UiT
NORGES
ARKTISKE
UNIVERSITET

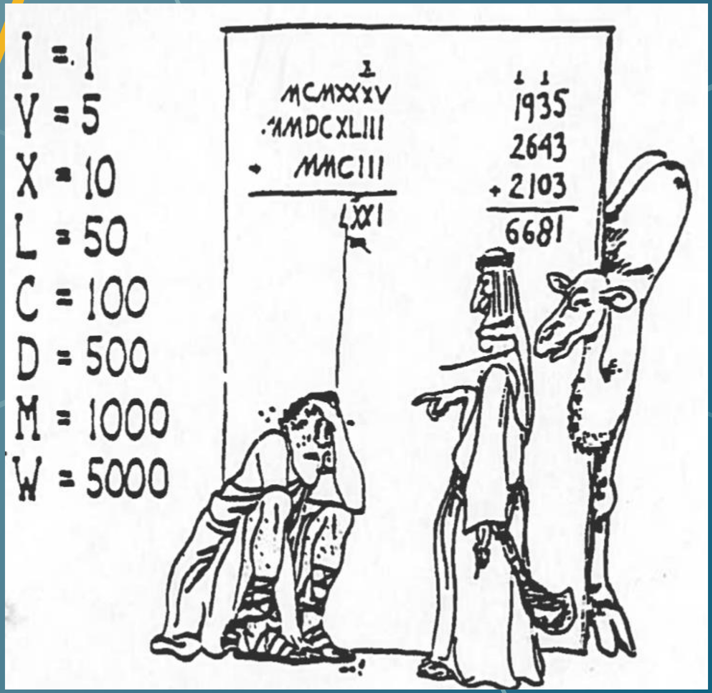
Ord-symboler-formelspråk: Trekk fra matematikkens historie

Steinar Thorvaldsen

Novemberkonferansen i Trondheim, 2017

- Tallene
- Pytagoras' musikkteori
- Geometri
- Algebraens tre faser

Se: https://munin.uit.no/bitstream/handle/10037/3247/book.pdf



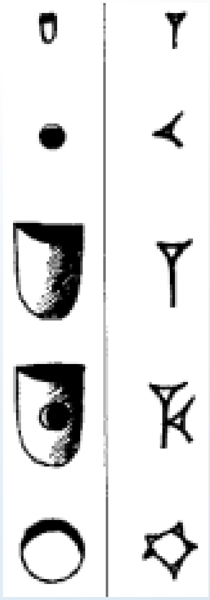
Hvordan tallene fikk navn

	1	2	3	4	10	11	12
Norsk	Første	Andre	Tredje	Fjerde	Tiende	Ellevte	Tolvte
Norsk	En	To	Tre	Fire	Ti	Elleve	Tolv
Engelsk	One	Two	Three	Four	Ten	Eleven	Twelve
Tysk	Ein	Zwei	Drei	Vier	Zehn	Elf	Zwölf

De første bruk av tall

Mesopotamia og ved Den persiske bukt, 3000 f.Kr

- **Konkrete representasjoner med leirfigurer:**
- Liten kjegle symboliserte 1
- Kule symboliserte 10
- Stor kjegle symboliserte 60
- Stor gjennomhullet kjegle 600
- Ball 3600.



G. Ifrah, 1997

- Man begynte å gjemme gjenstandene i leirkapsler.
- Fikk så ideen å framstille kapsler ved symboler påskrevet utenpå.

Folketellingen år 2001

Would you like to have instructions in English?
Call 800 32 032.

اُردو میں مزید معلومات کیلئے
اس نمبر پر فون کیجئے 80032032

إن كنت في حاجة الى إرشاد إتصل
برقم الهاتف التالي : ٨٠٠ ٣٢.٣٢

Haddii aad warbixin af-soomaali ah u baahan tahay,
soo wac teleefoonka 800 32 032.

Si desea orientación en idioma español,
llame al número 800 320 32.

Nếu bạn cần chỉ dẫn bằng việt ngữ ?
Hãy điện thoại số 800 32032

Deshironi udhezime ne gjuhen shqipe?
Telefononi ne numrin 800 32 032!

