NMCC

Nordic Math Class Competition

2007 - 2009

Innledende runder, semifinaler, finaler og nordiske finaler

Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Bruk boka til glede og inspirasjon, til samarbeid og moro med matematikk

Ingvill Merete Stedøy-Johansen

Faglig ansvarlig og oppgavedesigner: Ingvill M. Stedøy-Johansen

Trykk: NTNU-trykk
ISBN: 82-471-6059-5

Innledning

Nordic Math Class Competition er en nordisk matematikkonkurranse for 9. trinn, det vil si elever som er 14 – 15 år. Konkurransen arrangeres med de samme oppgavene og til samme tid i Danmark, Finland, Sverige og Island. I Norge gjennomføres en liknende konkurranse, KappAbel, med oppgaver utviklet ved Universitetet i Agder.

Konkurransen starter med to kvalifiseringsrunder. Hele klassen deltar, og løser oppgaver i grupper. Klassens matematikklærer sender inn ett felles svar på hver oppgave fra hele klassen. Når de to innledende rundene er ferdig, inviteres de 10 til 20 beste klassene i hvert land til å delta i de nasjonale semifinalene og finalene. Da skal hele klassen gjennomføre et prosjektarbeid etter et oppgitt tema (Matematikk og kommunikasjon (2007), Matematikk og dyr (2008), Matematikk og miljø (2009)). To jenter og to gutter fra hver klasse representerer klassen i semifinalens oppgavedel. De tre beste lagene sammenlagt går videre til de nasjonale finalene, og vinneren i hvert land møtes til en nordisk finale.

Den nordiske finalen består av to uavhengige konkurranser, en prosjektkonkurranse og en oppgavekonkurranse.

Vi håper lærere som får denne boka i hendene vil bruke oppgavene i matematikkundervisningen. La elevene arbeide sammen i grupper, slik at de kan diskutere seg fram til løsningene på ulike måter. Som lærer vil du bli overrasket over hvor kreative og dyktige dine elever er. Lykke til!

Ingvill Merete Stedøy-Johansen
Faglig leder
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen
NTNU, Trondheim

Innholdsfortegnelse

NMCC 2006 – 2007
Nordic Math Class Competition

Oppgavesett til første kvalifiseringsrunde 2006 - 2007

Oppgave 1

Mangesifret tall

Sifrene i tallet

12345678910111213 … 997998999

Framkommer ved å skrive de naturlige tallene 1, 2, 3, 4, …, 999 i rekkefølge. Hva er det 2006. sifferet fra venstre?

SVAR:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5 g) 6 h) 7 i) 8 j) 9

Oppgave 2

Rektangler

To ulike rektangler, R1 og R2, har begge et areal på 360 kvadratcentimeter. Lengden av en side i R2 er 12 centimeter lenger enn den tilsvarende siden i R1. Den andre siden er 5 centimeter kortere enn den tilsvarende siden i R1.
Hva er forskjellen på omkretsene til de to rektanglene?

Svar: ________ centimeter

Oppgave 3

Sykle til toget

Magne skal sykle med racersykkelen sin for å nå toget. Det er 60 km til jernbanestasjonen. De første 20 km er svakt oppover. Da kan han holde jevn fart på 20 km/t. De neste 20 km er flatt. Her kan han holde en fart på 30 km/t. De siste 20 km er nedover, og her sykler Magne med farten 40 km/t. Toget går klokka 10.45.

Han skal beregne når han må sykle hjemmefra, og tenker slik:
Gjennomsnittsfarten min vil være 30 km/t. Da må jeg dra hjemmefra klokka 08.40. Vil han nå toget?

SVAR:

a) ja b) nei

Han vil komme ______________ minutter for tidlig/sent.

Oppgave 4

Hemmelig tall

Finn det firesifrede tallet der
- alle sifrene er forskjellige
- sifferet på tusenplassen er tre ganger sifferet på tierplassen
- tallet er et oddetall
- summen av sifrene er 27

SVAR:

Oppgave 5

Bokserie

En bokserie på sju bøker ble utgitt slik at det kom ut ei bok hvert 9. år. Da den sjuende boka ble utgitt, var summen av utgivelsesårene 13601. Hvilket år ble den første boka utgitt?

SVAR: ________________

Oppgave 6

Sifferprodukt og siffersum

Hvor mange tosifrede tall finnes med følgende egenskap:

Når du legger sammen produktet av sifrene og summen av sifrene, får du tallet selv?

SVAR:

a) ingen b) ett c) to d) fem e) åtte f) ni

Oppgave 7

Femkant i koordinatsystem

Finn arealet av femkanten med hjørner i punktene
(8,10), (0,6), (0,-2), (12,-2) og (12,6).

SVAR: ________________

Oppgave 8

Terningkast

Tre terninger blir kastet samtidig. Hvor mange kombinasjoner av tall på de tre terningene vil gi en sum som er mindre enn eller lik 5, og hvor mange ulike kombinasjoner er mulig?

SVAR:

__________________ kast av ________________ mulige kombinasjoner

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) Sifferet på 2006. plass er 0.

Fordi: De ensifrede tallene er de første 9 sifrene. De tosifrede tallene (10 – 99) er de neste 180 sifrene. Det betyr at etter 189 siffer starter de tresifrede tallene. Det 2006. sifferet er blant disse tallene.
2006 – 189 = 1817

Deler vi på 3 finner vi hvor mange tresifrede tall som kommer før det 1817. sifferet. Det er

1817 : 3 = 605 2/3

Så vi er ute etter det andre sifferet i det 606. tresifrede tallet. Det første tresifrede tallet er 100, og det 606. tresifrede tallet er 705.

Oppgave 2

14 cm

Oppgaven kan enten løses ved å bruke en tabell, eller ved å bruke algebra, og formelen for arealet av et rektangel.

Algebra: Kall sidene i R1 for a og b. Da er sidene i R2 a + 12cm og b – 5cm.

Omkretsen til R1 er 2a + 2b
Omkretsen til R2 er 2a + 24cm + 2b -10cm = 2a + 2b + 14cm

Forskjellen er 14 cm.

Tabellen viser mulige heltallige sider i centimeter for rektangler med areal 360 kvadratcentimeter (bruker ikke benevning i tabellen)

Første side	Andre side
1	360
2	180
3	120
4	90
5	72
6	60
8	45

9	40
10	36
12	30
15	24
18	20

.

I første kolonne er 3 og 15, og 6 og 18 kandidater for sidene i de to rektanglene, siden forskjellen er 12.
I andre kolonne er forskjellen 12 mellom 72 og 60, og mellom 36 og 24.
Det er bare ett sted de tilhørende sidene har en differens på 5. Det er for 36 og 24.

Sidene på R1 er 15cm og 24 cm med omkrets 78cm, mens sidene på R2 er 10cm og 36cm med omkrets 92cm. Forskjellen er 14cm.

.

Oppgave 3

Magne kommer 5 min for sent til toget.

Gjennomsnittsfarten hans blir ikke 30 km/t.

Magne bruker 1t på de første 20 km.
Han bruker 40 min på de neste 20 km.
Han bruker 30 min på de siste 20 km.

Til sammen bruker han 2t 10min.

Oppgave 4

Tallet er 9837.

Andre hint gir mulighetene 1, 2 eller 3 på tierplassen, med tilhørende 3, 6 eller 9 på tusenplassen
Summen av sifrene er 27. Da må summen av sifrene på tier- og tusenplassen være større enn eller lik 27 – 17 = 10 (siden summen av de to siste sifrene, som er forskjellige, må være mindre eller lik 9 + 8 = 17).

Da må det være 3 på tierplassen og 9 på tusenplassen. Summen av de siste sifrene er 15. Da må de være 8 og 7, og siden det er et oddetall, må 7 være på enerplassen og 8 på hundrerplassen.

Oppgave 5

Den første boka ble utgitt i 1916.

Gjennomsnittsåret for utgivelsene, var 13601 : 7 = 1943. Den første boka ble utgitt 27 år før dette året, og den siste 27 år etter dette året. 1943 – 27 = 1916.

Oppgave 6

Det finnes 9 slike tosifrede tall: 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99

Ethvert tosifret tall kan skrives som 10a + b, der a er et heltall mellom 1 og 9, og b er et heltall mellom 0 og 9.

Betingelsene i oppgaven sier at

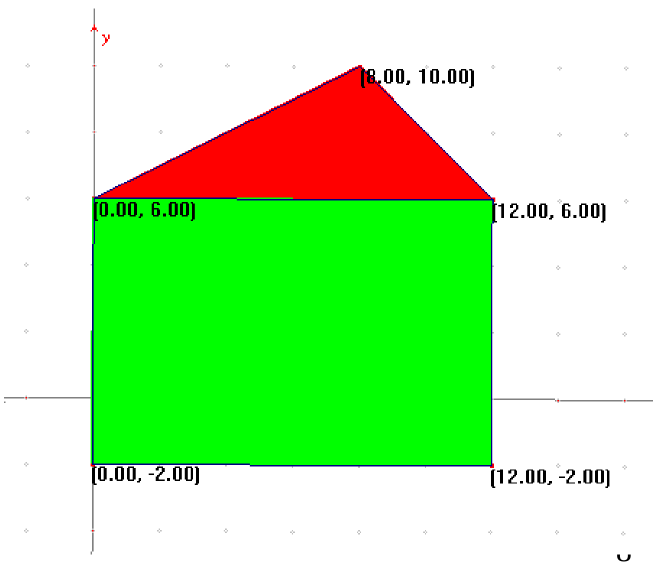
$$ab + (a + b) = 10a + b$$

Det gir at

$$ab = 9a \text{ eller } b = 9$$

Oppgave 7

Arealet er 120.



På figuren er punktene lagt inn i et koordinatsystem. Arealet blir summen av arealene til det grønne rektangelet og den røde trekanten. Rektangelet har sider 12 og 8. Trekanten har grunnlinje 12 og høyde 4.

Areal: $12 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 = 96 + 24 = 120$

Oppgave 8

10 kast av 216 mulige. (Sannsynligheten for å få sum mindre eller lik 5 er 10/216 = 5/108)

Gunstige kast er
(1,1,1)
(1,1,2)
(1,2,1)
(2,1,1)
(1,2,2)
(2,1,2)
(2,2,1)
(1,1,3)
(1,3,1)
(3,1,1)

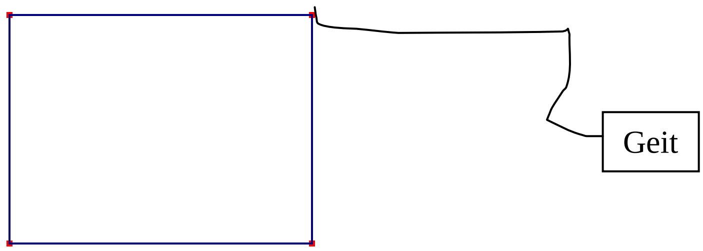
Det er $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ mulige kast.

Oppgavesett til andre kvalifiseringsrunde 2006 - 2007

Oppgave 1

Beitende geit

Ei geit har blitt bundet til hjørnet av et lite hus, med et 6 m langt tau. Huset er 3·4 m stort. Det er gress rundt hele huset. Hvor stort areal kan geita beite på? Oppgi svaret i hele kvadratmeter.



Svar: ______ m^2

Oppgave 2

Et tenkt tre

Tenk dere et tre som vokser på en helt spesiell måte. Det starter som en enkel liten stamme på 5cm etter ett år. Hvert år blir det 5cm høyere, får 2 grener, hver på 5cm, og hver gren vokser 5cm hvert år. Finn høyden og den totale lengden på treet, inkludert stammen og grenene etter

a) 4 år
b) 10 år

Svar: a) Høyden er _________ cm. Total lengde er _________ cm
b) Høyden er _________ cm. Total lengde er _________ cm

Oppgave 3

2007

Hvilket årstall er neste gang kalenderen blir nøyaktig lik kalenderen for 2007?

Svar:

Oppgave 4

Trekanter

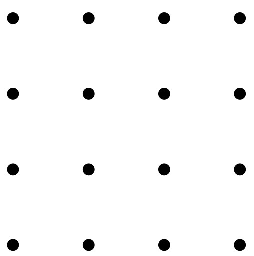
Fra a) til e) har vi oppgitt sidene i fem ulike trekanter. Hvilken av trekantene har størst areal?

a) 5, 12, 12
b) 5, 12, 13
c) 5, 12, 14
d) 5, 12, 15
e) 5, 12, 16

Svar: a ( ) b ( ) c ( ) d ( ) e ( )

Oppgave 5

Kvadrater



Hvor mange kvadrater kan dere tegne med hjørner på en sort prikk og sidelengde 2 eller mer? (En lengdeenhet er den vertikale eller horisontale avstanden mellom to naboprikker.)

Svar: __________

Oppgave 6

Hundeutstilling

På en hundeutstilling var antall Schæfere minst 1/5 av antall Huskyer og høyst 1/6 av antall Vorstehre. Det er minst 23 hunder som er enten Schæfere eller Huskyer på utstillingen. Hvor mange Vorstehre må det minst være på utstillingen?

Svar: Minst ___________ Vorstehre

Oppgave 7

Terningkast

Dere bruker en vanlig terning (med mulige kast 1, 2, 3, 4, 5 og 6) som dere kaster to ganger.
Hvis vi teller hvor mange kombinasjoner det finnes av førstekast og andrekast, kommer vi til 36. Hvor mange av disse gir en høyere verdi for andrekast enn det første?

Svar: __________

Oppgave 8

Epler

Fem poser inneholder til sammen 30 epler. I den første og den andre posen er det til sammen 14 epler. I den andre og den tredje posen er det til sammen 10 epler. I den tredje og den fjerde posen er det til sammen 9 epler, og i den fjerde og den femte posen er det til sammen 12 epler. Hvor mange epler er det i hver pose?

Svar: __________ epler

Løsningsforslag

Oppgave 1

Området blir ¾ av en sirkel med radius 6m + ¼ av en sirkel med radius 3m + ¼ av en sirkel med radius 2m $= \frac{121 \cdot \pi}{4} \approx$ 95 kvadratmeter

Oppgave 2

Høyde: 5cm x n

Høyde etter 4 år: 20cm
Høyde etter 10 år: 50cm

Total lengde:
År 1: 5cm
År 2: 10cm +5cm +5cm = 20cm
År 3: 15cm +10cm+10cm+5cm+5cm=45cm
År 4: 20cm+15cm+15cm+10cm+10cm+5cm+5cm=80cm

År n : 5cm (1+3+5+(2n-1)) = 5cm x n^2

År 10: 500 cm

Oppgave 3

2018

Siden hvert år er 52 uker og en dag når det ikke er skuddår, flytter kalenderen seg forover med en dag per år. Men når det er skuddår, blir det annerledes. Det er skuddår i 2008, 2012, 2016, 2020.
Disse årene flytter kalenderen seg forover med 2 dager. For at kalenderen skal bli lik den vi har i 2007, må den ha flyttet seg framover med 7 dager, og det skal ikke være et skuddår.

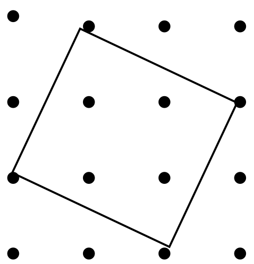
I 2007 var 1. januar på en mandag.

Neste gang det skulle ha vært sånn, var 2014, men på grunn av skuddår i 2008, skulle det bli i 2013, men siden 2012 også er et skuddår, blir 1. januar en tirsdag i 2013. I 2016, som er det neste skuddåret, blir 1. januar en mandag.

Oppgave 4

Man kan observere at (5, 12, 13) er et pytagoreisk trippel, og dermed danner sidene i en rettvinklet trekant. Den gir areal 30, som er det største.

Oppgave 5



Sidelengde 2	4
Sidelengde 3	1
Sidelengde $\sqrt{5}$	2

Svar 7 kvadrater

Oppgave 6

Det må være minst 24 Vorstehre på utstillingen.

Schæfere: S
Huskyer: H
Vorstehre: V

$$\frac{1}{6}\mathrm{V} \geq \mathrm{S} \geq \frac{1}{5}\mathrm{H}$$

$$\mathrm{S} + \mathrm{H} \geq 23$$

Siden $\mathrm{S} \geq \frac{1}{5}\mathrm{H}$, $5\mathrm{S} \geq \mathrm{H}$ og $6\mathrm{S} \geq \mathrm{H} + \mathrm{S} \geq 23$

$6S \geq 23$ og $S \geq \frac{23}{6}$

Men S er et naturlig tall, så $S \geq 4$. Siden $\frac{1}{6}V \geq S \geq 4$

Så har vi at $\frac{1}{6}V \geq 4$ og $V \geq 24$

Oppgave 7

15 kombinasjoner gir høyere andrekast.

Av alle 36 mulighetene er det:
5 muligheter hvis 1. kast er 1
4 muligheter hvis 1. kast er 2
3 muligheter hvis 1. kast er 3
2 muligheter hvis 1. kast er 4
1 mulighet hvis 1. kast er 5

Oppgave 8

Pose 1: 8 epler
Pose 2: 6 epler
Pose 3: 4 epler
Pose 4: 5 epler
Pose 5: 7 epler

En måte å tenke på, er å se at gjennomsnittlig antall epler per pose er 6. Deretter prøve seg fram.

NMCC 2007 – 2008

Nordic Math Class Competition

Oppgavesett til første kvalifiseringsrunde 2007 - 2008

Oppgave 1

Finn et mønster for tallene i kolonnene og fullfør tabellen:

13	5	3
17	6	5
21	7	0
25	8	1

SVAR:

Oppgave 2

6 damer og 12 menn veier til sammen 1374 kg. Gjennomsnittsvekten for kvinnene er 62 kg. Hva er gjennomsnittsvekten for mennene?

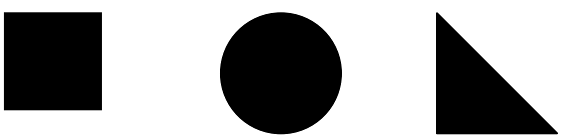
SVAR: ___________kg

Oppgave 3

Tre søstre gjør hagearbeid for naboer for betaling. De tar 260 kr per time til sammen. Den eldste søsteren får 50% mer enn den mellomste søsteren, og den yngste får 50% mindre enn den eldste. Hvor mye får hver av søstrene per time?

Oppgave 4

En tredimensjonal figur har en form som gir tre skyggebilder som vist nedenfor:



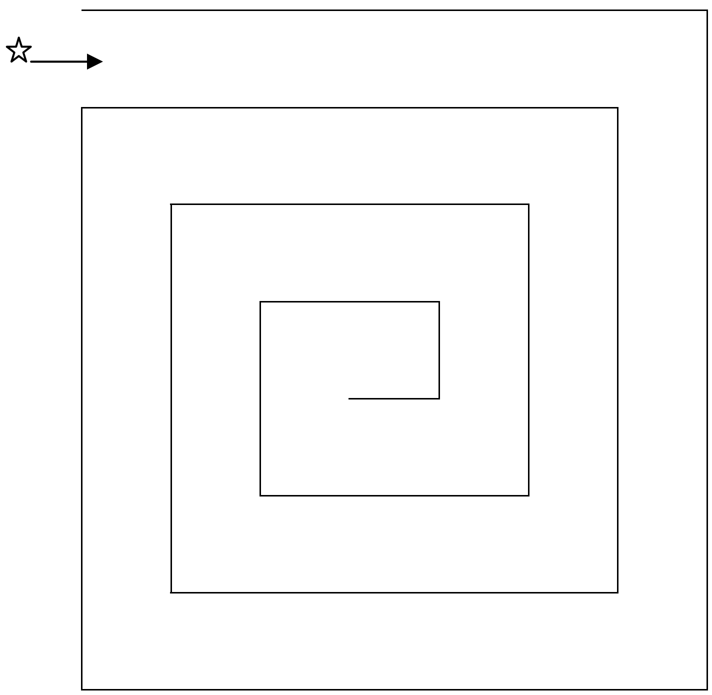
(OBS! Tegningene må lages ordentlig, slik at diameteren i sirkelen er lik siden i kvadratet som igjen er lik katetene i trekanten.)

Hvilken form har den tredimensjonale figuren?

a) En sylinder
b) En kjegle
c) En halvkule
d) En halv sylinder kuttet på skrå
e) Det finnes ingen slik form

Oppgave 5

Petter går gjennom en spiralformet "labyrint". Han går midt på, starter ved stjerna, og gjør 90 graders vendinger i hvert hjørne. Banen er 2 meter bred. Hvor langt har Petter gått når han har kommet til midten?



(NB! Rutenettet skal ikke synes på elevenes oppgave)

SVAR: _______ meter

Oppgave 6

Kari går til postkontoret for å kjøpe fire kvadratiske frimerker. Hun ber om å få fire frimerker som henger sammen. Hvor mange ulike former kan fire sammenhengende kvadratiske frimerker ha? Vi regner med at alle frimerkene skal være orientert riktig vei (det er en bestemt side som skal være opp, en ned, en venstre og en høyre)

SVAR: _________ ulike former

Oppgave 7

Tallet 64 har sifferet 4 på enerplassen og 6 på tierplassen. Tallet 64 er delelig med sifferet det har på enerplassen. Hvor mange hele tall fra 0 til og med 63 har den egenskapen at det er delelig med sifferet det har på enerplassen?

SVAR: _______ tall

Oppgave 8

Ei vekkerklokke saktner seg med 4 minutter i timen. Den ble stilt riktig for 3 1/2 time siden. En annen klokke som går riktig viser klokka 12 akkurat nå. Hvor mange minutter er det til vekkerklokka viser 12? (oppgi svaret til det nærmeste minuttet?

SVAR: Om ca _________ minutter viser vekkerklokka 12.

Løsningsforslag

Oppgave 1

1. kolonne er en aritmetisk rekke med differanse 4, dvs. neste tall fremkommer ved å øke det foregående med 4. Tallet som mangler i første kolonne er 29

2. kolonne er naturlige tall i rekkefølge. Tallet som mangler i andre kolonne er 9

3. kolonne er restleddene som framkommer ved å dividere tallet i første kolonne med tallet i andre kolonne. Tallet som mangler i tredje kolonne er 2

Oppgave 2

Gjennomsnittsvekten for mennene er 83,5 kg.

Kvinnene veier til sammen 6 x 62 kg = 372 kg. Mennene veier til sammen:
1374 kg – 372 kg = 1002 kg
Gjennomsnittsvekten for mennene er: 1002 kg : 12 = 83,5 kg

Oppgave 3

Eldste søster får 120 kr
Mellomste får 80 kr
Yngste får 60 kr

La den mellomste søsteren få x kr. Da får den eldste 1,5x og den yngste $0,5 \cdot 1,5x$

$x + 1,5x + 0,75x = 260$
$3,25x = 260$
$x = 80$

Oppgave 4

Det er skyggebildene av en skråkuttet halv sylinder.

