Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Skriftserie

Konferanserapport

No. 3 - 2005

"Vurdering i matematikk - Hvorfor og hvordan? Fra småskole til voksenopplæring"

Nordisk konferanse i matematikkdidaktikk ved NTNU
15. og 16. november 2004

Forside: Fra foredragene.

Trykk: NTNU-trykk
ISSN 1503-5336
ISBN 82-471-6032-3

Programkomitéen

Lars Burman är lektor i matematikens och datateknikens didaktik vid Institutionen för lärarutbildning, Åbo Akademi i Vasa. Han arbetar med utbildning av ämnes- och klasslärare, medverkar i läromedelsprojekt och forskar kring utvärdering inom matematikundervisningen

Bengt Johansson er leder for Nationellt Centrum for Matematikutbildning (www.ncm.gu.se) ved Göteborgs Universitet i Sverige.
Senteret ble opprettet i 1999 rundt den veletablerte Nämnaren-redaksjonen. Bengt har vært og er en frontfigur når det gjelder å bygge matematikkdidaktiske nettverk, både i Norden og internasjonalt. Mange forskere fra hele verden har bidratt til oppbygging av de nordiske forskningsmiljøene takket være Bengt.

Anna Kristjánsdóttir er professor i matematik didaktik ved Høgskolen i Agder og Islands Pædagogiske Universitet. Hendes forskningsfelt er bredt og inkluderer både indflydelse af kraftfuld teknologi og de forskellige opfattelser om matematik og matematik læring blandt lærere, elever og forældre. Anna var den første formand i Flötur, foreningen af islandske matematik lærere, og også specialist i matematik i det islandske udvalg for TIMSS. Hun var Islands repræsentant i den nordiske komité for ICME-10 og er leder af KappAbel i Island. I Norge styrer Anna forsknings- og udviklingsprojektet inden for Regn med Kristiansand.

Ragnhild Lofthus er dr.scient. i bioteknologi fra 1985. Hun leder i dag NTNU Voksne i læring, som er en tverrfaglig forskningsenhet bestående av forskere fra ulike disipliner, som arbeider med forskningsprosjekter innen temaet "Voksne i livslang læring".

Ingvill M. Stedøy er faglig leder ved Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen. Hun har bakgrunn som lærer i videregående skole, doktorgrad i algebra, og har siden 1995 arbeidet med forsknings- og utviklingsarbeid i matematikkdidaktikk ved NTNU. Hennes interessefelt er først og fremst motivasjon og elevers lyst til å lære, samt lærerens viktige rolle som igangsetter og inspirator. Hennes rolle ved senteret er både administrativ og operativ. Hun fungerer som veileder for master- og ph.D.-studenter, leder kurs og tar imot elever og lærere til matematikk-aktiviteter ved senteret.
Hjemmeside: www.matematikksenteret.no/ingvill

Tine Wedege har et ben i tre nordiske lande. Hun er seniorforsker ved Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen, Trondheim, gæsteprofessor i matematikkens didaktik ved Malmö Högskola og ekstern lektor ved Roskilde Universitetscenter. Hendes primære interesser er voksnes matematiklæring, matematik i arbejde, menneskers affektive og sociale forhold til matematik og matematikkens didaktik som forskningsfelt.

Forord

Den tredje novemberkonferansen ved Matematikksenteret ble arrangert den 13. til 16. november 2004 og hadde tema *Vurdering i matematikk – hvorfor og hvordan? Fra småskole til voksenopplæring.* Konferansen ble arrangert i samarbeid med Voksne i livslang læring (ViLL) ved NTNU. Ved hver parallellsesjon hadde vi et valg med fokus på voksnes matematikklæring.

Vurdering er et svært aktuelt tema i en tid der det er større og større krav til innsyn i hva elevene sitter igjen med av kunnskaper og kompetanse når de går ut av skolen. I Norge har vi innført nasjonale prøver på fire ulike alderstrinn. Svenskene, islendingene og finnene har lang tradisjon for testing, og danskene skal innføre nasjonale prøver i løpet av et par år. I tillegg utprøves og diskuteres ulike vurderingsformer som mappevurdering, muntlige tester og eksamener, prosjektarbeider, gruppeprøver, hjemmeeksamener, egenvurdering, og så videre. Elevene har krav på å bli vurdert, både underveis og til slutt. Det er en viktig del av opplæringen å finne fram til gode vurderingsformer som gir et riktig bilde av det elevene kan, både grunnleggende ferdigheter og den mer helhetlige matematiske kompetansen.

Nytt av året var et tilbud om forskerseminar på søndagen før selve konferansen. *Grunnleggende voksenundervisning i matematikk: Til glede og styrke?* ble ledet av Tine Wedege og organisert av Torkel Haugan Hansen og Ragnhild Lofthus, i tillegg til Tine. Dette tilbudet vil vi videreføre på senere novemberkonferanser.

I denne konferanserapporten finnes artikler som beskriver erfaringer med, og forskning rundt ulike vurderingsformer. Det er vårt håp at disse artiklene skal være et bidrag til å videreutvikle og forbedre de ulike vurderingsformene som brukes i skolen. En stor takk til alle bidragsytere for interessante presentasjoner på konferansen, og takk til alle deltakerne for gode innspill.

Velkommen til novemberkonferansen 2005 med tema *Bruk av IKT i matematikkundervisningen – muligheter og begrensninger.*

Ingvill Merete Stedøy
Faglig leder

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen,
hva har det blitt?

Ingvill Merete Stedøy

I april 2002 gikk en pressemelding ut fra Utdannings- og forskningsdepartementet (UFD) om at det skulle opprettes et nasjonalt senter for matematikk i opplæringen. Tanken om et slikt senter hadde eksistert i UFD en tid, og da det kom en henvendelse fra Norsk matematikkråd med forslag til ulike tiltak for å styrke matematikkundervisningen i Norge, lå nettopp forslaget om opprettelsen av et nasjonalt matematikksenter som et av de sentrale punktene. UFD hadde på forhånd tatt kontakt med ledelsen ved Norges teknisk- naturvitenskapelige universitet (NTNU) for å sikre at det var vilje og plass til å legge et slikt senter nettopp her. Ledelsen ved NTNU bestemte sammen med UFD at senteret skulle ligge direkte under rektor, med eksternt styre og et eksternt faglig råd.

Senteret har som hovedoppgave å øke kvaliteten på matematikkundervisning på alle nivå i grunnopplæringen, samt i lærerutdanningen. Det skal utvikles og spres ideer til undervisningsopplegg og arbeidsmåter som fremmer barn og unges lyst til å lære matematikk. Det er ingen begrensning på de lærendes alder, og vi vil rette oppmerksomheten såvel til førskolebarn som til voksne, i tillegg til barn og unge i skolepliktig alder. Kvaliteten skal sikres gjennom nært samarbeid mellom senteret, de øvrige matematikkmiljøene i Norge og lærere som underviser i skolen. Klasseromsnær fagdidaktisk forskning skal være en vesentlig del av virksomheten, og samspillet mellom teori og praksis skal løftes fram og synliggjøres, slik at resultater og anbefalinger har en sterk teoretisk forankring. Vi vil ha spesiell oppmerksomhet rettet mot jenter, og søke å finne fram til tiltak som vil styrke jentenes selvtillitt, øke deres motivasjon og inspirere til valg av matematikkrevende studier og yrker.

Senteret har i dag 17 ansatte i hel- og delstillinger. En stipendiat er finansiert gjennom Matematikksenterets budsjett. I tillegg har vi to doktorgradsstudenter og flere hovedfagsstudenter som er knyttet til senteret. Mange av de ansatte er lærere fra ulike skoler, også utenfor Trondheim, som er engasjert for kortere og lengre perioder. Det legges vekt på å bygge opp et internasjonalt nettverk, spesielt konsentrert om de nordiske landene. Vi har gjesteforskere som oppholder seg ved senteret i kortere eller lengre perioder. Tine Wedege er seniorforsker ved senteret, og høsten 2005 vil Alistair McIntosh fra Australia oppholde seg ved Matematikksenteret fra august til oktober.

Senteret er for tiden sterkt involvert i utvikling av nasjonale prøver i matematikk, og utvikling av nye læreplaner i matematikk fra 1. til 13. klasse. Læreplanene skal gjelde fra høsten 2006.

Senteret som et nettverk av matematikkmiljøer og ressurspersoner

For å kunne oppfylle mandatet om å bli et senter som er nyttig for lærere over hele landet, består senteret av mer enn de få ansatte ved NTNU.

Den gode læreren er nøkkelpersonen i dette arbeidet, og derfor er lærerutdanning og etter- og videreutdanning av lærere i skolen, og hjelp i den daglige undervisningssituasjonen vårt viktigste satsingsområde.

Senteret skal bidra til oppbygging av et større matematikkdidaktikkmiljø i Norge. Vi arbeider for å øke rekrutteringen av hovedfags- og doktorgradsstudenter i matematikkdidaktikk. Vi legger opp phd-program i matematikkdidaktikk i samarbeid med Institutt for matematiske fag ved NTNU. I tillegg samarbeider senteret med ulike miljøer, også utenfor Norge, om å arrangere kurs og seminarer for studentene og søke fleksible ordninger for hvor studentene kan oppholde seg. Den nordiske forskerskolen, med Barbro Grevholm som leder, er viktig i denne sammenheng. Matematikksenteret vil være vertskap for et forskerseminar for forskerskolen i 2006. Stipendiatene ved senteret kan ha veiledere ved NTNU eller andre institusjoner, men de skal arbeide med forskningsprosjekter som er nært knyttet til senterets virksomhet. Studenter og ansatte ved andre institusjoner kan oppholde seg ved senteret i kortere eller lengre perioder.

I tillegg til de allerede eksisterende fagmiljøene ved høgskoler og universitet, arbeider Matematikksenteret for at lærere med spesielle evner og ressurser skal kunne bidra til fornying og forbedring av matematikkundervisningen i skolen. Vi gjennomfører en systematisk oppbygging av et nasjonalt nettverk av ressurspersoner. Dette skjer i nært samarbeid med Landslaget for matematikk i skolen (LAMIS). Til nå har vi skolert ca. 70 ressurspersoner i grunn- og videregående skole. Skoleringen består i kurs med grundig praksisforankring og teoretisk fundament, utvikling av kurs og gjennomføring av egne kurs med og uten veileder. I tillegg samles ressurspersonene ved senteret en gang i året for erfarings- og idéutveksling, videreutvikling av egen kompetanse og inspirasjon til fornyelse. Det er et mål å ha 5 til 6 ressurspersoner i hvert fylke, i alt rundt hundre ressurslærere spredt over hele landet. Erfaringen med ressurspersoner er udelt positivt. De bidrar til utvikling og spredning av matematikkundervisning med høy kvalitet. Utdannings- og forskningsdepartementet og Utdanningsdirektoratet har bidratt med ekstra bevilgning til senteret for å kunne frikjøpe ressurspersonene fra deler av sin egen undervisning. Dette arbeider vi med å kunne finansiere på permanent basis lokalt i fylkene og kommunene.

Senteret vil ha som mål å fungere som et koordinerende ledd for matematikkdidaktikk-miljøene ved små og store høgskoler og universitet. Det er et stort antall høgskoler med lærerutdanning i Norge, og alle disse har undervisning i matematikk og matematikkdidaktikk. I tillegg har alle de fire universitetene en praktisk pedagogisk utdanning, der matematikkdidaktikk inngår som et viktig fag. Det blir en viktig oppgave for Matematikksenteret å styrke det nettverket som allerede finnes i det norske matematikkdidaktikkmiljøet, og synliggjøre hva de ulike miljøene kan bidra med i forhold til det felles målet om en matematikkopplæring i Norge med høy kvalitet. Vi ønsker å presentere en samlet oversikt over personer knyttet til disse miljøene, slik at skolemiljøene over hele landet kan finne fram til ressurspersoner de kan samarbeide med for å heve kvaliteten på matematikkundervisningen på egne skoler.