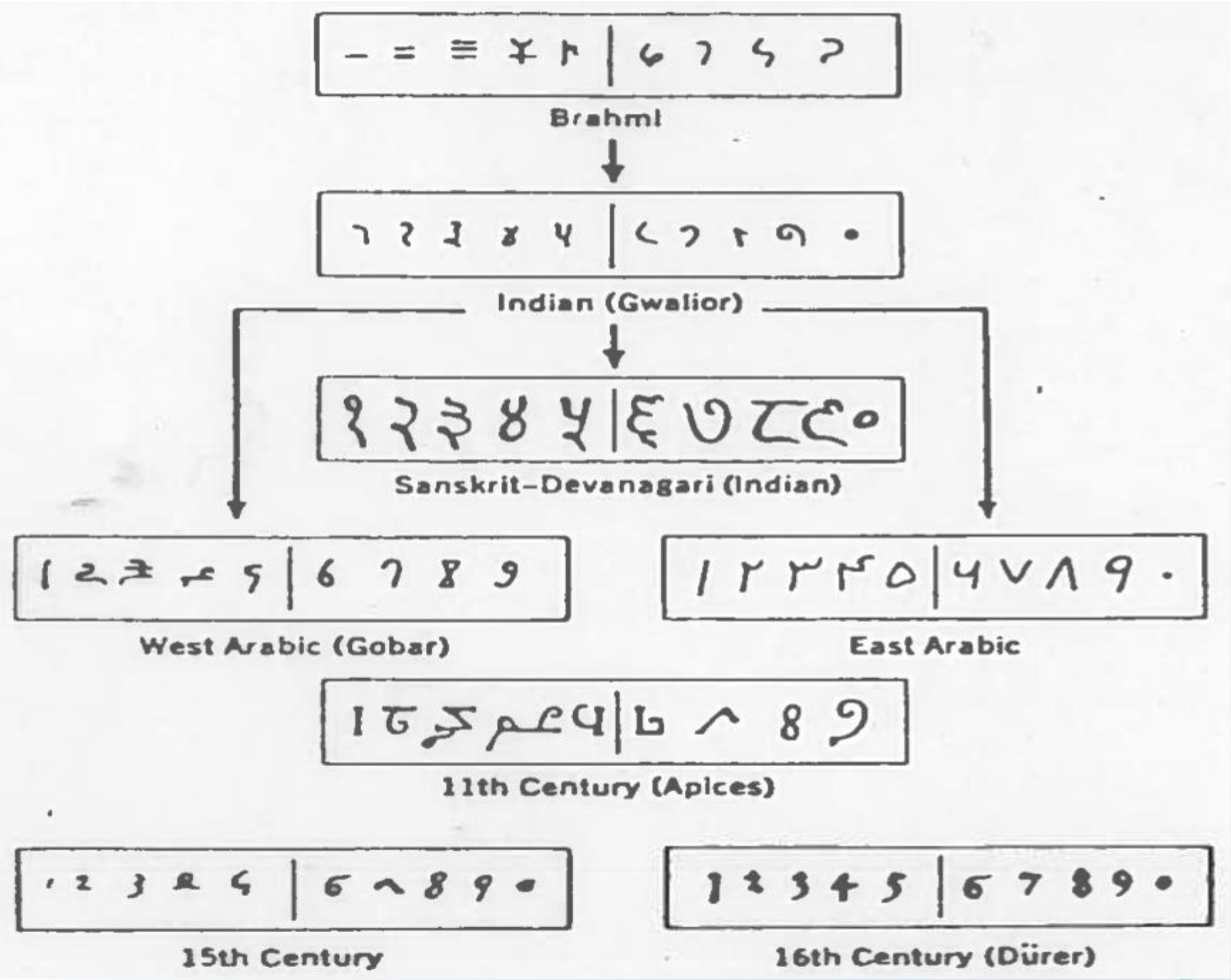
Za dodatna obavestenja na srpskohrvatskom nazvati
broj 800 32 032.

Türkçe bilgi almak için 800 32 032 numaralý telefona
baþvurabilirsiniz.

در صورت نیاز به راهنمائی به زبان فارسی
با شماره تلفن 80032032 تماس بگیرید.

படிவத்தை நிரப்ப தமிழில் உதவி அவசியமா?
தொலைபேசி 800 32032 இல் தொடர்புகொள்ளவும்

Tallsymbolenes historie



(K.Menninger, 2011)