Oppgave 5

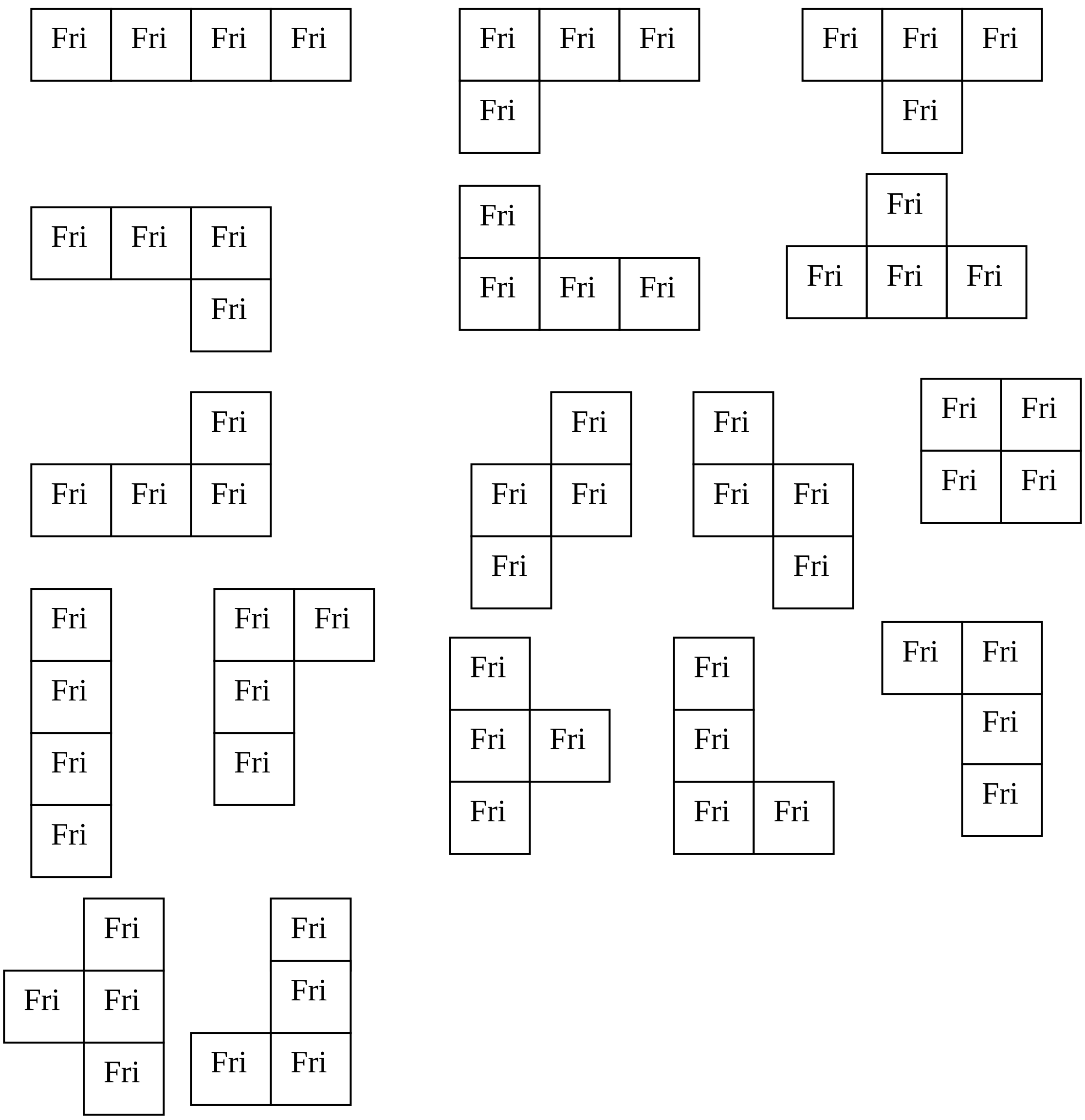
Han har gått 14 meter.

Stjerna er 1 rutelengde utenfor labyrinten. 7 ruter er 1 meter. Hvis vi teller rutene Petter har gått, får vi:
14 + 12 + 12 + 10 + 10 + 8 + 8 + 6 + 6 + 4 + 4 + 2 + 2 =98

Han har gått (98 : 7) = 14 meter

Oppgave 6

17 ulike former.



Oppgave 7

Det er 32 tall mindre enn 64 med den egenskapen.

63, 62, 61, 55, 52, 51, 48, 45, 44, 42, 41, 36, 35, 33, 32, 31, 25, 24, 22, 21, 15, 12, 11, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1

Oppgave 8

Om ca 15 minutter viser klokka 12.

Vekkerklokken saktner seg med 1 minutt i løpet av 15 minutter. Etter tre og en halv time er den 14 minutter forsinkelse. Nesten ett minutt ekstra blir det i løpet av 14 minutter. Altså er det totalt ca 15 minutter til vekkerklokken viser 12.

Oppgavesett til andre kvalifiseringsrunde 2007 - 2008

Oppgave 1

Desimaltallet nedenfor har uendelig mange desimaler som følger et mønster:

0,098700987000987000098700000987 …

På hvilken desimalplass vil 9-tall nummer 100 forekomme?

Oppgave 2

Et stort skip seiler i nordområder med mye is. Sent en natt kolliderer skipet med et isfjell. Det fører til at skipet tar inn vann med en fart av 3,25 tonn for hvert 12. minutt som går. Skipet er 400 km fra land. Kapteinen vet at skipet vil synke når det har tatt inn 68 tonn vann. Skipets pumpe kan pumpe ut 12 tonn vann hver time.

På grunn av skaden på skipet, kan det ikke gå raskere enn 22,5 km/t. Kapteinen sender beskjed til redningspersonell om at skipet etter all sannsynlighet vil synke før det når land. Hvis kapteinen har rett, hvor langt fra land vil skipet synke?

Oppgave 3

En sykkellås åpnes med en firesifret kode som framkommer ved å vri på fire hjul. Hvert hjul har sifrene 0 til 9 i rekkefølge, der 0 kommer etter 9. Uheldigvis er låsen ødelagt. Hver gang ett av hjulene snurres, vil et av nabohjulene snu i samme retning. Kombinasjonen som åpner låsen, er 2000. Er det mulig å åpne låsen fra en eller flere av følgende utgangsposisjoner? Sett kryss.

0000
6543
1999
7777
2001
8161
8181

Oppgave 4

Fra et rektangelformet stykke papp ble det laget en eske ved å kutte bort like store kvadrater i hvert hjørne. Volumet til esken ble 60 cm^3. Høyden i esken ble 3 cm. Hvilke mulige areal kan det opprinnelige pappstykke ha hatt? Sett kryss.

20 cm^2
56 cm^2
65 cm^2
100 cm^2
110 cm^2
124 cm^2
128 cm^2
136 cm^2
144 cm^2
182 cm^2
200 cm^2

Oppgave 5

Anna og Bengt raker løv. Anna fyller 3 sekker med løv for hver gang Bengt fyller 2 sekker. Etter en stund blir Lasse med og raker. Lasse fyller 3 sekker med løv for hver gang Anna fyller 2 sekker. Lasse arbeider bare halve tiden av hva de andre to gjør. Når de er ferdige med jobben, har de fylt 58 sekker til sammen. Bengt bruker 6 minutter på å fylle en sekk. Hvor lang tid har Bengt holdt på å rake løv?

Oppgave 6

Skriv 2008 som en sum av tre kvadrattall.

___________ + __________ + __________ = 2008

Oppgave 7

Det er mulig å trekke linjer mellom midtpunktene få fire av sidene i en regulær sekskant slik at de danner et rektangel, et trapes eller en drageform (En firkant der to og to sider er like lange, og de to sidene møtes i et hjørne. To sider er kortere enn de to andre.)

To av firkantene som lages på denne måten har like store areal. Sett kryss ved de to firkantene.

Rektangel
Trapes
Drage

Oppgave 8

En optisk leser kan lese av strekkoder som består av korte og lange streker i grupper på fem streker til sammen. Vi bruker to forskjellige lengder, kort og lang, tre korte og to lange. Alle stekene skal være parallelle.

På hvor mange ulike måter kan vi ordne de fem strekene?

Løsningsforslag

Oppgave 1

På plass nr 5348

Hvis vi ser hvilke plasser 9-tallene forekommer, vil vi finne et mønster.
Det første forekommer på plass nr 2
Det andre forekommer på plass nr 2+5
Det tredje forekommer på plass nr 2+5+6
Det fjerde forekommer på plass nr 2+5+6+7
Osv
…
Nitall nummer 100 forekommer på plass 2+5+6+7+…102+103 =

$$2+\frac{5+103}{2}\cdot 99 = 2+54\cdot 99 = 2+5346 = 5348$$

Oppgave 2

40 km fra land

Lekkasjen gjør at skipet tar inn 3,25 · 5 = 16,25 tonn vann per time. Pumpa pumper ut 12 tonn vann per time. Det resulterer i at skipet tar inn 4,25 tonn vann per time. Skipet synker når det har tatt inn 68 tonn vann, dvs. etter 68 : 4,25 = 16 timer.
Med en fart på 22,5 km/h, vil skipet kjøre 22,5 · 16 km=360 km før det synker. Siden det er 400 km til land, vil skipet synke 40 km fra land.

Oppgave 3

1999, 6543, 8161

Hver gang to nabohjul snurres med en kombinasjon *abcd,* vil størrelsen *w=a-b+c-d* enten være uforandret eller endre seg med en addisjon eller subtraksjon av et multiplum av 10. Siden ingen av sifrene er større enn 9, vil maks-verdien til *w* være 18 og min-verdien -18.
Siden kombinasjonen som åpner låsen, er 2000, må vi lete etter tall der

w=2-0+0-0=2 eller
w=2+10=12 eller
w=2-10= -8 eller
w=1-20= -18

1999 er mulig, siden 1-9+9-9 = -8
6543 er mulig, siden 6-5+4-3 = 2
8161 er mulig, siden 8-1+6-1 = 12

Ingen av de andre utgangsposisjonene er mulig.

Oppgave 4

110, 128 eller 182 cm²

Bunnen i esken må ha et areal lik: $60cm^3 : 3cm = 20cm^2$
Da er det 3 ulike rektangler som kan utgjøre bunnen, nemlig:
1x20cm
2x10cm eller
4x5cm
Siden høyden er 3cm, er kvadratene som er klippet bort i hvert hjørne 3x3 cm. Det betyr at det er tatt bort 6cm av hver side i det opprinnelige pappstykket. De tre alternative arealene blir da:

$$(1cm + 6cm) \cdot (20cm + 6cm) = 182cm^2$$
$$eller$$
$$(2cm + 6cm) \cdot (10cm + 6cm) = 128cm^2$$
$$eller$$
$$(4cm + 6cm) \cdot (4cm + 6cm) = 110cm^2$$

Oppgave 5

96 minutter = 1 time 36 minutter

Den kan løses ved prøving og feiling, eller ved å sette opp en likning. Anta at Bengt fyller x sekker til sammen. Da vil Anna fylle $\frac{3}{2}x$ sekker. Lasse ville fylt $\frac{3}{2}(\frac{3}{2}x) = \frac{9}{4}x$ sekker hvis han hadde arbeidet like lenge, men siden han bare har arbeidet halvparten av tiden, rekker han bare å fylle $\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4}x = \frac{9}{8}x$ sekker. Da er

$$x + \frac{3}{2}x + \frac{9}{8}x = 54$$
$$x = 16$$

Siden Bengt bruker 6 minutter på å fylle en sekk, tar hele jobben 16 · 6 min = 96 min = 1 t 36 min.

Oppgave 6

$$2008 = 6^2 + 6^2 + 44^2 = 6^2 + 26^2 + 36^2 = 10^2 + 12^2 + 42^2 = 18^2 + 28^2 + 30^2$$

Den første mulige løsningen er ganske lett å se, siden 45·45=2025, så det er for stort å bruke, og $2008 - 44^2 = 72 = 2 \cdot 36 = 2 \cdot 6^2$

Oppgave 7

Rektangel og drage vil ha samme areal

(Her bør det tegnes figurer!)
Arealet til trapeset er klart større enn de to andre.
Hvis en tegner rektangelet og dragen i samme sekskant, vil en kunne tegne det slik at de overlapper hverandre. Trekk den lengste diagonalen i dragen. Da vil rektangel og drage deles i to kongruente trekanter. En trekant er felles for begge figurene. Den andre har felles grunnlinje, og figuren viser at de andre to sidene er parvis like lange. Altså er de kongruente og har samme areal.

Oppgave 8

På 10 ulike måter

(Dette er veldig gunstig, siden vi har 10 ulike siffer i vårt tallsystem.)
Kall strekene KKKLL. De 10 kombinasjonene blir:

KKKLL
KKLKL
KLKKL
LKKKL
LKKLK
LKLKK
LLKKK
KKLLK
KLLKK
KLKLK

NMCC 2008 – 2009

Nordic Math Class Competition

Oppgavesett til første kvalifiseringsrunde 2008 - 2009

Oppgave 1

Blinkende lys

To neonlys blir skrudd på samtidig. Begge blinker idet de blir skrudd på. Det ene blinker hvert 9. sekund og det andre blinker hvert 15. sekund. Hvor mange sekunder etter at de er skrudd på vil de blinke samtidig?

SVAR:

Etter ____________ sekunder

Oppgave 2

Tallmønster

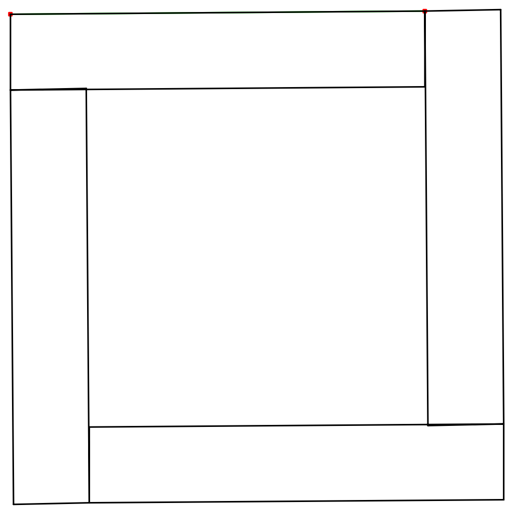
Noen tresifrede tall har den egenskapen at det midterste sifferet er summen av de to andre sifrene. Hvor mange slike tall finnes det?

Svar: ________

Oppgave 3

Areal

Kvadratet nedenfor er laget av fire kongruente (like) rektangler. Hvert rektangel har omkrets 20. Finn arealet av hele kvadratet (dvs. arealet av alle fire rektanglene pluss arealet av "hullet")



SVAR: Arealet er ___________

Oppgave 4

Rettferdig betaling

Jens, Eva og Patrik var på tur. Jens hadde med to smørbrød, Eva hadde med tre, mens Patrik hadde glemt å ta med mat. De bestemte seg for å dele den maten de hadde helt likt. Patrik betalte 25 kroner til sammen for den maten han fikk. Hvor mye av pengene skulle Jens ha, og hvor mye skulle Eva ha?

SVAR:

Jens skulle ha _______ kr og Eva _______ kr

Oppgave 5

Togreise

Karoline reiste med toget fra Oslo til Stockholm. Da toget var kommet halvveis, sovnet Karoline. Da hun våknet, var avstanden til Stockholm halvparten av den strekningen toget hadde kjørt mens hun sov. Hvor stor brøkdel av strekningen fra Oslo til Stockholm hadde toget tilbakelagt mens Karoline sov?

SVAR: ________________

Oppgave 6

Bokstavkode

Hver bokstav i regnestykket nedenfor skal erstattes med et siffer fra mengden {1, 3, 4, 7, 8 } slik at regnestykket blir riktig. Finn verdiene til hvert tall!

ADD + MAD = SUM

SVAR:

A = ____

D = ____

M = ____

S = ____

U = ____

Oppgave 7

Trekanter

Hvor mange ulike trekanter finnes hvor lengden av sidene er hele tall og omkretsen er 8?

SVAR:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 8 e) uendelig mange f) Det er ikke mulig å avgjøre

Oppgave 8

Prosjektarbeid

I en gruppe med elever fra 8. og 9. klasse, skal hver elev gjøre et prosjekt enten alene eller sammen med en partner. En elev fra 8. klasse som vil jobbe sammen med noen, må jobbe sammen med en 9. klassing og omvendt. Det viser seg at 2/3 av elevene i 8. klasse og 3/5 av elevene i 9. klasse arbeider i par. Hvor stor brøkdel av alle elevene arbeider alene?

SVAR: ___________ av elevene arbeider alene.

Løsningsforslag

Oppgave 1

Etter 45 sekunder.

Det ene lyset blinker etter 9 – 18 – 27 – 36 – 45 – 54 – 63 72 – 81 – 90 - osv

Det andre lyset blinker etter 15 – 30 – 45 – 60 – 75 – 90 - osv

Første gang de blinker samtidig er etter 45 sekunder.

Oppgave 2

Det finnes 45 slike tall.

Tallene er:

110	**220**	**330**	**440**	**550**	**660**	**770**	**880**	**990**
121	**231**	**341**	**451**	**561**	**671**	**781**	**891**	
132	**242**	**352**	**462**	**572**	**682**	**792**		
143	**253**	**363**	**473**	**583**	**693**			
154	**264**	**374**	**484**	**594**				
165	**275**	**385**	**495**					
176	**286**	**396**						
187	**297**							
198								

Til sammen er det: 9+8+7+6+5+4+3+2+1=45 ulike tresifrede tall med denne egenskapen.

Oppgave 3

Arealet av kvadratet er 100 enheter.

Kall sidene i rektanglene a og b. Da er 2a + 2b = 20, eller a + b = 10. Siden i det store kvadratet vi er ute etter, er a + b. Da er arealet:
$(a + b)^2 = 10^2 = 100$

Oppgave 4

Jens skal ha 5 kr og Eva skal ha 20 kr.

Mange tror det 10 kr til Jens og 20 kr til Eva. Men det blir ikke rettferdig. Hvis maten blir fordelt likt, får hver person 1/3 av alle smørbrødene. Det vil si at de får 1 2/3 smørbrød, eller 5/3 smørbrød hver. Det betyr at Jens gir bort 1/3 smørbrød og Eva gir bort 1 1/3 smørbrød, eller 4/3 smørbrød. Patrik får 5/3 smørbrød og betaler 25 kr. Det betyr at Patrik betaler 5 kr for hvert tredels smørbrød. Altså får Jens 5 kr og Eva 20 kr.

Oppgave 5

Karoline sov 1/3 av turen.

Hvis d er hele strekningen fra Oslo til Stockholm, og s er strekningen hun sov, så er ifølge opplysningene

$$\frac{d}{2}+s+\frac{s}{2}=d$$

$$eller$$

$$\frac{3s}{2}=\frac{d}{2}$$

$$eller$$

$$s=\frac{d}{3}$$

Oppgave 6

Regnestykket er 377 + 437 = 814, dvs. A = 3, D = 7, M = 4, S = 8 og U = 1

Siden D + D = M eller 10 + M, må M være et partall. De eneste mulige partallene er 4 og 8. Hvis M = 8, så er D = 4. Men hvis vi prøver med det, får vi det ikke til å passe med at alle bokstavene skal svare til siffer fra den oppgitte mengden.
Derfor må
M = 4
For å få til det, må D = 7. Da har vi
A77 + 4A7 = SU4
Da er 7 + A + 1 = U eller 10 + U, og A + 4 eller A + 4 + 1 skal være ensifret. Sifrene skal være 1, 3 og 8. Det eneste som passer da er
A = 3
U = 1 og
S = 8

Oppgave 7

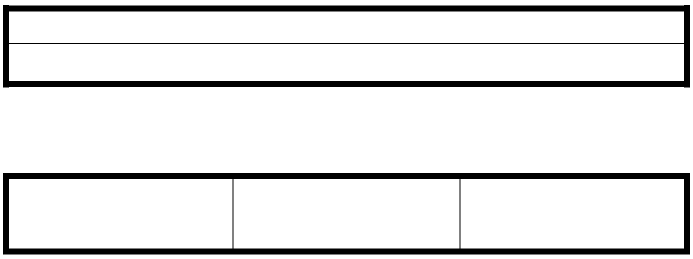
a) Det er kun én trekant, den er likebeint med sider 3, 3 og 2.

For at omkretsen skal bli 8, kan ingen av sidene være lengre enn 3. Det er fordi at hvis en side er større enn 3, så ville summen av de to andre være 4 eller mindre. Da kan ikke sidene danne en trekant.
Men ikke alle sidene kan være mindre enn 3 for å få omkrets 8. Altså må en av sidene ha lengde 3. Da er summen av de to andre sidene 5. Det vil si at de to andre sidene har lengdene 3 og 2.

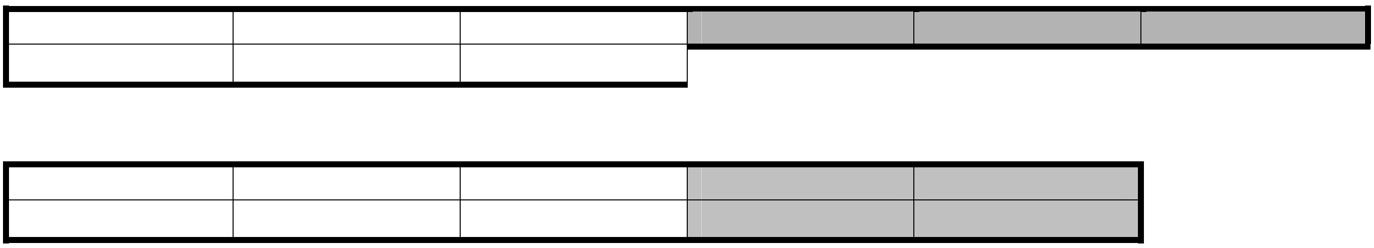
Oppgave 8

$\frac{7}{19}$ **av elevene arbeider alene.**

Oppgaven løses enklest ved å tegne figurer. La det øverste rektangelet representere to tredeler av 8. klassingene. Det vil si at hver halvdel av det øverste rektangelet representerer en tredel av 8. klassingene. La det nederste rektangelet representere tre femdeler av 9. klassingene. Det vil si at hver tredel av det nederste rektangelet representerer en femdel av 9. klassingene.



Siden hvert rektangel representerer like mange elever, er de like store. I figuren nedenfor representerer den øverste figuren alle elevene i 8. klasse, og den nederste alle elvene i 9. klasse. De grå rutene er elever som arbeider alene.



Da ser vi at det er $\frac{7}{19}$ av alle elevene som arbeider alene.

Oppgavesett til andre kvalifiseringsrunde 2008 - 2009

Oppgave 1

Sjørøverskatten:

Tolv sjørøvere hadde røvet en pose med gullpenger. Da de prøvde å dele likt, viste det seg at det var en gullpenge til overs. De klarte ikke å bli enige om hvem som skulle få denne gullpengen, så de bestemte seg for å kaste yngstemann på sjøen. Da var de elleve igjen. Når de elleve sjørøverne prøvde å dele gullpengene likt, ble det igjen krangel. Denne gangen viste det seg også å være en gullmynt for mye!