Idé- og ressurssenter for hjelpemidler i matematikkopplæringen

En viktig del av virksomheten vil være utvikling av ideer til undervisningsopplegg og undervisningsmateriell for alle nivå i skolen. Vi har et matematikklaboratorium ved senteret. Det brukes til kursing og utvikling av undervisningsopplegg. Vi har utprøving med elever som gjester, og lærere kommer og bruker rommet med sine elever. Laboratoriet fungerer dessuten som et eksempel på hvordan skoler selv kan organisere et matematikkrom, og hva slags utstyr som er relevant for ulike nivå i skolen. Materiell og undervisningsopplegg videreutvikles av ansatte, hovedfags- og doktorgradsstudenter ved senteret.

Vi har videre en datalab, der vi prøver ut ulik programvare beregnet på matematikk-undervisning. I samarbeid med lærere og elever i skolen, vil vi finne fram til programvare med høy kvalitet som egner seg for bruk i matematikkundervisningen på ulike klassetrinn og i ulike skoleslag. Vi vil også teste ut og anbefale materiell beregnet på førskolebarn. Vi holder kurs og tar imot besøk på datalaben. Vi har utviklet et konsept for ”Matematikklubb for barn” der matematikklaboratoriet blir brukt. Vi har lagt ut erfaringer fra klubbene på senterets nettsider. Klubbene ble fulgt av to hovedfagsstudenter ved senteret, og vi arbeider med å videreutvikle klubbene, blant annet med en nettbasert klubb for elever i ungdomstrinnet.

I samarbeid med Skolelaboratoriet for matematikk, naturfag og teknologi ved NTNU, har vi begynt å bygge opp et bibliotek. Mange av bøkene ble gitt oss i gave under åpnings-konferansen. Det er ikke et utlånsbibliotek, men et sted der gjester kan komme og gjøre seg kjent blant et stort utvalg av bøker. Vi har fire kategorier bøker:

1. Faglitteratur i matematikkdidaktikk
2. Idebøker for lærere
3. Populærlitteratur og biografier beregnet på barn og ungdom
4. Lærebøker .

En viktig oppgave ved senteret er utviklingen av nasjonale prøver for elever på fire ulike klassetrinn i utdanningsløpet. Dette arbeidet er beskrevet i denne rapporten (Nortvedt og Stedøy).

Seminarer og konferanser

Vi vil være et ressurs- og møtested for forskere og lærere som underviser i matematikk på alle nivå. En type møteplass vil være seminarer og konferanser. Vi arrangerer en større temakonferanse hver høst. Høsten 2005 er temaet "Bruk av IKT i matematikkundervisningen - muligheter og begrensninger"**.** I tillegg arrangerer vi mindre seminarer og samlinger med aktuelle temaer for ulike målgrupper. Her er også foreldre og skoleungdom aktuelle målgrupper. Senteret er også et aktuelt sted å besøke for førskolelærere.

I tillegg til arrangementer ved NTNU, arrangerer vi konferanser, kurs og seminarer ved høgskoler og universitet, skoler og lokale møteplasser i andre deler av landet. Vi er også medarrangør ved nordiske konferanser som avholdes andre steder enn i Norge.

Spredning og informasjon

Senteret har sin egen skriftserie. Skriftserien gjør det mulig å komme raskt ut med resultater og rapporter som er utarbeidet ved Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen. Det kan være delresultater fra doktorgradsarbeider og hovedoppgaver, nordiske samarbeidsprosjekter, idéhefter og temahefter som vi ønsker skal komme raskt ut til målgruppen for arbeidet vårt, nemlig lærere, lærerutdannere, forskere og politikere.

Matematikksenterets nettsted www.matematikksenteret.no er i ferd med å bli godt og fyldig. Nettstedet skal gjenspeile senterets virksomhet, og være vårt ansikt utad. Her finnes nyttige tips og informasjon til lærere, lærerutdannere og beslutningstakere. Vi har diskusjonsforum for ulike målgrupper, og har som mål at nettstedet skal bli en viktig møteplass for nettverkene vi etablerer.

Videre har senteret en avtale med Caspar forlag og redaksjonen i tidsskriftet Tangenten. Hvert nummer, fra og med nummer 2 i 2003, inneholder inntil 8 sider med stoff fra Matematikksenteret. Dette er en viktig måte å synliggjøre vår virksomhet på, og nå ut med informasjon.

Undervisningsopplegg og tips til lærere vil bli kanalisert gjennom alle de ovenfor nevnte media. I tillegg synliggjør vi vår virksomhet, og bidrar til å sette matematikk på dagsorden gjennom deltakelse på konferanser, artikler i aviser, tidsskrifter og media forøvrig. Vi er i høyeste grad med i den offentlige debatt om matematikkundervisningen i Norge.

Nordisk og internasjonalt samarbeid

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen skal bidra til å viderutvikle det allerede gode nordiske samarbeidet blant forskere og forskerstudenter i matematikkdidaktikk. Samarbeidet omfatter også praktiserende matematikklærere i de nordiske landene. Dette skjer blant annet gjennom at konkurransen KappAbel har blitt et nordisk arrangement . I tillegg inviterer vi lærere fra de andre nordiske landene til våre arrangementer og kurs. Vi har dessuten et nært samarbeid med Nationelt Centrum för Matematikutbildning, NCM, i Göteborg. For å kunne bygge opp et sterkt fagmiljø innenfor matematikkdidaktikk i Norge er vi helt avhengig av samarbeid med våre nordiske kolleger, både når det gjelder veiledning og nettverksbygging blant forskerstudenter.

Vi satser på å invitere gjesteforskere fra hele verden, og ser det som et mål at det etter hvert skal oppfattes som attraktivt for utenlandske forskere å oppholde seg ved senteret. Dette vil være et viktig ledd i å bygge opp vår egen veiledningskompetanse, og sikre høy faglig kvalitet på tilbudet til våre stipendiater. Her vil samarbeidet med de andre nordiske landene være spesielt viktig for å utnytte mulighetene til felles invitasjoner.

Arrangementer av nordiske konferanser er allerede et prioritert område. Det store løftet var ICME10 i København i 2004. Men det stopper ikke med det. Vi har allerede etablerte nordiske konferanser som gjentas med faste intervaller, slik som NORMA-konferansene. Vi vil bidra til å videreføre og videreutvikle disse arrangementene. NORMA05 holdes i Trondheim i september, der Matematikksenteret og Høgskolen i Sør-Trøndelag, avdeling for lærerutdanning og tegnspråk står som arrangører.

Innhold:

Nordisk samarbejde i matematikdidaktik
- en aktuel udviklingstendens

Morten Blomhøj & Ingvill Merete Stedøy

Original: 2002 for konferanserapport til åpningskonferansen ved Matematikksenteret.
Revidert 2005.

Nordisk samarbejde inden for matematikundervisning og matematikdidaktisk forskning intensiveres i disse år. Denne udvikling har flere årsager.

For det første står de nordiske lande overfor en række fælles problemer, når det gælder forskningsbaseret udvikling af matematikundervisningens praksis. De relativt små forsknings- og udviklingsmiljøer i de enkelte lande har brug for nordisk samarbejde, ikke mindst i forbindelse med forskeruddannelse. Der tages aktuelt mange nationale initiativer vedrørende matematikundervisning i de enkelte lande, deriblandt oprettelse af centre for udvikling og dannelse af nationale forskerskoler. Men udbudet af faglig ekspertise er begrænset i de nordiske lande og det er nødvendigt med samarbejde og synergi mellem de enkelte aktiviteter, hvis bestræbelserne skal få gennemslagskraft og på sigt betydning for udvikling af matematikundervisningens praksis.

For det andre er de nordiske landene ført tettere sammen gjennom forberedelsene, gjennomføringen og etterarbeidet med verdenskongressen ICME-10 (10$^{\text{th}}$ International Congress on Mathematics Education) som ble avholdt i København i juli 2004. Vertskapet for ICME-10 ble basert på en felles søknad fra alle de nordiske land, og planleggingen ble støttet av Nordisk Kontakt Komite (NCC) som ble etablert i 2000 og avsluttes i 2006. Under kongressen var det en ettermiddag med presentasjoner fra lærere, lærerutdannere og forskere fra hele norden, med foredrag som skulle gi et bilde av nordisk matematikkundervisning og matematikkdidaktikk. NCC ga i tillegg ut en bok som ble delt ut i forbindelse med den nordiske ettermiddagen, med tittel ”Mathematics Education – The Nordic Way”.

NCC søkte og fikk midler fra Nordisk Ministerråd til å etablere matematikkonkurransen KappAbel som en nordisk konkurranse. Det norske konseptet blir nå oversatt til de fire andre nordiske språkene, slik at alle landene gjennomfører de samme nasjonale konkurransene. Vinnerne fra hvert land møtes så til en felles nordisk KappAbel-finale. Denne ble første gang gjennomført under ICME-10 i København 2004, annen gang i Reykjarvik i 2005, og tredje gang skal finalen arrangeres i Trondheim i 2006.

At novemberkonferansene ved Matematikksenteret i Trondheim er nordiske, kan nettopp sees som et uttrykk for den pågående utviklingen innenfor matematikkdidaktikk. Denne utviklingen vil styrkes og videreutvikles i de kommende år. Nedenfor følger en kort historisk gjennomgang av det nordiske samarbeidet. Deretter presenterer vi noen samarbeidsområder som er etablert og pågående, derunder kort ideen for KappAbel og hvorfor den er en fin mulighet til å forene de nordiske lands matematikkundervisning og påvirke lærere og elevers syn på god matematikkundervisning. NCC har også satt i gang et forskningsprosjekt rundt KappAbel i samarbeid med Matematikksenteret. Til slutt sier vi litt om nordisk samarbeide i årene framover.

Lang tradition for nordisk samarbejde om matematikundervisning

Der er en lang tradition for nordisk samarbejde inden for matematikundervisning og matematikdidaktisk forskning. Et tidligt eksempel på formaliseret samarbejde er dannelsen af

”Nordiska Kommitten för Modernisering av Matematikundervisningen” i 1960. Kommissionens opgave var at sikre nordisk samarbejde i forbindelse med moderniseringen af matematikundervisningen på alle niveauer af uddannelsessystemet. Baggrunden for initiativet var ”the new math reform” , der prægede den internationale scene omkring matematikundervisningen i 50’erne og 60’erne. I det moderne industrisamfund fik både den almene og videregående matematikundervisning en vigtig rolle at spille som grundlag for uddannelse af kvalificeret arbejdskraft og det blev derfor vigtigt at skabe øget faglig sammenhæng i matematikundervisningen med henblik på at skabe øget flow gennem uddannelsessystemet. Den strukturalistiske skole med Bourbaki-gruppen som faglig spydspids havde et markant svar på denne udfordring, nemlig en gennemgribende reform af matematikundervisningens indhold fra første klasse til universitetsniveau baseret på mængdelære og et moderne funktionsbegreb.

Som vi ved i dag var der mange alvorlige pædagogiske vanskeligheder forbundet med at gennemføre et sådant program, og på nordisk plan var der allerede fra starten markant kritik af reformbestræbelserne. Reformprocessen var imidlertid en vigtig katalysator for det nordisk samarbejde, og samarbejdet nået også ned på græsrodsplan. Matematiklæreforeningerne i de nordisk lande begyndte at arrangere fælles nordisk årsmøder/konferencer.

Som nogle af de seneste resultater af denne form for nordisk samarbejde kan følgende konferencer nævnes. De nordiske kongresser afholdes hvert tredje år, og i 1999 var arrangementet lagt i Tromsø.
Sommeren 2002 blev den 18. nordiske LMFK-kongressen afholdt i Torneå i Finland. LMFK står for Lærere i matematik, fysik og kemi, og har foreninger i alle de nordiske lande med lærere på det gymnasiale uddannelsestrin som medlemmer (se http://www.lmfk.dk/). Mottoet for kongresen var betegnende for LMFK-foreningerne: "Elämyksiä elämään - Livet, ett äventyr. Vårt syfte är att bjuda lärare i matematiska ämnen på minnesrika upplevelser, bra föreläsningar och konkreta tips för undervisningen.” I 2005 ble kongressen avholdt på Island, i Akureyri, med tema ”Menneske, miljø og energi”.