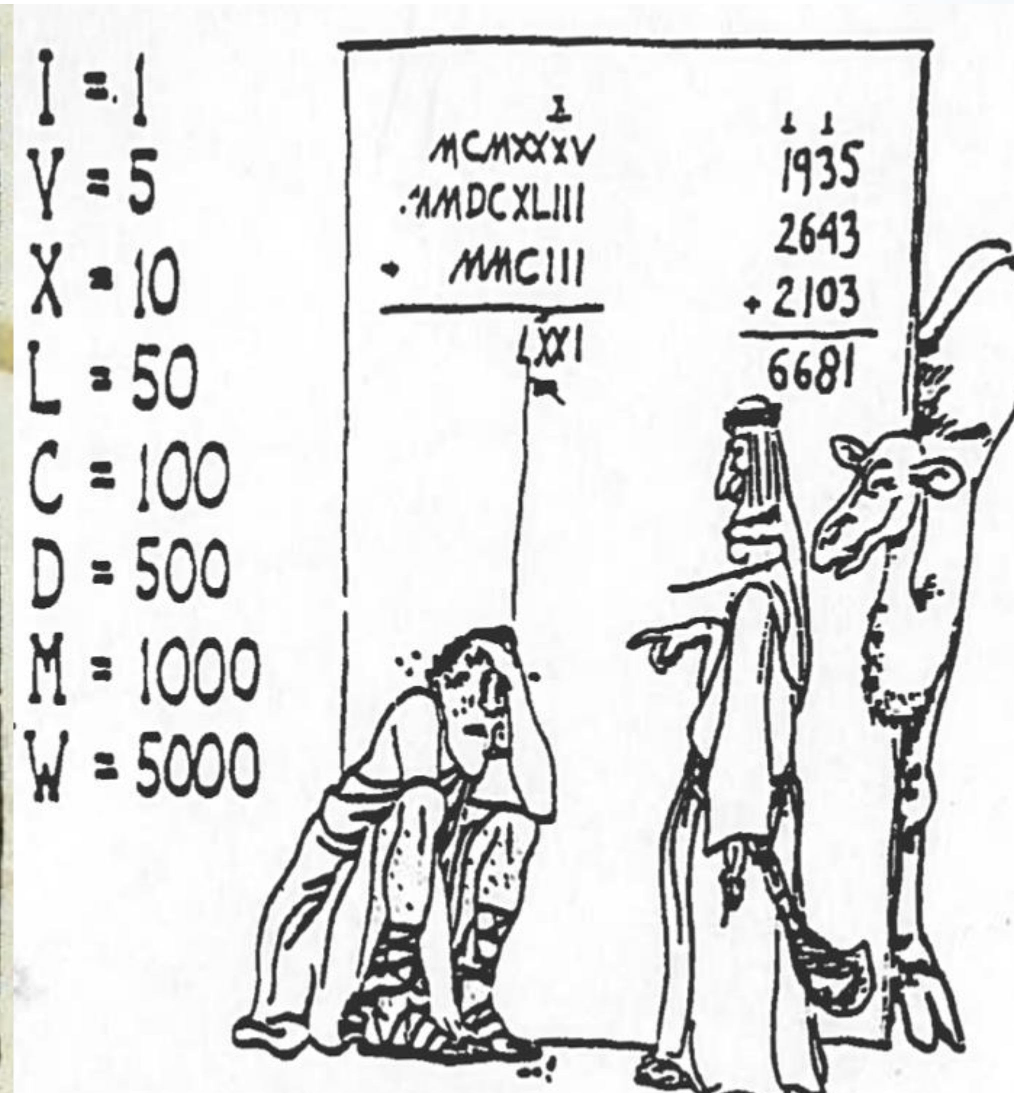
Hauks bok (gammelnorsk ca 1310)

Hér byrjar algorismum. List þessi heitir algorismus. Hana fundu fyrst indverskir menn ok skipudu med .x. stofum þeim er svá eru ritnir:

vidrlagning	**= tillegging**	**= addisjon**
afdráttr	**= fratrekking**	**= subtraksjon**
tvifaldan	**= tofolding**	**= fordobling**
helmingaskipti	**= halvdeling**	**= halvering**
margfaldan	**= mangfolding**	**= multiplikasjon**
skipting	**= deling**	**= divisjon**
taka rót undan	**= ta rot av**	**= rotutdraging**

Kampen mellom to tallsystemer

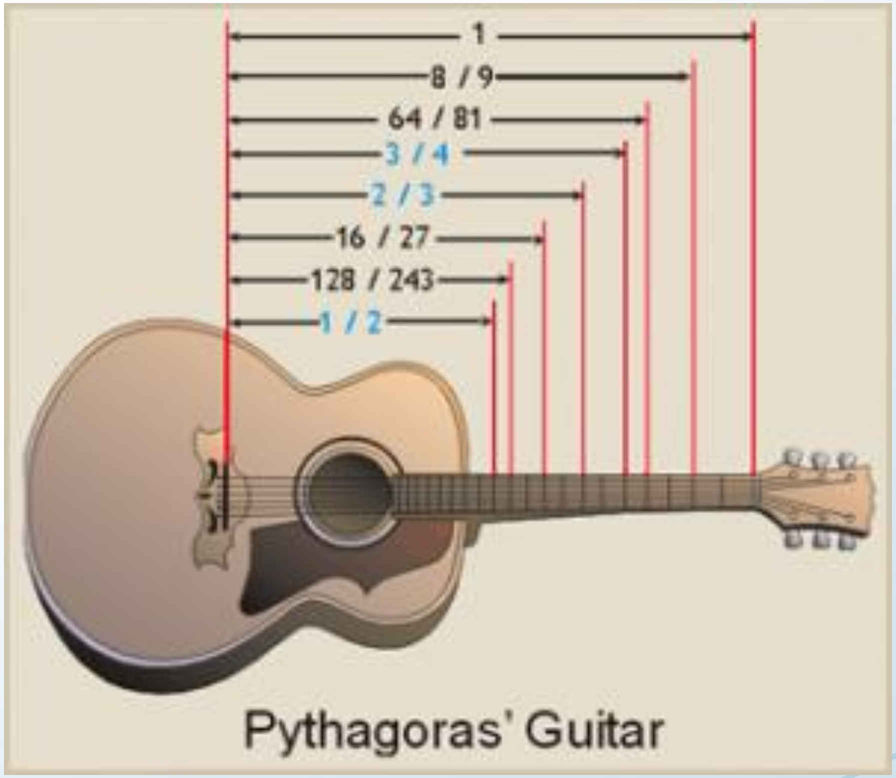
(Typus Arithmeticae, 1535)