Igjen klarte de ikke å bli enige, og igjen kastet de den sjørøveren som nå var yngst, på sjøen. Nå var det 10 sjørøvere igjen. Heller ikke denne gangen gikk det an å dele gullpengene likt. Det ble tre gullpenger til overs. Nå ble sjørøverne så sinte at de kastet de tre yngste sjørøverne på sjøen.

Endelig gikk det opp! De sju gjenværende sjørøverne delte gullpengene helt likt, og det ble ingen til overs og ingen for lite.

Hva er det minste antall gullpenger som kan ha vært i posen, og hvor mange gullpenger ble det på hver av de gjenlevende sjørøverne?

SVAR: ________________ er det minste antall gullpenger som kan ha vært i posen.

Da ble det ________ gullpenger på hver av de gjenlevende sjørøverne

Oppgave 2

Hundevalpen

Ingvill skal selge en valp for 1100 kroner. Kjøperen viser seg å ha noen merkelige fremmede mynter.
11 runde mynter er verdt 1500 kroner.
11 kvadratiske mynter er verdt 1600 kroner.
11 triangulære mynter er verdt 1700 kroner.
Hvor mange mynter av hver sort skal kjøperen betale?

SVAR: Kjøper må betale ________ runde mynter, ____________ kvadratiske mynter

og ___________ triangulære mynter.

Oppgave 3

Hvilket tall er det?

Finn det største tallet som tilfredsstiller følgende betingelser:

- det er større enn 100
- det er mindre enn 200
- hvis det rundes av til nærmeste 100, er det 20 større enn hvis det rundes av til nærmeste 10-er.

SVAR: Tallet er _______ .

Oppgave 4

Bru i mørket

Astrid, Bjørn, Cecilie og Daniel skal krysse ei bru i mørket. De har bare en lommelykt. Brua tåler bare vekten av to personer av gangen. Siden det er mørkt, må de som krysser brua, ha med seg lommelykta. De fire personene bruker henholdsvis 10, 5, 2 og 1 minutt på å krysse brua. To personer som krysser brua sammen, må gå i den seneste personens fart. Hva er den korteste tiden det vil ta før alle fire har kommet over brua?

SVAR: De må bruke minst _____________ minutter for å komme over brua.

Oppgave 5

Antrekk

Lærer Hansen har 6 ulike langbukser, 10 ulike skjorter, 2 ulike belter og 4 ulike slips. På skolens hans er det akseptabelt både å gå med og uten slips, med og uten belte. Hvor mange ulike antrekk kan lærer Hansen velge mellom, forutsatt at alle tingene passer sammen?

SVAR: Lærer Hansen har _______ antrekk å velge mellom.

Oppgave 6

Palindromtall og bilkjøring

Christian ser at kilometertelleren på den nye bilen hans viser 13931. Dette er et palindromtall, tenker matematikeren Christian. Han vet at palindromtall er tall der sifrene er symmetriske om midten, i den forstand at hvis du leser tallet fra høyre mot venstre, blir tallet det samme som om du leser det normalt. 2 timer senere legger han igjen merke til at telleren viser et palindromtall. Hva kan gjennomsnittsfarten til Christian ha vært?

SVAR: Gjennomsnittsfarten til Christian har vært ______ km/t.

Oppgave 7

Testamente

En mann skriver sitt testamente, og sier at hvis hans kone føder en sønn, skal arven deles slik at gutten får 2/3 og kona 1/3. Hvis hun føder en datter, skal datteren ha ¼ og kona 3/4 av arven. Kona hans føder tvillinger, en gutt og ei jente. Hvordan skal arven fordeles for å følge det som står i testamentet?

SVAR: Kona skal ha _________ av arven. Datteren skal ha ________ av arven.

Sønnen skal ha _______ av arven.

Oppgave 8

Klokkegeometri

Klokka er 12:15. Hvor mange grader er det mellom viserne på klokka?

SVAR: Det er __________ grader mellom de to viserne på klokka når den viser

12:15.

Løsningsforslag

Oppgave 1

133 gullpenger. Sju gjenlevende sjørøvere får 19 gullpenger hver.

En måte å løse oppgaven på, er å sammenlikne tall i 12-gangen, 11-gangen, 10-gangen og 7-gangen, og lete etter et tall som er 1 mer enn et tall i 12-gangen, samtidig som det er 1 mer enn et tall i 11-gangen, 3 mer enn et tall i 10-gangen, og finnes i 7-gangen.

12-gangen	11-gangen	10-gangen
12	11	10
24	22	20
36	33	30
48	44	40
60	55	50
72	66	60
84	77	70
96	88	80
108	99	90
120	110	100
132	121	110
144	**132**	120
156	143	**130**
169	154	140

Siden 133 = 19 · 7, ser vi at det passer med 133 gullpenger

Oppgave 2

Kjøperen må betale 7 runde mynter, 1 kvadratisk mynt og ingen triangulære mynter.

Hvis x er antall runde mynter, y er antall kvadratiske mynter og z antall triangulære mynter, får vi likningen:

$$\frac{1500x}{11}+\frac{1600y}{11}+\frac{1700z}{11}=1100$$

eller

$$1500x+1600y+1700z=12100$$

Siden 8 · 1500 = 12000, ser vi at x må være mindre enn 8. Hvis vi prøver med x = 7, ser vi at 1500x = 10500, det vil si 1600 for lite. Da passer det med X=7, y=1 og z=0.

Oppgave 3

Tallet er 184.

Siden tallet er større når det rundes av til nærmeste hundrer enn til nærmeste tier, må tallet være større enn 150. Dermed er tallet rundet av til nærmeste hundrer lik 200.

Hvis tallet er 20 mer når det rundes av til nærmeste hundrer enn det er hvis det rundes av til nærmeste tier, må det rundes til 180.

Tallene 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183 og 184. Dermed er 184 det største tallet som tilfredsstiller betingelsene.

Oppgave 4

De kan komme over på 17 minutter.

1. Cecilie og Daniel går over og Cecilie går tilbake:	4 minutter
2. Astrid og Bjørn går over og Daniel går tilbake:	11 minutter
3. Cecilie og Daniel går over:	2 minutter
Til sammen	17 minutter

Oppgave 5

Lærer Hansen har 900 ulike antrekk, inklusive de hvor han ikke har slips eller ikke belte.

Det er 6 valg av bukser. For hver av dem er det 10 valg av skjorter. For hver av dem er det 3 valg av belte (der ett av valgene er ikke noe belte). For hver av dem er det 5 valg av slips (der ett av dem er ikke noe slips). Da blir det til sammen
$6 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 5 = 900$

Oppgave 6

Snittfarten er sannsynligvis 55 km/t. Den kan også være 105 km/t, men det er lite sannsynlig på 2 timer.

Det først palindromtallet etter 13931 er 14041. Differansen mellom disse er 110. Siden det har gått 2 timer, vil dette svare til en gjennomsnittsfart på 55 km/h.

Neste palindromtall etter dette, er 14141. Da ville gjennomsnittsfarten bli
(14141 – 13931)km : 2t = 105 km/t.

Oppgave 7

Kona skal ha 3/10, eller 30%. Sønnen skal ha 6/10, eller 60%. Datteren skal ha 1/10, eller 10%.

Arven skal deles slik at sønnen får dobbelt så mye som kona, og kona skal få tre ganger så mye som datteren. Hvis vi sier datteren skal ha 1 del, så skal kona ha 3 deler og sønnen 6 deler. De skal ha 10 deler til sammen.

Oppgave 8

Vinkelen mellom viserne er 82,5º.

Det er 360º : 12 = 30º mellom to etterfølgende timetall på klokka. Siden det tar fire kvarter for lilleviseren å dreie disse 30 gradene, har den dreiet seg
30º : 4 = 7,5º på ett kvarter. Den lange viseren har dreiet seg 90º siden klokka 12. Da er vinkelen mellom viserne 90º - 7,5º = 82,5º.

NMCC 2006 – 2007

Nordic Math Class Competition

Semifinale

Nødvendig utstyr

Oppgave 1

- Saks

Oppgave 2

- Eventuelt kvadratiske brikker i to farger

Oppgave 4

- Eventuelt to urskiver

Oppgave 5

- Tangramsett

Oppgave 6

- 32 tellebrikker

Oppgave 7

- 4 terninger i 4 ulike farger

Oppgave 1

Vennebrev

Susanne skrev brev til fire av sine venner Anne, Bente, Christian og Daniel.

På hvor mange måter kunne hun adressere konvoluttene slik at alle vennene fikk feil brev?

På svararket finner dere fire ”konvolutter” og fire lapper med forbokstavene i navnene til vennene. De kan brukes som hjelp til å løse oppgaven.

SVARARK OPPGAVE 1

Det er _________ måter å gi alle konvoluttene til feil person på.

Disse er:

Konvolutt A ble sendt til:	**Konvolutt B ble sendt til:**	**Konvolutt C ble sendt til:**	**Konvolutt D ble sendt til:**

Arbeidsark Oppgave 1

A

B

C

D

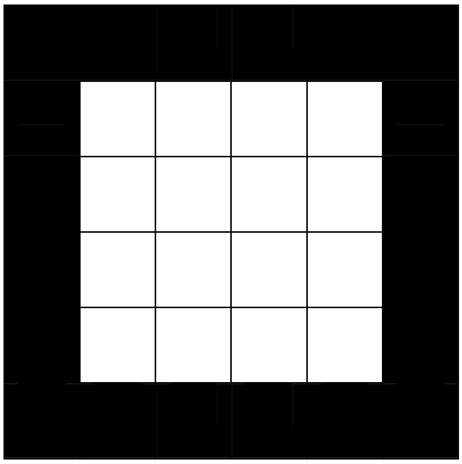
A	B	C	D

Oppgave 2

Mønster

Dette mønsteret på 6x6 kvadratiske ruter er laget av svarte og hvite kvadrater. Det består av 20 svarte og 16 hvite ruter.

Dere skal finne *rektangulære* mønster der det er like mange svarte og hvite ruter. Det skal være en enkel rad med svarte ruter ytterst, og hvite ruter i det indre området.



Hvor mange ulike rektangler finner dere?

Hva er dimensjonen på de ulike rektanglene? Hvor mange svarte og hvite brikker trengs til mønstrene?

Kan dere forklare hvorfor dere mener dere har funnet alle?

SVARARK OPPGAVE 2

Det finnes ____________ ulike rektangler

Dimensjon	Antall hvite brikker	Antall svarte brikker

Forklaring eller utregning:

Arbeidsark oppgave 2

Oppgave 3

Saftstasjon

Det skal deles ut saft på en drikkestasjon i forbindelse med et skirenn. To store saftdunker, A og B, er fylt med saft, men vi vet ikke hvor mye det er i hver. Vi vet at det er mer saft i A enn i B.

Vi tømmer like mye saft fra A opp i B som det allerede er i B.
Så tømmer vi like mye saft fra B til A som det nå er i A.
Til slutt tømmer vi like mye saft fra A til B som det nå er i B.

Etter denne prosedyren er det 64 liter saft i hver dunk.

Hvor mye saft var det i A og B før vi begynte å helle over?

Det kan være en hjelp å bruke tabellen på svararket for å holde oversikt over saftmengdene.

Dere skal vise tenkemåten enten ved utregning eller forklaring.

Oppgave 3

SVARARK OPPGAVE 3

Opprinnelig saftmengde i

Saftdunk A: ____________ liter

Saftdunk B: ____________ liter

	Dunk A	Dunk B
Opprinnelig mengde		
Etter første tømming		
Etter andre tømming		
Etter tredje tømming	= 64 liter	= 64 liter

Forklaring eller utregning:

Oppgave 4

Klokker

To klokker settes i gang samtidig. Da er klokka 12.00 midt på dagen.

Den ene går for sakte, og mister 2 minutter per time.
Den andre går for fort og viser 1 minutt for mye per time.

Hvor lang tid vil det ta før klokka som går for fort viser en time mer enn klokka som går for sakte?

Hvor mye er klokka da?

Bruk gjerne urskivene dere har fått utdelt til hjelp. Dere skal vise beregninger eller forklare hvordan dere kom fram til svaret.

SVARARK OPPGAVE 4

Det vil ta ________________ timer før klokka som går for fort viser 1

time mer enn klokka som går for sakte.

Da er klokka: ______________________

Beregninger/forklaring:

Oppgave 5

Tangramrektangler

Dere får utdelt et Tangram-puslespill. Bruk to eller flere brikker til å bygge et rektangel (som ikke er et kvadrat).

Tegn en skisse av rektangelet med omriss av hver brikke dere har brukt.

Ødelegg rektangelet og bygg et nytt med andre brikker. Det kan gjerne være med en eller flere av de brikkene dere brukte i første rektangel, men det skal ikke være nøyaktig de samme brikkene.

Lag så mange rektangler dere rekker og finner.

SVARARK OPPGAVE 5

Tangramrektangler. Skisser.

Oppgave 6

Epler

Åtte ungdommer delte 32 epler på denne måten:

Tine fikk 1 eple.
Mette fikk 2 epler.
Susanne fikk 3 epler.
Caroline fikk 4 epler.

Espen Jensen fikk like mange epler som søsteren sin.
Birger Karlsen fikk dobbelt så mange epler som søsteren sin.
Jens Lassen fikk tre ganger så mange epler som søsteren sin.
Tom Hansen fikk fire ganger så mange epler som søsteren sin.

Bror og søster har samme etternavn i alle disse familiene.

Hvilket etternavn har hver av de fire jentene.

Bruk de utdelte brikkene til å løse problemet hvis dere ønsker.

SVARARK OPPGAVE 6

Jentenes navn:

Fornavn:	**Etternavn:**
Tine	
Mette	
Susanne	
Caroline	

Oppgave 7

Terningkast

På hvor mange måter kan dere få sum 10 med fire vanlige terninger?

Skriv opp alle kombinasjonene.

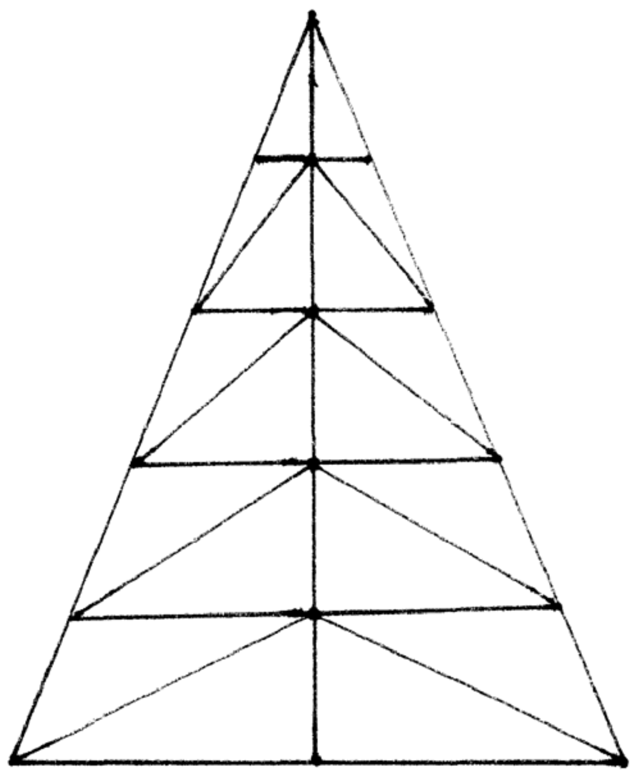
SVARARK OPPGAVE 7

Terning 1	Terning 2	Terning 3	Terning 4

Oppgave 8

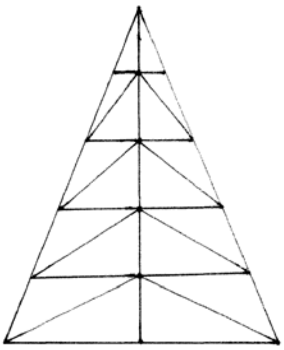
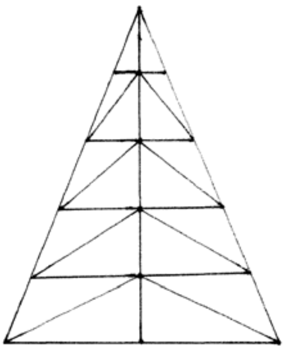
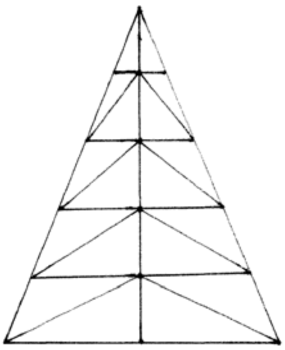
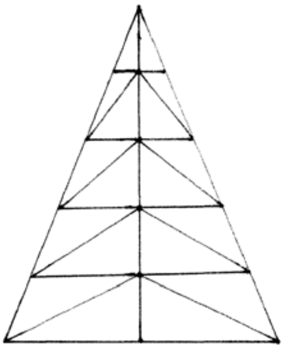
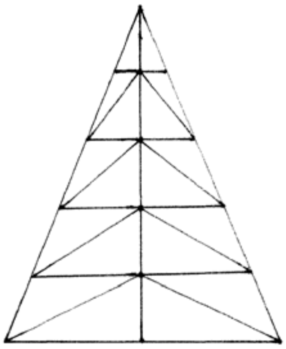
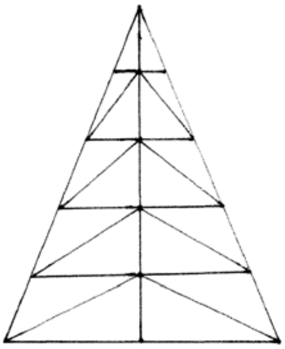
Trekanter

Hvor mange trekanter er skjult i denne figuren?



SVARARK OPPGAVE 8

Marker trekanter og vis hvordan dere teller opp:

Ekstraoppgave ved poenglikhet etter semifinalen

Utstyr:
Kalkulator

Størst mulig produkt av leddene.

13 kan deles opp i positive ledd på mange måter,

f. eks. 6 + 7 og 5 + 5 + 3.

Del 13 opp i en sum slik at produktet av leddene blir størst mulig.

(Du skal få størst mulig svar når du ganger leddene)

Løsningsforslag

Oppgave 1

Vennebrev

Det er 9 måter å gi alle konvoluttene til feil person på.

Disse er:

Konvolutt A ble sendt til:	**Konvolutt B ble sendt til:**	**Konvolutt C ble sendt til:**	**Konvolutt D ble sendt til:**
B	A	D	C
B	C	D	A
B	D	A	C
C	A	D	B
C	D	A	B
C	C	B	A
D	A	B	C
D	C	A	B
D	C	B	A

Oppgave 2

Det finnes 2 ulike rektangler

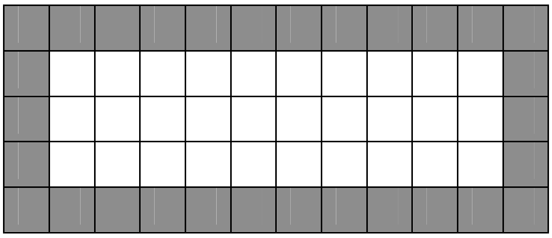
Forklaring eller utregning:

La a være antall rader og b antall kolonner i den hvite kjernen.
Hvis det skal passe med opplysningene i oppgaven, må:

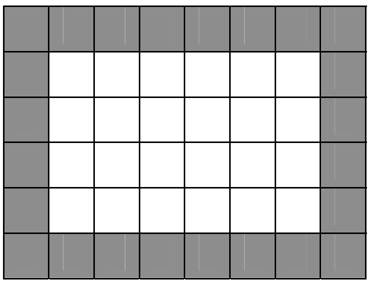
$$
\begin{aligned}
&ab = 2a + 2b + 4 \\
&eller \\
&ab - 2b = 2a + 4 \\
&(a-2)b = 2a + 4 \\
&b = \frac{2a+4}{a-2}
\end{aligned}
$$

Hvis vi prøver med a = 1, 2, 3, osv, finner vi an løsning for

a = 3
b = 10



a = 4, b = 6



Dette er de to eneste løsningene (hvis vi ikke tar med a = 6 og b = 4, eller a = 10 og b = 3), siden $a \geq$ 11kan ikke gi heltallige b – verdier, og a = 1 gir negativ verdi for b.

Oppgave 3

Opprinnelig saftmengde i

Saftdunk A: 88 liter

Saftdunk B: 40 liter

	Dunk A	Dunk B
Opprinnelig mengde	88 liter	40 liter
Etter første tømming	48 liter	80 liter
Etter andre tømming	96 liter	32 liter
Etter tredje tømming	= 64 liter	= 64 liter

Forklaring

Vi går baklengs.
Etter andre tømming må det være halvparten av endelig mengde i B. Da må det være 64 +32 = 96 liter i A.
Etter første tømming må det være halvparten av 96 liter i A. Da må det være 32 + 48 = 80 liter i B.
Før tømming må det være halvparten av 80 liter i B. Da må det bare 48 + 40 = 88 liter i A.

Oppgave 4

Det vil ta 20 timer før klokka som går for fort viser 1 time mer enn klokka som går for sakte.

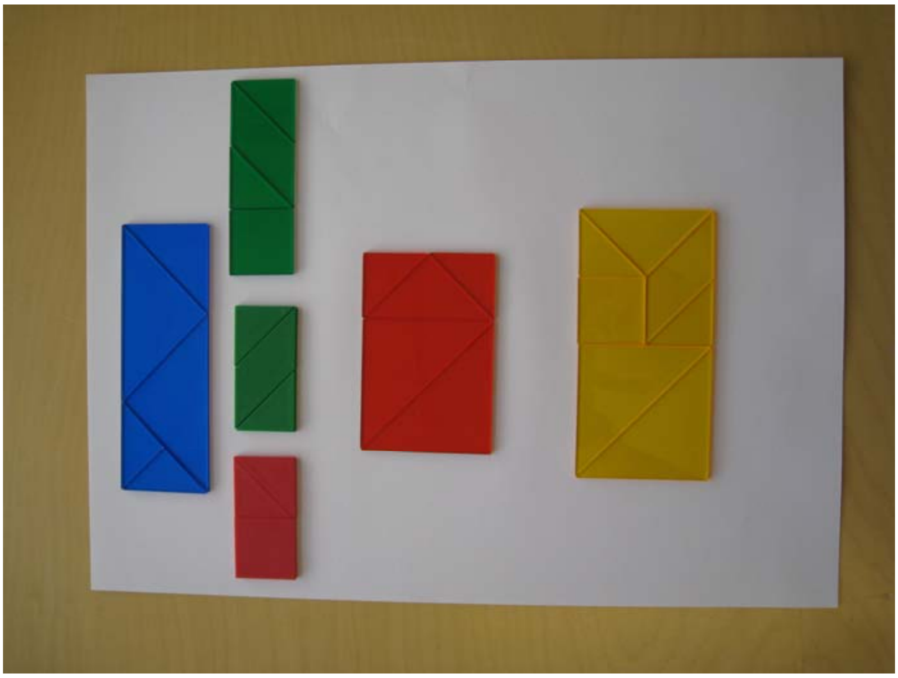
Da er klokka 22.00

Forklaring:

Forskjellen mellom klokkene vil øke med 3 minutter for hver time. Forskjellen er derfor 60 minutter etter 20 timer.

