, i tur og orden i løpet av 90 minutter. Lagene må selv avgjøre hvor lang tid de vil bruke på hver enkelt oppgave. Oppgavene er problemløsningsoppgaver av varierende vanskelighetsgrad, og skal som regel løses ved hjelp av utdelt materiell.

Totalsummen av poengene fra klasseprosjektet (utstillingsprodukt, logger og presentasjon) og oppgavedelen av semifinalen, avgjør hvilke tre lag som går videre til finalen.

Finalen

Den store finalen foregår med lagene sittende fremme på en scene, og med publikum i salen. I 2000 var finalen i et stort auditorium ved NTNU, men deretter har det foregått i Saga kino i Arendal. Ingvill Stedøy-Johansen ved NSMO har ledet finalen hvert år, og hatt hovedansvaret for den faglige delen av KappAbel. Finaleleder presenterer oppgaveve for lagene og for publikum. De får utdelt utstyr til å løse oppgavene, og i løpet av noen få minutter skal de komme fram til et svar på oppgaven. Publikum blir samtidig utfordret til å prøve og løse oppgavene. Det blir gitt poeng for hver oppgave før den neste blir presentert, slik at lagene og publikum hele tiden kan følge med på stillingen underveis. Slik blir finalen både spennende og utfordrende for publikum såvel som for lagene. Alle finalelagene får flotte pengepremier som de skal ha med hjem til klassene sine. Det er viktig å understreke at KappAbel er en konkurranse for hele klassen. Med unntak av de to dagene med oppgaveløsning og presentasjon av prosjektene, er hele klassen engasjert i konkurransen.

Vinnerlaget 2003 fra Kirkebygden i Våler (Østfold) besøkte "Bukkerommet" (Niels Henrik Abels rom) på Frolands Verk etter at seieren var sikret.
Foto: Thor Søndenaa

Nordisk deltakelse

I 2002 ble de fire andre nordiske landene invitert til å delta i KappAbel via Nordisk kontaktkomité for ICME-10 (den 10. internasjonale matematikkongress som ble arrangert i København den 4. til 11 juli 2004). Anna Kristjansdóttir fra Island (nå professor i matematikkdidaktikk ved Høgskolen i Agder) klarte, ved hjelp av sin store entusiasme, dyktighet og arbeidskapasitet, å få KappAbel nesten like stor på Island som den er i Norge, og det allerede første gangen de var med! Det islandske vinnerlaget fikk være med under semifinalen, og kom på andreplass totalt med prosjektdel og oppgavedel. En klasse fra Danmark deltok i innledende runder, men valgte å ikke gå videre med prosjektarbeidet. Ingen klasser var med fra Sverige eller Finland.

KappAbel ble litt mer nordisk i 2003. Island ble med for fullt. Sverige hadde avholdt en noe redusert konkurranse, der klassene gjorde prosjektarbeid og deltok i en slags sammenslått semifinale og finale. Danmark hadde noen klasser som deltok i innledende runder, men ikke gjorde prosjektarbeidet. Finland var ikke med.

En nordisk finale ble for første gang arrangert den 18. og 19. september 2003. Finalen foregikk i Arendal, på samme måten som de nasjonale finalene, med unntak av at lagene også presenterte prosjektet sitt for en nordisk jury. Klassene fikk arbeidere videre med, og forbedre prosjektet sitt mellom den nasjonale og nordiske finalen. Den nordiske finalen foregikk på engelsk. Laget fra Kubikskolan i Sverige vant både prosjektkonkurransen og oppgavekonkurransen, men det var små marginer.

Nordisk kontaktkomité søkte og fikk midler fra Nordisk ministerråd til å gjøre KappAbel til et helnordisk arrangement. Midlene ble brukt til å planlegge og gjennomføre nordisk finale i 2003, og til planlegging og gjennomføring av nasjonale finaler, og nordisk finale i 2004. Alle de nordiske landene var representert i den nordiske finalen som ble avholdt under den store internasjonale kongressen ICME-10 i København i 2004. Slik fortsatte det med Island som vertsnasjon i 2005 og Norge i 2006 Hvert av de nordiske landene har etablert en egen prosjektgruppe for KappAbel. Nettsidene www.KappAbel.com er blitt nordiske, og alle landene skal gjennomføre nasjonale konkurranser med de samme oppgavene og til samme tid.

Målet på litt lengre sikt er at minst 50% av alle elevene på det aktuelle alderstrinnet fra hvert land etterhvert skal delta i KappAbel.

En unik konkurranseform

KappAbel er helt enestående som konkurranse. Det er en konkurranse som, i motsetning til de fleste andre matematikkonkurranser, inkluderer og engasjerer hele klassen. Jentene er minst like ivrige til å delta som guttene, og konkurransen stimulerer lærerne til å arbeide mer variert med matematikkfaget. Nordisk kontaktkomite har også fått midler til å forske på hvilken betydning deltakelse i KappAbel har for elevene, lærerne og skolene.

KappAbel blir lagt merke til internasjonalt. Som leder av NSMO representerer undertegnede Norge i en gruppe i EU som arbeider med tiltak for økt rekruttering til matematikk, naturfag og teknologi. Der ble KappAbel trukket fram som et strålende eksempel på hvordan også en konkurranse kan være med å øke interessen for matematikk.

Her er hva ekspertene som vurderte de ulike landenes satsing sa om KappAbel:
This project is unusual in that the competition is not only national policy but is designed to involve all students rather than those who are regarded as mathematically able or gifted. Rather than pupils taking part as individuals, moreover, in the initial stage classes participate as a team. Through collaborative processes opportunities for mediated learning are provided as the less able gain support from more able pupils. The early stages make use of computer based activities with whole class collaboration to produce answers which are fed back into the computer for assessment. In this way another of the main disadvantages of competition, anxiety generated by racing against a visible opponent, is avoided.
Other important aspects involved in raising interest and achievement in mathematics are the use of context and the development of higher order thinking skills. The importance of a focus on contextualized practical work in learning and generating interest is addressed in the Norwegian initiative through the use of project work and problem solving in a later round. Thus the important development of higher order thinking skills in mathematics is also taken into account along with the notion of constructivist principles of active learning.
Gender issues are directly addressed at the later stages of the competition as two girls and two boys are selected to represent the class.
A perceived increase in enthusiasm and motivation has been noted through the engagement of students discussing mathematical problems not only in class, but also between and after classes. *(John Dakers, UK)*

Velkommen som deltakere i KappAbelkonkurransen!

Ingvill M. Stedøy-Johansen
Faglig leder
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen
NTNU, Trondheim, Norge

Innholdsfortegnelse

	Sidetall
Innledning……	3
Om KappAbel 2005-2006..……..……	11
Konkurranseregler……..…….	13
Innledende runde 1, november 2005……..	17
Løsningsforslag..……	22
Innledende runde 2, januar 2006……	25
Løsningsforslag..……	30
Semifinale, april 2006……	33
Løsningsforslag.……	43
Finale, april 2006…...……	49
Løsningsforslag.……	57
Nordisk finale, Trondheim 26.-27. juni 2006……	61
Løsningsforslag….……	67
”Matematikk og kommunikasjon” – bilder fra prosjektoppgavene 2006…….	71
Retningslinjer for prosjektoppgavene……	73

KappAbelkonkurransen 2005-2006

I november 2005 ble den første innledende runden gjennomført. Omtrent 15 000 elever deltok fra Norge. For Norden sett under ett deltok 829 klasser i første runde. Flest av dem fra Norge, men også en god del fra Danmark, Sverige og Finland. Svalbard var også representert i de innledende rundene. Frafallet av klasser fra første til andre runde var på 20,2%, noe som er mindre en vanlig.

Etter at innledende runder var gjennomført sto det igjen ett lag fra hvert fylke som skulle kjempe om finaleplass. Resultatet etter innledende runder var meget jevnt, rekordmange fylker måtte ty til loddtrekning for å kåre en vinner.

I semifinalen deltok følgende 20 lag:

Fylke	Skole	Klasse
Østfold	Verket skole	9A
Akershus	Bjørnegård U-skole	9B
Oslo	Hovseter skole	9E
Hedmark	Tolga skole	9B
Oppland	Skreia U-skole	9C
Buskerud	Hole U-skole	9C
Vestfold	Ra U-skole	9A
Telemark	Nissedal U-skole	9A
Aust-Agder	Valstrand skole	9B
Vest-Agder	Samfundets skole	9
Rogaland	Lunde U-skole	9B
Hordaland	Slåtthaug U-skole	9A
Sogn og Fjordane	Davik U-skole	9A
Møre og Romsdal	Vartdal skole	9
Sør-Trøndelag	Sverresborg skole	9D
Nord-Trøndelag	Vanvikan skole	9B
Nordland	Valnesfjord Sentralskole	9
Troms	Ekrehagen skole	9
Finnmark	Sandfallet U-skole	Ar. 6
Svalbard	Longyearbyen skole	9

Etter semifinalen ble det klart at lagene fra Vest-Agder, Sør-Trøndelag og Troms var klare for den nasjonale finalen, etter gode prosjektarbeider og solid innsats på oppgavedelen.

I finalen endte det med at laget fra Ekrehagen skole i Troms stakk av med seieren. Laget fra Sverresborg skole i Sør-Trøndelag kom på andreplass og laget fra Samfundets skole endte på tredjeplass. Elevene ved Samfundets skole kom derimot helt til topps i konkurransen om beste prosjektarbeid. Høgskolen i Agder hadde satt opp denne prisen. Dermed var det klart at 4 ungdommer fra Ekrehagen skole skulle representere Norge i den nordiske KappAbel-finalen, som fant sted i Trondheim 26. og 27. juni 2006.

Alle de fem nordiske landene deltok i den nordiske finalen som gikk av stabelen i Trondheim. På finalens første dag presenterte finalistene sine prosjektoppgaver foran en jury bestående av representanter fra hvert av de nordiske landene. Seieren for beste prosjekt ble delt mellom Danmark og Sverige. Danmark hadde et veldig kreativt prosjekt som handlet om matematikk og digital kommunikasjon. De hadde truffet temaet veldig godt og hadde en kreativ tilnærming til stoffet. Vanskelig stoff ble gjort lett tilgjengelig gjennom en oversiktlig presentasjon der alle deltakerne bidro på en aktiv positiv måte. Svenskene hadde tatt utgangspunkt i matematikk i aviser og i media. De hadde valgt å sette fokus på matematikkens rolle i massemedia. Svenskene hadde en ryddig og fin presentasjon der matematikken kom tydelig i fokus, og viste hvilken sentral rolle tallene egentlig har i hverdagen til folk flest.

Oppgavedelen av finalen ble vunnet av Danmark, med Norge og Finland på delt annenplass, Island på fjerdeplass og Sverige på femteplass. Danmark fikk etter hvert en soleklar ledelse foran sisteoppgaven. Den bommet de imidlertid totalt på. Allikevel halte de i land seieren med 2 poengs margin ned til Norge og Finland.

1. **Danmark 20p**
2. **Norge/Finland 18p**
4. **Island 17p**
5. **Sverige 16p**

Tema for prosjektoppgaven 2005/06 var matematikk og kommunikasjon. Finalelaget fra Danmark gikk helt til topps med sin presentasjon som viser matematikken bak signaloverføring mellom mobiltelefoner.

Konkurranseregler

Hvem kan delta?

Konkurransen er åpen for alle 9. klasser i Norge og Island, og for alle 8. klasser i Danmark, Finland og Sverige. Grønland deltar i den Islandske konkurransen og Ålandsøyene deltar i den finske konkurransen. Når en klasse er påmeldt, registreres **klassen** som deltaker.

Hvis en skole har 6 elever eller færre på det aktuelle klassetrinnet kan yngre elever tillates å delta.