Pytagoras' musikkteori (500 f.Kr)

Stilte opp forholdet mellom heltall for et enkelt instrument med en streng (monokord):

prim	sekund	ters	kvart	kvint	sext	septima	oktav
1/1	8/9	64/81	3/4	2/3	16/27	128/243	1/2



Pytagoras' filosofiske drøm

- Ville lage «musikkteorier» for andre deler av virkeligheten.
- Slagord: **Alt er tall!**

Hvorfor overtok geometrien som den grunnleggende matematikk hos grekerne?

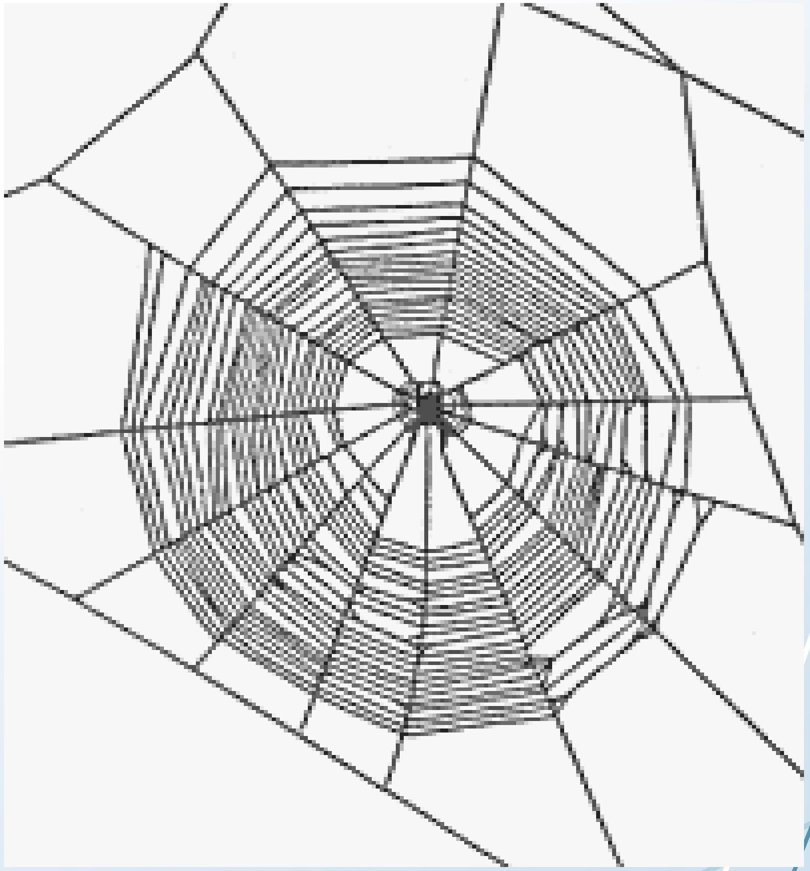
- **Hippasos** oppdaget at det fantes tall, for eksempel kvadratroten av 2, som *ikke* kunne skrives som brøker.

- Disse ville ødelegge pytagoreernes filosofiske system.
- Slike «tall» ble senere kalt **irrasjonale tall**.

- Den første krise i matematikken.
- For Euklid (300 f.Kr) ble geometrien det grunnleggende: *Elementene*
- Geometrien hadde et rikere innhold enn tallene (dvs. de rasjonale, **Q**)

Geometrien og den visuelle matematikk

- Fagets bakgrunn
  - –Naturen
  - –Praktisk landmåling

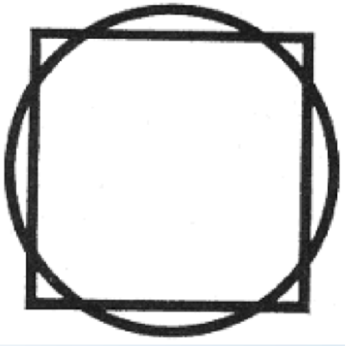


Euklids formalisering (300 f.Kr)

- Geometri fundament for matematikken
- Logikk og stringens
- Ble trendsetter i faget
- Skoledannende for undervisningen i 2000 år

Tallet pi

- Største enkeltproblem i matematikken: Sirkelens kvadratur
- Den egyptiske matematiker Ahmes (ca 1700 f.Kr) skriver i Rhindpapyrusen at:
- *En sirkel og et kvadrat har samme areal dersom kvadratets sidekant er 8/9-deler av sirkelens diameter.*
- Lett å se at dette gir pi = 256/81=3,1605...