Der er også en lang tradition for nordiske konferencer om matematikundervisning med fokus på barne- og ungdomstrinnet. Der er holdt åtte slike konferencer: Kungälv, Sverige 1975, Kungälv, Sverige 1979, Flúðir, Island 1983, Gilleleje, Danmark 1986, Linköping, Sverige 1990, Åbo, Finland 1993, Nordfjordeid, Norge 1997 og Borgarfjörður, Island 2000. I anledning Verdens matematikkår i 2000, gik de nordiske matematiktidsskrifter Tangenten, Flötur, Nämnaren, Maol og Matematik sammen om en fællesudgivelse: ”Matematik(k) & undervisning - Norden 2000”. Det blev til en bog som giver mange spændende glimt fra nordiske klasserum, og en bog hvor både lærer- og elevstemmerne er tydelige.

Nordisk samarbejde om forskning og forskeruddannelse

Som forskningsfelt er matematikkens didaktik i de nordiske lande et relativt ungt og lille felt i international målestok, men feltet er i stærk vækst. I Norden er der kun omkring 50 personer, der som led i en fast stilling har forpligtigelse til at forske inden for matematikkens didaktik. Inden for de sidste 15 år er antallet af forskerstuderende imidlertid tidoblet, således at der aktuelt er omkring 60 aktive fuldtidsstuderende i formelle forskeruddannelsesprogrammer inden for matematikkens didaktik i de nordiske lande. Hertil kommer, at mange matematiklærere på de forskellige niveauer af uddannelsessystemet, ved siden af deres lærerjob, er engageret i udviklings- og forskningsarbejde.

På trods af feltets beskedne volumen har nordisk matematikdidaktisk forskning ydet væsentlige bidrag til feltet, hvilket også er en hovedårsag til, at Danmark i samarbejde med de øvrige nordiske lande fik værtskabet for ICME-10.

Forskningsmiljøerne i de nordiske lande er imidlertid typisk meget små og findes ofte som grupper på 2-3 forskere, der arbejder med matematikdidaktik ved universitetsinstitutter i matematik eller pædagogik samt ved læreruddannelser. Kun få miljøer er stærke nok til at varetage uddannelse af nye forskere inden for egne rammer. Svarende hertil bliver der aktuelt arbejdet på at opbygge nationale forskerskoler i flere af de nordiske lande. Øget nordisk samarbejde vil kunne hæve niveauet for forskeruddannelse inden for matematikkens didaktik.

Og der er gode erfaringer at bygge på for et sådant nordisk samarbejde. Under det danske initiativ "Matematikundervisning og Demokrati" finansieret af Statens Humanistiske Forskningsråd, 1988-1991, blev der afholdt tre nordiske forskningssymposier med specielt sigte på at støtte uddannelse af forskere (Nissen og Blomhøj, 1992, 1993), (Nissen og Bjørneboe, 1990). I forlængelse heraf blev der i 1990 med støtte fra NorFA (Nordisk Forsker Akademi) etableret et nordisk forskernetværk for matematikdidaktik. Netværket, der fungerede frem til og med 1992, omfattede ankerpersoner og forskerstuderende fra alle fem nordiske lande. Sigtet var specielt at støtte unge forskere og forskerstuderende, således at de kunne besøge relevante miljøer i de nordiske lande, og således, at de kunne mødes ved mindre forskningsseminarer i de nordiske lande. Baseret blandt andet på de stærke kontakter, der blev etableret i denne periode, er traditionen med nordiske forskersymposier søgt vedligeholdt. Der har i Island været afholdt et forskersymposium i 1994 og en konference om matematikundervisningen i 2000, og i perioden 1996-2002 har der været afholdt fire nordiske forskersymposier i Umeå (Lithner og Wallin, 1996, 1997, 2000).

Hertil kommer NORMA-konferencerne, der er nordiske forskningskonferencer med et international perspektiv og deltagelse af forskere fra ikke-nordiske lande. Der har været afholdt tre sådanne konferencer, Lahti 1994, Kristiansand 1998 (*Theory into Practice*) og Kristianstad 2001 (Bergsten, C. & Grevholm, B. (in press)). Den fjerde NORMA-konferansen arrangeres i Trondheim i september 2005 (*Relating Practice and Research in Mathematics Education)*, med Høgskolen i Sør-Trøndelag og Matematikksenteret som vertskap.

Det nordiske samarbejde i starten af 90erne resulteret også i etableringen af forskningstidsskriftet "Nordisk Matematikkdidaktikk", der udkom med første årgang 1993. Etter en pause på tre år, er tidsskriftet igjen i full blomst, med NCM i Gøteborg som utgivere. Finske didaktikere utgjør for tiden den ansvarlige redaktørgruppen, med en bredt nordisk redaksjonskomsmite i ryggen. Som et nyre eksempel på resultater af nordisk forskningssamarbejde bør også nævnes forskningsantologien "Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv" (Grevholm, 2001).

Erfaringerne fra disse aktiviteter er entydigt positive. De mange fællestræk ved uddannelsessystemerne i de nordiske lande gør det muligt og særdeles frugtbart at belyse og diskutere matematikdidaktiske forskningsspørgsmål på baggrund af forskningsprojekter, der tager udgangspunkt i matematikundervisningen i de enkelte lande. Muligheden for at holde forskningssymposier på de nordiske sprog har vist sig særdeles betydningsfuld for mange forskerstuderende, og det har gjort det muligt at inddrage matematiklærere, der arbejder med udviklingsprojekter i egen undervisning i disse symposier, hvilket i høj grad har styrket samspillet mellem forskning og undervisning.

I de nordiske lande har matematiklærere på alle niveauer af uddannelsessystemet relativ stor frihed til og ansvar for undervisningens tilrettelæggelse og gennemførsel. Ikke mindst derfor er det vigtigt at fastholde og udvikle det tætte samspil mellem forskning i og udvikling af matematikundervisningens praksis som et karakteristisk træk ved nordisk matematikdidaktisk forskning.

Det er imidlertid også nødvendigt, at forskeruddannelse inden for matematikkens didaktik indebærer kontakt til det internationale forskningsmiljø. Publicering af forskningsrapporter og artikler på engelsk samt deltagelse i og medvirken ved internationaler konferencer er de væsentligste midler hertil. Målrettet nordisk samarbejde om forskeruddannelse kan give værdifuld støtte til, at unge forskere kommer tidligt i gang med at publicere i internationale tidsskrifter og at deltage i relevante internationale konferencer.

Vi er overbevist om at afholdelsen af ICME-10 i Danmark og "satellit-konferencerne" PME28 (Psychology of Mathematics Education) og HPM (History and Pedagogy of Mathematics, se www.math.uu.se/hpm/), der blev afholdt i 2004 i henholdsvis Bergen, Norge og i Uppsala, Sverige, har givet gode muligheder for, at nordiske forskere og forskerstuderende har fået udbygget kontakter til internationale forskningsmiljøer. Til støtte for specielt forskerstuderende og yngre forskeres medvirken ved ICME-10 var der en "Nordic pre-conference" i Växjö, Sverige i maj 2003 (se www.msi.vxu.se/picme10).

Fælles udfordringer for matematikundervisningen i de nordiske lande

At se almen uddannelse som grundlag for fastholdelse og udvikling af den demokratiske samfundsform er et af de mest grundlæggende fællestræk ved de nordiske lande. Almen uddannelse i de nordiske lande skal ikke blot give grundlag for videreuddannelse af kvalificeret arbejdskraft til sikring af fortsat økonomisk og social udvikling, men skal først og fremmest støtte det enkelte menneskes personlige, sociale og faglige udvikling med henblik på aktiv medleven og kritisk stillingtagen i et demokratisk samfund.

Matematikundervisning har en vigtig rolle at spille i et sådant uddannelsesprojekt. Matematik indgår på mangfoldige måder i det moderne højteknologiske samfund, og i samspil med andre vidensområder er anvendelse af matematisk viden en vigtig samfundsformende faktor. For det enkelte menneske er matematikholdige kompetencer af betydning i privatliv, uddannelse, arbejdsliv og i livet som borger i et demokratisk samfund. Matematikundervisning bør derfor være en central del af den uddannelse, der tilbydes alle.

Samtidig er det af afgørende samfundsmæssig betydning, at der uddannes tilstrækkeligt mange højt kvalificerede mennesker inden for det matematiske og naturvidenskabelige område. Det er nødvendigt, fordi der gennem forsknings- og udviklingsvirksomhed kan produceres svar på nogle af de mange udfordringer, som samfundsudviklingen afstedkommer, og fordi mennesker med sådanne kompetencer kan videreudvikle vort højteknologiske og demokratiske samfund. Som grundlag for en sådan bestræbelse er det naturligvis specielt vigtigt, at der uddannes tilstrækkeligt mange fagligt og didaktisk kvalificerede matematiklærere til alle niveauer af uddannelsessystemet. I de nordiske lande – med Finland som en positiv undtagelse - er der store vanskeligheder med at sikre tilstrækkelig rekruttering til læreruddannelser i matematik og videregående matematikbaserede studier. Vi har simpelthen svært ved at sikre, at tilstrækkeligt mange lærer matematik på tilstrækkeligt højt niveau. Årsagerne hertil er særledes komplekse og der er ingen nemme løsninger i udsigt. Der arbejdes for tiden med etablering af nye læreruddannelsestilbud i matematik, naturvidenskab (realfag) og teknologi i flere af de nordiske landene, noget som forhåbentlig vil trække flere studenter til lærergerningen.

Matematikkens placering i kulturen i det moderne samfund er af stor betydning for, hvordan matematikundervisningen fungerer i uddannelsessystemet. Selv om matematikken i realiteten spiller en afgørende rolle for samfundsudviklingen og for det enkelte menneskes muligheder, er dens rolle og funktion ofte usynlig på den samfundsmæssige overflade. Matematik opleves ikke som integreret i kulturen på samme måde som f.eks. engelsk. Det kræver en stærk matematikdidaktisk forskningsindsats at tydeliggøre matematikkens samfundsmæssig betydning og herudfra begrunde matematikundervisningens indhold og form på uddannelsessystemets forskellige niveauer. Tilsvarende har matematikundervisning en særlig opgave med at motivere eleverne og begrunde fagets berettigelse som led i en almen uddannelse. Det kræver en mangeartet og koordineret indsats, at udvikle en matematikundervisning, der kan løfte disse store uddannelsesmæssige udfordringer. Et styrket nordisk samarbejde om matematikdidaktisk forskning og udvikling af matematikundervisningens praksis vil være et væsentligt skridt på vejen.

Matematikkonkurranser gir muligheder for den nordiske samarbejde

Det er tatt ulike initiativ for å fremme det nordiske samarbeidet. Blant disse er arrangement av ulike matematikkonkurranser med felles oppgaver og en stor nordisk finale. Konkurransen Baltic way for elever i videregående skole, er eksempel på en konkurranse der også de baltiske land er med, i tillegg til norden. Den ble avholdt i Oslo under Verdens matematikkår i 2000, og det var 11. gang konkurransen ble avholdt, men 9. gang med land utenfor Baltikum. Senere er konkurransene avholdt i Hamburg (2001), Tartu (2002), Riga (2003), Vilinius (2004), og Baltic way 2005 arrangeres i Stockholm i november.
I motsetning til de fleste slike konkurranser, er dette er en lagkonkurranse, med fem elever på hvert lag som skal løse 20 oppgaver i løpet av fire og en halv time. Dessverre er det svært få jenter som deltar i konkurransen.