Hvis en skole med mer enn 30 elever på trinnet er organisert i større grupper enn 30, må skolen definere "KappAbel-klasser" med inntil 30 elever i hver "klasse". Elever kan da ikke flyttes fra en "klasse" til en annen så lenge konkurransen pågår, dvs. t.o.m. eventuell deltakelse i den nordiske finalen.

Påmelding

Påmelding til konkurransen gjøres via siden for registrering på www.kappabel.com.

Kvalifisering

Konkurransen består av to web-baserte kvalifiseringsrunder. Den første foregår om høsten (november) og den andre på nyåret (januar). Oppgavene løses i løpet av 100 minutter en gang i løpet av de to ukene oppgavesettet ligger ute i hver runde. **Når klassen er påmeldt, er den automatisk med i begge kvalifiseringsrundene.**

Oppgavene til de to kvalifiseringsrundene lastes ned **av klassens matematikklærer**. Oppgavesettet kopieres i det antall læreren finner hensiktsmessig.

NB! Arbeidet med besvarelsen skal vare maksimalt 100 minutter. Tiden begynner å løpe idet oppgavene gjøres kjent for elevene.

Hvis flere klasser ved samme skole deltar i KappAbel, må konkurransen organiseres slik at alle deltakende 9. klasser besvarer oppgavene samtidig.

Svarene sendes via internett umiddelbart etter at prøven er holdt. Hver klasse sender inn en felles besvarelse. Klassens matematikklærer skriver inn besvarelsene og sender dem inn.

Merk: I kvalifiseringsrundene gir riktig svar 5 poeng, galt svar gir 0 poeng, mens ubesvart spørsmål gir 1 poeng. På noen oppgaver kan det gis mellom 0 og 5 poeng for delvis riktig svar.

Hvert land lager et system for å velge ut klasser til semifinalene. Et viktig prinsipp er at utvelgelsen skal sikre geografisk spredning. Dette kan gjøres ved å la de to innledende rundene være konkurranse mellom klassene i hvert fylke/amt/läani/län, slik det har blitt gjort i Norge siden oppstarten i 2000. Dersom andre geografiske oppdelinger er mer naturlig, avgjøres dette av de enkelte landene. Dersom det er poenglikhet mellom to eller flere klasser i samme område etter de to kvalifiseringsrundene, blir det loddtrekning for å kåre en fylkesvinner. Eventuell loddtrekning foretas av en offisiell person.

I tilfelle det oppstår feil med elektronisk overføring av klassenes besvarelser, er det viktig at læreren tar en utskrift av klassens svar og sender til prosjektansvarlig.

Tidspunkt og frister for påmelding og innsending av besvarelser finner du på www.kappabel.com .

Organisering av konkurransen i klassen

For å oppnå størst mulig deltakelse og engasjement i klassen, foreslår vi at klassen organiseres i grupper på fire mens de løser oppgavene (slik det vil være i semifinalen). Hver gruppe prøver å løse alle oppgavene, men de ulike gruppene kan begynne på forskjellig steder i oppgavesettet, slik at klassen rekker alle oppgavene. På denne måten vil også læreren ha mulighet til å differensiere i forhold til oppgavenes vanskelighetsgrad.

Læreren kan tegne opp et skjema på tavla eller på en overhead over alle oppgavene og de ulike gruppene. Da ser en fort hvor svarene eventuelt skiller seg og hvor elevene må bruke noe tid på å diskutere seg fram til et felles svar innenfor den fastsatte 100-minutters rammen.

Hjelpemidler. Alle hjelpemidler er tillatt. Kommunikasjon ut av klasserommet (internett, mobiltelefon) tillates ikke under konkurransens innledende runder. **Oppgavene skal løses av klassens elever**. Alt skal være gjort i løpet av de 100 minuttene.

Semifinale

Alle nordiske land arrangerer nasjonale semifinaler og finaler på samme dager, med samme oppgaver og med samme opplegg for øvrig (se tidsplanen).

Når klassen får vite at de har gått videre til semifinalen, velger de ut 4 elever, 2 jenter og 2 gutter, til å representere klassen under prosjektpresentasjonen og oppgavedelen av semifinalen. De 3 beste lagene i semifinalen går videre til finalen. Semifinaledeltakerne får gratis reise og opphold *til nasjonal semifinale og finale*, som foregår to dager etter hverandre, vanligvis i slutten av april.

NB: I semifinalen starter alle lag på 0 poeng, uavhengig av oppnådd poengsum i kvalifiseringen.

For å kunne delta i semifinale, må klassene gjennomføre en **prosjektoppgave** i matematikk. Krav og regler for bedømmelse av prosjektene står beskrevet bak i heftet. Tema for prosjektoppgavene har hittil vært ”Matematikk i lokale kunst-, og kultur- eller håndverktradisjoner”, ”Matematikk i naturen”, ”Matematikk i spill og lek”, ”Matematikk og sport” og ”Matematikk og teknologi”. Temaet skoleåret 2003/04 var ”Matematikk og musikk”, og for skoleåret 2004/05 var temaet ”Matematikk og kroppen”. Prosjektoppgavene for 2005/06 handlet om ”Matematikk og kommunikasjon”.

Prosjektoppgaven, som bedømmes av en egen jury, vil telle 50 % i semifinalen. Kreativitet, originalitet, tverrfaglige løsninger og matematisk innhold vil bli premiert.

Den andre halvdelen av semifinalen består av et oppgavesett på 6 til 8 oppgaver som skal løses på 90 minutter. I oppgavedelen av semifinalen har lagene ikke tilgang på noen hjelpemidler annet enn det de får utdelt under semifinalen.

Ved poenglikhet etter semifinalens oppgavedel og prosjektdel, gis lagene ekstra spørsmål inntil de tre finalelagene er klare. Det kreves en stor hall til å arrangere oppgavedelen av semifinalen, siden den foregår som en slags ”matematikkstafett”, der lagene sitter i grupper, med god avstand til hverandre.

Stafetten: I den store hallen er det et bord til hvert lag. Bordene er plassert i to rader, og en rad med oppgavebord imellom. På hvert oppgavebord er det konvolutter med oppgaver og utstyr til to lag. En persom sitter ved oppgavebordet og sørger for at lagene får utdelt og leverer oppgavene i riktig rekkefølge. En fra hvert lag, kommer fram til bordet og henter første oppgave, tar det med til laget sitt, og laget løser oppgaven. Svaret på oppgave 1 legges i konvolutt, klistres igjen og leveres på oppgavebordet før oppgave 2 kan hentes. Lagene bestemmer selv hvor lang tid de vil bruke på hver oppgave. De har 90 minutter til rådighet på alle oppgavene til sammen.

Den som har ansvaret for oppgavene i hvert land, skal være til stede, forklare reglene for deltakerne, og svare på spørsmål underveis. Det er viktig at oppgaveansvarlig er oppmerksom på eventuelle misforståelser som kan oppstå underveis. Hun/han bør gå rundt mellom lagene og se at alt er riktig forstått.

Når de 90 minuttene har gått, leveres oppgavene til oppgavejuryen, som vurderer dem før prosjektpresentasjonene. Lagene skal ikke få vite sin plassering før ETTER prosjektpresentasjonene.

Finale

I finalen stiller hvert av de tre lagene med fire elever, det samme laget som til semifinalen. Oppgavene i finalen er mer visuelle/praktiske enn i de innledende runder for at publikum i salen lettere skal kunne følge med. Ved poenglikhet i finalen gis ekstraspørsmål inntil rekkefølgen mellom de tre lagene er klar.

I finalen starter alle lag på 0 poeng, uavhengig av oppnådde poengsummer tidligere i konkurransen.

Finalen må foregå i en sal eller hall der lagene kan sitte foran på en scene, og der det er plass til publikum i salen (de lagene som ikke nådde til finalen).

Premiering

Alle klasser som deltar i KappAbel, får diplom. Diplomene distribueres av den norske prosjektledelsen i Froland.

De klasser fra hele Norden som sender inn kopi av svarkvitteringen innen en gitt frist, er med i trekningen av fem pengepremier. Det trekkes ut fem klasser i hver av de to kvalifiseringsrundene.

Alle lagene som kommer til finalen blir premiert. Premiene som lagene vinner, er til klassene som lagene representerer og er ment å skulle komme hele klassen til gode.

Nordisk finale

Vinnerlaget i finalen går videre til Nordisk finale. Der møtes ett lag fra hvert av de nordiske land. Lagene skal presentere klassens prosjekt fra semifinalen, og delta i en oppgavekonkurranse av samme type som i de nasjonale finalene. Stedet for nordisk finale går på omgang mellom de fem nordiske landene.

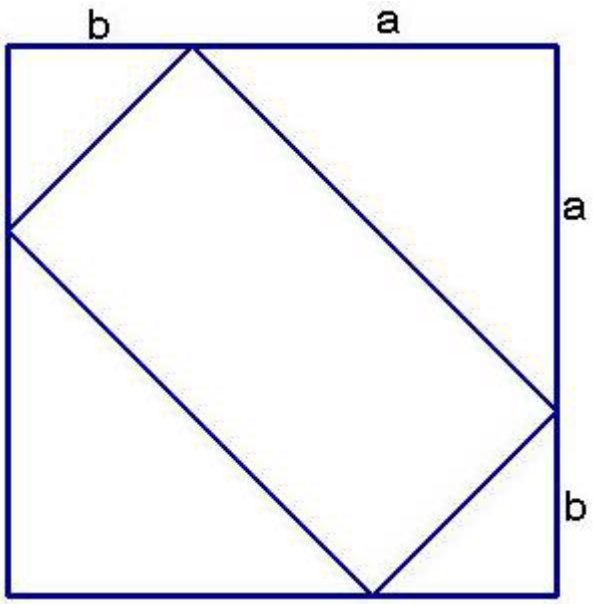
Under nordisk finale skal prosjektpresentasjonene foregå på engelsk. Dersom Finlands lag er fra den finsktalende delen av Finland, vil de kunne få presentere prosjektet sitt på finsk. Hvert lag får inntil 20 minutter til å presentere prosjektet. Etter at alle lagene har presentert prosjektet sitt, vil publikum kunne komme fram og stille spørsmål til lagene og se på utstillingen. Prosjektutstillingen skal være tilgjengelig for publikum dagen etter prosjektpresentasjonen. Da får lagene vise fram prosjektutstillingen til et større publikum, og fortelle om arbeidet med prosjektet.

Oppgavedelen av nordisk finale vil foregå på samme måte som i de nasjonale finalene, men denne gangen vil oppgavene bli presentert på engelsk. Lagene vil få oppgavene utdelt på sine egne språk. Etter at de har levert svarene sine skriftlig til dommerne, skal de presentere løsningene sine muntlig på engelsk.

KappAbel

Oppgavesett til første kvalifiseringsrunde 2005/06

Oppgave 1: Areal



Rektangelet på figuren er plassert slik at hjørnene deler sidene i kvadratet i forholdet 1 : 2, dvs lengden **a** er dobbelt så lang som **b**.

Hvor stor brøkdel av kvadratets areal er dekket av rektangelet?

SVAR (kryss av):

A: ☐ $\frac{1}{2}$ **B:** ☐ $\frac{1}{3}$ **C:** ☐ $\frac{4}{9}$ **D:** ☐ $\frac{5}{9}$ **E:** ☐ $\frac{1}{4}$

Oppgave 2: Idrett

Anna, Eva og Hans driver alle med to av følgende idretter:

Fotball, håndball, slalåm, basketball, tennis, golf

Ingen av dem driver med samme idrett som noen av de andre.

- Slalåmkjøreren og tennisspilleren dro på kino med Anna
- Eva er nabo med tennisspilleren
- Hans slo Eva og basketballspilleren i Monopol
- Fotballspilleren spiste lunsj med slalåmkjøreren
- Basketballspilleren er i slekt med håndballspilleren
- Fotballspilleren fikk en sms av basketballspilleren

Hvilke to idretter driver Anna, Eva og Hans med?