"Rhindpapyrusen" er 5,44 meter lang og 33 cm bred. Vi kan kjenne igjen geometriske figurer. Denne papyrusen er laget av Ahmes ca. år 1700 f.Kr.

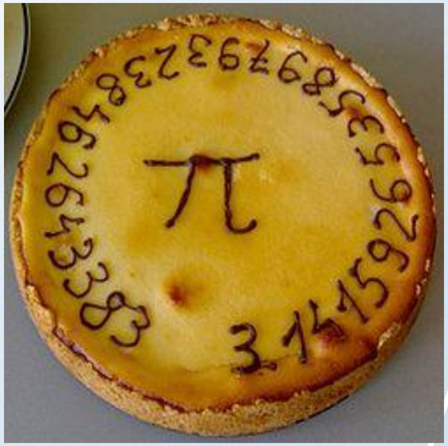
Tallet pi 3,14...

- 3 1/8 = 3,125 (Leirtavler Babylon)
- 30/10 = 3 ??? (Jødisk 950 f.Kr, 1.Kongebok Kap 7): «*Så laget han det støpte hav. Det var helt rundt og målte **ti alen** fra kant til kant. Høyden var fem alen, og det trengtes en snor på **tretti alen** for å nå rundt det.»* Men det opplyses også at det hadde «kant som på et beger og var formet som en lotusblomst». Ingen matematisk fadese.

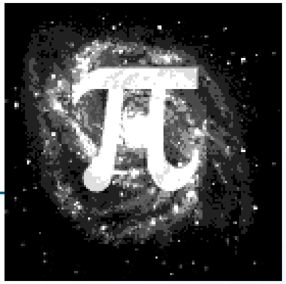
Karet i kong Salomos tempel hadde form som en lotusblomst

Tallet π forts.

- La en regulær 96-kanter rundt sirkelen,
  ga pi mellom 3 1/7 og 3 10/71, dvs 3,1416
  (Arkimedes 250 f.Kr)
- Bokstaven π introdusert
  (William Jones, 1706. Første bokstav i *perimetros* = omkrets)
- π er et *transcendent* tall
  (Lindemann, 1882)
- 206 milliarder siffer kjent…
  (Dr. Kanada, Tokyo, 2000)
- Pi dagen, mars den 14. feiret siden 1988.
  (og lille pi-dagen den 22.juli (22/7=3,1428..)



OPPGAVE



- Aryabhata i India (år 510 e.Kr.) skrev:
  "*Adder 4 til 100, multipliser med 8, og adder 62000. Dette er tilnærmet omkretsen til en sirkel med diameter 20000*".

  Hvilken verdi for pi brukte Aryabhata i den siterte teksten? Gi en vurdering av hvor god denne verdien er i historisk sammenheng.

Algebraens tusenårige historie:
Tre faser: retorisk, synkopert og symbolsk med formelspråk

- **A. Retorisk algebra**
- Ordet algebra har vi fått fra det arabiske ordet **aljabr**, som betyr å gjenopprette eller sette sammen brukne bein.
- Opphav i Egypt og Babylonia.
- Perioden fram til Diofantos (250 e.Kr), men strekker seg ennå 1000 år lengre i de fleste kulturer.
- Alle matematiske oppgaver beskrevet ved hjelp av vanlige ord, og fulle språklige setninger ble brukt for å uttrykke sammenhenger.

Gjett og juster - metoden

- **Kalles gjerne også «Hau-regning»:**
- Eksempel (problem 26 fra Rhindpapyrusen):
- *En "hau" og en kvart gir tilsammen 15.*
- *Regn med 4, legg til 1/4 dvs 1 og tilsammen 5.*
- *Del ut 15 med 5 og får 3. Endelig multipliser 4 med 3 og får 12.*
- *Den søkte "hau" er 12.*

"Rhindpapyrusen" er 5,44 meter lang og 33 cm bred. Vi kan kjenne igjen geometriske figurer. Denne papyrusen er laget av Ahmes ca. år 1700 f.Kr.

OPPGAVER: gjett og juster

- OPPGAVE 1
  Løs følgende problemer fra Rhindpapyrusen (problem 24 og 32) ved hjelp av metoden med "gjett og juster" (regula falsi):
  a) *En størrelse og 1/7 av størrelsen summeres. Svaret blir 19. Hva er størrelsen?*
  b) *En størrelse, 1/3 av størrelsen og 1/4 av størrelsen summeres. Svaret bli 2. Finn størrelsen.*
  Forklar hvordan denne løsningsmetoden bygger på en lineær sammenheng mellom størrelsene.

- OPPGAVE 2
  Et halsbånd gikk i stykker under en kjærlighetsstrid. En tredjedel av perlene falt ned, en femtedel ble liggende på tøybenken, en sjettedel fant piken og en tiendedel samlet elskeren sammen. Seks perler ble liggende igjen på snoren. Hvor mange perler hadde smykket? Løs dette med "gjett og juster " metoden. Start med verdien 60.