Oppgave 5

Her er noen rektangler (det kan finnes flere):



Oppgave 6

Jentenes navn:

Fornavn:	**Etternavn:**
Tine (3:3 = 1 epler)	**Lassen**
Mette (8:4 = 2 epler)	**Hansen**
Susanne (3:1 = 3 epler)	**Jensen**
Caroline (8:2 = 4 epler)	**Karlsen**

Espen Jensen fikk 3 epler.
Birger Karlsen fikk 8 epler.
Jens Lassen fikk 3 epler.
Tom Hansen fikk 8 epler.

Oppgave 7

Til sammen 80 ulike måter fra 8 ulike terningkast.

(1, 1, 2, 6) på 12 ulike måter

(1, 1, 4, 4) på 6 ulike måter

(1, 1, 3, 5) på 12 ulike måter

(1, 2, 2, 5) på 12 ulike måter

(1, 2, 3, 4) på 24 ulike måter

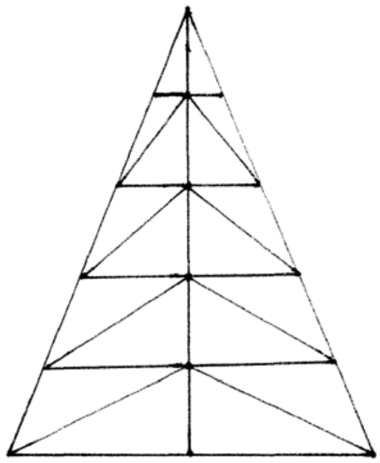
(1, 3, 3, 3) på 4 ulike måter

(2, 2, 2, 4) på 4 ulike måter

(2, 2, 3, 3) på 6 ulike måter

Oppgave 8

Det er 43 trekanter er skjult i denne figuren



Ekstraoppgave ved poenglikhet etter semifinalen:

13 = 5 + 4 + 4, og 5 · 4 · 4 = 80 er det største produktet.

NMCC 2006 – 2007
Nordic Math Class Competition

Finale

Oppgave 1

Utstyr: 20 pinner

<u>Vinnerstrategi</u>

Dere skal prøve å finne en vinnerstrategi for følgende spill:

20 pinner skal fjernes fra en bunke.
To spillere skal fjerne pinner fra bunken etter tur.
Spillerne kan fjerne 1, 2 eller 3 pinner hver gang.
Den som fjerner pinner siste gang, har vunnet.

Dere har funnet en vinnerstrategi når dere kan forklare:
- om det lønner seg å begynne eller ikke begynne
- hvilke trekk spilleren som kan vinne, skal foreta i hver omgang, avhengig av hva motspilleren nettopp har gjort.

Forklaring:

Løsningsforslag:

Spillets strategi er som følger:

Den som får være andremann til å trekke pinner, kan vinne spillet på denne måten:

- Dersom førstemann tar 1 pinne, tar andremann 3 pinner.
- Dersom førstemann tar 2 pinner, tar andremann 2 pinner.
- Dersom førstemann tar 3 pinner, tar andremann 1 pinne.

På denne måten er det tatt 4 nye pinner til sammen hver gang førstemann og andramann har tatt sine pinner.

Det betyr at når det er førstemann sin tur, er det 16 – 12 – 8 – 4 og ingen pinner igjen i haugen.

Oppgave 2

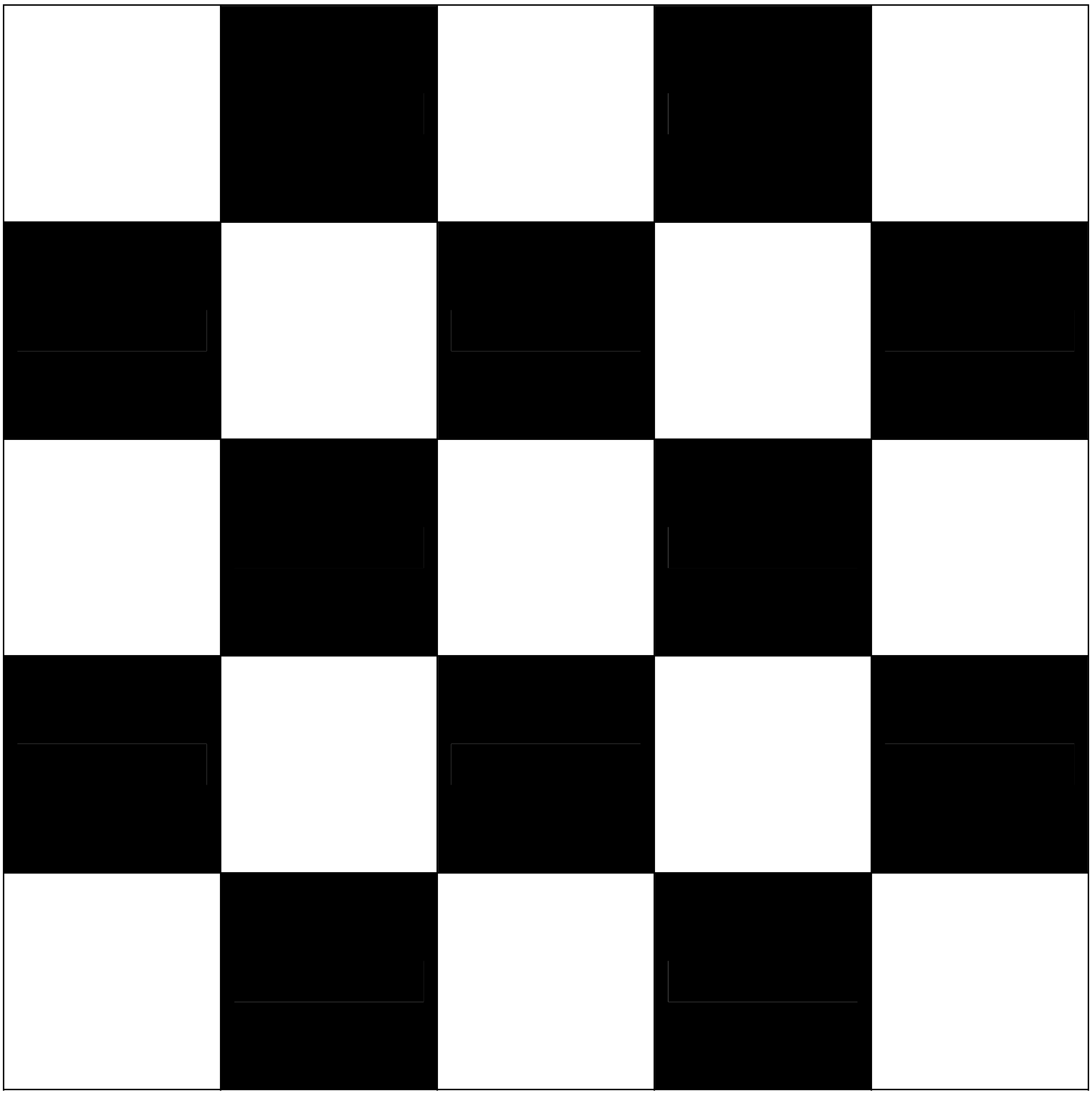
Utstyr: Ruteark 5x5 ruter på overhead. 25 tellebrikker.

I et klasserom er det 25 pulter som er ordnet i fem rekker med fem pulter i hver rekke. Det sitter elever på alle pultene.

Læreren kommer inn i klasserommet og sier at alle elevene skal flytte seg enten en plass fram, en plass bak, en plass til venstre eller en plass til høyre. Er det mulig å få til dette? Hvis ja, forklar hvordan. Hvis nei, forklar hvorfor ikke.

Svaret må begrunnes

Svarark oppgave 2



Løsningsforlag:

Ved flytting av brikker på den måten læreren instruerer, vil en elev som sitter på en svart plass, måtte flytte til en hvit plass og omvendt.

Siden det er 13 hvite og 12 svarte plasser, vil det ikke være mulig at alle elevene flytter på denne måten.

Oppgave 3

Utstyr: 4 tellebrikker i ulike farger.

De fire tellebrikkene kan brukes til å løse følgende problem:

Eva, Morten og Grethe skal fordele fire drops i fire ulike farger mellom seg.

På hvor mange ulike måter kan de fordele dropsene? Både antall og farge kan variere.

Dere kan enten resonnere og finne fram til alle mulighetene, eller dere kan prøve dere fram.

Hvis dere ønsker, kan dere bruke tabellen på svararket.

Svarark oppgave 3

	Farge(r)
Eva	
Morten	
Grethe	

Dropsene kan fordeles på ________________ forskjellige måter.

Forklaring:

Løsningsforslag:

Dropsene kan fordeles på 36 ulike måter.

Antall drops kan fordeles på 3 måter: (1,1,2), (1,2,1) og (2,1,1)

For hver av disse måtene, kan fargene fordeles på 12 ulike måter.

Med B til 1. person, er det 3 måter:
(B,G,SR), (B,S,GR), (B,R,SG)

Første person kan ha 4 ulike farger. Derfor kan fordelingen (1,1,2) gjøres på 12 måter. Tilsvarende for de andre fordelingene.

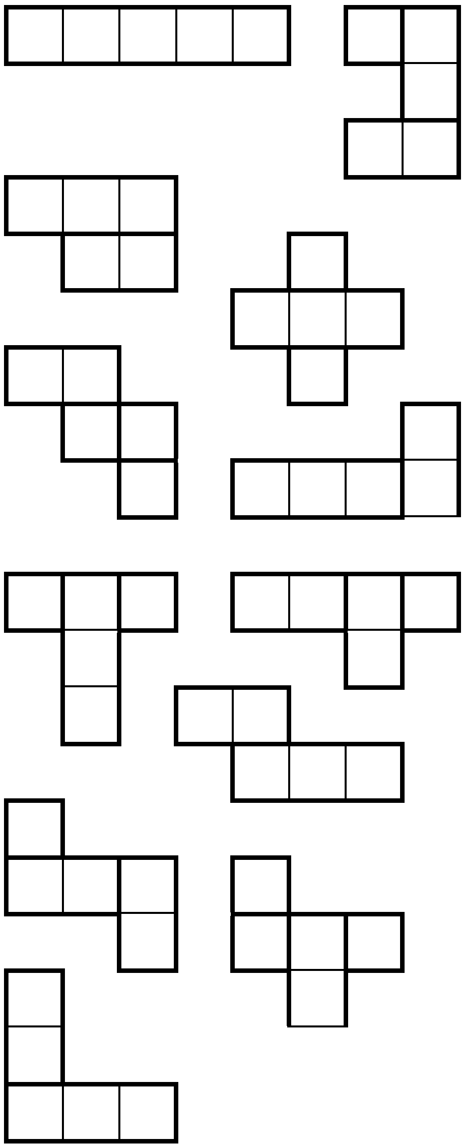
Oppgave 4

Utstyr: Et sett med pentominobrikker (12 ulike brikker satt sammen av 5 kvadrater)

Dere får utdelt et sett med pentominobrikker. Bruk så mange brikker som mulig til å lage et rektangel.

Svarark oppgave 4

Dette er pentominobrikkene



Oppgave 5

Utstyr: 10 brikker og et dartbrett på overhead

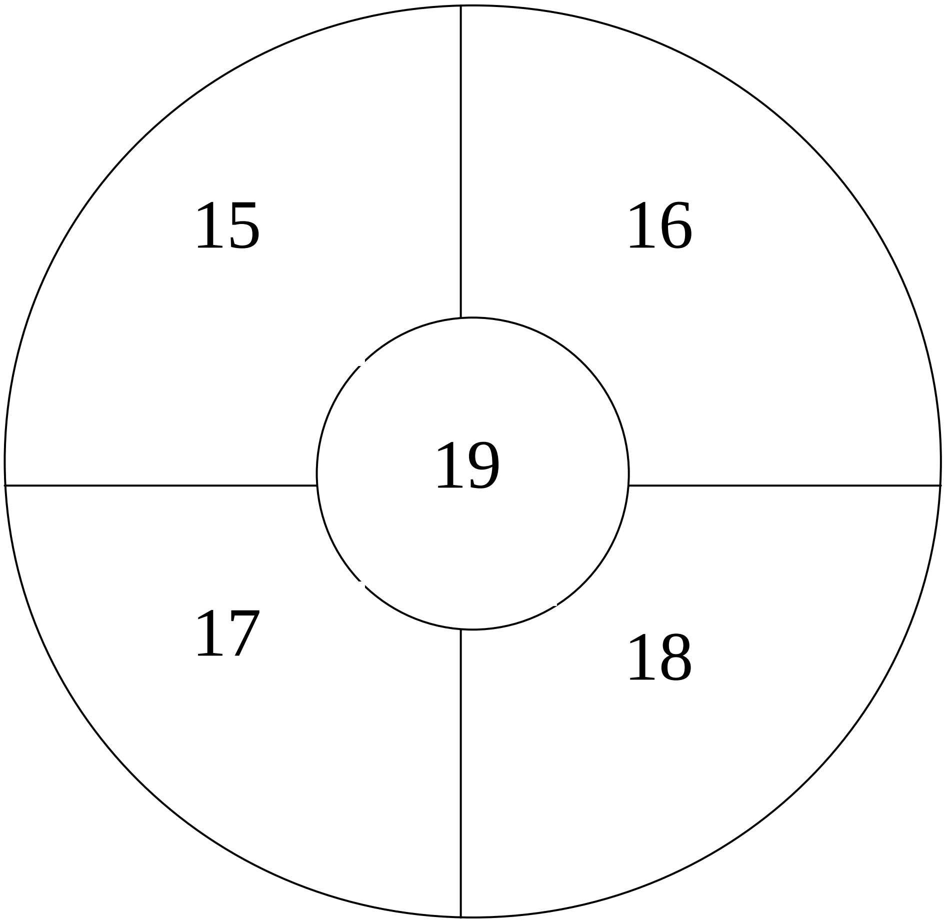
Dere skal tenke dere at dere kaster piler på dartbrettet dere får utdelt.
Bruk gjerne brikkene til å løse følgende oppgave:

Finn så mange måter som mulig å få nøyaktig 100 poeng på.

Hva er det færreste antall piler som trengs for å få nøyaktig 100 poeng?
Forklar hvorfor.

Svarark oppgave 5

Løsninger:



Minste antall piler:

Løsningsforslag:

15-15-16-16-19-19, 15-15-16-17-18-19, 15-15-17-17-18-18, 16-16-16-16-18-18 (det kan være flere)

Minste antall piler: 6 piler er det minste, siden ingen treff er verdt mer enn 19

NMCC 2006 – 2007

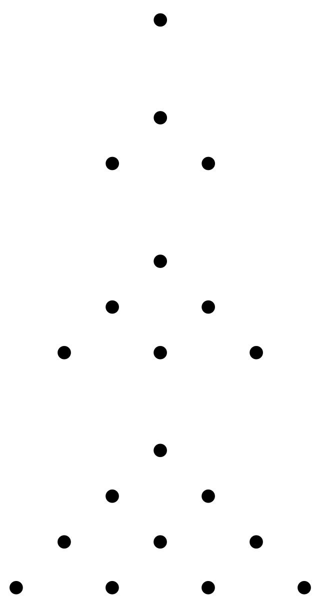
Nordic Math Class Competition

Nordisk finale

Oppgave 1

Trekanttall

Når vi bygger trekanter med tellebrikker kaller vi antall tellebrikker vi trenger for å bygge hver trekant for trekanttall.
De første fire trekanttallene er vist nedenfor:



1

3

6

10

Hva er det største trekanttallet som er mindre enn 500? Hvis dere ønsker, kan dere bruke tellebrikkene til å finne svaret, men vi vil ha en forklaring.

Løsning

496.

Trekanttallene er på formen:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(1+n)}{2}$$

Vår sum skulle være mindre enn 500. Derfor må:

$$n(n+1) < 1000$$

Siden $\sqrt{1000 = 31,6}$

Så er $n < 32$

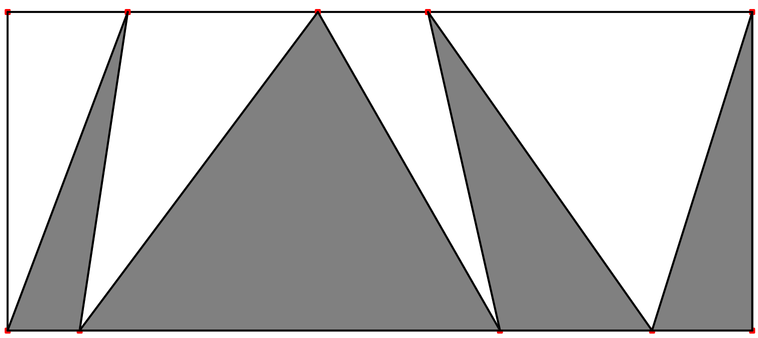
Da får vi at det største trekanttallet mindre enn 500 er:

$$\frac{31 \cdot 32}{2} = 496$$

Oppgave 2

Hvor stor brøkdel av den hele?

A)
Hvor stor brøkdel av hele rektangelet representerer det grå området?
Dere kan bruke saks til å klippe ut bitene og sammenligne hvis dere vil, men vi vil ha en forklaring.

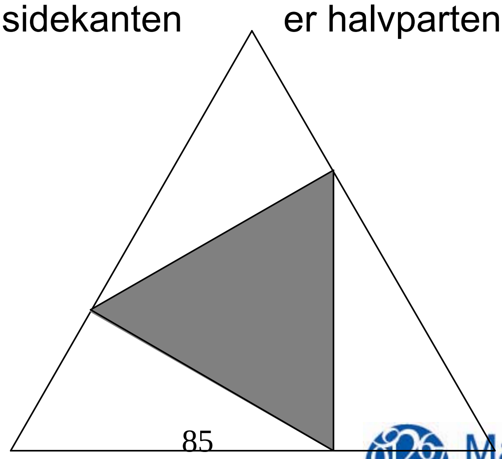


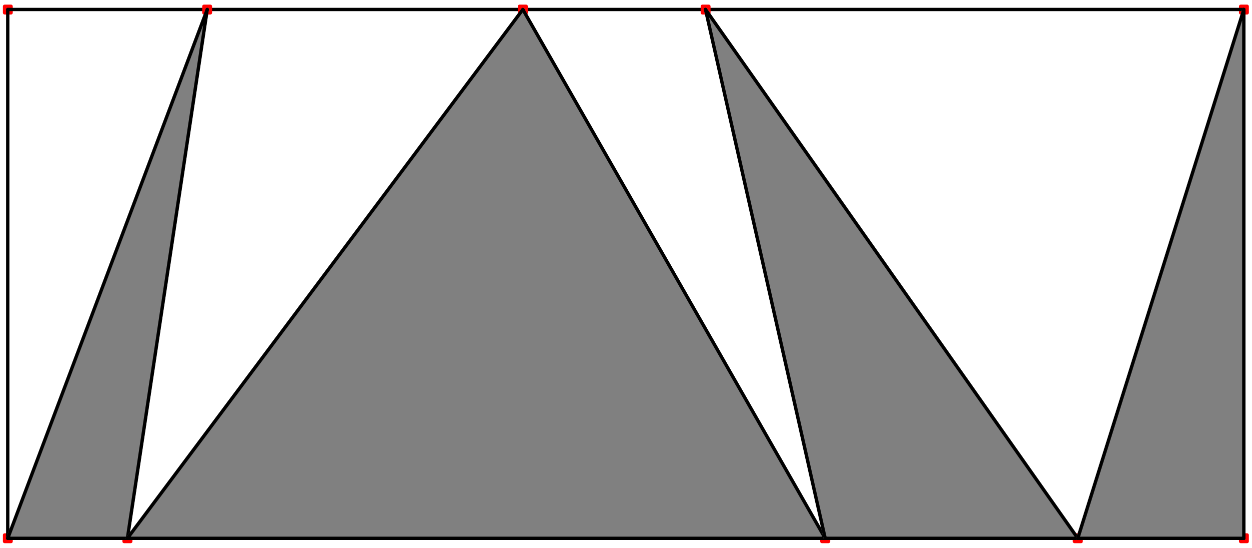
B)

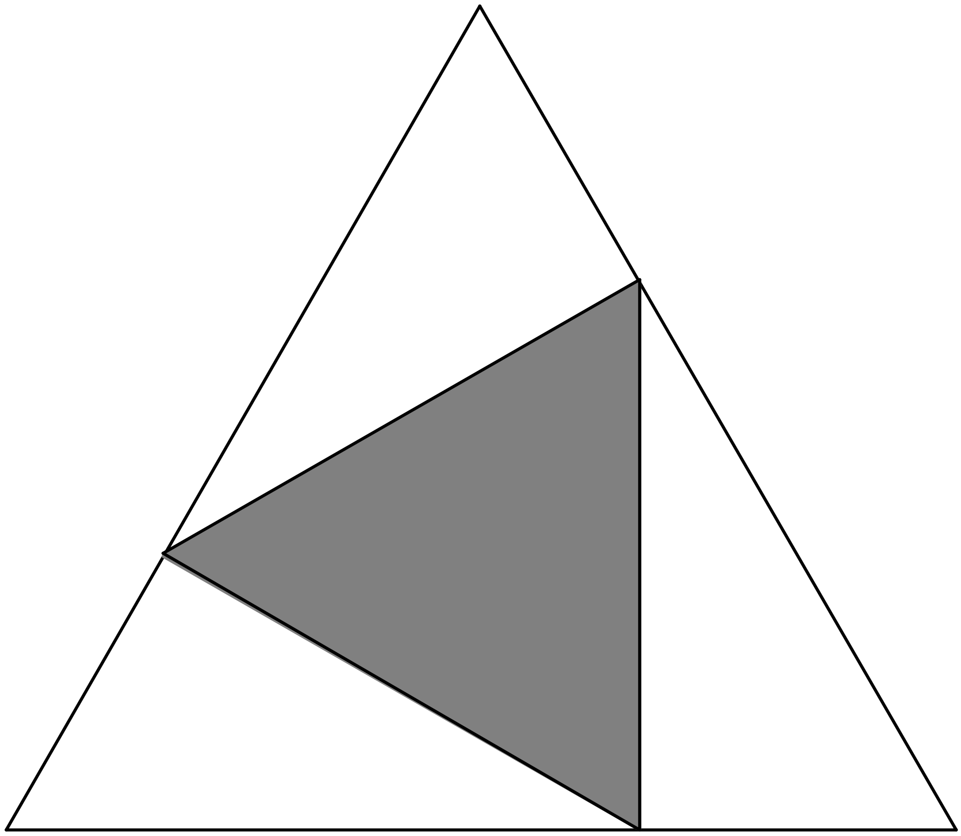
Den ytre trekanten og den grå trekanten i denne figuren er likesida. Hver av sidene i den grå trekanten står normalt på en av sidene i den andre trekanten. Det betyr at hver av de hvite trekantene har en rett vinkel.

Hvor stor brøkdel av arealet til den største trekanten utgjør den skraverte delen?
Dere kan bruke saks og klippe ut delene og sammenligne dem, men vi vil ha en forklaring.