SVAR:
Sett to kryss i tabellen for hver av personene:

	Fotball	Håndball	Slalåm	Basket	Tennis	Golf
Anna						
Eva						
Hans						

Oppgave 3: Lån

Kari spør Petter om hun kan få låne 100 kr av ham.

”Nei, jeg hadde 100 kr, men nå har jeg brukt opp noe av det,” sier Petter.

Kari spør hvor mye han har brukt.

”Jeg har brukt nøyaktig ¼ av det jeg har igjen,” svarer Petter.

Hvor mye har Petter igjen?

SVAR:

Petter har ☐ kroner igjen.

Oppgave 4: Tallmanipulering

Her er eksempler på hva som hender med et tall når vi bruker ☻ på dem:

3 ☻ 9 10 ☻ 100 1 ☻ 1

Her er eksempler på hva som hender med et tall når vi bruker operasjonen ▲ på dem:

1 ▲ 5 20 ▲ 43 91 ▲ 185

Når ☻ og ▲ kombineres, får vi:

3 ☻ ▲ 21

og

n ☻ ▲ 53

n er et positivt helt tall. Hvilket tall er det?

SVAR:

n = _____

Oppgave 5: Appelsinpyramider

En stabel med appelsiner danner en pyramide med rektangulær grunnflate som måler 5 · 8 appelsiner.

Hver appelsin over dette nivået hviler i ei grop dannet av fire appelsiner i laget under. Øverst i pyramiden er det en enkel rad med appelsiner.

Hvor mange appelsiner er det i stabelen?

SVAR (kryss av):

A: ☐ 120 B: ☐ 144 C: ☐ 80 D: ☐ 100 E: ☐ 62

Oppgave 6: 8-sifret tall

Lag et åtte-sifret tall med sifrene 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 slik at det er ett siffer mellom 1-erne, to siffer mellom 2-erne, tre siffer mellom 3-erne og fire siffer mellom 4-erne.

SVAR (fyll ut):

Oppgave 7: Linjal

En linjal er akkurat 12 enheter lang. Men den er bare merket ett sted, nemlig 1 enhet fra enden. Dere skal plassere tre ekstra merker på linjalen slik at den kan brukes til å måle alle heltallige lengder, fra 1 til 12 enheter. Målingene skal foregå ved at linjalen bare brukes én gang.

Hvor mange enheter fra enden vil dere plassere de tre merkene, målt fra den samme enden som det allerede eksisterende merket?

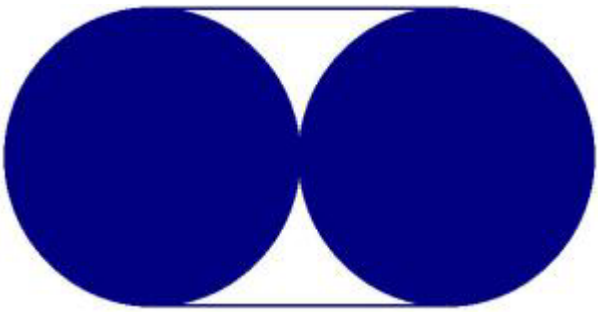
Det finnes flere løsninger, men vi er ute etter den løsningen der merkene er nærmest mulig det merket som allerede finnes.

SVAR (Fyll ut 3x):

	enheter		enheter		enheter

Oppgave 8: Sirkler

Radius i sirklene er 1 dm. De tangerer hverandre (berører hverandre i ett punkt). Finn arealet av det hvite området. Oppgi to siffer etter komma.

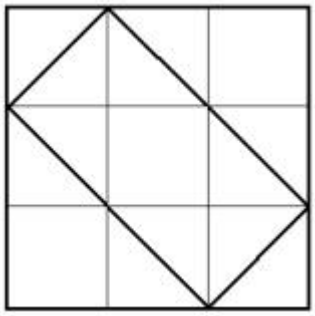


SVAR:

Arealet av det hvite området er: _____,_____ dm^2

Løsningsforslag, første runde 2005/06

Oppgave 1



Rett svar: c) 4/9
Rektangelet har areal 4 kvadratenheter og kvadratet har areal 9 kvadratenheter.

Oppgave 2

	Fotball	Håndball	Slalåm	Basket	Tennis	Golf
Anna				X		X
Eva		X	X			
Hans	X				X	

Den mest oversiktlige måten å se det på er å lage en tabell, og markere de umulige alternativene.
For eksempel vil første utsagn fortelle at Anna ikke er slalåmkjører eller tennisspiller.
De tre første utsagnene gir tabell 1, som viser at Anna er basketballspiller og Hans er tennisspiller:

Tabell 1:

	Fotball	Håndball	Slalåm	Basket	Tennis	Golf
Anna			---	X	---	
Eva				---	---	
Hans				---	X	

Tabell 2:

	Fotball	Håndball	Slalåm	Basket	Tennis	Golf
Anna	---	---	---	X	---	X
Eva	---	X	X	---	---	---
Hans	X	---	---	---	X	---

Oppgave 3

Rett svar: Petter har 80 kr igjen.

La x være det Petter har igjen. Da er x + ¼ x = 100. Det gir x = 80.

Oppgave 4

Rett svar: $n = 5$

Operasjonen ☻ betyr at tallet skal kvadreres, dvs n ☻ n^2

Operasjonen ▲betyr at tallet skal multipliseres med 2, og deretter skal man addere 3: n ▲ $2n + 3$

Når ☻og ▲ kombineres, får vi n ☻▲ 53

Det betyr at n ☻ $(53 - 3) : 2 = 50 : 2 = 25$

som gir $n = 5$ siden n skulle være et positivt tall.

Oppgave 5

Rett svar: d) 100

Stabelen er 5 lag høy, og hvert lag har en appelsin mindre i lengden og en appelsin mindre i bredden av rektangelet enn det som er under. Da blir totalt antall appelsiner i stabelen:

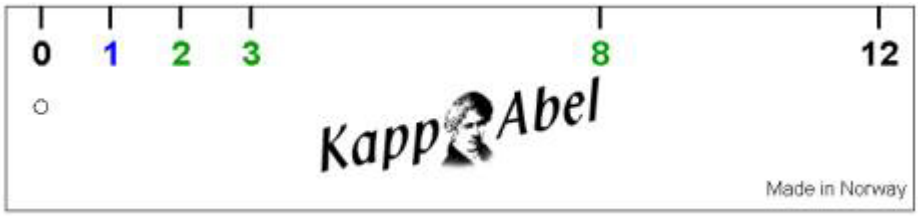
$$5 \cdot 8 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 = 100$$

Oppgave 6

Rett svar:	**2**	**3**	**4**	**2**	**1**	**3**	**1**	**4**
eller:	**4**	**1**	**3**	**1**	**2**	**4**	**3**	**2**

Oppgave 7

Rett svar: 2 enheter - 3 enheter - 8 enheter

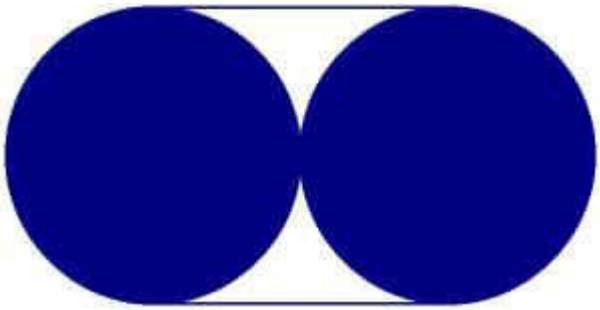


Da kan vi måle

Direkte: 1, 2, 3, 4, 8, 12

Ved regning:
4 = 12 – 8
5 = 8 – 3
6 = 8 – 2
7 = 8 – 1
9 = 12 – 3
10 = 12 – 2
11 = 12 – 1

Oppgave 8



Rett svar: Arealet av det hvite området er **0,86**.

Området er et kvadrat med areal $\mathbf{(2 \cdot 1)^2 = 4}$
minus to halvsirkler med til sammen areal π.

KappAbel

Oppgavesett til andre kvalifiseringsrunde 2005/06

1. TALLMØNSTER

De naturlige tallene fra 2 og oppover er skrevet i et bestemt mønster fordelt på 5 kolonner.

a) I hvilken kolonne finnes tallet 1000 hvis mønsteret fortsetter?
b) I hvilken kolonne forekommer tallet 2398?

A	B	C	D	E
	2	3	4	5
9	8	7	6	
	10	11	12	13
17	16	15	14	
	18	19	20	21
25	24	23	22	
	.	.	.	.
.	.	.	.	
	.	.	.	.

Svar (sett kryss):

a) A: ☐ B: ☐ C: ☐ D: ☐ E: ☐

b) A: ☐ B: ☐ C: ☐ D: ☐ E: ☐

2. FORKORTING AV BRØK

Ved å ordne sifrene 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 og 9, er det mulig å skrive en brøk om kan forkortes til ¼ . Det kan gjøres for eksempel slik:

$$\frac{1}{4} = \frac{7956}{31824}$$

Oppgaven går ut på å plassere alle sifrene 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 og 9 slik at det framkommer en brøk som kan forkortes til 1/5.

Det finnes mange riktige svar, men 3 løsninger gir full score.

Svar: A: $\frac{\square\square\square\square}{\square\square\square\square\square}$ B: $\frac{\square\square\square\square}{\square\square\square\square\square}$ C: $\frac{\square\square\square\square}{\square\square\square\square\square}$

3. FREMMEDSPRÅK

20 elever ble tilfeldig trukket ut til en spørreundersøkelse. I undersøkelsen kom det fram at 5 elever hadde valgt spansk, 6 fransk og 12 tysk. Det viste seg videre at 3 av disse elevene hadde både spansk og tysk, 2 hadde fransk og tysk og 1 hadde alle tre språkene.

Hvor mange elever hadde ingen av de tre språkene?

Svar: ☐ elever

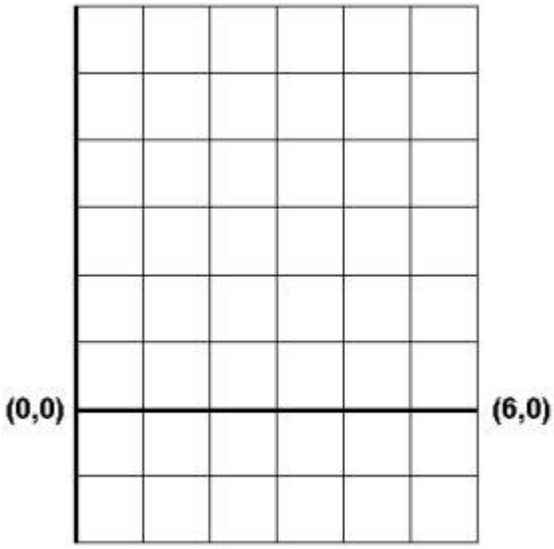
4. FOTTUR

Per gikk 117 km til sammen. Han startet søndag morgen og sluttet mandag kveld litt over en uke senere. Hver dag gikk han 1 km lenger enn dagen før.

Hvor mange km gikk han på onsdagen?

Svar: ☐ km

5: HAREHOPP

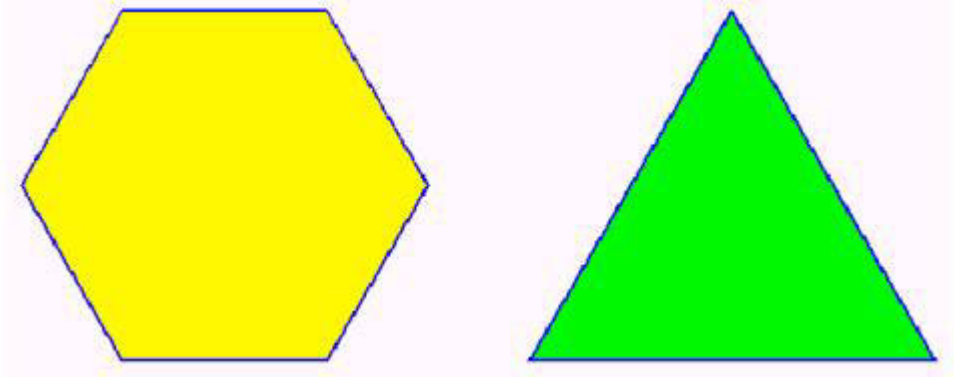


En hare hopper fra punktet (0,0) til punktet (6,0). Hvert hopp som starter i et punkt (x,y), må gå til punktet (x+1, y+1) eller (x+1,y-1). Haren kan IKKE hoppe til et punkt under x-aksen, for der er det gift …

Hvor mange forskjellige veier kan haren velge fra (0,0) til (6,0)?