Retorisk algebra.

- Eksempel fra Babylonsk leirtavle:
- *La oss si at summen av lengde og bredde av et rektangel er 32 og at arealet av det er 252. Vi vil finne lengde og bredde.*
- Vi følger metoden:
- Ta halvparten av 32, det er 16. Deretter
- $16 \cdot 16 = 256$
- $256 - 252 = 4$
- Kvadratrota av 4 er 2.
- $16 + 2 = 18$ det er lengden.
- $16 - 2 = 14$ det er bredden.
- Kontroll: Jeg har multiplisert lengden 18 med bredden 14 og fått 252, og dette er arealet.

B. Synkopert algebra

- Fra Diofantos (250 e.Kr.) til Francois Viète (slutten av 1500 tallet)
- Symbolene en slags forkortelser, ikke operativ bokstavregning.
- Benytter symboler for en ukjent størrelse og potenser av denne.
- Diofantos' symboler:

  ζ - symbol for ukjent størrelse x

  Δy - symbol for x^2

  Ky - symbol for x^3

  ΔyΔ - symbol for x^4

  ΔKy - symbol for x^5

  KyK - symbol for x^6
- Kalles *synkopert* på grunn av bruken av ordforkortelser i en ellers retorisk framstilling
- En overgangsfase
- Likninger hvor man ønsker heltallige løsninger kalles **diofantiske likninger**.

Synkopert algebra forts.

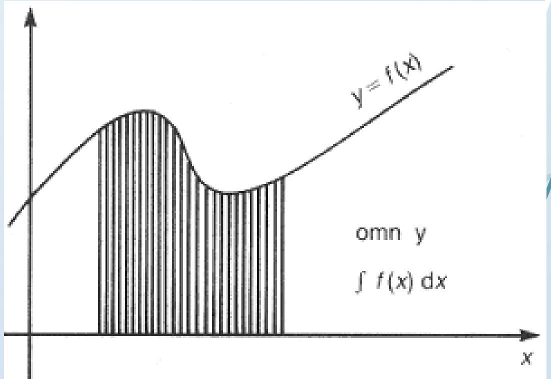
- Tidlig på 1400-tallet begynte abacistene (matematikklærere) å ta i bruk forkortelser for *ukjente*:
- **C** er forkortelse for cosa som betyr ting/ukjent (x),
- **Ce** er forkortelse for censo som betyr kvadrat (x^2),
- **Cu** er forkortelse for cubo som betyr kube (x^3).
- Tegnet **R** ble brukt som forkortelse for Radix som betyr *kvadratrot*, da de arabiske matematikere hadde betraktet et kvadrattall som vokst ut fra en "rot".
- Spesielt Gutenbergs oppdagelse av boktrykkerkunsten rundt 1440 ga fart i utviklingen av symboler

Synkopert algebra forts.

- **+** og **–**
  Tyskeren Johannes Regiomontanus var trolig den første som brukte symbolene i et upublisert manuskript fra 1456. Symbolet **+** er sannsynligvis en forkortet skriveform for det latinske ordet *et* som betyr *og*. På slutten av 1500-tallet var også symbolene **p** (piu) og **m** (meno) for *pluss* og *minus* mye brukt i Italia.
- √
  Det moderne *rottegnet* ble innført av tyskeren Christoff Rudolff i hans algebrabok fra 1525.
- **=**
  Robert Recorde innfører to parallelle linjer som tegn for *likhet* i 1557.
- **×**
  Kryssymbolet for *multiplikasjon* ble innført av engelskmannen William Oughtred i 1631. Leibniz innførte prikksymbolet **·** i 1686.
- **÷**
  Det første *divisjonstegnet* i en trykt bok ble brukt av Johann Henrich Rahn i 1659. Dette symbolet hadde lenge vært i bruk som minustegn i Skandinavia og deler av Europa. Men tegnet har sin symbolske bakgrunn i to tall som adskilles.

C. Symbolsk algebra og formelspråket

- Juristen *Francois Viète* (1540-1603) utvider symbolbruken og bruker bokstaver også for *koeffesienter* i en likning.
- Konsonanter B, C, D,... for *kjente* størrelser og vokaler A, E, I,... for *ukjente* størrelser.
- Viète generaliserer både begrepet tall og størrelse og skaper et nytt matematisk objekt som man kan utføre beregninger med.
- *René Descartes* (ca. 1630) modifiserte:
  De første bokstavene i alfabetet, a b c ..., som tegn for *kjente* størrelser
  De siste, z x y ..., som tegn for de *ukjente*. Potenser x^2, x^3, x^4….
  Slik vi fortsatt gjør!
- $\int$ Integraltegnet innført av Leibniz i 1675. Var i bruk som stor bokstav S, første bokstav i ordet *Summa.* Brukte *d*y for derivasjon.
- y' som derivasjonstegn innført av Lagrange i 1770.