I Norge har vi en relativt ny konkurranse med navn KappAbel (se www.kappabel.com). KappAbel er blitt et felles nordisk arrangement. Den startet som en mer tradisjonell konkurranse i 1998 for Agder-fylkene. I forbindelse med Verdens matematikkår i 2000, tok Institutt for matematiske fag ved NTNU initiativ til å gjøre den til en nasjonal konkurranse. Da ble det gjort noen viktige grep i forhold til konkurransens innhold og form, der en dialog med Landslaget for matematikk i skolen var viktig. Det ble bestemt at konkurransen skulle være en lagkonkurranse der hver deltakende 9. klasse utgjør ett lag. Oppgavene skal være annerledes en tradisjonelle ”skoleoppgaver”, ved at de skal fremme samarbeid, diskusjoner, og bruk av ulike matematiske kompetanser. I tillegg utgjør tredje runde i konkurransen et større prosjektarbeid med et oppgitt tema. Det er dette konseptet som gjør KappAbel unik og spennende, og som har appellert til didaktikkmiljøene i alle de nordiske landene. I 2002 var Danmark og Island med, og i 2003 var også Sverige med, og fra 2004 var alle de fem nordiske landene med. NCC oppfordret nordiske forskere til å søke om å få gjennomføre et forskningsprosjekt omkring KappAbel. Målet er å finne svar på konkurransens innvirkning på elevenes motivasjon og syn på matematikk, og eventuelt hvordan den kan inspirere lærere til å ta i bruk nye arbeidsformer i sin egen matematikkundervisning. Tine Wedege ved Matematikksenteret og Høgskolan i Malmø, er prosjektleder for prosjektet, som er finansiert av NCC gjennom midler fra Nordisk ministerråd i tillegg til at Matematikksenteret bidrar med betydelige ressurser. Forskningsprosjektet avsluttes høsten 2005.

Sverige er i år for femte gang med i den internasjonale Kängurutävlingen:

> ”Tredje torsdagen i mars varje år genomförs den stora internationella matematiktävling som i Sverige fått namnet Kängurutävlingen - Matematikens hopp! I de flesta andra länder kallas den Kangourou des Mathématiques, det franska namnet. Svenska arrangörer är Kungliga Vetenskapsakademien i samarbete med NCM. Den främsta avsikten med Kängurutävlingen - Matematikens hopp är att stimulera intresset för matematik. Tävlingsmomentet vill vi tona ner och vi delar därför inte ut några centrala priser. Vi hoppas också att problemen inte bara används under tävlingsdagen,

utan att dess möjligheter kommer undervisningen till glädje även efteråt t ex genom lösning och diskussion i grupper och klasser."

Elever fra 3. til 9. klasse kan delta i konkurransen. Island var med første gang i 2002, med omkring 25% av eleverne i 6. og 7. klasse. De er med i år for annen gang, og gjennomfører konkurransen etter svensk modell. Det finnes ulike varianter av denne konkurransen i ulike land. Danmark og Finland har ikke vært med enda. Norge deltok første gang i 2005 med over 5000 elever fra 3. til 7. klasse. Kengurukonkurransen i Norge arrangeres av Matematikksenteret i samarbeid meg NCM i Sverige. Dette kan bli et nytt nordisk prosjekt som kan knyttes opp mot forskning i samarbeid mellom lærere i skolen og forskere i universitets- og høgskolemiljøene.

Nordisk samarbejde i fremtiden

Som det fremgår er det nordisk samarbejde inden for matematikundervisning og matematikdidaktisk forskning rodfæstet i en lang tradition og netop nu særdeles alsidigt og frugtbart. Der er tilmed gode muligheder for, at samarbejdet kan udvikles yderligere i de kommende år. Gennem de mange nordiske arrangementer opbygges der faglige netværk mellem matematiklærere og didaktikere på tværs af landegrænserne.

NCC arbejdede målrettet på at ud nytte samarbejdet omkring planlægningen af ICME-10 til at styrke det nordiske samarbejde inden for området generelt. NCC foreslog således Nordisk Ministerråd at igangsætte et omfattende program for nordisk samarbejde om udvikling af matematikundervisningens praksis og matematikdidaktisk forskning. Det samlede program omfatter tre elementer, der var planlagt med henblik på gensidigt samspil: forskeruddannelse og forskernetværk; udvikling af matematikundervisningens praksis; samt nordisk samarbejde om planlægning og afholdelse af ICME-10. Det lykkedes desværre ikke at skaffe finansiering til dette ambitiøse program, men Nordisk Ministerråd skirede en bevilling på 4,31 mio. Dkr. til udvikling af KappAbel til en fælles nordsik konkurrence og til støtte for planlægning og afholdelse af den præsentation ved ICME-10. Senere er det imidlertid lykkedes at opnå en bevilling fra NorFA til etablering af en nordisk forskerskole i matematikkens didaktik. Og dette arbejde er allerede godt i gang med Barbro Grevholm ,Høskolen i Agder, som leder . Der holdes fælles kurs og seminar for studenter og veiledere fra hele Norden. Dette er et viktig ledd i utviklingen av et bredt forskningsmiljø i de nordiske landene. I denne sammenheng er det opprettet en nordisk forskerdatabase på Matematikksenterets nettsider, der målet er å registrere alle pågående og nylig avsluttede forskningsprosjekter i Norden.

Det nordiske samarbejde går således en spændende fremtid i møde.

Referencer:

Bergsten, C. & Grevholm, B. (eds) (in press). Conceptions of mathematics. Proceedings of the Third Nordic Conference on Mathematics Education, Kristianstad, 8-12 June 2001. Linköping: SMDF.

Grevholm, B. (red.) (2001): Matematikdidaktik – ett nordiskt perspectiv. Studentlitteratur, Lund.

Lithner, J. og H. Wallin (red.) (1996): Preparation of Researchers in Mathematics Education. Pub. No. 1 1996, Department of Mathematics Umeå University.

Lithner, J. og H. Wallin (red.) (1997): Nordisk forskarworkshop, matematikdidaktisk forskning. Pub. No. 1 1997, Department of Mathematics Umeå University.

Lithner, J. og H. Wallin (red.) (2000): Nordic Research Workshop: Problem Driven Research in Mathematics

Education. Pub. No. 1, 2000, Department of Mathematics Umeå University.

Rapporterne fra Umeå kan rekvireres ved henvendelse til: Johan.Lithner@math.umu.se.
Nissen, G. & Blomhøj, M. (red.) (1993): Criteria for Scientific Quality andRelevance in the Didactics of Mathematics. Report from symposium held in Gilleleje, from April 27 to May 2, 1992. IMFUFA Roskilde Universitetscenter.
Nissen, G. & Blomhøj, M. (red.) (1992): Matematikundervisning og Demokrati II. Rapport fra nordisk forskersymposium, 16.-18. juni 1991, Gilleleje, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter.
Nissen, G. & Bjørneboe, J. (red.) (1990): Matematikundervisning og Demokrati. Rapport fra nordisk forskersymposium, 14.-16. juni 1990, Gilleleje, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter.
Rapporterne fra Roskilde Universitetscenter kan rekvireres ved henvendelse til: Dorthe Vedel: vedel@ruc.dk.
Norden (2000): Matematik & Undervisning, Udgivet af de nordiske matematiktidsskrifter: Flötur (Island),
Maol (Finland) og Matematik (Danmark), Nämnaren (Sverige) og Tangenten (Norge).
Kan bestilles, også alle tidsskrifterne.

Svein H. Torkildsen,
Samfundets skole, Kristiansand.
Matematikklærer med 34 års erfaring på alle trinn i grunnskolen, mest på ungdomstrinnet. Var med og stiftet LAMIS, og fungerte som leder fra 1998-2000. Samarbeider med Høgskolen i Agder (HiA) om bruk av IKT i matematikkundervisningen. Prøver ut en alternativ matematikkeksamen på ungdomstrinnet.

Nasjonale og internasjonale prøver - drivkraft eller bremsekloss?

"Mr. Osborne, may I be excused? My brain is full."

Vurderingens funksjon i skolehverdagen

Etter å ha vært i kontakt med hundrevis av lærere de siste 10 årene gjennom et utall kurs, vil jeg mer enn antyde at mye av matematikkundervisningen i Norge følger dette mønsteret nokså slavisk:

1. Læreren forklarer hvordan et spesifikt matematisk problem skal løses
2. Elevene øver på denne type problem
3. Ny forklaring på spesifikt problem
4. Mer øving
5. Med jevne mellomrom en prøve som viser at elevene ikke behersker stoffet så godt som vi ønsker
6. Tidspresset gir ikke rom for å bearbeide stoffet grundigere, vi må videre for å rekke gjennom pensum

Vurderingens funksjon i skolehverdagen fungerer som en måte å nullstille seg på, få tømt hodet som er fullt, slik eleven til Mr Osborne så festlig uttrykker det. Legg merke til at det er ei lærebok i algebra som ligger på kateteret. Slike prøver spiller en sentral rolle i mange klasserom. Resultatet blir uttrykt i en karakter, og standpunktkarakteren blir et gjennomsnitt av disse karakterene med en viss vekting.

Det er god grunn til å stille spørsmål ved om denne måten å drive undervisning på gir mulighet for å utvikle den matematikkompetansen vi er på jakt etter. Men ett er sikkert. Det er en utmerket måte for læreren å dokumentere sin vurdering på. Skal vi våge å si at kravet til dokumentasjon har sterk innvirkning på hvordan undervisningen blir lagt opp?

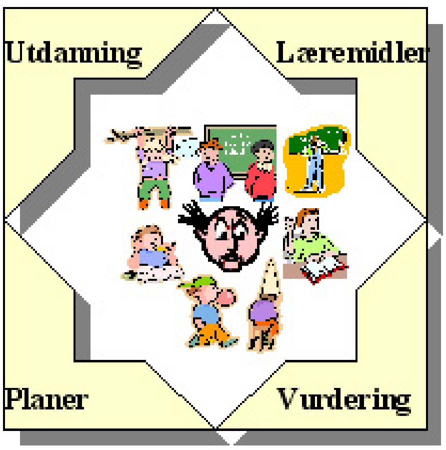
Dette foredraget skal handle om drømmer, visjoner og virkelighet. Det skal handle om planer, muligheter, prosesser og vurdering i matematikkundervisningen. Er det slik at virkeligheten i form av vurdering er en drivkraft til bedre undervisning, og da her spesielt matematikkundervisning? Eller er vurderingen slik den fremstår i nasjonale og internasjonale prøver, en bremsekloss?

Bakgrunn

Min tilnærming til disse betraktningene om vurdering er praktikerens. Jeg er verken forsker eller didaktiker. Hverdagen min består i å få ungdomsskoleelever engasjert i matematiske problemstillinger, og å forberede dem for en eventuell avgangsprøve i matematikk. Nå må også nasjonale prøver finne sin plass i undervisningen. I mer enn 10 år har jeg arbeidet med å utvikle en matematikkundervisning som ikke følger det mønster som innledningsvis ble beskrevet i seks punkter. Jeg har prøvd å utnytte de muligheter som fins innen de rammer som er lagt. Rammene er viktige. Det var nok også derfor Stieg Mellin Olsen var så sterkt på vakt under planrevisjonene på 90-tallet. Han var svært kritisk tidlig i prosessen og mente at lærerne ikke fikk nok spillerom. I en leder i Tangenten 3/94 uttrykte han spesiell bekymring for kreative lærere: ”Tangenten har gjennom fem årganger dokumentert slik kreativitet. Pedagoger som Svein H. Torkildsen, Christoph Kirfel, Jo Henjum, for å nevne noen av Tangentens forfattere, kan bare gi opp.” Jeg har sammen med mange andre også i årene etter 94 gjennom Tangenten og sommerkursene til LAMIS beskrevet undervisningsopplegg som er i tråd med intensjonene i L97, og som viser at planen gir rom for kreativitet med faglig krevende utfordringer. Resultatet av planarbeidet ble etter mitt skjønn ikke så rigid som Stieg fryktet. Men i høringsutkastet til plandokumentet kunne vi lese at læreplanene skulle vise *hva* elevene skulle lære *når* og *på hvilken måte***.** Det var grunn for flere enn Mellin-Olsen til å uroe seg.