Svar: ☐ veier

6. TREKANT OG SEKSKANT MED SAMME OMKRETS



En regulær sekskant (alle sider like lange og alle vinkler like store) og en likesidet trekant har like stor omkrets.

a) Hvilken figur har størst areal, og
b) hvor mye større er det?

Svar: a) Kryss av det som er riktig: ☐ Sekskanten ☐ Trekanten har størst areal.

b) Det største arealet er ☐ % større enn det minste.

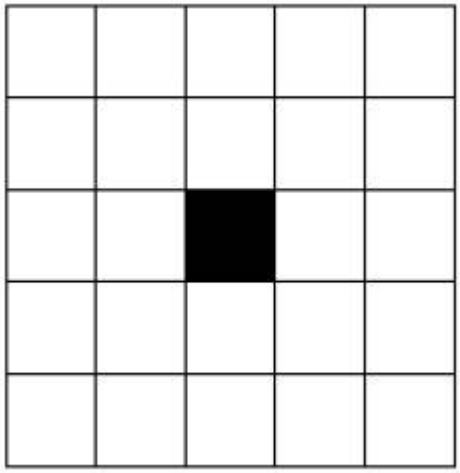
7. ELEVBEDRIFTEN

En elevbedrift tok på seg et oppdrag om å bygge 10 hundehus for en kennel. Kennelen ville ha alle hundehusene ferdig i løpet av en måned. For hvert hundehus skulle elevbedriften få 4000 kr. Men for hvert hundehus som ikke ble ferdig i tide, skulle de betale en straffesum på 1000 kr. Da måneden var over, hadde de tjent 15000 kr.

Hvor mange hundehus hadde elevbedriften klart å bygge?

Svar: ☐ hundehus

8. KVADRATER MED SORT RUTE



I et rutenett på 5x5 kvadrater kan vi finne kvadrater med størrelser 1x1, 2x2, 3x3, 4x4 og 5x5 ruter.

I hvor mange av disse kvadratene finner vi den sorte ruta?

Svar: I ☐ kvadrater

Løsningsforslag, andre runde 2005/06

Oppgave 1

Legg merke til at i de ulike kolonnene er tall som gir forskjellig rest når man dividerer med 8:
Tallene i de ulike kolonnene er på formen:

A	B	C	D	E
9+8k	**2+8k og 8k**	**3+4k**	**4+8k og 6+8k**	**5+8k**

k= 0, 1, 2, …

a) **B**
Siden 1000 = 8·125

b) **D**
Siden 2398 = 6 + 8 · 299

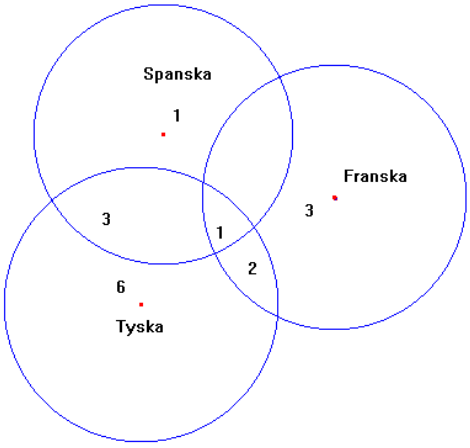
Oppgave 2

Følgende løsninger er mulige:

$$\frac{2697}{13485}, \frac{2937}{14685}, \frac{2967}{14835}, \frac{3297}{16485}, \frac{3729}{18645}, \frac{3847}{19235}, \frac{6297}{31485}, \frac{7629}{38145}, \frac{9237}{46185}, \frac{9627}{48135}, \frac{9723}{48615}$$

Oppgave 3

Ved hjelp av VENN-diagram ser vi :



16 elever hadde valgt spansk, tysk eller fransk. Da har 20 – 16 = 4 elever ingen av de tre språkene.

Oppgave 4

Svar: 12 km

La x være antall km Per går om søndagen. Da går han :

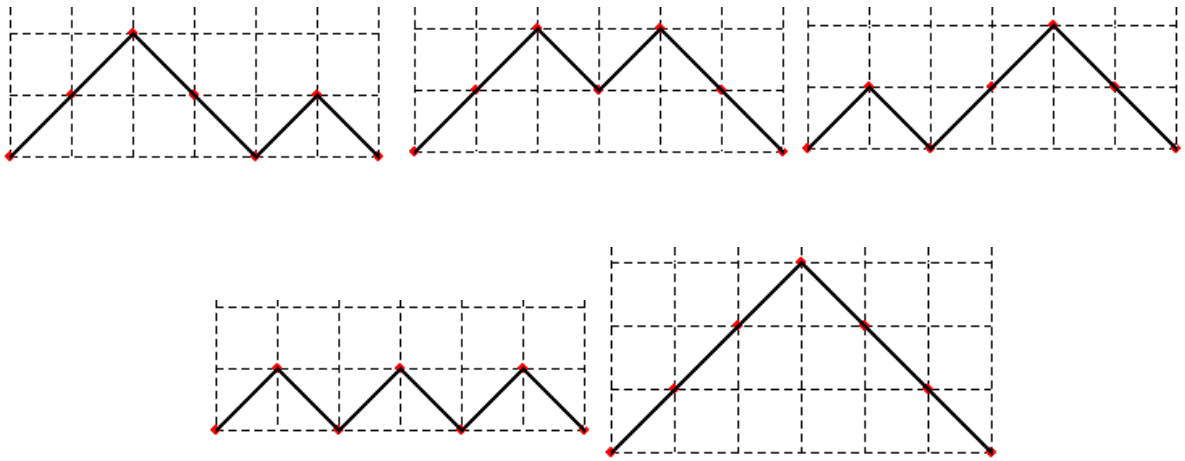
Søndag	Mandag	Tirsdag	Onsdag	Torsdag	Fredag	Lørdag	Søndag	Mandag
x	x+1	x+2	x+3	x+4	x+5	x+6	x+7	x+8

Summen er
9x+36=117
x=9

Onsdag gikk han (9+3)km=12 km

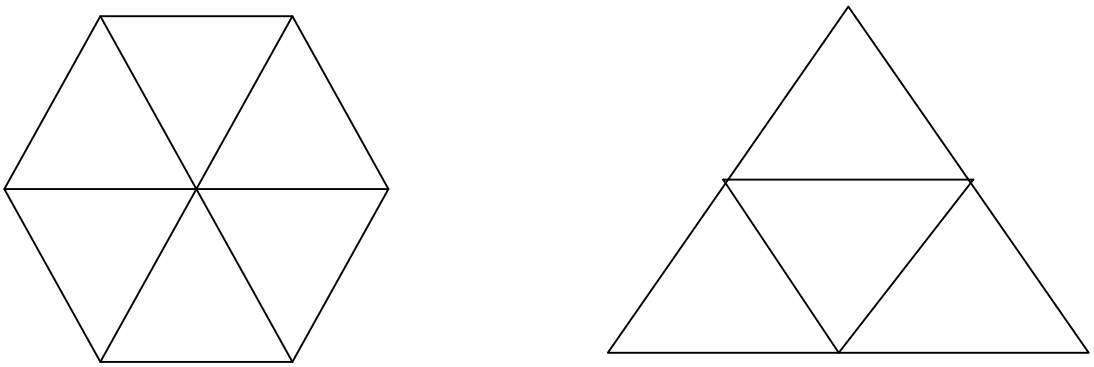
Oppgave 5

5 veier.



Oppgave 6

a) Sekskanten.
b) sekskantens areal er 50% større enn arealet av trekanten.



La siden i sekskanten være *s*. Da er siden i trekanten 2*s*
Den enkleste måten å se det på, er å dele sekskanten i 6 likesidete trekanter med side *s* og trekanten i 4 mindre kongruente likesidete trekanter med siden *s.*

Oppgave 7

Svar: 5 hundehus.

Hvis man ikke vil prøve og feile, kan man sette opp en tabell:

Bygde hundehus	Ikke bygde hundehus	Elevbedriften har fått inn
1	9	-5000 kr
2	8	0
3	7	5000 kr
4	6	10000 kr
5	5	15000kr
…	…	…

Hvis vi gjør det ved regning og sier at x er så mange hundehus de har bygd, vil det være 10-x hundehus som ikke er bygd. Pengene de mottar for hundehusene de har bygd er 4000x. Pengene de må betale i straff for hundehus de ikke har bygd ferdig er $(10-x)\cdot 1000$. Da blir likningen:

$4000x - (10-x)\cdot 1000 = 15000$

$x = 5$

Oppgave 8

Svar: 19 kvadrater.

Derav: 1 kvadrat på 5x5 ruter
4 kvadrater på 4x4 ruter
9 kvadrater på 3x3 ruter
4 kvadrater på 2x2 ruter
1 kvadrat på 1x1 rute.

KappAbel 2006

Semifinale

Oppgaveansvarlige

Ingvill M. Stedøy-Johansen og Svein H. Torkildsen
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen, Trondheim

Nødvendig utstyr

Ved alle bordene skal det ligge:

- 20 kladdeark
- Linjal
- 4 blyanter
- 1 blyantspisser
- 2 viskelær

Ekstrautstyr til enkeltoppgaver:

Oppgave 2

- 20 tellebrikker.

Oppgave 4

- En spillebrikke

Oppgave 6

- Kalkulator

Oppgave 7

- Spillebrett
- En hvit og 15 blå brikker

Oppgave 8

Tre pinner.

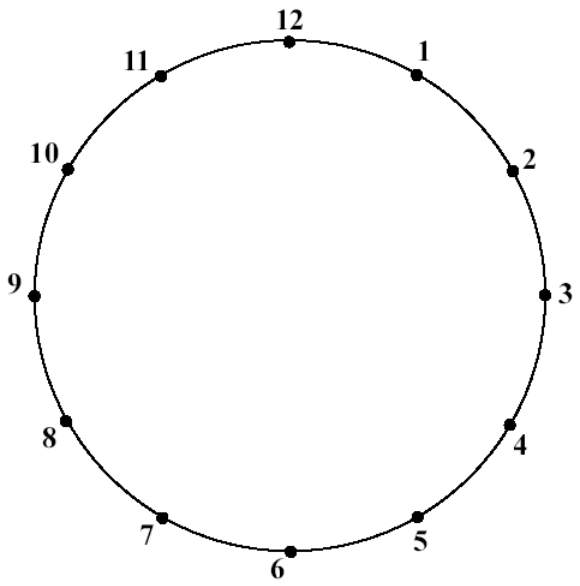
- En er farget i begge ender.
- En er farget i én ende.
- En er ikke farget.

Oppgave 1

Klokkerektangler

På arket finner dere ei klokkeskive der de hele timene er markert.
Hvor mange rektangler kan dere tegne ved å bruke heltallspunktene som hjørner?

Tegn og forklar på svararket.



Oppgave 2

Gustav hadde dekorert noen påskeegg som han ville gi bort i gave.

- Først fikk moren halvparten av eggene han hadde laget pluss et halvt egg.
- Så fikk farfaren halvparten av de eggene som var igjen pluss et halvt egg
- Deretter fikk onkelen halvparten av de eggene som var igjen pluss et halvt egg.
- Til slutt fikk søsteren halvparten av de eggene som var igjen pluss et halvt egg.