MATEMATIKKENS SPRÅK OG SYMBOLER

- **∞**

  Symbol for uendelig. John Wallis 1655
  - Fra system for store romertall (CIↃ eller ↀ for antall tusen)
  - eller fra gresk bokstav ω (omega) sist i alfabetet.

THE JOHN WALLIS
CHURCH OF ENGLAND ACADEMY

(1616 - 1703)

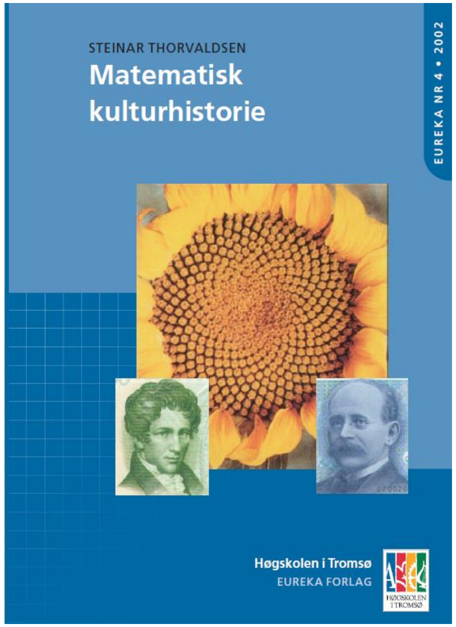
Elevenes utvikling i algebra: refleksjonsoppgaver

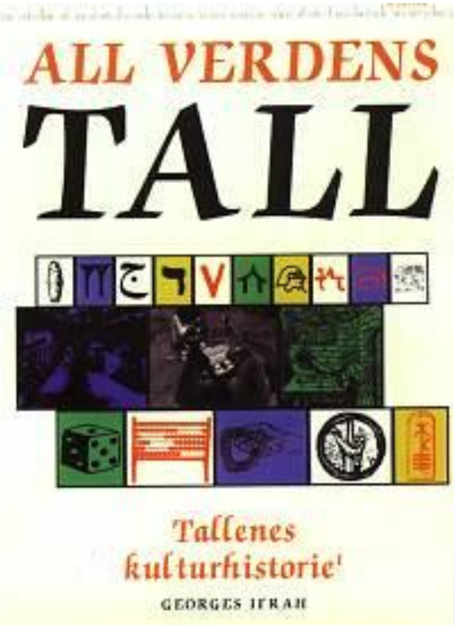
- Kan de tre stadier som algebraens historie har gjennomgått finnes igjen i elevenes løsningsstrategier?
- Har elever etter flere år med symbolsk algebra, en tendens til å foretrekke verbale metoder fremfor symbolske metoder?
- Må problemene ha en viss vanskelighetsgrad før elevene vil trenge symbolske metoder?

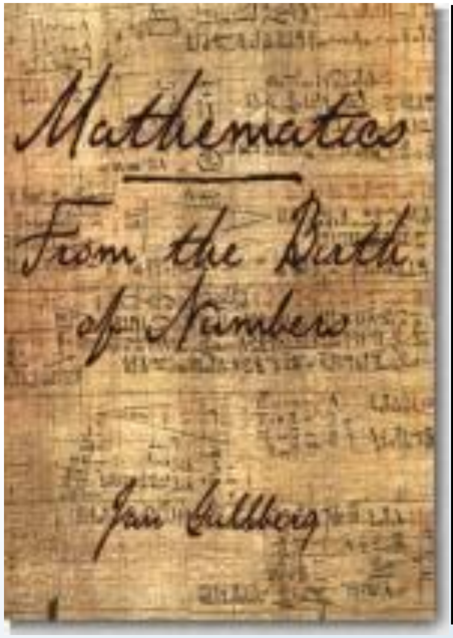
- Skrittet fra synkopert til symbolsk algebra tok over 1000 år.
I klasserommet forventer vi at samme skritt skal tas i løpet av mindre enn fem år. Kommentarer?

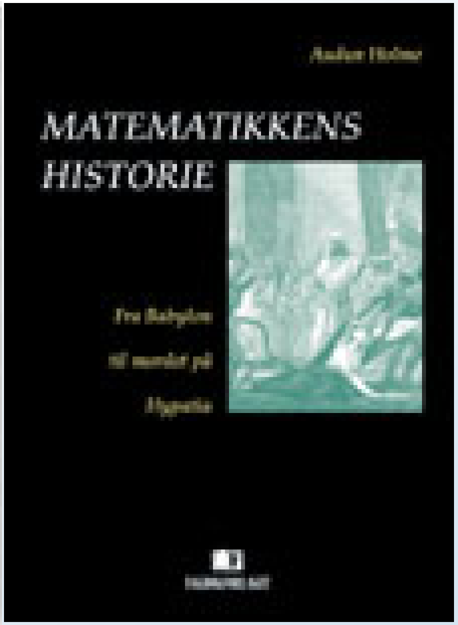
- Gir det mening at algebraens symbolske fase ble introdusert av en *jurist* (Francois Viète)?