De små hvite trekantene har vinkler på 30˚, 60˚ og 90˚. Det betyr at lengden av den korteste sidekanten er halvparten av lengden av hypotenusen.







Løsning

A) Summen av grunnlinjene til alle trekantene er lik grunnlinja til rektangelet. Høyden i alle trekantene er lik høyden i rektangelet. Siden arealet av hver trekant er halvparten av grunnlinjen multiplisert med høyden, er arealet av det grå området halvparten av arealet til rektangelet.

B) Du kan bruke Pytagoras' læresetning, eller enkle geometriske argumenter til å vise at det grå arealet er 1/3 av det totale arealet til trekanten.

Hvis vi klipper ut de fire bitene og lager 2 kopier av den grå delen, kan vi bygge de hvite delene av disse kopiene.

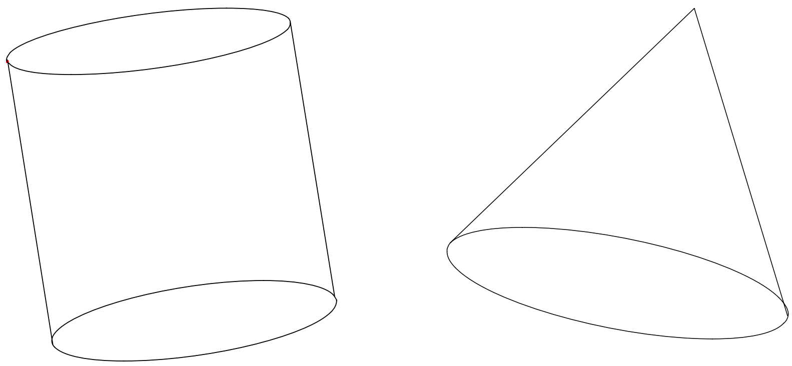
Oppgave 3

Sylinderen og kjegla

Dere får utdelt en sylinder laget av papir. Radius i sylinderen er 3 lengdeenheter.

Bruk passeren, papir, saks, lim og eventuelt gradskive til å lage en åpen kjegle med samme radius og sidelengde lik 4 lengdeenheter.

Vis og forklar modellene deres etterpå.



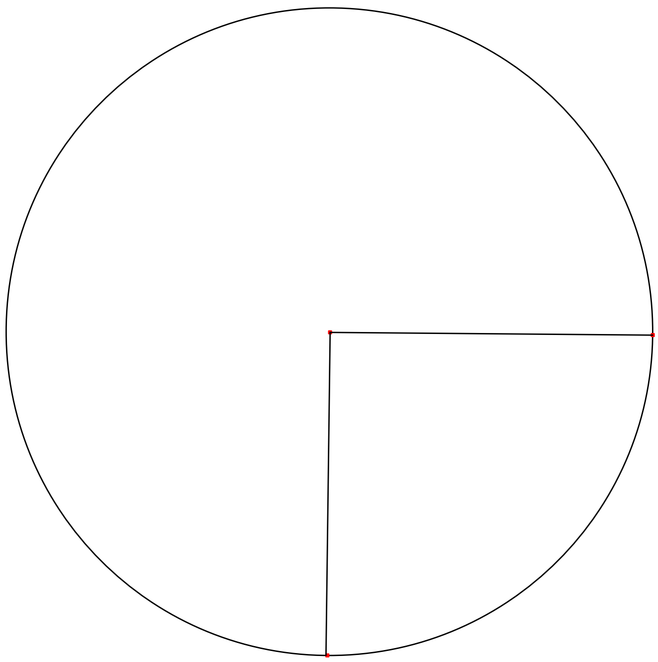
Løsning

Kjeglen lages av en sirkelsektor med radius 4. Buelengden til sirkelsektoren skal være lik omkretsen av en sirkel med radius 3. Vi må finne ut hvor stor del av hele sirkelen som sirkelsektoren skal utgjøre.

Kall brøkdelen for x Da er:

$$2\pi \cdot 4 \cdot x = 2\pi \cdot 3$$
$$x = \frac{3}{4}$$

Sirkelsektoren som skal brukes til å lage kjeglen ser slik ut:



Oppgave 4

Det misforståtte sifferet

Læreren skrev to tall på tavla og ba elevene finne produktet. Sifferet på enerplassen i det ene tallet var 8, men det var veldig utydelig skrevet.

Anna så feil og trodde dette sifferet var 6. Da fikk hun produktet 4740. Tom trodde dette sifferet var 3, og fikk produktet 4695.

Hva skulle riktig svar være ?

Løsning

Forskjellen mellom Annas og Toms svar er 4740 – 4695 = 45, som er 3 ganger den misforståtte faktoren (fordi vi ønsker å finne $a \cdot b$, og Anna har funnet $(a - 2) \cdot b$ mens Tom har funnet $(a - 5) \cdot b$. Differansen mellom disse er $3 \cdot b$). Da er $b = 15$ og riktig svar er:

$4740 + 2 \cdot 15 = 4770$

Oppgave 5

Korttriks

Ingvill viser 13 kort sortert på en spesiell måte slik at:

Hver gang hun viser et kort fra toppen av bunken, legger hun det til siden og putter det neste kortet under de andre i bunken.

Når hun gjentar dette igjen og igjen til alle kortene er lagt unna, vil de ligge i rekkefølge fra 1 til 13.

Laget får 13 usorterte kort og blir bedt om å sortere dem slik at de kopierer Ingvills prosedyre.

Forklar hvorfor dette fungerer!

Løsning

Kortene må legges i denne rekkefølgen:

A-Q-2-8-3-J-4-9-5-K-6-10-7

NMCC 2007 – 2008

Nordic Math Class Competition

Semifinale

Nødvendig utstyr

Oppgave 1: Ark og blyant

Oppgave 2: Kan klare det uten mynter, men det kan være fint å ha for eksempel 30 lekemynter.

Oppgave 3: Kan være en fordel å ha ark med ferdig tegnede rektangler. De trenger linjal, blyant, og passer kan være til hjelp.

Oppgave 4: Linjal og blyant.

Oppgave 5: Ark og blyant

Oppgave 6: Linjal og svarark med punkter

Oppgave 7: Linjal og blyant

Oppgave 8: Ark og blyant (eventuelt lommeregner, men det skulle ikke være nødvendig)

Oppgave 1

Et tall som beskriver seg selv

Finn et 10-sifret tall som er slik at det første sifferet sier hvor mange 0-er det er i tallet, det andre sier hvor mange 1-ere det er i tallet, det tredje hvor menge 2-ere og så videre, til det siste sifferet, som sier hvor mange 9-ere det er i tallet.

Oppgave 2

Sorter mynter i blinde

Det ligger noen mynter på bordet. Dere vet ikke hvor mange mynter det er, men det er helt sikkert mer enn 10. 10 av myntene viser kron, og resten viser mynt. Med bind for øynene skal dere kunne dele myntene i to grupper slik at det blir akkurat like mange mynter som viser kron i begge gruppene.

Det er lov å snu myntene.
Det trenger ikke å være like mange mynter i hver gruppe.
Det går ikke an å finne forskjell på sidene ved å kjenne på dem, eller liknende.

Oppgave 3.

Oppdeling av et kvadrat

Del et kvadrat i trekanter der alle vinklene er mindre enn 90°.
(Hint: Det er mulig å få det til med 8 trekanter)

Oppgave 4

Hannes blomsterbed

Hanne lager et rektangelformet blomsterbed. Hun planter tulipaner i halve blomsterbedet. I tre firedeler av resten av bedet planter hun snøklokker. Så planter hun pinseliljer i halvparten av det som er igjen. Til slutt planter hun påskeliljer i resten av bedet.

Lag en tegning av bedet, og skriv navn på blomstene i de ulike områdene. I hvor mange prosent av bedet er det påskeliljer?

Oppgave 5

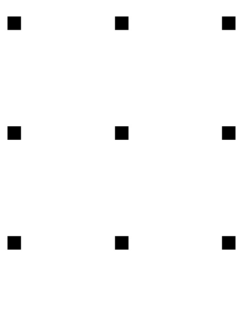
Turn around

Når et firesifret tall blir multiplisert med 9, får vi et tall som har akkurat de samme sifrene som det opprinnelige, bare at rekkefølgen er byttet om. Hvilket tall er det? Vis at det passer.

Oppgave 6

Fire av de 9 punktene nedenfor trekkes tilfeldig ut. Hva er sannsynligheten for at de fire punktene danner et kvadrat?

(Alternativt: Hvor mange forskjellige firkanter kan formes av fire punkter i mønsteret nedenfor? Hvor stor brøkdel av dem er kvadrater?)



Oppgave 7

En spesiell sekskant

Vinklene i en sekskant har gradetall som er seks etterfølgende oddetall. Finn hvor mange grader den største vinkelen er.

(Hint: del opp sekskanten i trekanter for å finne hvor stor summen av alle vinklene i en sekskant er)

Oppgave 8

Varmt på Honolulu

Gjennomsnittstemperaturen på Honolulu de 21 første dagene i februar var 14 grader. Gjennomsnittstemperaturen de 24 første dagene var 16 grader. Hva var gjennomsnittstemperaturen på Honolulu for dagene 22., 23. og 24. februar?

Løsningsforslag

Oppgave 1

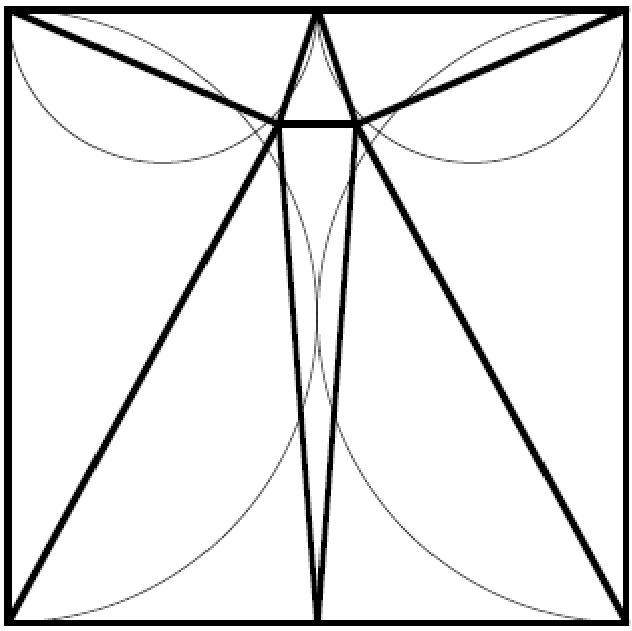
Dette tallet må ha mange 0-er i seg. Ved å prøve seg fram med 5, 6 og 7 nuller, ser en at dette tallet passer:

6210001000

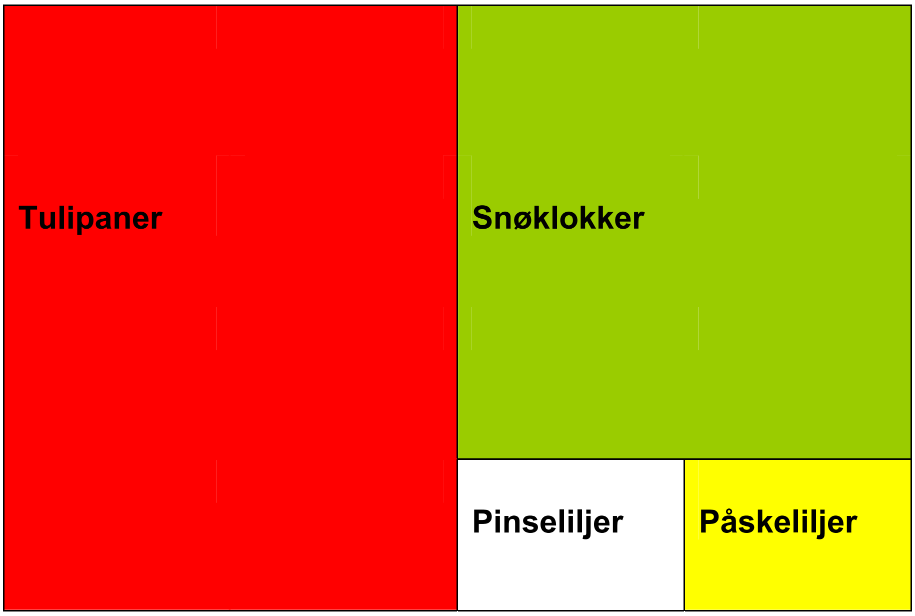
Oppgave 2

Oppgaven kan synes umulig til å begynne med, men er genialt enkel når du får den rette ideen.
Tell opp 10 tilfeldige mynter fra bordet. Dette er ”Gruppe 1”, mens resten av myntene utgjør ”Gruppe 2”. La oss anta at det er x mynter som viser kron i Gruppe 1. Da er det (10 – x) mynter som viser kron i Gruppe 2. Snu alle myntene i gruppe 1. Da blir det (10 – x) mynter i denne gruppa som viser kron, altså like mange som i Gruppe 2.

Oppgave 3



Oppgave 4



Det er påskeliljer i 1/16 av bedet. Det svarer til 6,25%.

Oppgave 5

Hvis vi skal multiplisere med 9 og få et firesifret svar, må sifferet på tusenplassen være 1. Da blir sifferet på enerplassen 9. Sifferet på hundrerplassen må være 0, siden vi ikke kan ha 1 på både tierplassen og hundrerplassen. Tallet er altså

10__9

Siden 9·9=81, må tallet på tierplassen være et tall som multiplisert med 9, gir et svar med 2 på enerplass (så det blir en hel tier når vi legger til 8). Da må det være 8 på tierplassen i tallet. Tallet er:

1089

Oppgave 6

Det kan lages 6 ulike kvadrater ved å velge 4 punkter. Det kan velges 4 punkter på 9·8·7·6 ulike måter. Sannsynligheten for at de skal danne et kvadrat er

$$\frac{6}{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=\frac{1}{9\cdot 8\cdot 7}=\frac{1}{504}$$

(Alternativt: Dette er litt mer komplisert, siden ikke alle 3024 måtene å velge 4 punkter på vil gi firkanter. Hvis 3 av punktene ligger langs en rett linje, blir det trekanter i stedet. Det gjelder i 8·6=48 tilfeller. Det kan altså formes 3024 – 48 = 2976 firkanter. 6 av disse er kvadrater. Det vil si at $\frac{6}{2076} = \frac{1}{346}$ av firkantene som kan dannes, er kvadrater)

Oppgave 7

Kall den minste vinkelen i sekskanten for x. Da er summen av vinklene

$$x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) + (x + 8) + (x + 10) = 6x + 30$$

Summen av vinklene i enhver sekskant er 720 grader. Da får vi

$$6x + 30 = 720$$

$$x=115$$

Den største vinkelen er 115 + 10 = 125 grader.

Oppgave 8

Gjennomsnittstemperaturen for dagene 22., 23. og 24. februar var 30 grader.

La t_i være temperaturen den i-te februar. Da er:

$$\frac{\sum_{i=1}^{21} t_i}{21} = 14$$

$$og$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{24} t_i}{24} = 16$$

Det gir:

$$\frac{\sum_{i=1}^{21} t_i + \sum_{i=22}^{24} t_i}{24} = \frac{14 \cdot 21 + t_{22} + t_{23} + t_{24}}{24} = 16$$

eller

$$t_{22} + t_{23} + t_{24} = 16 \cdot 24 - 14 \cdot 21$$

og

$$\frac{t_{22} + t_{23} + t_{24}}{3} = \frac{16 \cdot 24 - 14 \cdot 21}{3} = 30$$

NMCC 2007 – 2008
Nordic Math Class Competition

Finale

Oppgave 1

H til O-utfordring

Legg de 8 brikkene slik at de danner en H som på
bilde 1. Flytt brikkene slik at de danner en O som på bilde 2 etter følgende regel:
Brikkene kan flyttes til en hvilken som helst plass, bare den etter flyttingen berører minst to andre brikker.
Vis hvordan dere vil flytte brikkene.

Bilde 1 Bilde 2

Hjelpemidler: 8 runde brikker

Oppgave 2

Et håndtrykksproblem

Herr og fru Olsen hadde invitert tre ektepar til selskap.
I løpet av selskapet ble det utvekslet mange håndtrykk. Ikke alle hilste på alle, og ingen i selskapet hilste på sin egen ektefelle.

Ved slutten av selskapet spurte herr Olsen hver av gjestene hvor mange de hadde håndhilst på. Overraskende nok fant han ut at alle svarene han fikk, var forskjellige.

Hvor mange personer hadde herr Olsen håndhilst på?

Forklar hvordan dere har tenkt.

Hjelpemidler: Papir og blyant

Oppgave 3

Myntfliser

En stor flate er dekket med like mynter som ligger tett sammen så hver mynt berører seks av de andre myntene.
Omtrent hvor mange prosent av flaten er dekket av myntene?

Dere kan bruke mynter som hjelpemiddel.

Hjelpemidler: ca 20 mynter eller runde brikker

Oppgave 4

Barnas alder

"Hvor gamle er dine tre barn?", spurte hun.

"Produktet av deres alder er 72, og summen av deres alder er den samme som mitt husnummer," svarte han.
Hun så på husnummeret. "Det er ikke nok informasjon til at jeg kan finne svaret."
"Den yngste liker vaniljeis," sa han.
"Da vet jeg det!" sa hun.

Hvor gamle var de tre barna?

Hjelpemidler: Papir og blyant

Oppgave 5

Et rettferdig spill?

Dere har fått utlevert 10 kort med tallene 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 og 10. Forestill dere at det er to spillere. De trekker hvert sitt kort. Hvis summen av kortene er et partall, vinner den ene, og hvis summen av kortene er et oddetall, vinder den andre.

Lønner det seg å satse på partall, oddetall, eller spiller det ingen rolle? Forklar hvordan dere kommer fram til løsningen.

Hjelpemidler: Ti kort med tallene 1 til 10

Oppgave 6

Fødselsdagsmiddag

En gruppe venner spiste middag sammen på en restaurant og fikk en regning på 2 880 kroner.
De fant ut at to av vennene hadde fødselsdag i løpet av denne måneden, og derfor skulle de begge slippe å være med på å betale regningen.

Derfor måtte de andre betale 48 kroner mer enn hvis alle skulle ha delt regningen likt mellom seg.

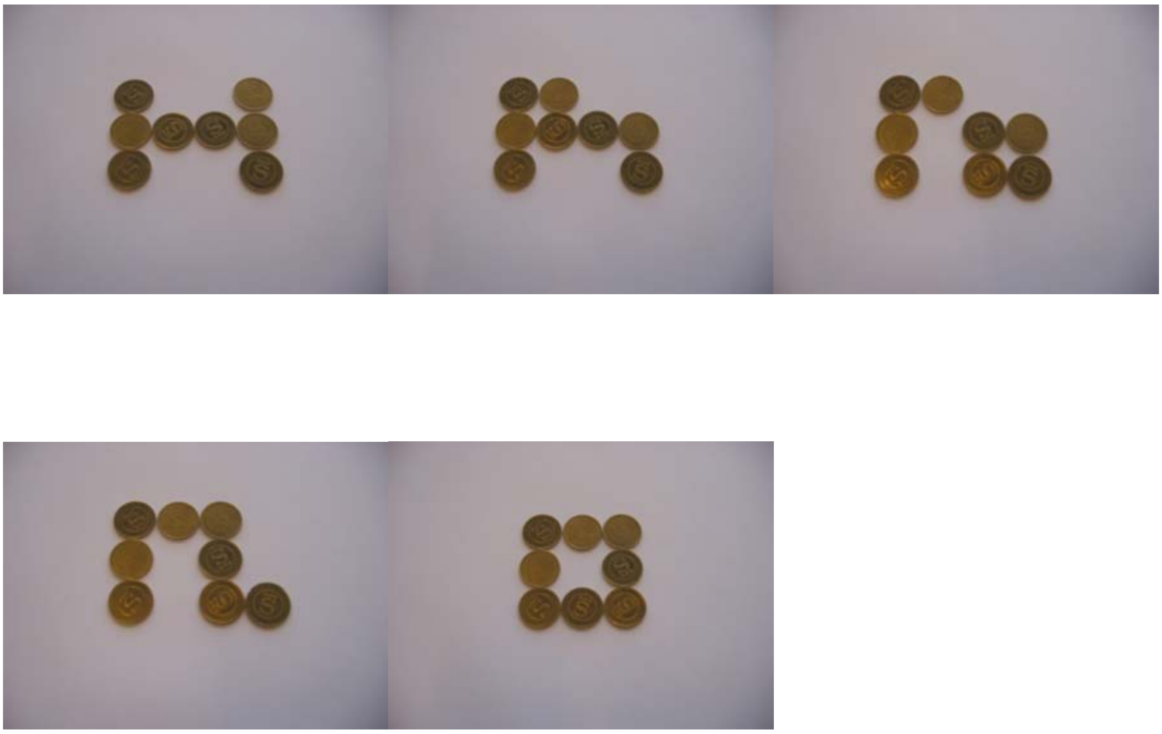
Hvor mange venner spiste middag sammen inklusive de to som hadde fødselsdag denne måneden?

Hjelpemidler: Papir og blyant

Løsningsforslag

Oppgave 1

Flytting fra H til O kan skje på denne måten:



Oppgave 2

Alle har hilst på et ulike antall personer, bortsett fra herr Olsen som kan ha hilst på like mange som en av de andre. Ingen kan ha hilst på mer enn 6 personer, siden ingen hilser på seg selv, og ingen hilser på sin ektefelle.

Da må de sju andre personene ha hilst på henholdsvis 0, 1, 2, 3, 4, 5 og 6 personer.

Kall ekteparene
A og B
C og D
E og F
G og H

La A være herr Olsen. Da kan de ha hilst etter følgende skjema:

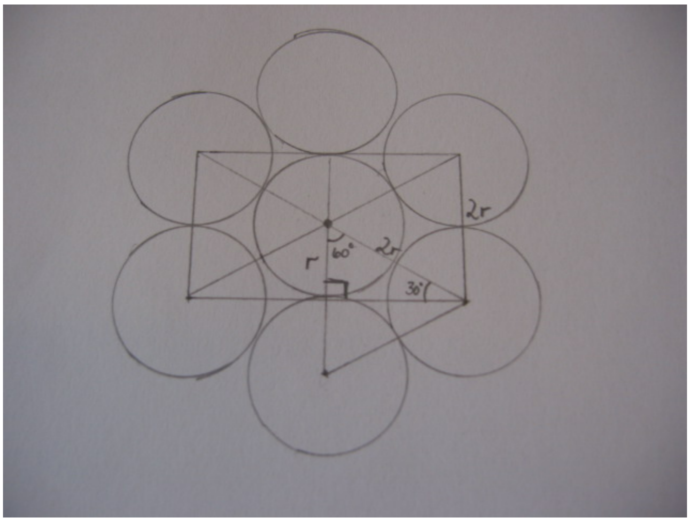
Personer:	Har hilst på:
A (herr Olsen) B	C, E og G C, E og G
C D	A, B, E, G E, G
E F	A, B, C, D og G G
G H	A, B, C, D, E og F Ingen

Herr Olsen har hilst på 3 personer, like mange (og de samme) som sin kone.