Om å dra i samme retning

Eleven i sentrum, sier vi gjerne. I denne sammenheng utvider jeg og sier læreren og eleven i sentrum. Kunnskap utvikles i spenningsfeltet som oppstår mellom lærer, fag og elev. Forholdene skal legges til rette slik at vi som lærere kan by elevene våre det beste. Da må vi ha entydige signaler å forholde oss til. Jeg har spesielt sett på fire sentrale påvirkningsfakotorer: Planer, utdanning, læremidler og ekstern vurdering. Drar disse i hver sin retning, er det ødeleggende for undervisningen. Samarbeid på tvers av de instanser som har ansvar for hver av disse faktorene er en nøkkel til den entydigheten som bidrar til faglig framgang. Og det er departementet som har det overordnede ansvar for å initiere dette samarbeidet.



Hvordan fungerer så dette i praksis? Jeg har ikke muligheter for å gi en dyptgående analyse av forholdene. Men ut fra det jeg observerer fra mitt ståsted, er det en del jeg undres over.

Det stedet jeg finner den beste sammenheng er mellom planen og lærerutdannerne. De siste årene har jeg hatt fornøyelsen av å bli kjent med mange fagmiljø på høyskoler som driver lærerutdanning og etterutdanning av lærere. Det konstruktivistiske læringssynet planen åpenbart bygger på, blir formidlet med innsikt og entusiasme fra mange hold.

Det er grunn til å stille spørsmål ved om alle læremidlene som ble utviklet etter planen, følger opp planens intensjoner i tilstrekkelig grad. Rapporter som er utgitt i det siste mer enn antyder at undervisningen heller ikke følger planens intensjoner. Ser vi på en del av lærebøkene, inspirerer flere av dem til å følge det nevnte undervisningsforløpet i seks punkter. Det gir lite rom for en konstruktivistisk tilnærming. Selv om rapporten "Evaluering av Reform 97" (Alnes m fl) viser at antall problemløsingsoppgaver har økt i bøkene, er det ikke tilstrekkelig. M87 hadde problemløsing som et eget hovedemne. L97 forutsetter problemløsing som en gjennomgående arbeidsmåte, også som en del av den prosessen som fører fram til robuste begrep. Få av lærebøkene legger opp til en slik innfallsvinkel i særlig utstrekning. Det er heller ikke til å unders over når forfattere ble overlatt til seg selv i tolkningen av planen. At så skjedde fremgår av følgende utsagn fra en lærebokforfatter: *Jeg vet ikke hva planmakerne har ment med spesielle tall, tallforhold og tallmønstre.* Vedkommende fikk også dette punktet i planen dekket i læreboka si på tilfredsstillende vis, men utsagnet forteller noe om manglende felles forståelse hos de som skal legge til rette for at vi som møter elevene i undervisningssituasjonen kan ha et felles utgangspunkt for arbeidet vårt. La meg gi et eksempel til. Et av de høyskolemiljøene som stod sentralt i utarbeidingen av fagplan for matematikk i L97, hadde også et par lærebokforfattere i sine rekker. En skulle tro at de kjente intensjonene i planen. Underlig er det da å høre at de ikke får godkjent læreboka uten å gjøre endringer for å få den i overensstemmelse med planen. Det gjaldt endog et så sentralt spørsmål som når det er formålstjenlig å introdusere mer formell algebra.

Hva da med vurderingen? Som medlem av departementets utredningsgruppe MISS (Matematikk i Skole og Samfunn) fikk jeg tilgang til et kapittel 0 i læreplan for matematikk. Der ble intensjonen bak planen klargjort i et flott stykke prosa. Dette var et internt dokument som ikke kom med i planen eller ble offentliggjort på annen måte. Eksamenssekretariatet som hadde ansvar for avgangsprøva, satte raskt i gang et forsøk med alternativ prøve. Som sensor ved en av disse fikk jeg anledning til spørre gruppa som laget prøvene om de mente at prøvene de utviklet var i tråd med intensjonene i L97. Jeg ble forbauset over svaret: *Vi kjenner ikke intensjonene i planen. Vi må bare forholde oss til det som står.*

I løpet av en kort reformperiode har jeg i ulike sammenhenger hatt personlig kontakt med personer som alle representerer viktige premissleverandører for hvordan arbeidet i skolestua blir lagt opp: lederen for fagplangruppa, to lærebokforfattere og to representanter for gruppa som utarbeider avgangsprøva for grunnskolen. Men disse har ikke hatt kontakt med hverandre! Som leder for LAMIS har jeg i møter med departementet påpekt nødvendigheten av et samarbeid på tvers av disse gruppene. Det er som om grupper sitter og jobber med sitt på hver si øy uten noen som helst broforbindelse. Samarbeid i skolen er fokusert sterkt i det siste. Den privatpraktiserende lærer har ikke mulighet for å dekke det helstøpte undervisningsopplegget skolen skal tilby eleven. Dette behovet for samarbeid må da gjelde på nivået over skolen også! At departementet som skulle ha det overordnede ansvar for et slikt samarbeid, i stedet oppretter ei ny gruppe som skal arbeide med sentrale prøver, Nasjonale prøver, gir enda større grunn til å bli forundret. Når jeg så sist sommer igjen møtte to av de personene som er med på å utarbeide avgangsprøva for grunnskolen, får jeg på direkte spørsmål som svar at *det har ikke vært noe samarbeid mellom oss og gruppen som arbeider med Nasjonale prøver.*

Fagplan for matematikk i grove trekk
Med utgangspunkt i oversikter utarbeidet av fagplangruppa selv trekker jeg fram et utvalg hovedpunkter som beskriver hva vi som lærere skal streve etter i undervisningen.

Fagsyn
Finner jeg formulert gjennom retoriske spørsmål:

- Er matematikk et fag der det gjelder å huske mye, fakta regler og algoritmer? Eller er det lett å huske fordi begrepene henger sammen?
- Består matematisk kompetanse i å kunne gjøre mange oppgaver på kort tid? Eller er matematikk et konsentrasjons- og tidkrevende fag?

Arbeidsmåter
L97 anbefaler et variert utvalg av arbeidsmåter. De skal samlet gi eleven mulighet for å være aktiv i læreprosessen og utvikle solide begrep og ferdigheter på flere felt:

- Elevenes egne utforskninger
- Samarbeid, diskusjoner
- Arbeid med komplekse problem
- Oppsummeringer og oversikt, sammenhenger
- Elevene lager oppgaver selv

Innhold
Fagplangruppa har selv formulert følgende endringer i forhold til tidligere planer:
Vi skal

- Legge mindre vekt på å lære regler og mer vekt på å utvikle robuste begrep som grunnlag for resonnering
- Bruke mindre tid på algoritmeøvinger og mer tid på å utvikle få generelle strategier
- Arbeide mindre med oppgaver av typen ”beregn”, ”løs likningen”, ”tegn grafen” og mer med oppgaver av typen ”tolk”, ”utforsk” og ”sett opp sammenhengen”

Matematikken inn i en større sammenheng
Det snakkes mye om fornying av skolen og av ungdomstrinnet spesielt. Matematikken er en del av bildet. Signalene er sterke: Få matematikken knyttet til virkeligheten. Det skal skje både ved å få elevene ut av skolestua og ved å trekke virkeligheten inn i skolestua gjennom realistiske eksempler og arbeid med realistiske problemstillinger. Jeg har samlet et knippe honnørord som alle peker i denne retning, og der departementet setter inn ressurser for å drive skolen i nevnte retning:

- Tema
- Prosjekt
- Storyline
- Nysgjerrigper/Unge forskere
- Entrepenørskap
- Praktisk innretning
- Oppdragsundervisning
- Elevbedrift
- Mindre formidling, mer studietid

Alt innrettet mot å vekke til live ”den aktive elev”, et uttrykk som for øvrig passer som hånd i hanske til det konstruktivistiske læringssyn. At denne måten å tilrettelegge undervisning på er svært krevende og at det fins begrenset erfaring ute i skoleverket når planen settes ut i livet, er et problem for seg selv. Det lar jeg ligge her.

Om å se ting i en sammenheng
Når jeg legger så pass stor vekt på disse forholdene i et innlegg som skal handle om vurdering, kommer det ganske enkelt av at det for meg blir meningsløst å snakke om vurdering uten å ha dette som bakteppe. Vurderingen skal jo fortelle noe om i hvilken grad

den enkelte og skolen som system har nærmet seg de målene som er satt for opplæringen. Når vi så snakker om vurdering av et fag som matematikk, er det lett å snevre inn bildet litt for mye og ende opp med å prøve elevene omtrent på samme måte som før – selv om noen av oppgavene endrer karakter og innhold.

Konsekvenser for avgangsprøven
Som følge av planrevisjonene på 90-tallet endret avgangsprøven seg gradvis på enkelte områder.

Valg av vanskegrad
Mange oppgaver gir elevene mulighet for å velge mellom en, to eller tre vanskegrader. Det kan typisk gjelde løsing av likninger der elevene kan få ett poeng for å løse ei enkel likning, eller to (tre) poeng for å løse ei likning som er vanskeligere. I tillegg er det en hel delprøve med oppgaver av variert vanskegrad. Elevene skal velge seks av oppgavene. Dette gir eleven mulighet for å vise hva han kan i stedet for bare å avsløre hva han ikke kan. Tiltaket har utvilsomt hjulpet mange elever til å få et mer avslappet forhold til prøven.

Forberedelseshefte
Elever som to dager før prøvedagen får beskjed om at de skal ha matematikk, får samtidig utlevert et forberedelseshefte. Det inneholder kun en rekke informasjoner om tema med relevans for matematikk. En del av prøveoppgavene bygger på informasjonen i heftet. På forhånd har da elevene muligheter for å gjøre seg kjent med de kontekstene som er valgt. Det å forstå selve konteksten er nok en undervurdert problemstilling i en realistisk tilnærming til matematikken. Aktive elever kan sette seg inn i kontekstene, tenke gjennom mulige problemstillinger knyttet til informasjonene og møte godt forberedt på denne delen av prøven. Nok et grep som gir elevene hjelp til å føle seg trygge i prøvesituasjonen.

Konsumenter og produsenter
Avgangsprøva inneholder oppgaver der elevene selv må formulere ei problemstilling ut fra gitte rammer, for eksempel et utvalg tall med benevning. Slike åpne oppgaver viser bedre enn mange lukkede oppgaver hvor godt elevene kjenner matematikkens plass i verden omkring seg.

Bruk av IKT
Læreplanen peker på dataprogram som nyttige verktøy i arbeidet med matematikken. Spesielt regneark nevnes både på generelt grunnlag og i spesielle sammenhenger. Men det antydes også bruk av graftegnere. I planen heter det blant annet at elevene skal

- kunne nytte databaser, regneark og andre programmer.
- ha kunnskap om bruken av datamaskin i arbeid med grafer og funksjoner.
- arbeide med forhold omkring sparing og lån, rente og rentes rente og vilkår for ned-betaling av lån, f eks ved bruk av regneark og andre hjelpemidler

Det er spesielt regneark som har fått innpass i avgangsprøvene. Naturlig nok siden regnearket er mest utbredt, og det vil ta tid før andre gode programmer får innpass i skolen. At oppgavene beregnet på regneark i begynnelsen verken er særlig spennende eller krevende, får vi vel bare betrakte som en realistisk tilpassing til den datakompetansen som ikke er bygd opp i skolen.

Elevbok
I regi av Eksamenssekretariatet foregikk det et interessant utviklingsarbeid knyttet til aktiv bruk av elevenes egne notater, regelboka som nå oftere kalles elevbok. Elevene kan ha notatene sine med til avgangsprøva. Den rapporten Sigrun Jernquist leverte etter forsøket ga mange eksempler på en fornuftig og aktiv bruk av boka. Mange elever hadde arbeidet så

grundig at boka egentlig var overflødig i prøvesituasjonen. Om det i etterkant er blitt den vanligste resultatet av arbeidet med elevboka, er nok et åpent spørsmål. Mange elever er nok blitt avhengige av elevboka. Matematikk er for en del blitt et huskefag i større utstrekning enn tidligere. Og det som skal huskes står jo i boka. Da tenger en ikke en gang anstrenge seg for å huske. Men det verste er at den matematiske tenkingen da har lett for å forsvinne.