Da hadde Gustav gitt bort alle eggene.

Hvor mange egg fikk hver av familiemedlemmene?
Hvor mange påskeegg hadde Gustav dekorert?

Dere kan bruke tellebrikkene til å holde orden på ”eggene” når dere skal finne løsningen.

Oppgave 3

Tallkort

Disse tre kortene kaller vi *hablonger*.

6 72 18 24	36 48 6 30	60 12 18 42

Ingen av disse tre kortene er *hablonger*

15 12 48 20	7 49 28 70	2 24 32 16

Ett av kortene A-D er en *hablong.* Hvilket kort er det?

A	B	C	D
9 27 45 81	78 18 84 90	5 25 50 35	3 15 9 17

Oppgave 4

Fra tall til tall

I konvolutten finner dere et ruteark med tall i de ulike rutene. Dere skal ta spillebrikken og flytte fra rute til rute.
Start ved pila øverst til venstre, og gå ut ved pila nederst til høyre.
Brikken kan bare bevege seg vannrett og loddrett, ikke diagonalt, og bare en rute av gangen.
Dere kan kun besøke hver av rutene én gang.
Underveis skal dere regne ut hvor mange poeng brikken samler inn.
Det gjøres slik:

- Første rute gir så mange poeng som tallet viser.
- Andre rute gir det dobbelte av tallet som står der.
- Tredje rute gir tre ganger tallet som står der
- Fjerde rute gir fire ganger tallet som står der

og så videre

Tegn opp den veien dere mener gir høyest poengsum, og regn ut hva denne poengsummen blir.

5	-5	6	-3
-2	10	-8	7
9	-6	4	-4
-1	4	-5	1

Oppgave 5

Jung-run Chens påstand

I 1973 påstod kineseren Jung-run Chen at alle partall kan skrives som

$a + b \cdot c$ der a, b og c er primtall. For eksempel kan vi skrive

$8 = 2 + 2 \cdot 3$

Primtallene under 40 er: 2 – 3 – 5 – 7 – 11 – 13 – 17 – 19 – 23 – 29 – 31 – 37

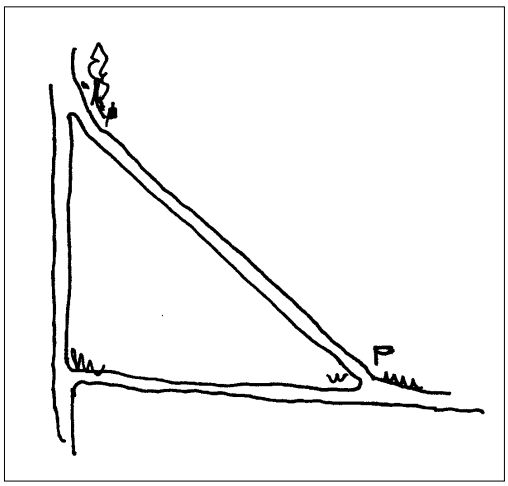
a. Undersøk Jung-run Chens påstand for tre tilfeldig valgte partall mellom 10 og 30.

b. Skriv 38 på så mange måter som mulig på formen $\boldsymbol{a + b \cdot c}$ der a, b og c er primtall.

c. Forklar hvordan dere kan vite at dere har fått med alle mulighetene for tallet 38.

Oppgave 6

Ballbanen



På et område som er avgrenset av tre veier skal det anlegges en liten ballbane.

Ballbanen skal ha form som et rektangel og den skal ligge inne i den rettvinklede trekanten. Katetene er 60 m og 80 meter. Hypotenusen er 100 meter.

Hvordan bør en legge ballbanen for at arealet skal bli størst mulig?

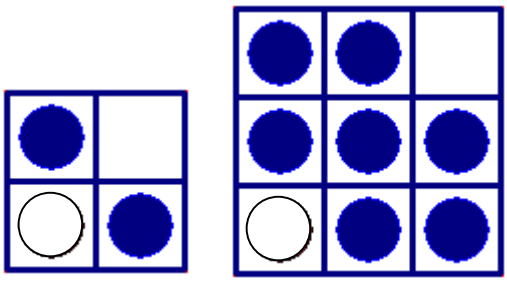
Tegn løsningen på svararket.

Beregn arealet til rektanglet.

Forklar hvordan dere mener rektanglet bør ligge for at det skal bli størst mulig.

Oppgave 7

Fra hjørne til hjørne



Utfordring:

Den hvite brikken skal flyttes til det tomme feltet.

Du kan flytte brikkene til ei ledig naborute, men ikke på skrå.

a. Hvor få flytt er det mulig å klare det på med ulike størrelser på brettet? Alle flytt telles uansett farge på brikken.

   i. 2x2 ruter?

   ii. 3x3 ruter?

   iii. 4x4 ruter?

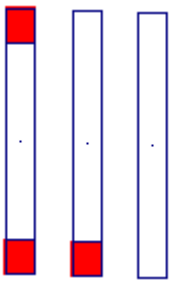
b. Ser dere et mønster fra oppgave a)? Hvor mange ganger må dere flytte i et 10x10 rutenett? Forklar hvordan dere tenker.

Oppgave 8

Farget eller fargeløs?

Dere har tre pinner.

- En er farget i begge ender.
- En er farget i én ende.
- En er ikke farget.



Pinnene er skjult slik at du ikke ser dem.

Du griper en tilfeldig ende på en av pinnene uten å se.

Du kan da bare se den andre enden på pinnen du har grepet.

Du skal nå gjette hvilken farge det er på den enden som er skjult.

Er det størst sjanse for å få rett hvis du gjetter

A. Samme type ende som du ser

(farget hvis du ser en farget ende, ikke farget hvis du ser en ikke farget ende)

B. Motsatt type av det du ser.

(farget hvis du ser en ikke faget ende, ikke farget hvis du ser en farget ende)

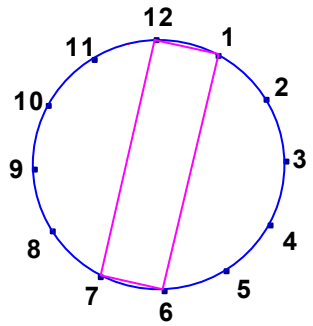
C. Eller er det like stor sjanse for å få rett uansett hva du velger?

Begrunn svarvalget.

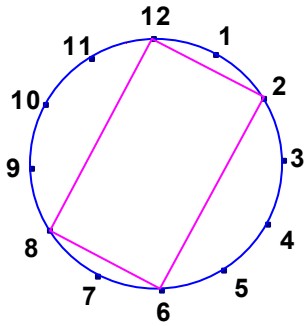
Løsningsforslag, semifinale 2006

Oppgave 1.

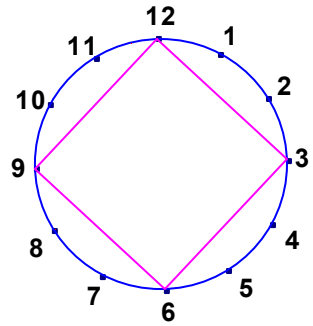
Det blir 15 forskjellige rektangler.



6 rektangler av samme størrelse som det med hjørner i
12 – 1 – 6 – 7



6 rektangler av samme størrelse som det med hjørner i
12 – 2 – 6 – 8



3 rektangler av samme størrelse som det med hjørner i
12 – 3 – 6 – 9

Oppgave 2

Moren	8
Farfaren	4
Onkelen	2
Søsteren	1
Gustav lagde til sammen	15

Forklaring eller utregning:

Gustav hadde ingen egg igjen til slutt. Hvis han hadde x egg igjen da han skulle gi noe til søsteren, får vi denne likningen:

$$x - (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}) = 0$$

Løser vi denne, får vi

$$x = 1$$

Søsteren fikk $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ egg.

Gustav hadde 1 egg igjen da søsteren skulle få egg.

Da onkelen skulle få egg, hadde Gustav y egg igjen.
Det gir en tilsvarende likning:

$$y - (\frac{y}{2} + \frac{1}{2}) = 1$$

Løser vi denne, får vi:

$$y = 3$$

Onkelen fikk $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$ egg. Gustav hadde 3 egg igjen da onkelen skulle få egg.

På akkurat samme måte får vi at de andre fikk 4 og 8 egg, og at Gustav hadde 15 egg til å begynne med.

Oppgave 3

B.
Legg merke til at alle hablonger har bare tall som er delelig med 6.
Ingen av de tre neste kortene har denne egenskapen.
Kort B er det eneste av de fire nederste kortene som har denne egenskapen.

Oppgave 4

Går vi innom alle rutene utenom –8, kan vi få summen 146.

Nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Tall	5	-5	6	-3	7	-4	4	-6	10	-2	9	-1	4	-5	1	
produkt	5	-10	18	-12	35	-24	28	-48	90	-20	99	-12	52	-70	15	0

Denne løsningen ble funnet av flere av lagene som deltok i semifinalen.
Men kanskje fins det en som gir høyere sum?

Oppgave 5

A Eksempler:
$10 = 2 + 2 \cdot 3$ $18 = 3 + 3 \cdot 5$ $24 = 3 + 3 \cdot 7$

B
$38 = 29 + 3 \cdot 3$
$38 = 23 + 3 \cdot 5$
$38 = 17 + 3 \cdot 7$
$38 = 13 + 5 \cdot 5$
$38 = 5 + 3 \cdot 11$
$38 = 3 + 5 \cdot 7$

c Arbeider vi systematisk, får vi oversikt på alle muligheter.

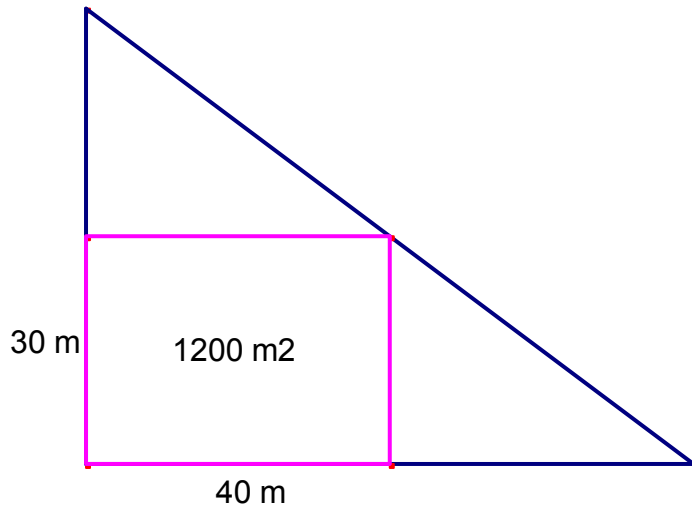
La først *a* være det største primtallet under 38. Det er 37.
Vi må da legge 1 til 37. Det fins ikke to primtall som gir produkt 1.
Vi lar nå *a* være det nest største primtallet under 38. Det er 31.
Vi må da legge 7 til 31. Det fins ikke to primtall som gir produkt 7.

Forstetter vi nå og lar *a* være hvert av de andre primtallene, ser vi at
29 gir en løsning fordi $3 \cdot 3 = 9$
23 gir en løsning fordi $3 \cdot 5 = 15$
19 gir ingen løsning fordi det ikke fins to primtall med produkt 19

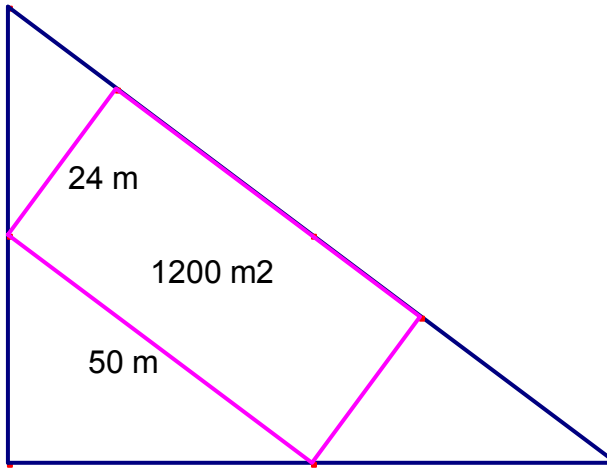
17 gir en løsning fordi 3 · 7 = 21
13 gir en løsning fordi 5 · 5 = 25
11 gir ingen løsning fordi det ikke fins to primtall med produkt 27
7 gir ingen løsning fordi det ikke fins to primtall med produkt 31
5 gir en løsning fordi 3 · 11 = 33
3 gir en løsning fordi 5 · 7 = 35
2 gir ingen løsning fordi det ikke fins to primtall med produkt 36

Oppgave 6

To løsninger som begge gir areal 1200 m².