Oppgave 3

Det er spørsmål om *omtrent* hvor mange prosent som er dekket av mynter. Da kan vi se bort fra effekten på kantene.

Vi lager et rektangel med hjørner i fire av myntene rundt en sentral mynt.



De korte sidene i rektangelet har lengde 2r, der r er radius i mynten.
De lange sidene er like lange som to høyder i en likesidet trekant med side 2r, det vil si $2r\sqrt{3}$.

I dette rektangelet er det en hel mynt og fire kvarte mynter. Myntene utgjør:

$$\frac{2\pi r^2}{4r^2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0,906$$

Det vil si ca 90% av arealet.

Oppgave 4

Produktet av barnas alder er 72.

$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

Da finnes følgende muligheter:

Barnas alder	Summen av barnas alder
1, 2, 36	39
1, 3, 24	28
1, 4, 18	23
1, 6, 12	19
1, 8, 9	18
2, 2, 18	22
2, 3, 12	17
2, 6, 6	14
2, 4, 9	15
3, 3, 8	14
3, 4, 6	13

Bare to av mulighetene gir samme sum, nemlig alternativene
2, 6, 6 og 3, 3, 8

Men siden ett av barna er yngst, må barna være 2 år, 6 år og 6 år.

Oppgave 5

Det er 20 kombinasjoner som gir et partall til sum:

1-3, 1-5, 1-7, 1-9
2-4, 2-6, 2-8, 2-10
3-5, 3-7, 3-9
4-6, 4-8, 4-10
5-7, 5-9
6-8, 6-10
7-9
8-10

Det er 25 kombinasjoner som gir et oddetall til sum:

1-2, 1-4, 1-6, 1-8, 1-10
2-3, 2-5, 2-7, 2-9
3-4, 3-6, 3-8, 3-10
4-5, 4-7, 4-9
5-6, 5-8, 5-10
6-7, 6-9
7-8, 7-10
8-9
9-10

Det betyr at det lønner seg å satse på oddetall. Da vinner du i over halvparten av spillene (5 av 9).

Oppgave 6

Vi skal finne et tall n, slik at $\frac{2880}{n-2}-\frac{2880}{n}=48$

Legg merke til at 2880:48=60

Da får vi likningen: $\frac{60}{n-2}-\frac{60}{n}=1$

Nå kan vi prøve oss fram (siden elevene ikke kan løse annengradslikninger), og ser at det passer med n=12. 60:10=6 og 60:12=5.

Vi kan også prøve helt fra starten, og sette opp en tabell:

Antall venner	Alle måtte betalt:	Alle unntatt 2 må betale:	Differansen:
6	480	720	240
8	360	480	120
10	288	360	72
12	**240**	**288**	**48**

Vi ser at hvis det er 12 stykker som betaler, må de betale 240 kr hver, og hvis det er 10 stykker, må de betale 288kr hver. Det er altså 12 venner iberegnet de to som har fødselsdag.

NMCC 2007 – 2008

Nordic Math Class Competition

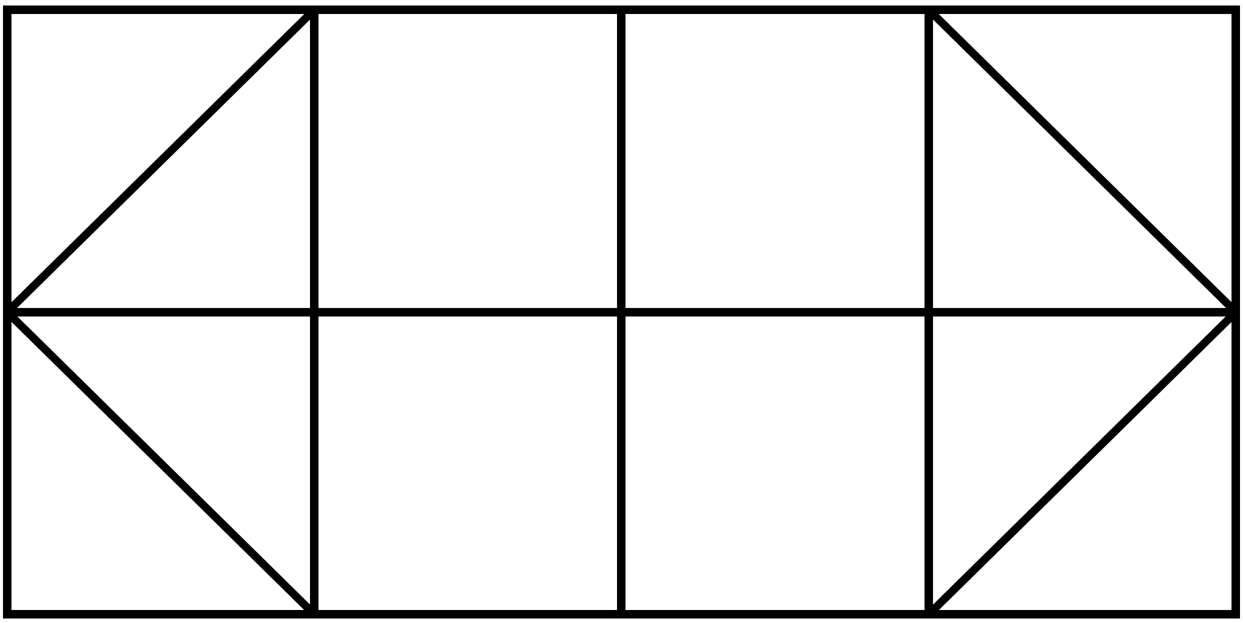
Nordisk finale

Oppgave 1

Dere får utdelt puslebrikker som svarer til trekantene og kvadratene som utgjør rektangelet nedenfor. Bruk de 12 bitene og sett dem sammen til

a) et kvadrat
b) et parallellogram
c) et trapes som er symmetrisk om en midtlinje
d) en rettvinklet og likebeint trekant

For hver figur dere har laget, skal dere lage en skisse av løsningen.



Oppgave 2

Anne, Bengt, Cecilie, Dina og Erik er fem gode venner. Hvis vi summerer alderen til fire av dem, får vi svarene 55, 56, 61, 63 og 65.

Hvor gammel er den yngste av vennene?

Dere må forklare hvordan dere har tenkt.

Løsningsforslag:

Anta at $A \geq B \geq C \geq D \geq E$

$$A + B + C + D = 55$$
$$A + B + C + E = 56$$
$$A + B + D + E = 61$$
$$A + C + D + E = 63$$
$$B + C + D + E = 65$$

Hvis vi summerer alle de fem summene, vil hver venn telles med fire ganger.

$$4A + 4B + 4C + 4D + 4E = 55 + 56 + 61 + 63 + 65$$

eller

$$A + B + C + D + E = \frac{55 + 56 + 61 + 63 + 65}{4} = 75$$

Summen av de fire eldste er $B + C + D + E = 65$

Da er den yngste $A = 75 - 65 = 10$

Den yngste er 10 år.

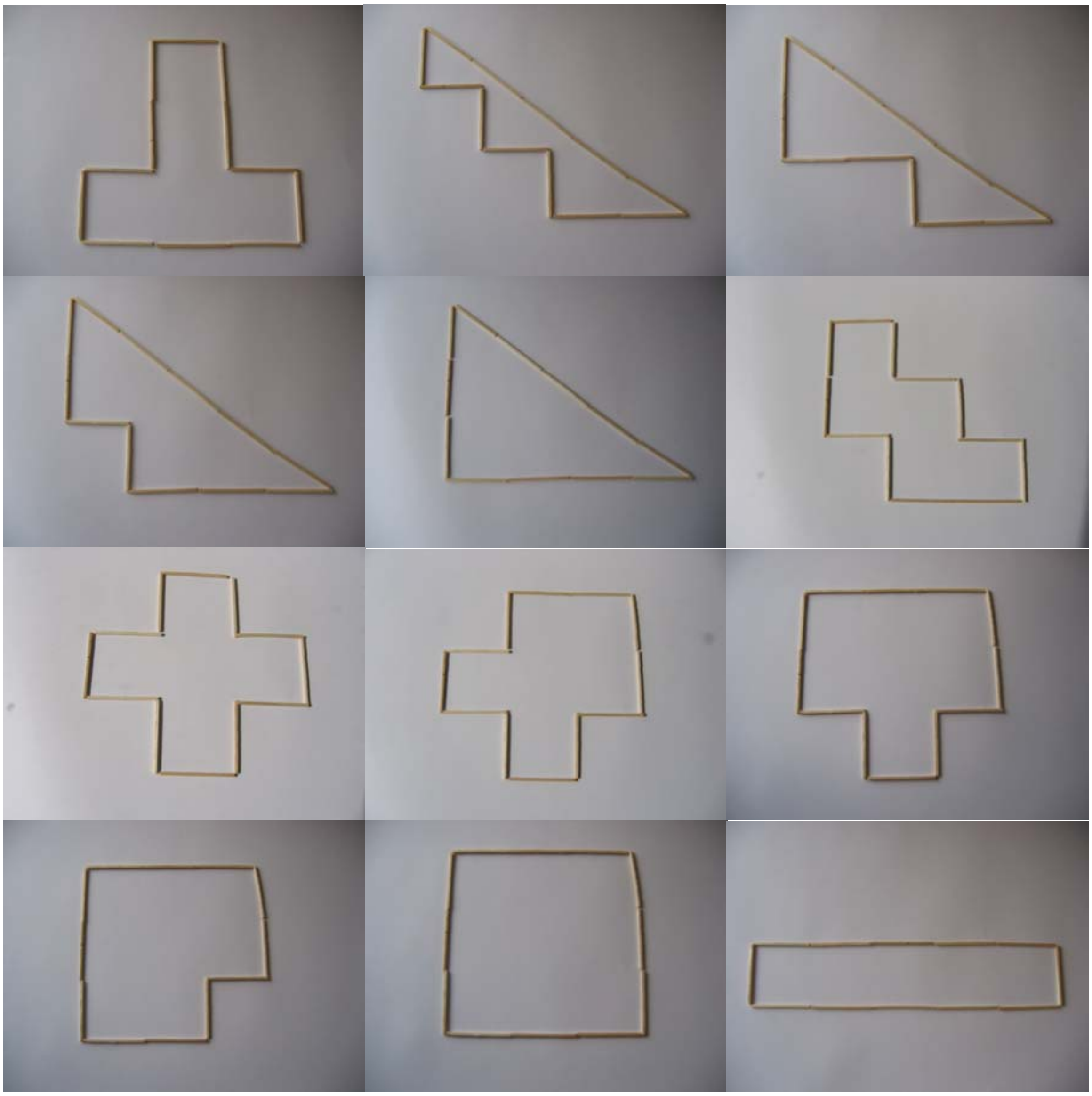
Oppgave 3

Dere får utdelt 12 pinner. Vi bruker lengden av pinnene som enhetslengden.

Bruk alle pinnene til hver figur, og lag figurer med areal 9, 8, 7, 6, 5, 4 og 3.
Pinnene kan ikke være inni figuren, og figuren må være sammenhengende.

Lag en skisse av alle løsningene.

Løsningsforslag:



Oppgave 4

Definisjon: Et spill kalles rettferdig hvis hver spiller har like stor mulighet til å vinne.

Diskuter følgende spill:

Versjon 1
For å spille skal det være to spillere. Den ene kalles Even og den andre kalles Odd. Hver spiller velger seg et av tallene 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 eller 9, og skriver det på en lapp uten å vise det til den andre.

Deretter viser begge fram tallene sine. Hvis summen er et partall, vinner Even, og hvis summen er et oddetall, vinner Odd.

Er dette et rettferdig spill? Forklar!

Versjon 2
Denne gangen er ikke 0 med. Det betyr at Even og Odd må velge blant tallene 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 og 9. Ellers er reglene som i versjon 1.

Er dette et rettferdig spill? Forklar!

Løsningsforslag:

Versjon 1: Rettferdig 50 – 50

	0	2	4	6	8	1	3	5	7	9
0										
2		e	v	e	n		o	d	d	
4	+	e	v	e	n	+	e	v	e	n
6	=	e	v	e	n	=	o	d	d	
8										
1										
3		e	v	e	n		o	d	d	
5	+	o	d	d		+	o	d	d	
7	=	o	d	d		=	e	v	e	n
9										

Versjon 2: Urettferdig 41(even) : 40 (odd)

	2	4	6	8	1	3	5	7	9
2	e	v	e	n		o	d	d	
4	e	v	e	n	+	e	v	e	n
6	e	v	e	n	=	o	d	d	
8									
1									
3	e	v	e	n		o	d	d	
5	o	d	d		+	o	d	d	
7	o	d	d		=	e	v	e	n
9									

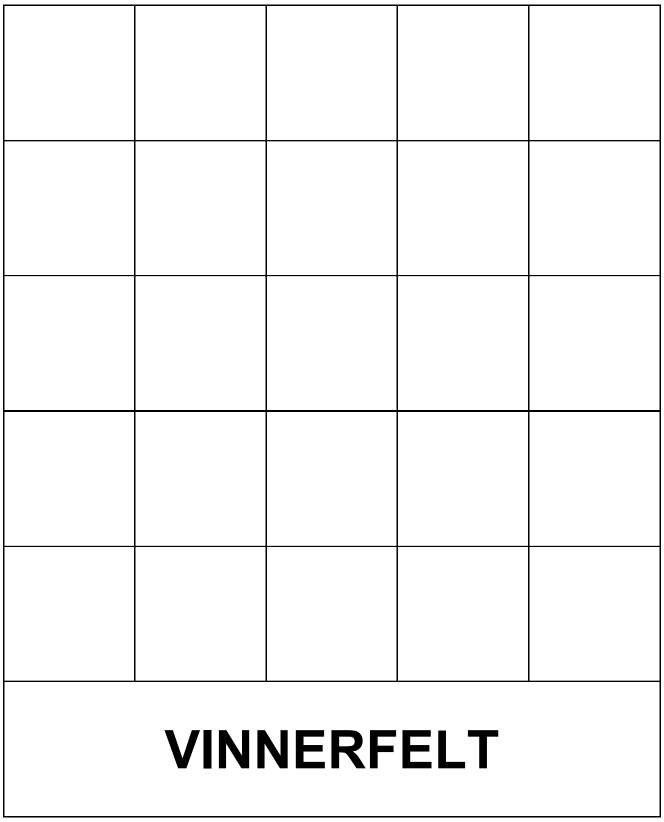
Oppgave 5

Nedenfor får dere beskrevet et spill for to spillere, og dere skal komme fram til en vinnestrategi for spillet. Det betyr at dere skal avgjøre

a) om det lønner seg å begynne eller være nummer to
b) hvordan det må spilles for å sikre seieren.

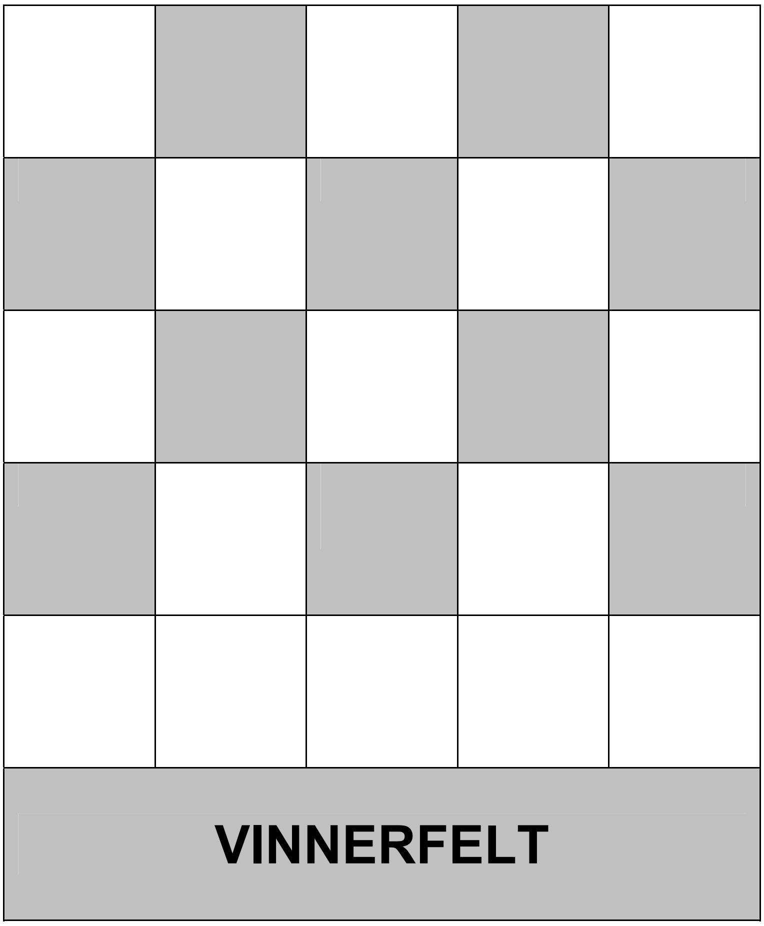
Spillet
Nedenfor ser dere spillebrettet. Spillerne skal plassere brikker på brettet etter følgende regler:

1. Spiller A plasserer en brikke i en av de tomme rutene i øverste rad.
2. Spiller B flytter den samme brikken enten rett til høyre, rett til venstre eller rett nedenfor der brikken sto. Spillerne har ikke lov til å flytte brikken diagonalt eller oppover.
3. Spillerne flytter brikken på denne måten annenhver gang.
4. En spiller kan ikke flytte brikken tilbake der den sto sist.
5. Den første spilleren som klarer å flytte brikken til vinnerfeltet har vunnet spillet.



Løsningsforslag:

Så fort en spiller har plassert brikken i nederste rad, vil den andre spilleren vinne. Strategien blir derfor å unngå å flytte inn i den nederste raden. Trygge plasser i den nest nederste raden, er plass nummer 1, 3 og 5. Ved å tenke videre oppover i spillet, ser vi at de trygge plassene er de som er farget grønt.



I den øverste raden er det to trygge plasser. Det lønner seg altså å være først, og plassere brikken på ett av de to grå feltene øverst. Hvis en da spiller smart, vil en alltid kunne vinne.

NMCC 2008 – 2009

Nordic Math Class Competition

Semifinale

Nødvendig utstyr

Oppgave 1: Oppgaveark og linjal

Oppgave 2: Nummerbrikker med tallene 1, 2, 6, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 18 og 19

Oppgave 3: Ingen spesielle hjelpemidler

Oppgave 4: Åtte A-5 ark. 9 små regulære 8-kanter i papir.

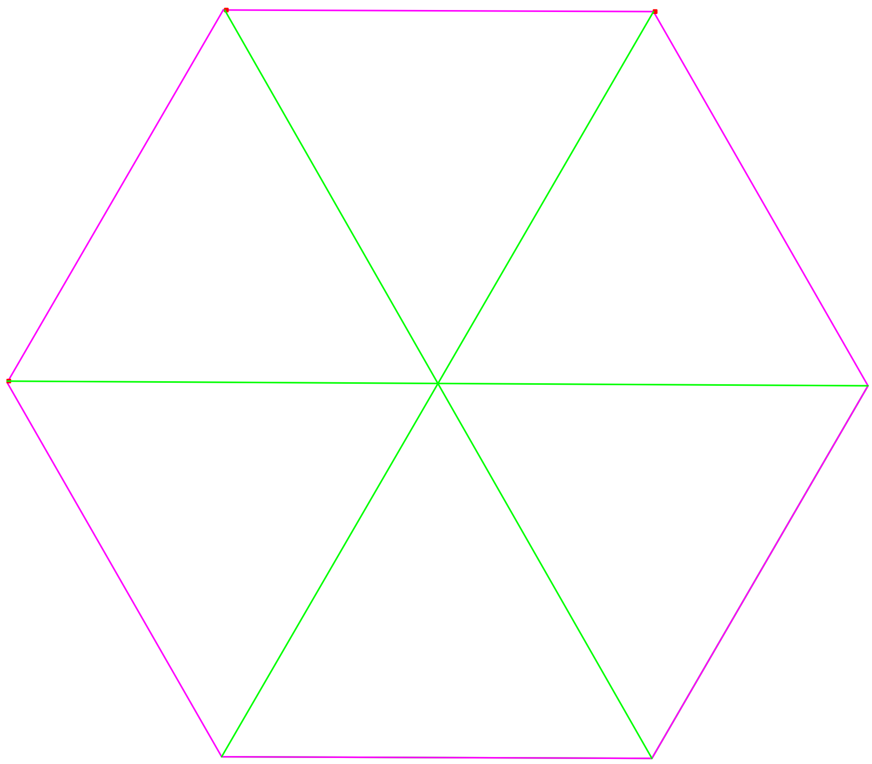
Oppgave 5: Ingen spesielle hjelpemidler

Oppgave 6: Ingen spesielle hjelpemidler

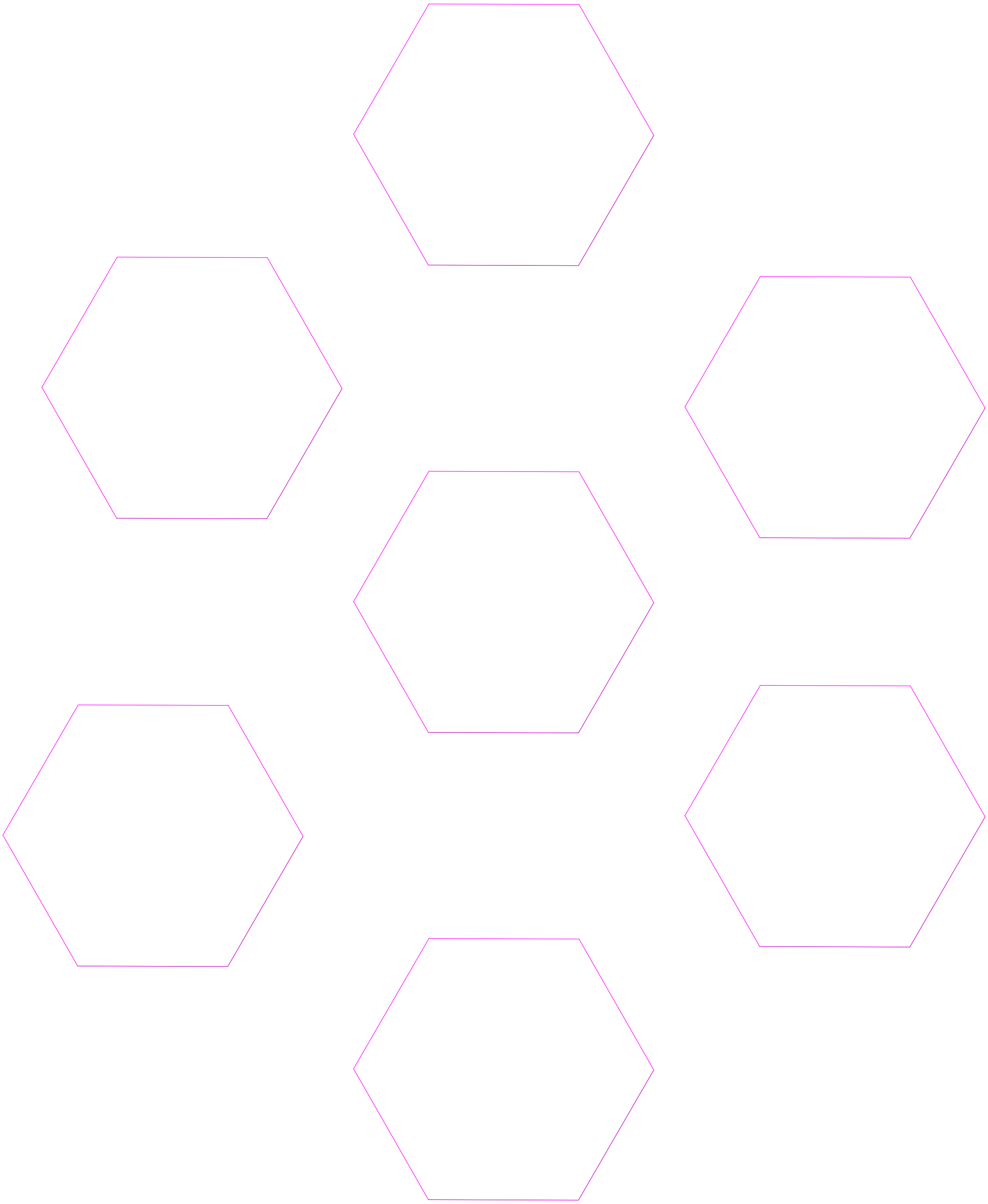
Oppgave 1

Dere får utdelt et ark med sju regulære sekskanter. Del dem inn i $\frac{6}{6}$ på sju ulike måter. Det er bare lov til å bruke rette linjer.