Utvikling over tid
Fram til omkring 1990 begynte prøvesettene til avgangsprøva med fire eller fem ferdig oppstilte oppgaver. Oppgave 1 fra 1990:

a) 125 + 41 + 3032 =
b) 542 – 167 =
c) 6,3 • 5,4 =
d) 754 : 58 =
e) 4 • (-3) + 7 – 14 =

Noen år seinere ble et par av disse oppgavene byttet ut med enkle tekstoppgaver:
Johannes tjente 42 kroner i timen. Hvor mye jente han på 18 timer?

I 1998 tok oppgavene knyttet til de fire regningsartene utgangspunkt i en felles kontekst: Pris på lærebøker. De ferdig oppstilte oppgavene med de fire regneartene var borte.

Elevene som fikk disse prøvene hadde arbeidet etter M87.

Fram til 2000 hadde avgangsprøva bestått av to deler. Del 1 skulle utføres uten lommeregner. På del 2 kunne elevene benytte lommeregner. Fra 2000 ble avgangsprøva lagt opp etter det mønsteret som er beskrevet under avsnittet ”Konsekvenser for avgangsprøven”. Den første oppgaven var ikke lenger knyttet til de fire regningsartene. Det var en logisk oppgave. Eksempel fra avgangsprøven 2002:

> Kari, Lars, Mona, Nina og Ove går i klasse 10B, og alle fylte 16 år i løpet av mars månes i år. Du skal finne fram til når hver av dem hadde fødselsdag, ut fra disse opplysningene:
> - En gutt er yngst av disse fem
> - Ove er eldre enn Mona
> - Ove og Mona har fødselsdag på samme ukedag
> - Nina er eldre enn Kari

Navn:					
Fødselsdag:	4. mars	9. mars	20. mars	23 mars	26. mars

Jeg har valgt å beskrive utviklingen på dette ene punktet for å illustrere at endringer tar sin tid. Endringene har heller ikke foregått uten debatt. Men en avgangsprøve nå inne i det nye årtusen skiller seg fra klart avgangsprøven for 20 år siden. Når så de fleste ser ut til å ha forsont seg med denne formen for avgangsprøver og er innstilt på å forberede elvene best mulig på å klare den type oppgaver som forventes på avgangsprøven, dukker en ny nasjonal prøve opp på arenaen. La gå med at elevene i 10. klasse fikk den like før se skulle opp til avgangsprøve våren 2004. Det var et mistak som blir rettet fort opp. Men mange opplever det som sprikende signaler fra overordnede skolemyndigheter når de to prøvene skiller seg fra hverandre på det som elever og lærere oppfatter som vesentlige punkter. På Nasjonal prøve fikk elevene en delprøve der det ikke var tillatt å bruke lommeregner som nå var blitt et godkjent hjelpemiddel på hele avgangsprøven. Elevene fikk ikke bruke elevboka som mange har lagt stor energi i å utnytte effektivt i prøvesammenheng. Ferdig oppstilte oppgaver med de fire regningsarter som altså over tid nesten hadde forsvunnet fra avgangsprøven, slo imot elevene med full tyngde straks de åpnet heftet Nasjonale prøver. Oppgave 2 inneholder 7 deloppgaver med de fire regnearter, og de skal "regnes for hånd". Hvordan forventer man at elever som gjennom flere år er forberedt på andre oppgavetyper, skal håndtere en slik uvant prøvesituasjon?

Men min innvending mot sentralgitte prøver – både avgangsprøven og nasjonale prøver – går likevel ikke først og fremst på oppgavevalg. Tvert imot vil jeg berømme de som lager prøvene for både grundighet, bredde og kreativitet. Innvendingen min baserer seg på en helhetsvurdering, og da sett i sammenheng med de overordnede mål for undervisningen som er nevnt innledningsvis.

Hva prøver vi?
I forbindelse med gjennomføring av planrevisjonene på 90-tallet argumenterte lederen for Eksamenssekretariatet for matematikkprøver som skulle oppfylle to kriterier:

- Prøvesituasjonen skulle være mest mulig virkelighetsnær
- Dagliglivet skal gjenspeiles i prøvesettene

På denne bakgrunn reagerer jeg da på denne oppgavetypen fra avgangsprøven for grunnskolen i 2002:

Oppgave 2
Løs disse oppgavene uten å bruke lommeregner.

a) Einar kjøpte 2,4 kg druer til 22,50 kr per kg. Hva betalte han?
b) Sju personer skal dele 966 kr slik at alle får like mye. Hvor mye får hver av dem?

Elevene må i ei rute vise hvordan de løser oppgavene uten lommeregner. Virkelighetsnært når lommeregneren ligger på bordet?

Men det fins ellers mange gode eksempler på interessante problem og oppgaver med relevans til dagliglivet så vel i avgangsprøvene som i de nasjonale prøvene. Spørsmålet er bare om det er *for* mange.

I delrapport 2 fra MiSS-utvalget (1996) presenterer Karl Erik Sandvold en interessant sammenliknende analyse av lærebøker for videregående skole fra 1965 og 1994. En opptelling av antall hovedtema i de to bøkene viser 123 i 1965 og 182 i 1994. En økning på ca 50 %. En noe mer finmasket opptelling av begrep og regneteknikker som blir behandlet viser 580 mot 810. En økning på omtrent 40 %. Timetallet for kursene bøkene dekker er tilnærmet like. Men de som har fulgt utviklingen i skolen disse årene vet at det i dag (og i 1996) er større sprik mellom timer fastsatt i planene og det som lærerne får til disposisjon - enn det var i 1965. Elevene har betydelig mer fagstoff å forholde seg til og forerede seg til å behandle på en avgangsprøve. Jeg har ikke tilsvarende tall for grunnskolen.

Men en gjennomgang av oppgavesettet gitt til Avgangsprøven for grunnskolen i 2002 gir disse fakta:

	Del 1	Del 2	Del 3
Oppgaver	14	16	6
Valgoppgaver	4	2	6 av 23
Brosjyre	3	3	6
Datamaskin	2	3	

Her er en oppgave med delspørsmål a), b) og c) regnet som tre oppgaver. Elevene skal avgi svar på i alt 36 spørsmål.

I Del 1 og Del 2 må de i seks av oppgavene foreta et valg på vanskegrad. Del 3 inneholder 23 oppgaver av variert vanskegrad. Oppgavene er satt opp slik at det først kommer en rekke oppgaver som gir ett poeng, deretter noen som gir to poeng og til slutt en eller to som gir 3 poeng. Elevene skal velge 6 oppgaver. De som har litt selvinnsikt trenger ikke lese og vurdere alle oppgavene, men leter seg raskere fram ti passende utfordringer.

Tre av oppgavene i Del 1, tre av oppgavene i Del 2 og seks av oppgavene i Del 3 er knyttet til informasjoner i heftet elevene fikk utdelt to dager før.

I alt fem oppgaver er det mulig – i noen tilfelle også en fordel – å løse med en datamaskin (foreløpig bare regneark).

Disse oppgavene er presentert i tre hefter med til sammen 18 sider, derav tre forsider. Oppgavene er luftig satt, så det er ikke mange problem på hver side. Heftet er på seks sider. Uansett, en betydelig data- og papirmengde å forholde seg til i løpet av fem klokketimer.

Det er verd å merke seg at elever som ønsker å leve opp til lærernes anmodninger om å arbeide grundig med oppgavene, må gjennom en prosess for hver av de 36 deloppgavene:

- Lese/tolke oppgaven grundig
- Vurdere – er det noe lureri her, får jeg med all viktig informasjon?
- Finne strategi
- Velge verktøy, hode/hjelpemiddel?
- Beregne, kontrollere, vurdere
- Hvordan kommunisere?
- Føre inn oversiktlig

Med det omfanget dette oppgavesettet hadde, fikk elevene i snitt 8 minutter på denne prosessen på hver av oppgavene. Noen oppgaver vil de fleste løse på kortere tid, men løser en et problem på 15 - 20 minutter? Er det da et problem? Kan manglende kvalitet på besvarelsene komme av at oppgavesettene totalt sett ikke innbyr til grundig arbeid? Blir prøven en prøve i å holde konsentrasjonen oppe mens en går fra oppgave til oppgave med stadig skiftende matematisk innhold? Jeg vil mer enn antyde at ”ja” et er naturlig svar på det spørsmålet. Den skjulte læringen er at matematikk dreier seg om å kunne gjøre mange oppgaver på kort tid.

Er det noen bedring å spore med de nasjonale prøvene?

	Del 1, 30 min	Del 2, 90 min
Deloppgaver	29, 1 min/oppg	38, 2,5 min/oppg
Hjelpemidler	Ingen	Lommeregner,passer og linjal, **ikke** elevbok og gradskive

Dette tolker jeg som et forsterket signal om at de som har ansvar for vurderingen mener at den viktigste kompetansen i matematikk er å kunne gjøre mange oppgaver på kort tid. Her har man gått rett i den fella Piet Hein formulerer så elegant: En ting i verden / kan ingen forstå / trods al psykologisk forstand: / Hvorfor man altid / tror, man kan nå / det dobbelte af, / hvad man kan.

I de nasjonale prøvene skal alle gjøre alle oppgavene. Det kan selvsagt være mange grunner til å konstruere prøver på av ulike slag. Som praktiker reagerer jeg likevel på at vi fra offisielt hold får så sprikende signaler om hva man betrakter som viktig kunnskap. Det blir altså lagt opp til to prøver som avslutning på undervisningen gjennom grunnskolen, og det forventes at elevene har arbeidet med et relativt mangfoldig stoffutvalg. Et grunnleggende spørsmål som da må besvares og formidles slik at det er krystallklart for alle, blir dette: Hva kan vi realistisk vente at eleven skal ha som ”beredskapskunnskap”. Hva skal vi vente at eleven kan gjøre ”uten å tenke seg om”. Så får prøvene ha det som ett mål å kontrollere i hvilken grad elevene behersker dette stoffet. I tillegg bør det være oppgaver der elevene får mulighet til å dokumentere begrepsforståelse og ferdigheter i problemløsing.

Hovedspørsmålet blir likevel om en individuell prøve på flere timer er relevant i forhold til det undervisningsideal som planen beskriver.

Planformuleringer og etappemål

Et av hovedmålene med L97, er at eleven skal søke helhet, lete etter sammenhenger. Når jeg leser L97, finner jeg flere formuleringer som støtter dette overordnede helhetssynet. Jeg illustrerer med et eksempel fra geometri på ungdomstrinnet.

Elevene skal
- lære å gjennomføre resonnementer
- arbeide med begrepene formlikhet og kongruens
- bli kjent med og bruke Pytagoras' setning

Hvis vi kobler de tre sentrale begrepene formlikhet, kongruens og Pytagoras’ setning til det å gjennomføre resonnementer, har vi en kilde til rike matematiske aktiviteter. Som lærere spør vi oss: Hva innebærer matematisk resonnering omkring disse emnene, og så utfordrer vi og drar elevene med oss i en matematisk aktivitet. For mange elever vil det likevel bli en utfordring i seg selv å bli fortrolig med selve begrepene.

Etappemålene for Nasjonale prøver uttrykker dette på en kvalitativt sett annen måte:
- Kunne avgjøre om trekanter er formlike
- Kunne kongruenssetningene for trekanter og kunne bruke dem til å avgjøre om to figurer i planet er kongruente
- Kunne bruke formlikhet, kongruens og målestokk for å finne løsning på geometriske problemstillinger
- Kunne bruke Pytagoras’ setning begge veier, det vil si både beregne sider i rettvinklede trekanter og til å påvise at en vinkel er 90º.