Rektanglet har tre av hjørnene midt på hver av sidene.



Rektanglet har to av hjørnene midt på katetene og to hjørner på hypotenusen.

Oppgave 7

a

i.	2x2 ruter	5
ii.	3x3 ruter	13
iii.	4x4 ruter	21
	5x5 ruter	29

b

Antall flytt øker med 8 for hver gang siden til spillbrettet øker med 1.
Antall flytt med 10x10 ruter kan vi da finne ved å legge til 8 seks ganger til fra 21, altså $21 + 6 \cdot 8 = 21 + 48 = 69$

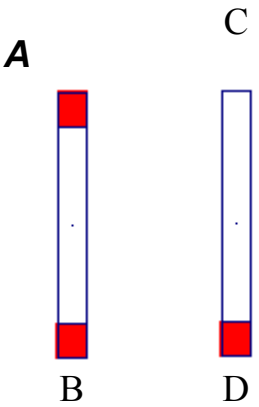
Det er også mulig å bregne antall flytt direkte:
Hvis s er sidelengden til rektanglet viser uttrykket $8s - 11$ antall flytt som trengs.
I et 10x10 rutenett blir det da $8 \cdot 10 - 11 = 80 - 11 = 69$ flytt.

Ett av lagene i semifinalen fant denne sammenhengen:

2x2	$1 \cdot 4 + 1 = 5$	Oddetall nr 1 gange 4 pluss 1	Regner vi ut fra antall ruter på sidene etter dette systemet, får vi uttrykket $(2s - 3) \cdot 4 - 1$
3x3	$3 \cdot 4 + 1 = 13$	Oddetall nr 2 gange 4 pluss 1	
4x4	$5 \cdot 4 + 1 = 21$	Oddetall nr 3 gange 4 pluss 1	
5x5	$7 \cdot 4 + 1 = 29$	Oddetall nr 5 gange 4 pluss 1	
10x10	$17 \cdot 4 + 1 = 69$	Oddetall nr 9 gange 4 pluss 1	

Oppgave 8

Svaralternativ A er rett.



La oss si at du ser en farget ende. Da har vi garantert ikke tatt pinnen uten farge.
Vi har enten tatt den med to røde ender eller den med én rød ende.
Vi holder da på én av tre ender, enten A, B eller C.

Holder vi på A, er skjult ende lik den vi ser.
Holder vi på B, er skjult ende lik den vi ser.
Holder vi på C, er skjult ende IKKE lik den vi ser.

I to av tre tilfelle vil skjult ende være lik den vi ser.
Det er 66,7 % sjanse for at den skjulte enden er lik den vi ser.

KappAbel 2006

Finale

Oppgaveansvarlige

Ingvill M. Stedøy-Johansen og Svein H. Torkildsen
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen, Trondheim

Oppgave 1

Fra kvadrat til likesidet trekant

Dere får utdelt et kvadratisk ark. Dere skal brette arket slik at det framkommer en likesidet trekant der en av sidekantene i kvadratet utgjør en av sidekantene i trekanten.

Lever det brettede resultatet, og forklar hvordan dere brettet og hvorfor det er en likesidet trekant.

Oppgave 2

Fordeling av kuber

Dere har fått 100 små kuber og 5 kopper som er merket med nummer 1, 2, 3, 4 og 5. Fordel kubene i koppene på følgende måte:

a)
- Kopp nummer 2 inneholder 2 kuber mer enn kopp nummer 1
- Kopp nummer 3 inneholder 2 kuber mer enn kopp nummer 2
- Kopp nummer 4 inneholder 2 kuber mer enn kopp nummer 3
- Kopp nummer 5 inneholder 2 kuber mer enn kopp nummer 4

Hvor mange kuber er det i hver kopp?

b) Fordel kuber på liknende måte som i a), men denne gangen skal hver kopp inneholde 4 mer enn den forrige. Hvor mange blir det i hver kopp da?

c) Hvor mange blir det i hver kopp hvis hver kopp skal inneholde 6 mer enn den forrige?

d) Fordel kuber på liknende måte som i a-c), men denne gangen skal hver kopp inneholde n kuber mer enn den forrige. Hvor mange kuber blir det i hver kopp? Hva er den største verdien n kan ha når den første koppen ikke kan være tom?

Svarark oppgave 2

a **2 mer**

1	**2**	**3**	**4**	**5**

b **4 mer**

1	**2**	**3**	**4**	**5**

c **6 mer**

1	**2**	**3**	**4**	**5**

d ***n* mer**

1	**2**	**3**	**4**	**5**

Største verdi for *n:*

Oppgave 3

Baller i posen.

Finalelederen har en boks eller pose med 7 baller: 1 rød, 2 blå og 4 gule.
(Andre farger eller gjenstander kan selvsagt også brukes).

Deltakerne får kun vite at det er 7 baller i posen og at alle ballene ikke har samme farge.
Utfordringen deres blir å anslå hvor mange baller det er av hver farge.

Lederen trekker en tilfeldig ball opp av posen og viser fargen.
Gruppene noterer fargen.
Ballen legges tilbake i posen og ballene blandes godt.
Ny ball trekkes opp og fargen noteres.
Gjenta til det er 10 observasjoner.

Gruppene får nå anledning til å levere inn sitt svar.
(Hver gruppe kan kun levere svar én gang.)

Det trekkes 10 ganger til og fargene noteres.

Gruppene får igjen anledning til å levere inn svaret sitt.

Slik fortsetter vi inntil alle gruppene har levert svar.

Poenggiving:
Laget som først leverer inn riktig og begrunnet svar får inntil 5 poeng.
Laget som leverer inn riktig og begrunnet svar som nr 2 får inntil 4 poeng.
Laget som leverer inn riktig og begrunnet svar sist får inntil 3 poeng.
Lag som leverer inn samtidig får inntil 5 eller inntil 4 poeng hver.

NB Lag som leverer inn feil svar får inntil 2 poeng.

Oppgave 4

Korttriks

Finalelederen har en kortstokk med kortverdiene 1-9.

Lagene trekker 2 kort hver og lager to tosifrede tall av dem.
Eksempel: 5 og 8 gir tallene 58 og 85.

Lagene finner summen av de tosifrede tallene.
Eksempel: 58 + 85 = 143

Denne summen deles på summen av verdien til de to kortene.
Eksempel: 8 + 5 = 13

Nå dividerer lagene summen av de to tosifrede tallene på summen av kortverdiene.
143 : 13 = 11

Alle får samme svar uansett hvilke kort de har trukket.

Lagene skal forklare hvorfor det blir slik.

Oppgave 5

Dele likt

Dere har tre beger. (Begrene kan enkelt lages av melke- eller juice-kartonger.)

Det ene er fylt med 8 dl ris.

De to andre er tomme, ett rommer 5 dl og det andre rommer 3 dl.

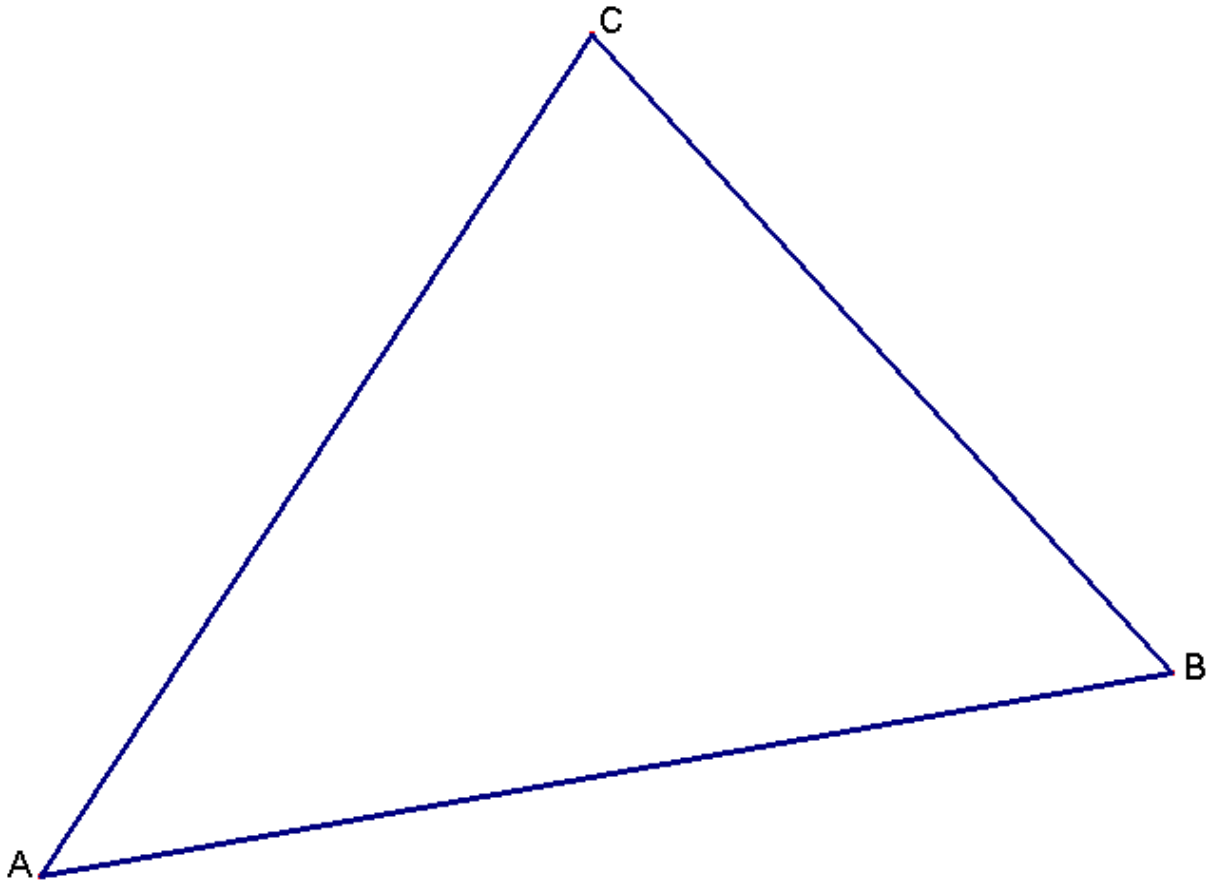
Dere skal bruke alle begrene til å måle opp risen slik at dere til slutt har to beger med 4 dl ris i hver.

Forklar hvordan dere kom fram til løsningen, og hvorfor det blir riktig.

Ekstraoppgave til finalen.

Fagnanos problem.