Litteratur


STEINAR THORVALDSEN
Matematisk kulturhistorie
EUREKA NR 4 • 2002
Høgskolen i Tromsø
EUREKA FORLAG

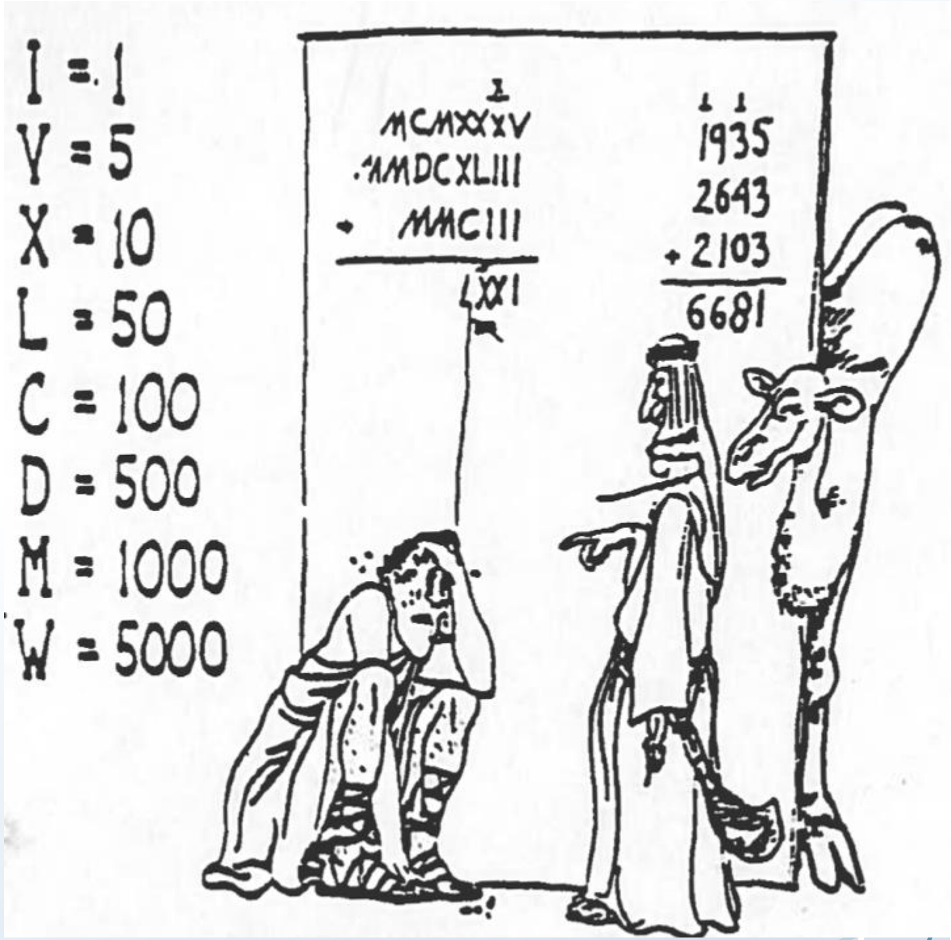

ALL VERDENS
TALL
Tallenes kulturhistorie
GEORGES IFRAH


Mathematics
From the Birth of Numbers


MATEMATIKKENS HISTORIE

Oppgaver

- Hvilke tallsystem er representert på tegningen?
- Hva er hovedtrekkene i de to tallsystemene?
- Gjør rede for eventuelle likheter og forskjeller, og kontroller svarene på utregningene.



- Forfatteren av verket *All verdens tall*, Georges Ifrah, fikk dette spørsmålet i en matematikktime: "*Lærer, hvor kommer tallene fra?* "
  Anta at du selv som lærer må besvare dette spørsmålet for dine elever. Beskriv hovedpunktene i ditt svar. Velg selv klassetrinn.

Referanser

- Bekken, Otto B.: *Tallsystemets røtter*. Agder distriktshøgskole, Skrifter 1984: 6.
- Bekken, Otto B., Nielsen Marit A. og Thorvaldsen, Steinar: *Algorismus i Hauksbok. En norrøn regnetekst fra 1300-tallet.* Eureka Digital 2010.
- Gullberg, Jan: *Mathematics: From the Birth of Numbers*. W.W.Norton & Company, 1997.
- Holme, Audun: *Matematikkens historie*. Fagbokforlaget 2001.
- Ifrah, Georges: *All verdens tall. Tallenes kulturhistorie*. Pax forlag 1997.
- Menninger, Karl: *Number Words and Number Symbols: A Cultural History of Numbers.* Dover Publications, reprint 2011.
- Rossing, Nils Kr.: *Den matematiske krydderhylle.* Midt Nordisk Vitensenter, 1999.
- Thorvaldsen, Steinar: *Matematisk kulturhistorie*. Open Access, Eureka forlag 2002.