Jo mer detaljert ei slik liste blir, jo sterkere signaliserer det at matematikk dreier seg om å huske. Da står barnet i fare for å bli skylt ut med badevannet, resonneringen drukner i spesifikke problem som elevene skal kunne løse. Signalet ligger der: De problemene som er listet opp forventes det at elevene skal kunne respondere på rimelig raskt, sammenlikn med gjennomsnittstid beregnet per oppgave. Er det et godt mål?

Alternativ vurdering

Min hovedinnvending mot dagens sentralgitte vurderinger er at de ikke i tilstrekkelig grad tar hensyn til de overordnede mål for undervisningen som er skissert tidligere. Vi beveger oss bort fra en skole der elevene er bundet til hver sin pult 6 timer om dagen med oppgaver som løses på egenhånd. Arbeidsformene varierer mer, elevene er mer i bevegelse på godt og vondt. Det forventes at de skal arbeide med ”små prosjekter” som det uttrykkes i læreplan for matematikk, få tid til å gi seg i kast med mer omfattende problemstillinger. En tradisjonell fem timers individuell prøve kan ikke fange opp den kompetansen det forventes at eleven utvikler i en slik arbeidssituasjon. Det er en kompetanse i seg selv å gjennomføre en flere timer lang individuell prøve konstruert som avgangsprøven og nasjonale prøver. Og det må brukes tid på å la elevene utvikle den kompetansen. Da er vi på kollisjonskurs med de overordnede målene. Jeg opplever dette som dobbeltkommunikasjon.

Selv har jeg søkt om og fått innvilget forsøk med en alternativ prøve for to klasser. Den ene klassen har gjennomført avgangsprøve etter et opplegg med følgende elementer:

- **Forberedelseshefte.** Elevene får utlevert forberedelseshefte 14 dager før prøven. Det forventes at elevene skal sette seg inn i fagstoffet tilsvarende det som skjer ved ordinær avgangsprøve. I tillegg skal de samarbeide i såkalte eksamenspar om å fordype seg i noen av kontekstene i heftet.
- **Individuell skriftlig prøve.** I utgangspunktet en kortere prøve på fire timer. Alle hjelpemidler tillatt under hele prøven. Egen delprøve der det forutsettes at elevene bruker dataprogrammene regneark, konstruksjons- og kurvetegnings-program. Første år ble prøven dessverre utvidet til fem timer. Dette året vil jeg redusere den til det opprinnelige, helst mer, til tre timer. Elevene skal ikke dokumentere kompetanse i problemløsing gjennom denne prøven, kun grunnleggende ferdigheter og begrepsforståelse på sentrale områder.
- **Muntlig prøve** skal supplere den individuelle skriftlige prøven og to (unntaksvis tre) elever får sammen presentere noe de har arbeidet med. Det beste er om de har noe de presenterer sammen, og noe hver for seg. Presentasjonene skal inneholde arbeider både fra heftet og fra mappa der de gjennom året har samlet opp større og mindre arbeider. De skal selv finne et utvalg som representerer en faglig bredde.

Som eksempel på større arbeider nevnes tre fra det heftet elevene fikk før den alternative prøven våren 2004.

Avgift på bilimport
Engangsavgiften for personbiler beregnes med utgangspunkt i egenvekt, slagvolum og egenvekt. Det gis bruksavgift basert på alder. Det skal også betales moms 24 %.

Kjøretøyets egenvekt. Satsene er:
- kr 34,00 pr. kg av de første 1 150 kg av vektavgiftsgrunnlaget
- kr 68,00 pr. kg av de neste 250 kg av vektavgiftsgrunnlaget
- kr 136,01 pr. kg av de neste 100 kg
- kr 158,18 pr. kg av resten

Illustrasjonen viser et utsnitt av en modell en av elevene lagde.

	A	B	C	D	E
1	Import av bil, vil det lønne seg?			Sum	
2					
3	Kjøretøyets egenvekt:	1870	kg	128 227,60	kr
4					
5					
6					
7					
8					

formel d3:

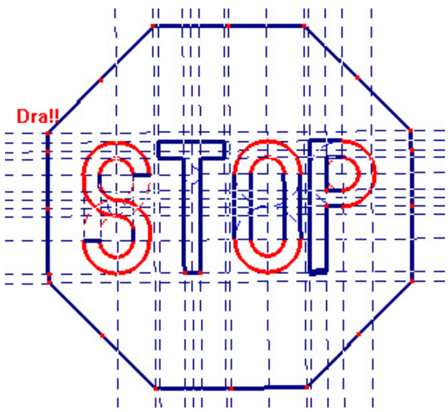
```
=HVIS(B3<1150;B3*34;HVIS(B3<1400;1150*34+(B3-1150)*68;HVIS(B3<1500;1150*34+250*68+(B3-1400)*136,01;1150*34+250*68+100*136,01+(B3-1500)*158,18)))
```

nesten samme formel bare forandring i tall i d6 d8.

Det er bare å sette inn relevante parametere, og importkostnadene blir beregnet automatisk. For en elev i 10. klasse er det en lang prosess fra ønsket om lage en modell til å ende opp med en HVIS-formel som håndterer problemet. Personlig synes jeg denne type aktiviteter med logiske operatorer er mer verdifulle enn den type logisk resonnering oppgaven fra avgangsprøven i 2002 representerer.

Promille
Andre elever lagde omfattende modeller av sammenhengen mellom promille og inntatt drikke med en gitt prosent styrke, kroppsvekt og tid siden alkoholen ble inntatt.
Her må begrep som vekt, volum, tetthet, prosent, promille og funksjoner bygges sammen i en helhet.

Veiskilt
Noen elever lot seg inspirere til å gi seg i kast med Cabri-konstruksjoner av kompliserte veiskilt:



Etter å ha forberedt oss på denne type vurdering, var det en nedtur å måtte gjennomføre nasjonal prøve for 10. klasse. Den ble pliktskyldigst gjennomført uten særlig entusiasme fra verken lærer eller elever. Men en viktig erfaring fikk jeg med meg. Elever som ikke gjør det spesielt godt på en nasjonal prøve, kan være glad i faget, trives med utfordringer og arbeide timevis med å bygge opp kompliserte matematiske modeller relatert til naturen eller samfunnet.

Plan og vurdering
Den type aktiviteter og presentasjoner eksemplene representerer, gir elevene rike muligheter til å dokumentere kompetanse i å strukturere en framstilling og vektlegge det vesentlige uten å

fortape seg i detaljer. Hver enkelt oppgave inneholder nok matematisk materiale til samtidig å få et godt inntrykk av faglig kompetanse.

Men det er en tidkrevende vurderingsform som neppe kan gjennomføres i stor skala. Og der er vi nok ved kjerneproblemet i vurderingsproblematikken. Den må foregå relativt raskt, både med hensyn på den prøvetiden elevene skal være i aksjon og den tiden som i etterkant skal brukes på retting. Det legger store begrensinger på hva vi kan få vurdert. Og vi vet at vurderingen har sterk innvirkning på undervisningen. Når skolemyndighetene i dag i tillegg har gått inn på en ordning med offentliggjøring av vitnemålskarakterer og resultater fra nasjonale prøver, får skolene et ekstra press på seg. Det er ikke moro å bli presentert som skolen med de dårligste karakterene. Rektor ved en av disse skolene måtte selvsagt svare pressen på standardspørsmålet: Hva har du tenkt å gjøre med det? Rektoren ga et godt innblikk i skolens spesielle problem og hva de gjorde på mange felt for å gi elevene gode muligheter for læring. Det var garantert ingen dårlig skole for elevene. Men på det direkte spørsmålet svarte hun: Vi øver nå på Nasjonal prøver.
Hvordan skjer det? Ved å laste ned eksempeloppgaver og trimme elevene på disse? Hvor blir den matematiske resonneringen av da?

Skal en plan bli gjennomført i praksis, må plan og vurdering utgjøre en samlende helhet. Jeg finner ikke den sammenhengen i dagens system.

Sentralgitte prøver – drivkraft eller bremsekloss?
Jeg må nok gi to svar på det spørsmålet.

Svaret er JA for lærere som vil ha veien tråkket opp for seg, som vil ha klare og greie beskjeder om hva de skal gjøre og så få en prøve som dreier seg om nettopp det. Jeg pleier å kalle det undervisningsfunksjonærer som gjør sin jobb etter et detaljert og fastlagt reglement.

Svaret er NEI for lærere som *også* vil ta elevene med seg på en vandring ut i den fantastiske matematiske verden, og undre seg over det mer eller mindre tilfeldig dumper på. Disse lærerne ønsker et mer avgrenset fagstoff det forventes at elevene skal ha beredskapskunnskap i og respondere raskt på. Det er de kreative lærerne Stieg Mellin Olsen var bekymret for da R94 og L97 ble innført. De overlevde den reformen. Spørsmålet er nå om den nye reformen gir livsrom nok.

Kilder
L97
Tangenten 3/94
Alnes m fl: Evaluering av reform 94
Sigrun Jernquist: Matematikk er moro
MiSS-utvalget, delrapport 2 1996
Oppgavesett fra Avgangsprøve i matematikk for grunnskolen
Nasjonale prøver i matematikk for 10. klasse, 2004

Ole Björkqvist
är professor i de matematiska ämnenas didaktik vid Åbo Akademis pedagogiska fakultet i Vasa, Finland. Ansvarsområdet är lärarutbildning i matematik, fysik och kemi för svenskspråkiga lärare i Finland. Hans forskningsintressen inom matematikens didaktik är matematisk problemlösning, utvärderingsmetoder i klassen samt sociala aspekter på undervisning i matematik.

Kvalitetskrav på utvärderingsmetoder i matematik

Ole Björkqvist
Institutionen för lärarutbildning,
Åbo Akademi, Vasa, Finland
objorkqv@abo.fi

Problematik

Utvecklingen av utvärderingsmetoderna inom matematikundervisningen är långsam. Det innebär inte att initiativ till förnyelse saknas. Tvärtom – det finns goda idéer, men de har i praktiken svårt att tävla med ”gamla hederliga matematikprov”. Proven uppvisar en anmärkningsvärd stabilitet och ser ganska likadana ut i ett rätt så långt tidsperspektiv.

Samtidigt utvecklas undervisningsmetoderna. I fråga om dem är tendenserna tydligare, och det finns element i nutida matematikundervisning som saknades för bara ett par decennier sedan. Också samhällets förväntningar i fråga om lärandet av matematik genomgår förändringar, och inte minst den tekniska utvecklingen präglar uppfattningen av vad som är god skolmatematik. Anpassningen mellan läroplaner och undervisningsmetoder är hyfsad, medan utvärderingsmetoderna förefaller släpa efter.

Hur kan man åstadkomma att undervisningsmetoder och utvärderingsmetoder utvecklas i samma takt? Och hur mycket påverkar man bilden av vad skolmatematik är, avsiktligt och oavsiktligt, om man ändrar på utvärderingsmetoderna? Vilka kvalitetskriterier kan man lägga på utvärdering i skolmatematiken?

Integrerad utvärdering

En utgångspunkt är att utvärderingen utgör en del av en helhet, där man för enkelhetens skull ofta har sett undervisningen och lärandet som det primära, vars resultat utvärderas. Detta traditionella sätt att se på utvärdering, som något som följer efter undervisning, räcker inte till. I stället betonar man i dag gärna att undervisning och utvärdering bör uppfattas på ett integrerat sätt, bland annat så att planering av undervisning automatiskt innefattar planering av utvärdering, och omvänt.

Detta innebär att man kan identifiera flera olika slag av relationer mellan undervisning och lärande å ena sidan och utvärdering (assessment) å den andra,
- lärande av utvärdering (learning from assessment),
- lärande under utvärdering (learning during assessment),
- utvärdering som föregår undervisning (assessing before teaching),
- utvärdering som sker medan man undervisar (assessing while teaching),
- utvärdering efter undervisning (assessment after teaching),
- undervisning som sker medan man utvärderar (teaching while assessing).