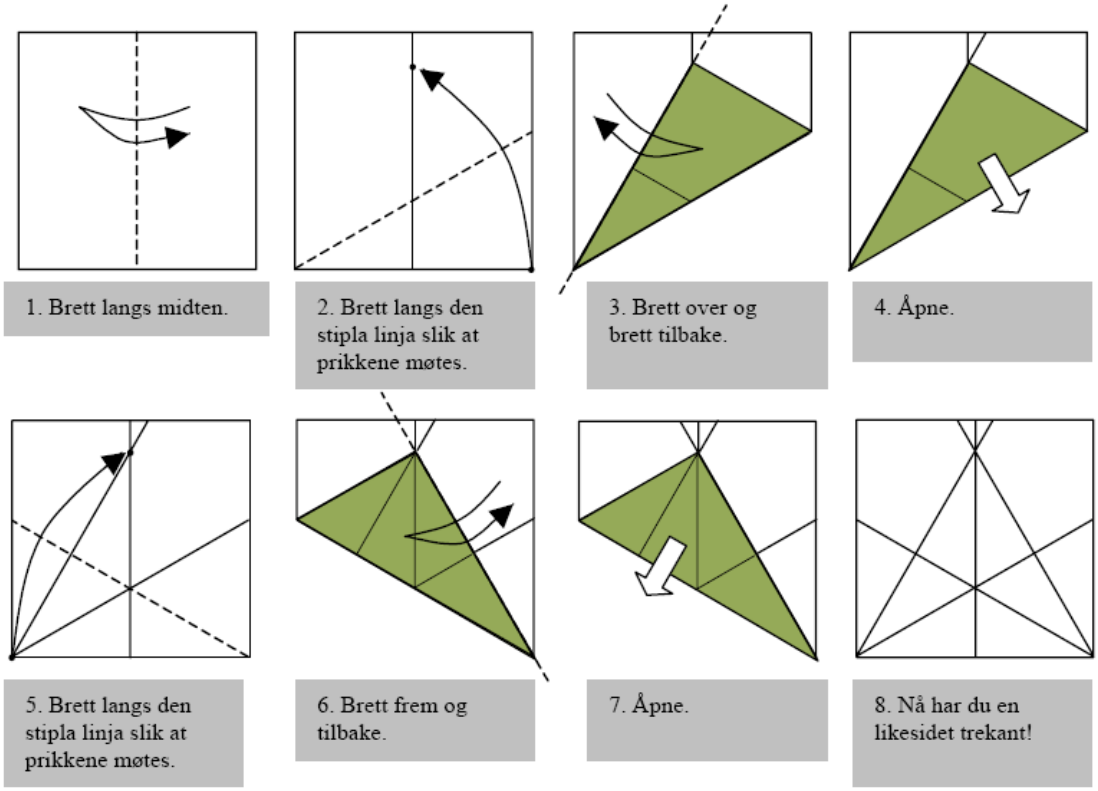
Tegn en trekant med ett hjørne på hver av sidene til trekanten ABC.
Trekanten du tegner skal ha så liten omkrets som mulig.
Hvordan tror dere hjørnene bør plasseres? Hvorfor?



Løsningsforslag, finale 2006

Oppgave 1

Her er ett forslag til løsning:



Oppgave 2

En god tilnærming kan være å først fordele 20 kuber i hver kopp.

a) Deretter flyttes 4 kuber fra kopp nr 1 til kopp nr 5. Da er det 24 i nr 5 og 16 i nr 1.
Så flyttes 2 kuber fra nr 2 til nr 4. Da er det 22 i nr 4 og 18 i kopp nr 2.

Resultat:
Kopp nr 1: 16
Kopp nr 2: 18
Kopp nr 3: 20
Kopp nr 4: 22
Kopp nr 5: 24

b) Flytt 8 kuber fra kopp nr 1 til kopp nr 5
Flytt 4 kuber fra kopp nr 2 til kopp nr 4
Resultat:
Kopp nr 1: 12 kuber
Kopp nr 2: 16 kuber
Kopp nr 3: 20 kuber
Kopp nr 4: 24 kuber
Kopp nr 5: 28 kuber

c) Flytt 12 kuber fra kopp nr 1 til kopp nr 5
Flytt 6 kuber fra kopp nr 2 til kopp nr 4
Resultat:
Kopp nr 1: 8 kuber
Kopp nr 2: 14 kuber
Kopp nr 3: 20 kuber
Kopp nr 4: 26 kuber
Kopp nr 5: 32 kuber

d) Flytt $2n$ kuber fra kopp nr 1 til kopp nr 5
Flytt n kuber fra kopp nr 2 til kopp nr 4
Resultat:
Kopp nr 1: $20 - 2n$ kuber
Kopp nr 2: $20 - n$ kuber
Kopp nr 3: 20 kuber
Kopp nr 4: $20 + n$ kuber
Kopp nr 5: $20 + 2n$ kuber

Hvis kopp nr 1 ikke kan være tom, må n være mindre enn eller lik 9.

Oppgave 3

Det bør gjøres en del forsøk før en anslår fordelingen av baller.
Et godt og riktig svar bør inneholde en vurdering av hvor stor brøkdel hver farge utgjør i forhold til det antall observasjoner som foreligger. Disse brøkene bør så sammenliknes med sjudeler. Brøkene 1/7 – 2/7 – 4/7.

30-40 observasjoner vil kunne gi et godt nok grunnlag for et kvalifisert anslag.
Trekker en ball 70 ganger vil en ha et godt grunnlag å bygge på, og det er enkelt å sammenlikne med brøkene som har nevner 7.

Oppgave 4

Forslag til forklaring:

Kortverdier a og b

Summen av de to tosifrede tallene: 10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a + b)

Når vi dividerer 11(a + b) på (a + b) blir svaret 11!

Det kan selvsagt føres andre former for begrunnelse!

Dommer vurderer svar og gir poeng ut fra det.

Oppgave 5

Det er mulig å dele risen på denne måten

	8	**0**	**0**	Vi starter med et fullt og to tomme beger.
1	5	0	3	3-begeret fylles
2	5	3	0	Ris fra 3- begeret helles over i 5-begeret
3	2	3	3	3-begeret fylles igjen
4	2	5	1	5-begeret fylles med ris fra 3-begeret som da har 1 dl ris
5	7	0	1	5-begeret helles over i 8-begeret
6	7	1	0	1 dl fra 3-begeret helles over i 5-begeret
7	4	1	3	3-begeret fylles, og det er 4 del igjen i 8-begeret
8	4	4	0	Ris fra 3-begeret helles over i 5-begeret

KappAbel 2006

Nordisk finale

Trondheim 27.06.06

Oppgaveansvarlige

Ingvill M. Stedøy-Johansen og Svein H. Torkildsen
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen, Trondheim

Oppgave 1

Bruk pentablokkene dere har fått utdelt til å lage så mange ulike regulære femkanter som mulig.

Sammenlign arealene av de ulike femkantene dere har laget.

Oppgave 2

En boks har sider som er:

96 kvadratcentimeter

252 kvadratcentimeter

168 kvadratcentimeter

Hva er de mulige dimensjonene på boksen (lengde, bredde og høyde)?

Velg riktig mengde ris som vil fylle boksen.

(Elevene kan velge mellom tre forskjellige beholdere fyllt med ris).

Oppgave 3

En spesiell type dartspill kan gi deg poengene

11, 16, 23, 26, 29 og 40

med hver pil.

Finn flest mulig måter du kan få akkurat 100 poeng på.

Hvor mange piler trenger du hver gang?

Hva er det minste antall piler du må kaste for å få akkurat 100 poeng?

Oppgave 4

Papir-biljard spilles på et rektangulært ruteark med “lommer” i de fire hjørnene.

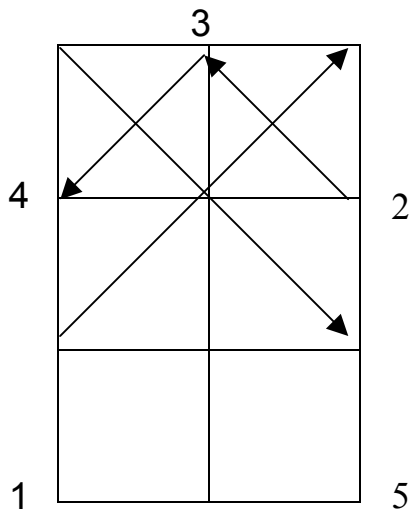
Hver ball skytes fra nederste venstre hjørne med 45 graders vinkel, og ballens bane markeres på bordet til den ender i et hull.

Diagrammet viser en 2x3 tabell med 5 støt (inkludert start og slutt), og 6 kvadrater er passert.

Undersøk større tabeller, og finn forholdet mellom antallet støt og kvadrater som blir passert.

Hvilken dimensjon er det på tabellen som kommer til å ha 30 kvadrater passert, og 8 støt?

Vis svarene deres på geobrettet.



Oppgave 5

Du får følgende melding:

HOPE – YOU = WIN

Ulike bokstaver star for ulike siffer. O = 0.

Hvis du løser problemet vil kanskje laget ditt vinne?

Dere må finne alle mulige løsninger, og argumentere for det hvis dere mener det bare fins en mulig løsning.

Løsningsforslag, nordisk finale 2006

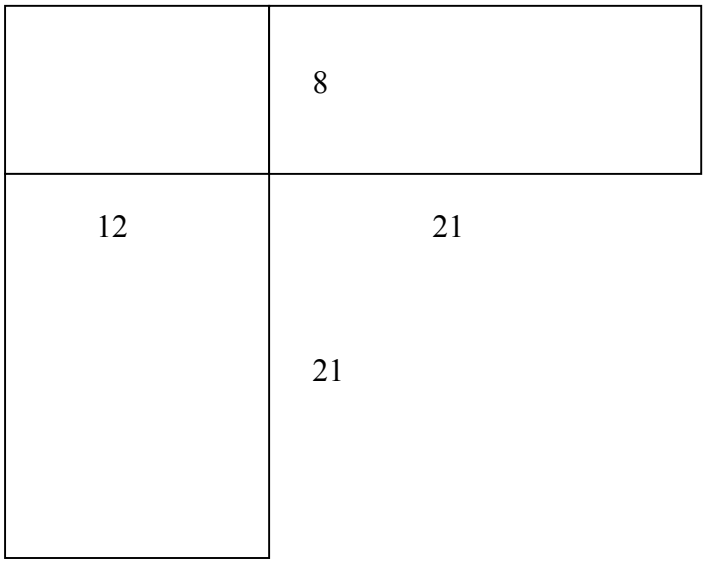
Oppgave 2

For å lage en boks må to og to sidekanter være like. I tillegg gjelder at for de tre ulike størrelsene av sidekanter må hver av dem ha en felles sidekant med en av de andre.

$$96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$
$$168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$
$$252 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

Hvis vi prøver å kombinere disse ser vi at hvis vi lar 8 være felles sidekant for sideflatene med areal 96 og 168, 12 felles sidekant for sideflatene med areal 96 and 252, så vil 21 være felles sidekant for sideflatene med areal 168 and 252.

Boksen har dimensjonene 8 x 12 x 21 cm.
Volumet er litt mer enn 2 liter.