Nedenfor ser dere ett eksempel:



SVARARK OPPGAVE 1

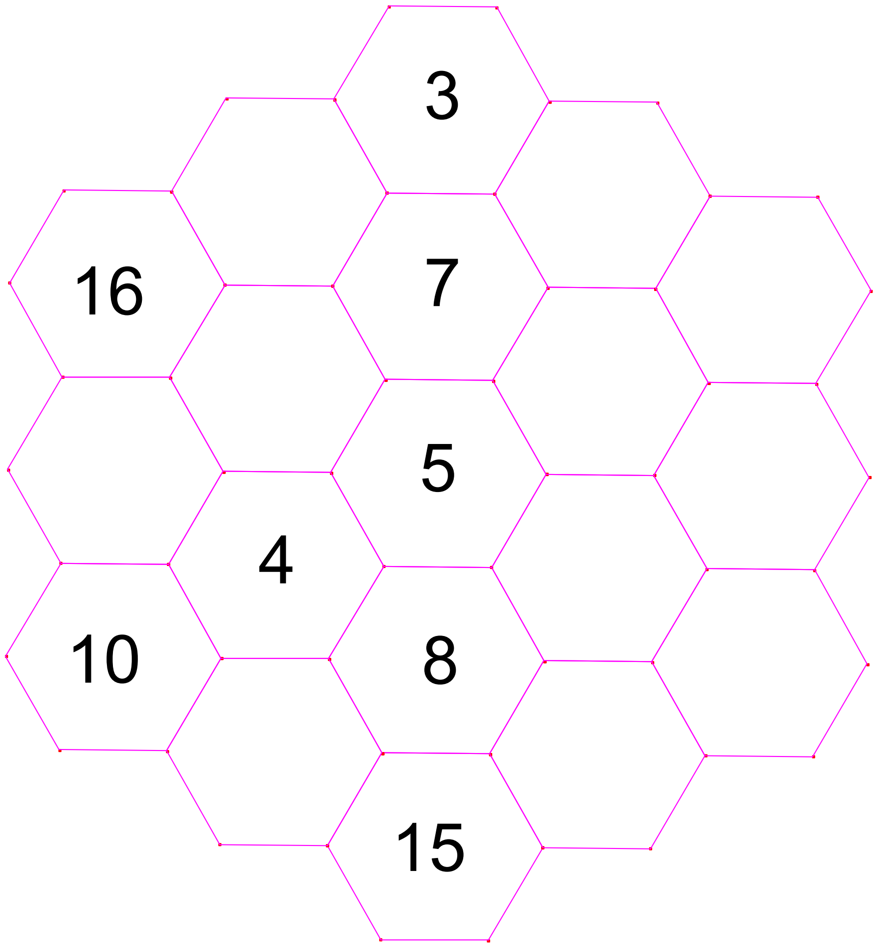


Oppgave 2

Magisk heksagon

I et magisk heksagon er tallene fra 1 til 19 plassert i cellene slik at summen av tallene langs hver diagonal og summen av tallene i en vertikal kolonne er den samme.
Bruk de utdelte tallbrikkene og plasser dem slik at heksagonet nedenfor blir magisk.

Hva blir den magiske summen?
Hvor er tallene plassert?

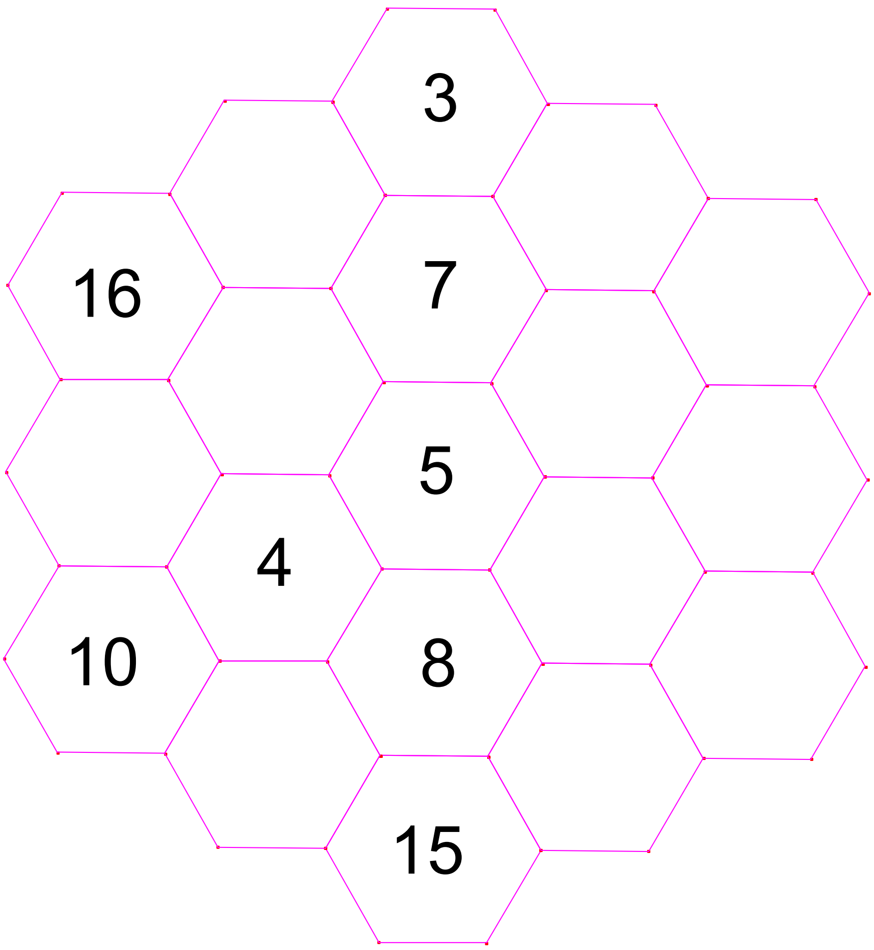


Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

SVARARK

Den magiske summen er ____________

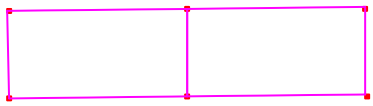
Slik skal tallene plasseres:



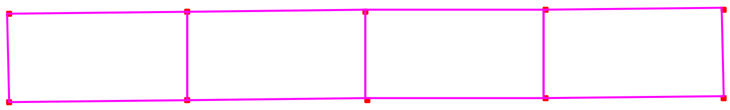
Oppgave 3

Rektangeltallmønster

I figurene nedenfor er det henholdsvis ett, tre og seks rektangler:



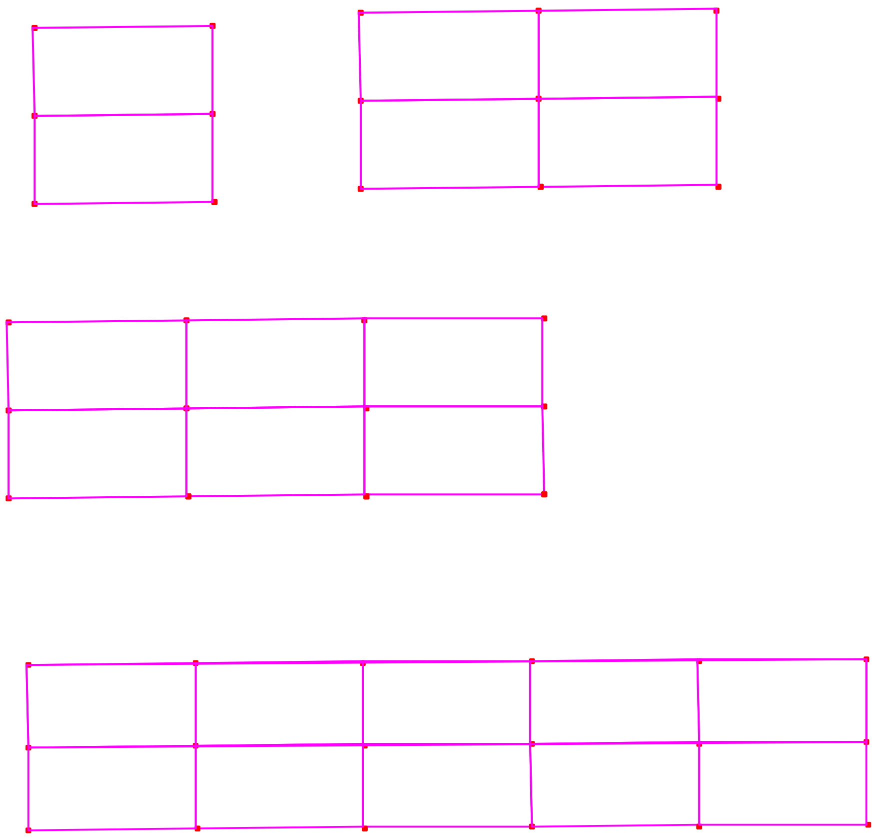
a) Hvor mange rektangler er det i denne figuren?



b) Hvor mange rektangler er det i denne figuren?

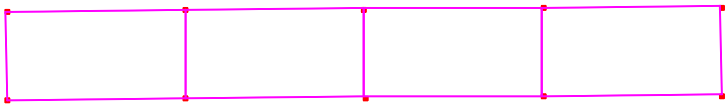
c) Hvor mange rektangler er der i en rekke satt sammen av *n* rektangler? (Finn en formel)

d) Finn tilsvarende mønster for disse figurene ved å telle rektangler. Finn en formel for antall rektangler i figuren som er satt sammen av 2 x *n* rektangler.



SVARARK

a) Det er ______ rektangler i denne figuren.



b) Det er _____ rektangler i denne figuren

c) Formel for antall rektangler i en rekke med *n* rektangler:

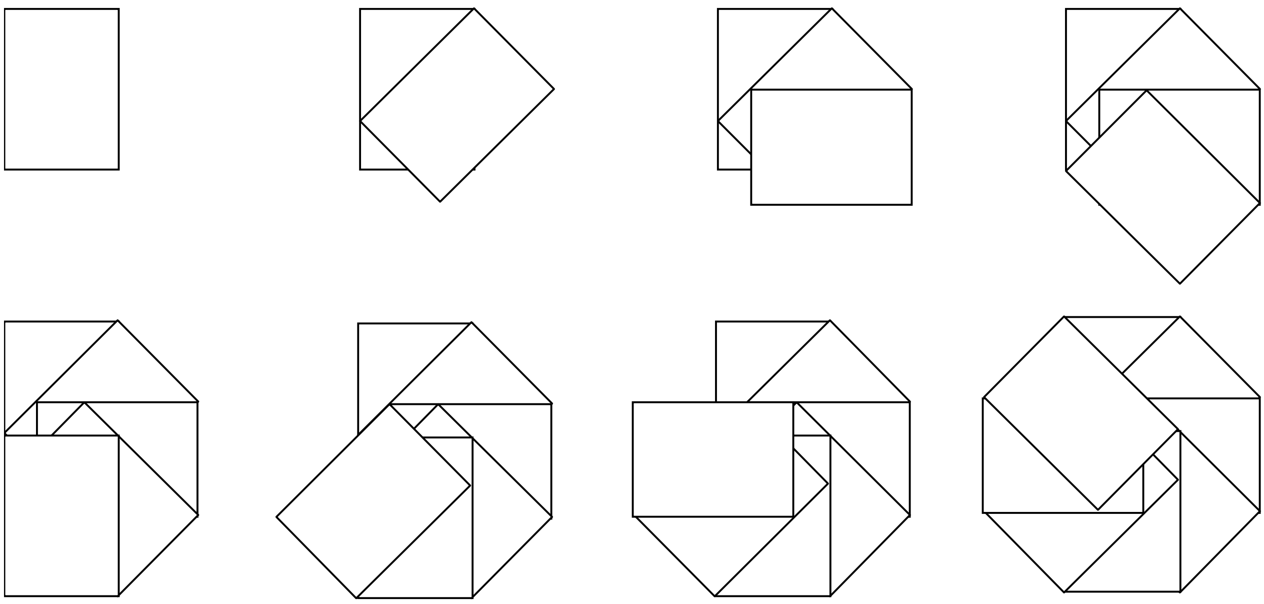
d) I de fire figurene er det henholdsvis ____, ____, ____ og ____ rektangler.

Formel for antall rektangler i en figur satt sammen av 2 x *n* rektangler er:

Oppgave 4

Regulære åttekanter av papir

Dere får utdelt åtte A5-ark. Legg ett ark oppå hverandre slik som på figuren.

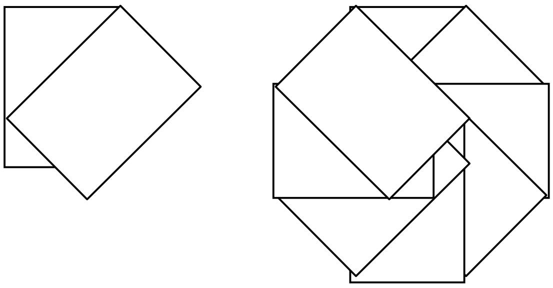


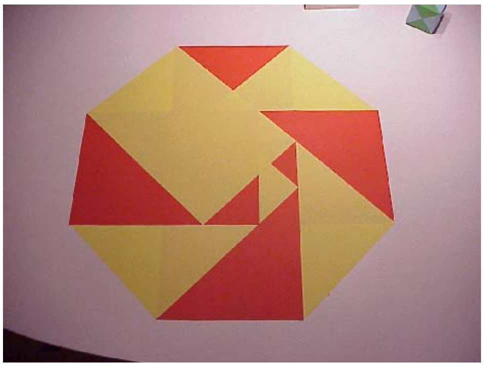
A-formatet er laget slik at forholdet mellom lengdene til den lengste og den korteste sidekanten er lik $\sqrt{2}$.

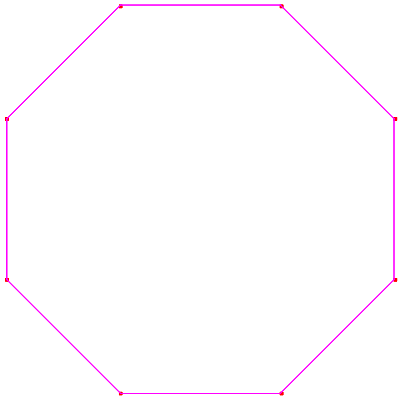
a) Den innvendige vinkelen (kantvinkelen) i en regulær 8-kant er 135°.
Vis at det nettopp er denne vinkelen som framkommer når vi legger A5-arkene slik som på figuren. Bruk figurene på det utdelte svararket og gjør beregningene der.

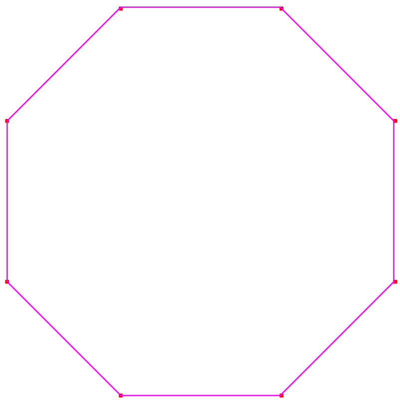
b) Bruk de utdelte 8-kantene.
Hva slags mønster får dere fram hvis dere legger 8-kanter så tett dere kan? Mønsteret vil bestå av 8-kanter og hull.
Regn ut summen av vinklene som møtes i hvert hjørne, og forklar hvorfor mønsteret blir nettopp slik.

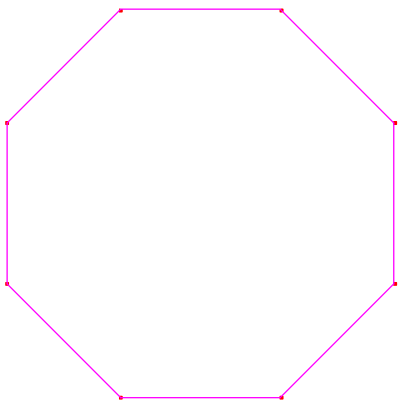
SVARARK











Oppgave 5

Tyven

Gullsmykkene var blitt borte!

Tyven var enten butleren, stuepiken eller kokken. Under etterforskningen sa hver av dem følgende:

Butleren: Stuepiken har stjålet gullsmykkene

Stuepiken: Det er sant!

Kokken: Jeg stjal ikke gullet.

Vi vet at minst en av dem snakket sant og minst en av dem løy. Hvem stjal gullsmykkene?

NB! Dere må forklare hvordan dere har tenkt, og argumentere for at det er logisk og riktig.

SVARARK

Det var __________________________________ som var tyven.

Forklaring:

Oppgave 6

En klasse hadde hatt en prøve. Fem av prøvene ble borte, så læreren var usikker på hvor mange poeng han hadde gitt på disse fem prøvene.

Han hadde imidlertid notert at

- Typetallet (poengsummen som forekom oftest) på de fem prøvene var 90
- Medianen (den som delte tallmaterialet i to) var 85
- Gjennomsnittet var 83

Poengsummene var hele tall mellom 0 og 100.
Finn den laveste poengsummen som kan ha vært på de fem som var blitt borte.

NB: Dere må vise hvordan dere har beregnet det, og forklare hvordan dere har tenkt.

SVARARK

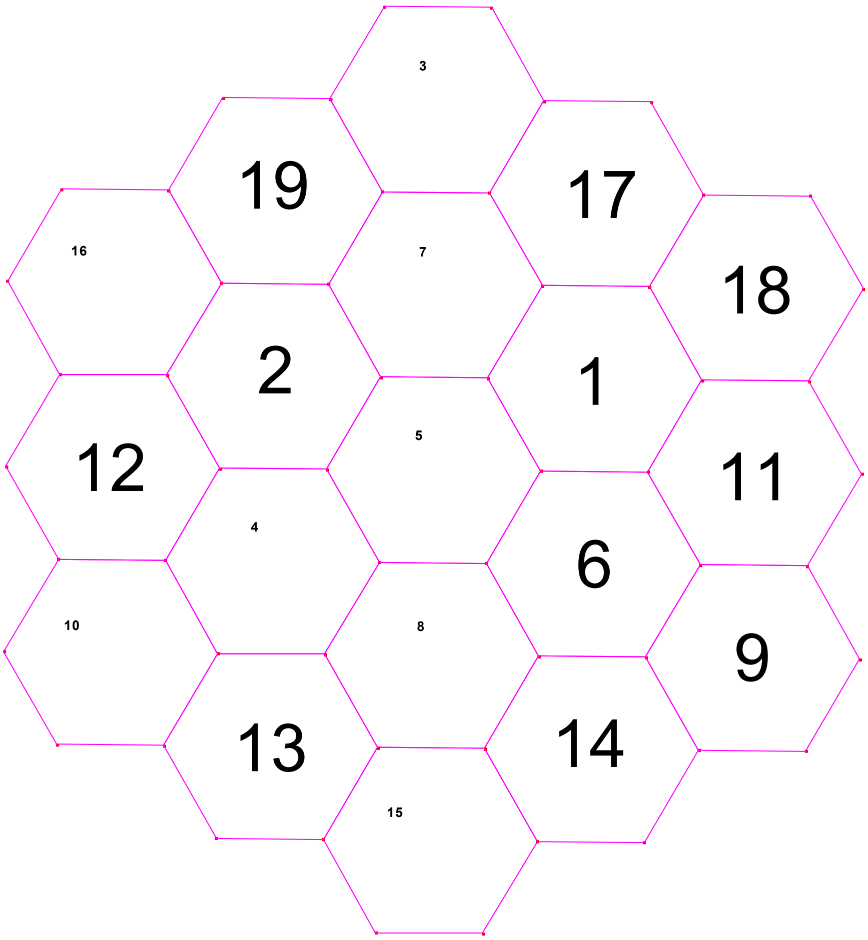
Den minste poengsummen det kan ha vært på prøvene er: __________

Utregning og forklaring:

Løsningsforslag

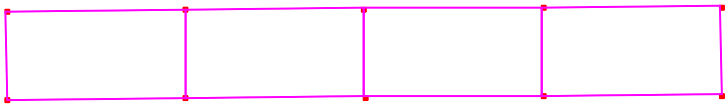
Oppgave 2

Den magiske summen er 38.



Oppgave 3

a) Det er 10 rektangler i denne figuren.



b) Det er 15 rektangler i denne figuren

c) Formel for antall rektangler i en rekke med *n* rektangler:

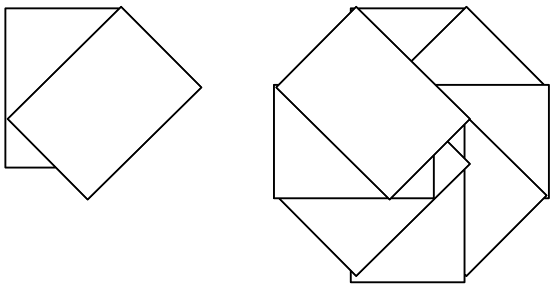
$$\frac{n^2+n}{2}$$

d) I de fire figurene er det henholdsvis 3, 9, 18 og 30 rektangler.
Formel for antall rektangler i en figur satt sammen av 2 x *n* rektangler er:

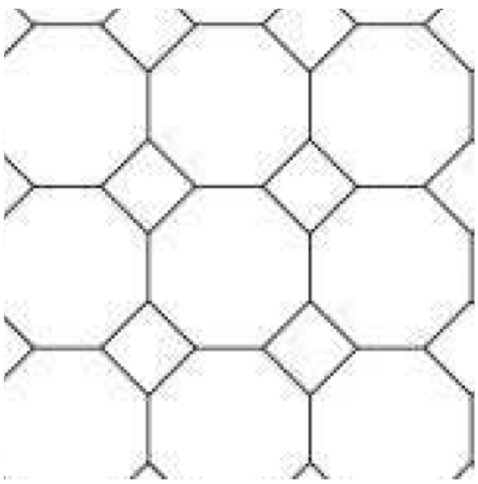
$$\frac{3(n^2+n)}{2}$$

Oppgave 4

a) Trekanten som kommer fram når vi legger to ark oppå hverandre slik som på figuren, er en rettvinklet trekant med en kortside lik 1 og hypotenus lik √2. Da er også den andre kortsiden lik 1 (kan argumentere ved å bruke Pytagoras læresetning).
Da er vinklene i trekanten 45º. Hele vinkelen som framkommer på denne måten er derfor 90º+45º=135º, det vil si vinkelen i en regulær åttekant.



b) Når to åttekanter legges inntil hverandre, utgjør vinklene til sammen 270º. Da er det 90º igjen som ”hull”, siden 360º - 270º = 90º. Når vi legger på flere åttekanter, får vi et fint mønster med åttekanter og kvadratiske hull.