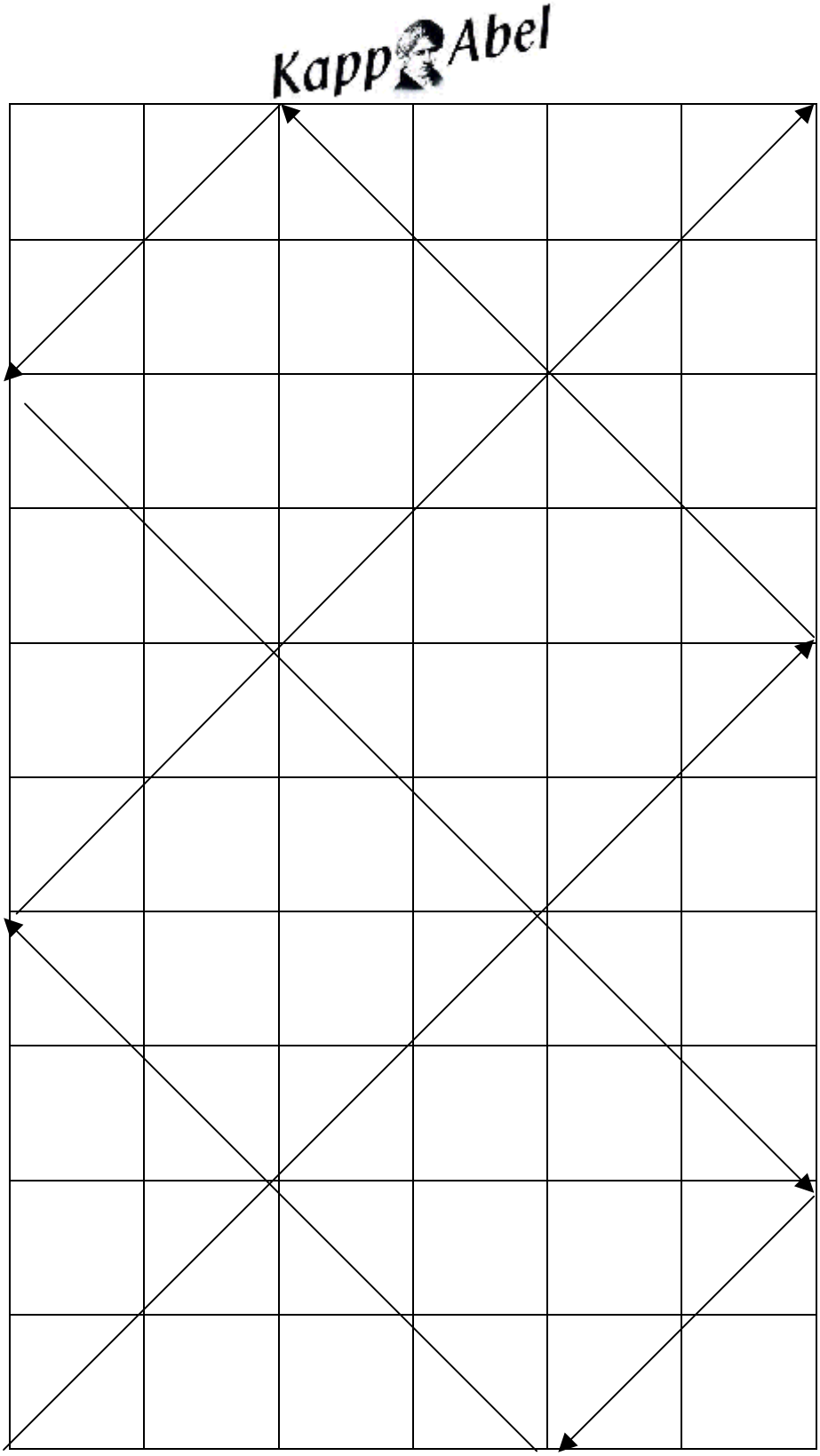
Oppgave 3

Fire er det minste antall piler (11+23+26+40, eller 16+26+29+29)

Andre kombinasjoner inkluderer:
11+11+23+26+29
11+11+16+16+23+23

Oppgave 4

6x10.
Antallet kvadrater krysset er MFM (minste felles multiplum) av sidelengdene. For å finne antall støt må man dividere dimensjonen av tabellen med SFF (største felles faktor) av dimensjonene, og legge sammen resultatene. MFM av 6 og 10 er 30, SFF av 6 og 10 er 2, og summen av 6/2 og 10/2 er 8.



Oppgave 5

1053 – 806 = 247

Bilder fra utstillingen av prosjektoppgavene

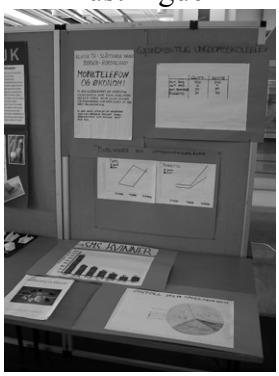
Akershus

Aust-Agder

Buskerud

Finnmark

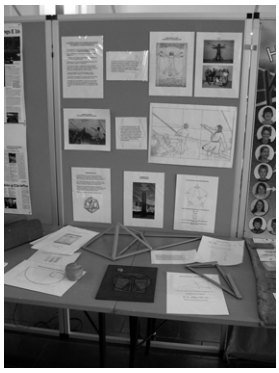
Hedmark

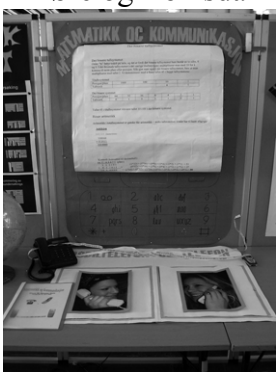

Hordaland

Møre og Romsdal

Nordland

Nord-Trøndelag

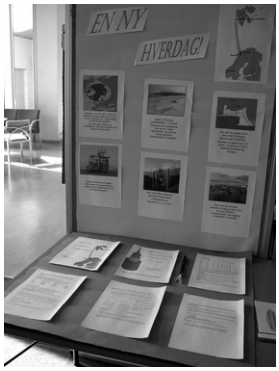

Oppland



Oslo

Rogaland

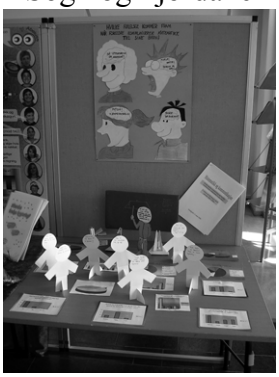
Sogn og Fjordane



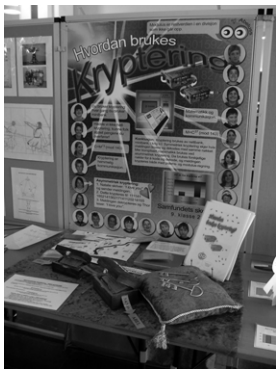
Svalbard

Sør-Trøndelag

Telemark

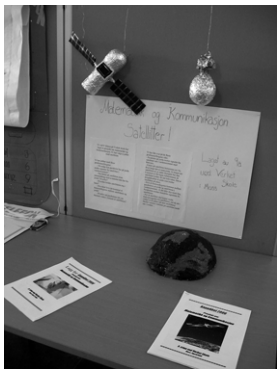


Troms



Vest-Agder

Vestfold



Østfold

PROSJEKTOPPGAVEN

Alle klasser som deltar i KappAbel oppfordres til å gjennomføre prosjektoppgaven.

De ulike landene har egne regler for prosjektkonkurranser som går uavhengig av semifinalen.

Klassene som deltar i semifinalen for KappAbel, skal gjennomføre en prosjektoppgave i matematikk som en del av semifinalen. Hele klassen skal være med i arbeidet med prosjektet, som vil telle 50% i semifinalen.
Erfaringer viser at de som lar arbeidet med prosjektet gå over en lengre tidsperiode, oppnår bedre resultater enn de som starter sent, selv om arbeidsmengden ikke behøver å være så forskjellig.

Prosjektarbeidet vil bli bedømt av en jury satt sammen av lærere, matematikere og en ekspert som er utvalgt spesielt med henblikk på prosjekttemaet hvert år. Grunnlaget for bedømmelsen er

1. En prosesslogg
2. En faglig rapport
3. En publikumsvennlig presentasjon av prosjektet som omfatter både en utstilling og en muntlig fremføring.

Nedenfor vil vi presisere hvilke retningslinjer klassene skal gå etter i forhold til prosesslogg, faglig rapport og presentasjon, og hvilke kriterier som blir brukt ved bedømmingen.

Alle må velge samme tema for prosjektet. Det blir oppgitt ved skolestart hvert år, slik at klassene kan begynne å planlegge prosjektet så tidlig som mulig.

Et prosjekt blir best hvis elevene tar utgangspunkt i noe de lurer på. Da er forskertrangen størst, og de kan få svar på spennende spørsmål. Underveis i arbeidet med å finne svar på spørsmålene, dukker det helt sikkert opp uventede ting som gjør at spørsmålene må omformuleres, eller det stilles nye spørsmål. Dette vil vi gjerne høre om i loggene!

Temaene for prosjektene vi gi rom for stor frihet. Bare fantasien setter begrensninger. Men hele tiden skal matematikken stå i fokus. Uansett hva elevene velger å undersøke, skal de jobbe med "matematiske briller"!

Det er viktig at <u>matematikken</u> blir synliggjort gjennom hele arbeidet med prosjektet.

1. Prosesslogg

Det skal skrives logg fra arbeidet med prosjektet.
Loggen skal gi svar på:

- Hvordan klassen kom frem til problemstillingen de har arbeidet med.
- Hva som er gjort under hver arbeidsøkt i prosjektperioden, hvilke faglige problemer som oppstår, og hva som gjøres for å løse dem.
- Hvordan samarbeidet i gruppen/klassen har fungert.
- Hvordan elevene selv til slutt vurderer det arbeidet de har gjort med prosjektet, ut fra de vurderingskriteriene som er gitt nedenfor.

Prosessloggen skal være på maksimum 3 maskinskrevne A4-sider

2. Faglig rapport

Den faglige rapporten skal inneholde

1. Forside med opplysning om emne, klasse og dato for ferdigstilling.
2. Forord der problemstilling klargjøres og begrunnes.
3. Hoveddel som beskriver arbeidet med problemstillingen. Denne delen skal vise hvilke spørsmål det er arbeidet med, hvilke resonnementer og beregninger som er utført og hvilke resultater disse fører til. Det oppfattes som positivt hvis elevene kan få frem hvordan nye oppdagelser og problemstillinger dukket opp underveis i arbeidet.
4. Konklusjon: Kort oppsummering med svar på de spørsmål og problemstillinger som var utgangspunkt for arbeidet
5. Kilder: Tittel og forfatter på alt materiale som er benyttet under arbeidet med prosjektet: bøker, filmer, internettsider, brosjyrer, intervjuer osv.

Den faglige rapporten skal være på inntil 6 maskinskrevne A4-sider, utenom forsiden og kildehenvisningene.

3. Publikumsvennlig presentasjon

a. Utstilling:
Det som skal stilles ut, må få plass i en eske som ikke er større enn 1/2 kubikkmeter. Hvis det lages plakater, skal det ikke være mer enn to A1-plakater, og resten skal få plass på et rektangulært bord som er 1m langt og 50cm bredt. Det er viktig at dette overholdes. Prosjektoppgaven skal stilles ut i lokalitetene for runde 3 i konkurransen.

b. Fremføring:
De fire elevene som representerer klassen i semifinalen, skal gi en muntlig presentasjon av prosjektet på 10 minutter. Fremføringen skal foregå etter oppgavedelen av runde 3, med de øvrige KappAbel-deltakerne som tilhørere.

Vurdering:
Ved bedømmingen av prosesslogg og faglig rapport blir det lagt vekt på:

- originalitet, kreativitet og faglig fordypning
- i hvilken grad elevene klarer å kommunisere og hvordan arbeidet med prosjektet har utviklet seg.
- i hvilken grad det går frem av de skriftlige produktene at de har oppdaget og forstått det matematiske innholdet i temaet.

Ved bedømmelsen av utstillingen og fremføringen blir det lagt vekt på

- i hvilken grad matematikken blir synliggjort gjennom den publikumsvennlige presentasjonen.
- i hvilken grad den publikumsvennlige presentasjonen vil vekke matematikkinteresse hos andre barn og unge.
- den kunstneriske utformingen av prosjektutstillingen.

Poeng til 3. runde:

Oppgavedel	inntil 40 poeng
Prosesslogg og faglig rapport	inntil 25 poeng
Utstilling og fremføring	inntil 15 poeng

Oppgavedelen av 3. runde skal løses av fire representanter fra klassen. Det **skal** være to jenter og to gutter på laget. Det eneste unntaket som aksepteres, er hvis det ikke finnes to jenter eller to gutter i klassen.

De tre beste lagene fra 3. runde, vil gå videre til finalen. Ved lik poengsum gis ekstraoppgaver inntil de tre finalelagene er klare.

Vinnerlagene fra landsfinalene går videre til den nordiske finalen.

.

Vil du være med?

Gå inn på
www.kappabel.com

og meld på din klasse!