Oppgave 5

Butleren stjal gullsmykkene

Hvis kokken hadde tatt dem, så måtte alle sammen ha løyet. Hvis stuepiken hadde tatt dem, så hadde alle snakket sant. Dermed må butleren være tyven. Butleren og stuepiken løy, og kokken snakket sant.

Oppgave 6

Den laveste poengsummen var 66

Forklaring: Siden typetallet er 90, må minst to av poengsummene være 90.

Medianen var 85, så minst en poengsum må være 85. Siden 90 er typetallet, kan det bare ha vært en poengsum som er 85, og de to andre er mindre enn 85

Siden gjennomsnittet er 83, er summen av alle poengsummene:

$$5 \cdot 83 = 415$$

Total poengsum på de to dårligste prøvene er derfor:

$$415 - 2 \cdot 90 - 85 = 150$$

Den nest dårligste prøven kan ha høyst 84 poeng. Det betyr at den dårligste prøven må ha minst 150 – 84 = 66 poeng.

NMCC 2008 – 2009
Nordic Math Class Competition

Finale

Oppgave 1

Ostekube

En kube av ost er delt inn i 27 mindre kuber, alle sammen helt like store. Annenhver kube er gul cheddarost og hvit edamer.

En mus starter å spise i det ene hjørnet. Etter å ha spist en kube, begynner den å spise på den som er nærmeste nabo til den første. Den kan ikke spise diagonalt. Er det mulig for musa å spise alle de små kubene på denne måten, og ende opp med den sentrale kuben?

Dere må gi en god begrunnelse for svaret.

Løsningsforslag

Det er ikke mulig.

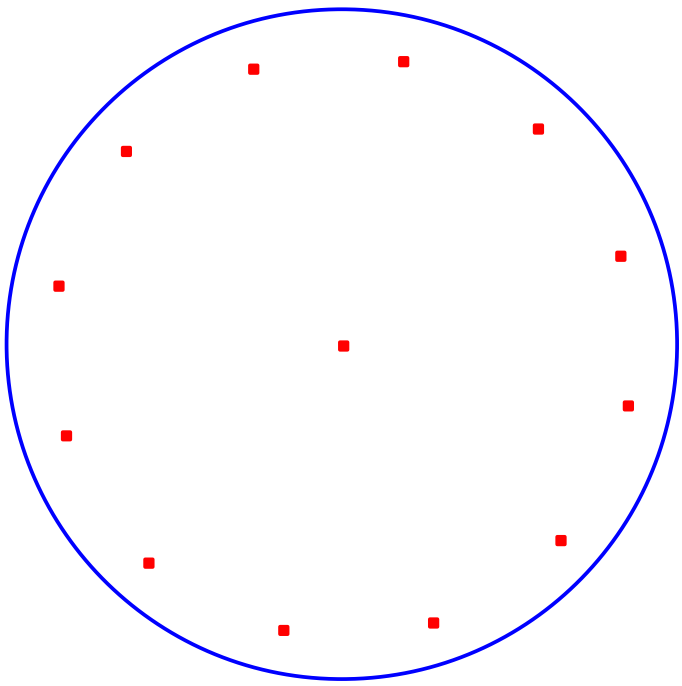
Hvis vi tenker oss at alle hjørnene er gul cheddar, så er den midterste kuben på hver flate også cheddar. Da er den sentrale kuben hvit edamer.

For hver gang musa har spist en ost av en farge, begynner den på en ost av motsatt farge.

Det er 14 gule og 13 hvite kuber. Musa begynner med en gul kube. Da må den også ende med en gul kube. Siden den sentrale kuben er hvit, kan ikke musa vente med den til slutt.

Oppgave 2

Tulleklokke



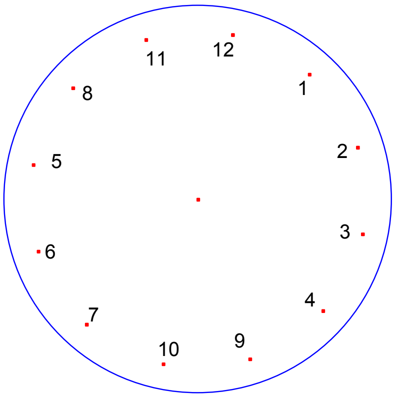
Dere får utdelt tallbrikker med tallene fra 1 til 12.

Plasser seks av tallene som kommer etter hverandre på klokka på riktig plass, og stokk om de resterende tallene slik at summen av hvert nabopar av tall blir et primtall.

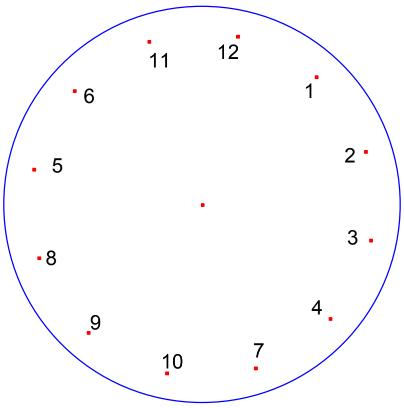
Løsningsforslag

La 11, 12, 1, 2, 3 og 4 stå på riktig plass.
Hvis vi ser hvilke tall som kan stå ved siden av 11, er det 8 eller 6.

Prøver vi med 8, kan vi plassere 9, 10, 7, 6 og 5 i retning mot urviseren fra 11. Men 5 kan ikke stå ved siden av 4, så det går ikke.
Det andre alternativet er 5, 6, 7, 10 og 9. Siden 9+4=13, går det bra.
Da har vi denne løsningen:



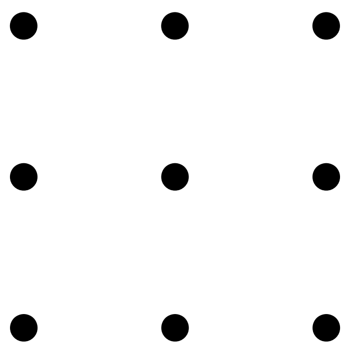
Prøver vi med 6 ved siden av 11, kan vi plassere 7, 10, 9, 8 og 5 i retning mot urviseren fra 11, men det går ikke med 5 ved siden av 4.
Det andre alternativet er 5, 8, 9, 10 og 7. Siden 7+4=11, går det bra. Da har vi denne løsningen:



Oppgave 3

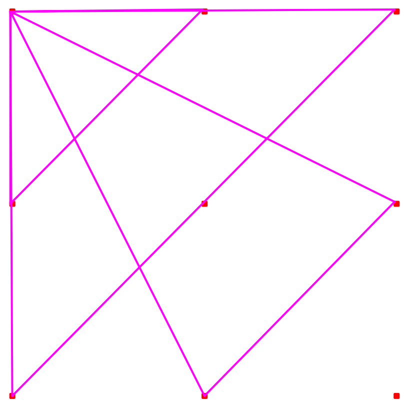
Nedenfor ser du et "gitter" som består av 9 prikker. Det svarer til 9 pinner på geobrettet dere får utdelt.

Hvor mange **likebeinte** trekanter kan dere lage med tre av punktene som hjørner?



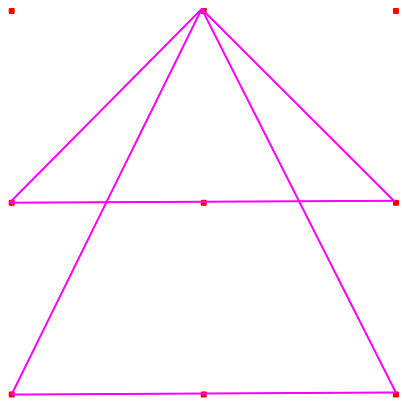
Løsningsforslag

36 trekanter til sammen



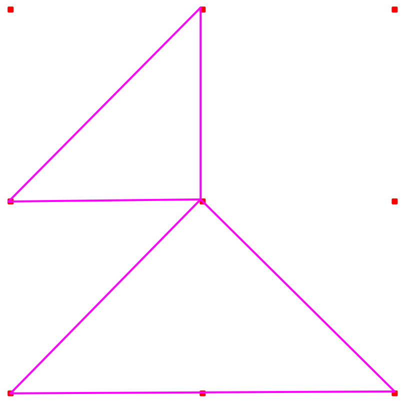
Det er tre ulike trekanter med toppunkt i øvre venstre pinne. På grunn av rotasjonssymmetri utgjør slike trekanter til sammen:

$3 \cdot 4 = 12$



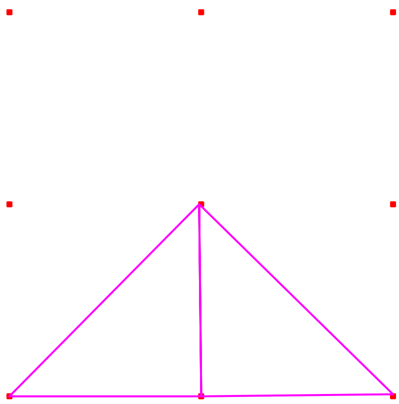
To trekanter med toppunkt i øverste midterste pinne. Til sammen

$2 \cdot 4 = 8$ slike



To trekanter med toppunkt i den midterste pinnen. Til sammen

2 · 4 = 8 slike



To trekanter med toppunkt i pinnen nederst i midten. Til sammen

2 · 4 = 8 slike

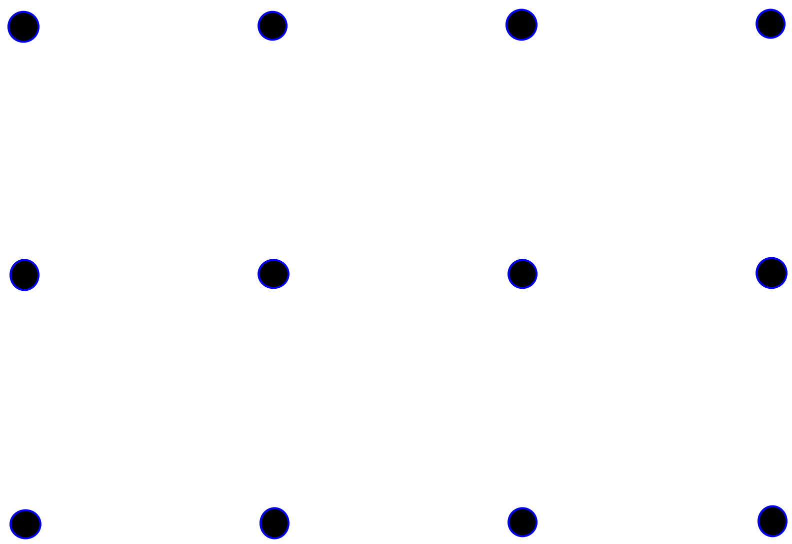
Oppgave 4

Lengde √5.

Nedenfor har vi tegnet et prikkekart med 12 prikker der vannrett og loddrett avstand mellom to naboprikker er 1.

Tegn alle rette linjer som starter i en av prikkene og ender i en annen og har lengde √5.

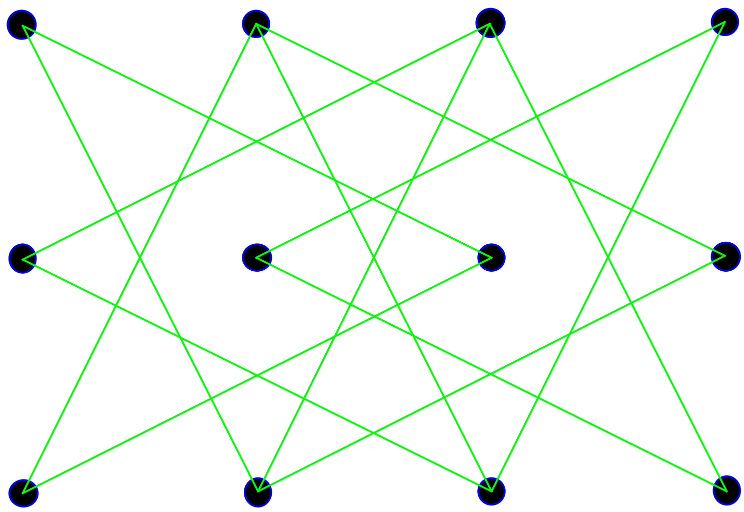
Hvor mange klarer dere å finne?



Løsningsforslag

Det er 14 linjer med lengde √5.

Siden rettvinklede trekanter med kateter med lengde 1 og 2 har hypotenus √5, er det egentlig alle slike rettvinklede trekanter vi leter etter.



Oppgave 5

Bokstavkode

I bokstavregnestykket nedenfor skal hver bokstav byttes ut med et siffer. Samme bokstav som står flere plasser, skal byttes ut med samme siffer. To ulike bokstaver skal byttes ut med ulike siffer.

Finn sifrene og skriv opp regnestykket.

$$
\begin{array}{r}
\mathrm{S\,N\,I\,P} \\
-\ \mathrm{N\,I\,P\,S} \\
\hline
=\ \mathrm{P\,I\,N\,S}
\end{array}
$$

Løsningsforslag

Regnestykket ser slik ut:

$$
\begin{array}{r}
9\,1\,0\,8 \\
-\;1\,0\,8\,9 \\
\hline
=\;8\,0\,1\,9
\end{array}
$$

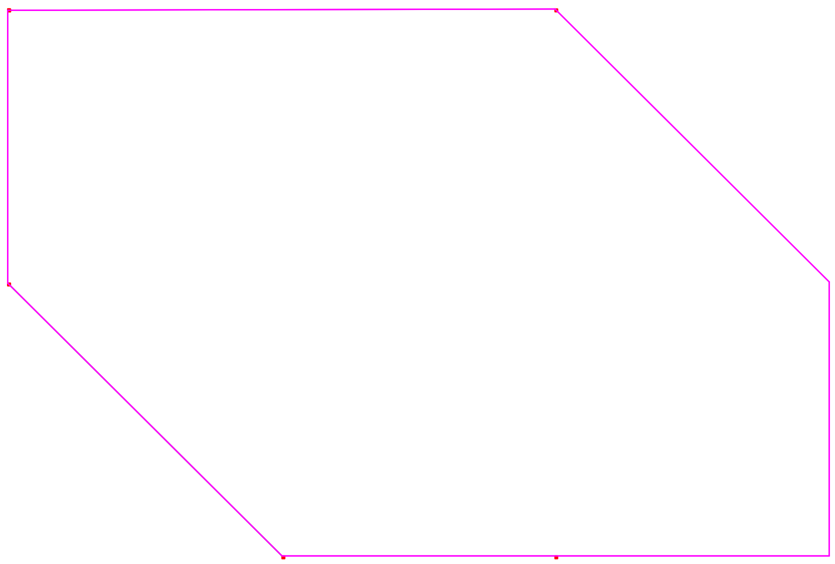
NMCC 2007 – 2008

Nordic Math Class Competition

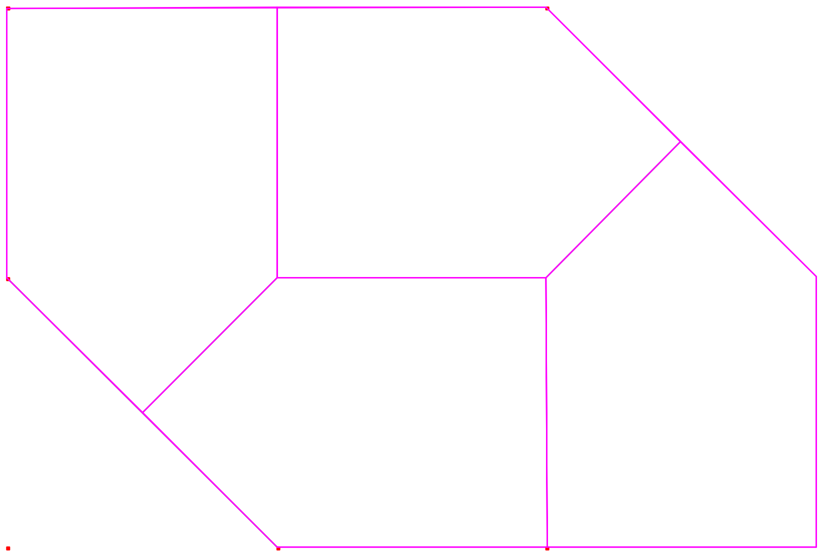
Nordisk finale

Oppgave 1

Figuren nedenfor skal deles inn i fire nøyaktig like (kongruente) deler. Vis hvordan det gjøres og hvorfor delene er kongruente.



Løsningsforslag



Vi kan tenke oss at den opprinnelige sekskanten er konstruert ut fra et rektangel som består av 3 x 2 kvadrater, og at diagonalen i de to diagonalt motsatte kvadratene kutter av to trekanter, slik at det fremkommer en sekskant med to rette vinkler og fire vinkler på 145º. De skrå linjene i den oppdelte figuren er de andre diagonalene i kvadratene som er kuttet av.

Oppgave 2

Dyrebutikk

Dere skal åpne en dyrebutikk.

Dere har 3000 kroner og 200 bur. Det skal kjøpes inn hamstere, marsvin og hvite mus. Alle burene skal brukes og alle pengene skal brukes opp.

En hamster koster 30 kroner

Et marsvin koster 100 kroner

En museunge koster 5 kroner.

Hvor mange kan dere kjøpe inn av hvert dyr? Finn alle mulighetene.

Løsningsforslag

Marsvin	Hamster	Mus	Total pris
0	80	120	2400 + 600
5	61	134	500+1830+670
10	42	148	1000+1260+740
15	23	162	1500+690+810
20	4	176	2000+120+880

Oppgave 3

Røde og blå kuber

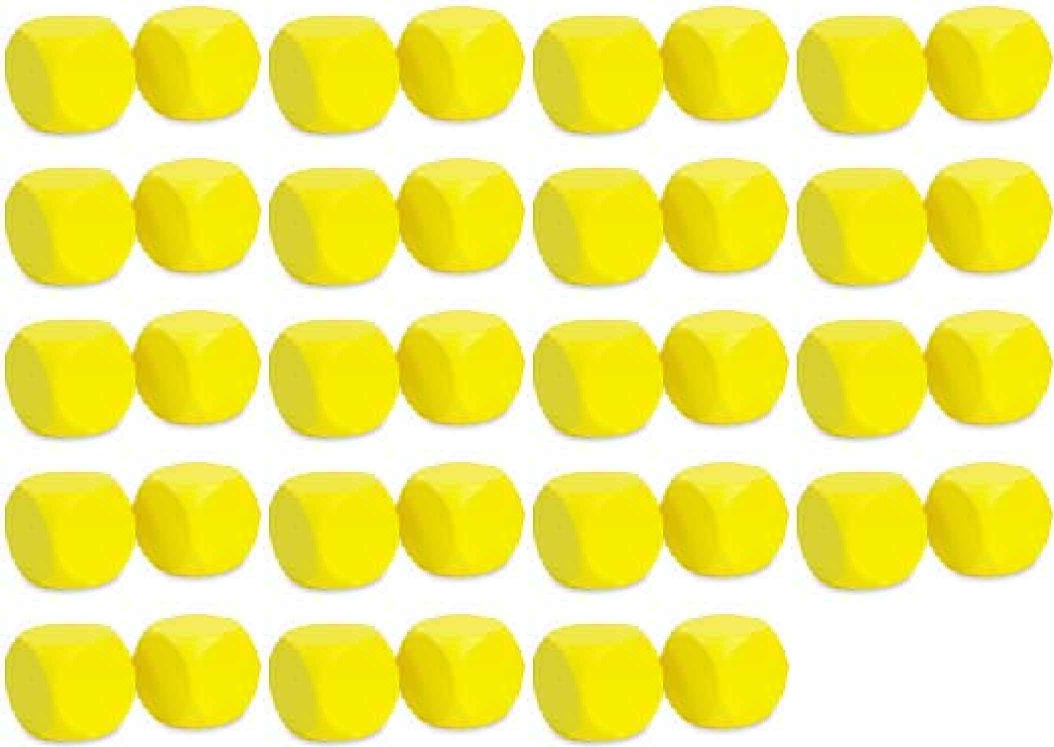
Dere har mange gule kuber og to kopper med maling, en rød og en blå.

Hver sideflate på hver kube skal males enten rød eller blå.

Hvor mange kuber som ser forskjellige ut kan dere lage med disse to fargene?

Dere har fått utdelt en ensfarget kube som kan hjelpe dere å holde rede på hvordan kubene kan farges.

Forklar hvordan de ulike kubene blir seende ut.



Løsningsforslag

Det blir 10 ulike kuber:

1 med 6 røde flater.

1 med 5 røde flater og en blå.

2 med 4 røde flater og 2 blå (de blå kan ha en felles sidekant eller være motstående flater).

2 med 3 røde flater og 3 blå (de blå kan enten møtes i samme hjørne, eller være slik at to flater er motstående og den tredje er imellom).

Så tilsvarende:

2 med 2 røde flater og 4 blå.

1 med 1 rød flater og 5 blå.

1 med 6 blå flater.

Oppgave 4

Maksimalt produkt

Bruk hvert siffer bare én gang.

Dere skal lage to femsifrede tall slik at produktet blir størst mulig

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$

Løsningsforslag

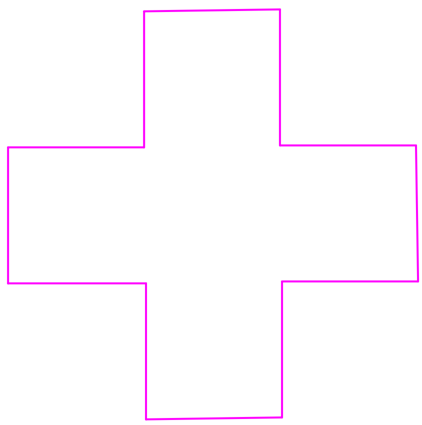
Det største produktet som kan forekomme på denne måten er:

$$96\,420 \cdot 87\,531 = 8\,439\,730\,020$$

Oppgave 5

Fra kors til kvadrat

Klipp langs to rette linjer over korset, slik at det dannes fire biter som kan settes sammen til et kvadrat.



Løsningsforslag