Kvalitetskrav på utvärderingen

Utvärderingen och undervisningen är en integrerad helhet

God anpassning mellan utvärdering och undervisning innebär bland annat att de har syften som står i harmoni med varandra.

Utvärderingens syfte

Utvärdering är alltid förknippad med ett syfte. Niss (1993, s. 6) ger en översikt över de tänkbara syftena i följande kategorier
a) Att förse någon med information
b) Att ligga som grund för beslut eller åtgärder
c) Att påverka någon del av samhället

Exempel på frågor som konkretiserar syftet *att förse någon med information* är följande. (Vi kan tänka oss att en elev eller en lärare ställer dem.)
- Var står jag? Hur bra presterar jag i relation till målen för undervisningen?
- Hur bra presterar jag i relation till andra elever?
- Vilka är mina framsteg?
- Var står mina elever? Hur bra presterar de i relation till målen för undervisningen?
- Hur bra presterar mina elever i relation till elever i andra klasser, skolor och länder?
- Vilka framsteg har mina elever gjort?
- Vilka specifika svårigheter har vi stött på?
- Vad har lyckats bra?

Exempel på frågor som konkretiserar syftet *att ligga som grund för beslut eller åtgärder* är följande:
- Vad bör jag göra för att lära mig det jag inte kan?
- Hur skall jag disponera min tid?
- Vilka undervisningsmetoder skall jag använda?
- Vad måste vi repetera före behandlingen av ett nytt avsnitt?
- Vad skall jag ta bort eller lägga till i mina planer?
- Vilka råd skall jag ge mina elever?
- Vilken bedömning i form av betyg ger jag?

Exempel på frågor som konkretiserar syftet *att påverka någon del av samhället* är följande:
- Vilka signaler skulle jag vilja ge min lärare?
- Vilka signaler borde jag ge min elev?
- Vilka signaler borde jag ge elevernas vårdnadshavare?
- Hur kan min utvärdering påverka kollegor i fråga om förbättringar av matematikundervisningen?
- Hur kan min utvärdering påverka administratörer och högre beslutsfattare i fråga om förbättringar av matematikundervisningen?

Kvalitetskrav på utvärderingen

Syftet är klart

Om utvärderingen tjänar mer än ett syfte, bör man vara medveten om att syftena kan stå i konflikt med varandra

Ett exempel är en situation som kan uppstå om man tar med nya uppgiftstyper i ett prov för att elever (eller lärare) skall se exempel på sådant som kan vara viktigt i framtida prov. Detta står i konflikt med syftet att undersöka hur eleverna behärskar uppgiftstyper som de är vana med.

Komponenter i utvärderingen

Förutom av ett syfte kännetecknas en utvärdering av ”komponenter” som tillsammans ger en beskrivning av den. När man har besvarat frågor av nedanstående typ har man definierat en utvärderingsmetod (egentligen ”utvärderingsmod”, Niss, 1993, s. 12).
- Vem är det som utvärderas?
- Vad är det som utvärderas?
- Vilken typ av uppgifter (eller motsvarande) utnyttjas?
- När sker utvärderingen?
- Hurudant är tillvägagångssättet? Vem gör vad?
- Vilka kriterier används?
- Vad antecknas eller registreras?
- Vad meddelas eller rapporteras? (Detta utgör kärnan i begreppet bedömning.)

Syftet bestämmer ofta någon eller några av komponenterna, som därmed är fixerade. Till exempel kan det gälla en sammanfattande utvärdering av vad eleverna i en viss klass presterat under en termin. För övriga komponenter finns det variationsmöjlighet, och den som utför utvärderingen har möjlighet att fastställa vilken variation det blir fråga om.

Ett exempel

> En lärare vill beakta läroplanens tyngdpunkt på problemlösning i matematik, men är osäker på om eleverna i den klass hon undervisar (åk 5) klarar av att först matematisera vardagsproblem och därefter utföra de nödvändiga beräkningarna. Hon vill veta hur mycket hjälp och vilket slag av stöd de behöver i processen. (Syftet är klart – det är inriktat på åtgärder som hon skall vidta strax därpå.)
>
> Härmed är det fastställt att undersökningen gäller eleverna som grupp (och enskilt) och att det som utvärderas är deras förmåga att ställa upp enkla matematiska modeller för företeelser som kan beröra dem i vardagen. (Vem och vad som utvärderas.)
> Likaså är det klart att utvärderingen skall ske i klassen, så snart som möjligt, och att det är läraren själv som skall utföra den.
> Variationsmöjligheterna ligger i att de uppgifter som eleverna skall utföra kan se ut på mycket olika sätt. Det kan förekomma ledtrådar, eller så kan läraren prata med enskilda elever medan de arbetar, fråga dem hur de resonerar och ge dem det stöd som behövs. Läraren måste också bestämma själv hur bra eleverna skall ha klarat uppgifterna innan man går vidare.

Här behöver ingenting rapporteras, men det kan vara skäl att fundera efter om det bör göras anteckningar om enskilda elevers prestationer eller sätt att tänka.

Hur mycket variation, som kan komma i fråga när det gäller problemlösningsuppgifter, ser man om man jämför två uppgifter som passar inom ramarna men uppenbart betonar helt olika aspekter av problemlösande i matematik.

Uppgift 1

Du har fått 4 euro att spela Lotto och tippa för. En Lotto-ruta kostar 70 cent och en tipsrad 20 cent. Vilka olika sätt kan du använda pengarna på? Vilket är enligt dig det bästa sättet?

Uppgift 2

På våren börjar Anna och Bo odla grönsaker i varsitt grönsaksland. Anna har gjort sitt 6 meter långt och 3 meter brett. Bo har ännu inte bestämt sig för hur stort han skall göra sitt grönsaksland. Han tror att det skall bli 4 meter brett, och han vill att det skall ha samma area som Annas grönsaksland. Hur långt måste han då göra sitt grönsaksland?

Faktorer bakom variationsmöjligheterna

Det kan vara klarläggande att identifiera på vilka sätt variation kan införas i utvärdering i matematik. Utgångspunkten kan vara till exempel någon av följande faktorer:
- Läroplanen (Var ligger tyngdpunkterna – vad är sekundära mål?)
- Forskning om typiska fel och matematiksvårigheter
- Matematisk struktur
- Speciella talvärden
- Elevernas förmåga att förstå text
- Uppskattad tidsåtgång
- Balansen mellan bekant material och nytt material
- Uppgifternas individualiseringspotential

Varje faktor kunde utgöra grund för ett kvalitetskrav för utvärderingen, utgående från en optimeringsprincip. I vissa fall är formuleringen enklare än i andra. Till exempel styrs variationsmöjligheterna med avseende på läroplanen av relevans och representativitet.

Kvalitetskrav på utvärderingen

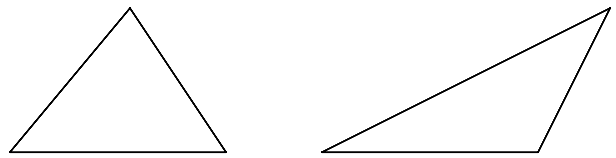
Alla uppgifter är relevanta med avseende på läroplanen
Valet av provuppgifter är representativt med avseende på läroplanen (balans och tyngdpunkter beaktas)

Ett exempel på den matematiska strukturens betydelse ges av följande två uppgifter, som till det yttre skiljer sig väldigt lite från varandra, men som inte nödvändigtvis löses lika väl av enskilda elever:

A. Lös ekvationen $7x - 3 = 13x + 15$

B. Är 10 en lösning till ekvationen $7x - 3 = 13x + 15$?

Det sätt, på vilket matematiska objekt exemplifieras i uppgifter, kan vara avgörande för uppgiftens svårighetsgrad (den genomsnittliga lösningsfrekvensen för uppgiften i fråga). Anta att läroplanen i grundskolan säger att elever bör kunna göra de mätningar som behövs och beräkna arean av en triangel, som finns färdigt uppritad på ett papper. I så fall är lösningsfrekvensen kraftigt beroende av triangelns form och placering på pappret.



46% 20%
Typiska lösningsfrekvenser

Speciella talvärden är lämpligare än andra i vissa typer av diagnostiska utvärderingar. (Sådana har utvecklats till exempel inom det norska KIM-projektet.)

4,72 / 2 = 2,36
4,12 / 2 = 2,6

Siffran 1 (i stället för 7) avslöjar att eleven uppfattar decimaltal som bestående av två hela tal, åtskilda med ett decimaltecken.

I vissa fall kan en och samma uppgift ligga som grund för utvärdering riktad till elever med helt olika matematiska förutsättningar. I så fall kan den sägas ha en hög individualiseringspotential. De enskilda eleverna kan ställas inför delvis olika utmaningar.

> Exempel: Placera talen 1, 2, 3, 4 och 5 i en rad i valfri ordningsföljd. Bilda en taltriangel genom att steg för steg addera två intill varandra stående tal och skriva summan nedanför. Triangeln avslutas med en rad med ett enda tal, ”spetstalet”. Vilket är det största möjliga spetstalet? Vilket är det minsta?

```
1    3    5    4    2            5    2    1    3    4
  4    8    9    6                7    3    4    7
    12   17   15                   10   7   11
      29   32                        17   18
        61                              35
```

> Vilka tal kan förekomma som spetstal?
> Hur blir det om man börjar med andra tal i den översta raden?

Mångsidig utvärdering

Mångsidig utvärdering innebär att man utnyttjar variationsmöjligheterna inom utvärderingens komponenter med samtidigt beaktande av syftet. Man studerar vad
som finns i läroplanen utan att det tidigare blivit föremål för utvärdering och på vilka olika sätt utvärdering kan ingå som en integrerad del av undervisningen. Man tar hänsyn till skillnader mellan elever med avseende på deras lärandestil och sätt att kommunicera sitt kunnande. Man kan också utnyttja matematikens olika sätt att representera begrepp och tillvägagångssätt.

Vid bedömning, om sådan skall förekomma, blir man tvungen att sammanställa information av olika typ till en helhetsbedömning. Hur man gör detta är ett svårlöst problem, som förekommer även i andra sammanhang.

Mångsidighet skall inte uppfattas som ett självändamål. Men att ha mångsidighet i fokus innebär att man blir observant på variationsmöjligheterna och strävar att utnyttja dem på ett bra sätt.

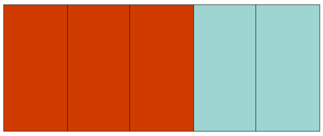
Kvalitetskrav på utvärderingen
Utvärderingen utnyttjar de existerande möjligheterna till variation

Utvärderingens syfte kan begränsa möjligheterna till variation, till exempel om man koncentrerar sig på ett visst talområde, på huvudräkning, på uppgifter där eleverna skall samarbeta, eller på någonting annat specifikt.

Exempel på ”nyare” utvärderingsmetoder är bland annat följande:
- Öppna problem
- Uppgifter som förutsätter insamlande av information
- Uppgifter som förutsätter bortsållande av information
- Utvärdering av projekt, t.ex. modellering av företeelser i hemmet eller i samhället
- Uppgifter som förutsätter kvalitetsbedömning av färdiga lösningar till uppgifter
- Portfolioutvärdering
- Olika slag av självutvärdering
- Dynamisk utvärdering

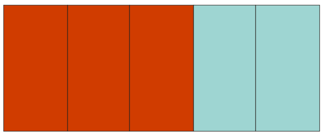
Av dessa är de flesta tämligen väl företrädda i matematikdidaktiskt utvecklingsarbete och kompetensutveckling för lärare. I fråga om dynamisk utvärdering kan nämnas att den bör ses som ett slags komplement till statisk utvärdering (det vill säga utvärdering av kunnande vid en viss tidpunkt, utan hjälp av andra). Dynamisk utvärdering innebär att man utvärderar en elevs förmåga att i växelverkan med en lärare, en kamrat, en dator eller annan typ av informationskälla utöka sitt matematiska kunnande.
Att utnyttja olika representationsformer.

En viktig faktor bakom variationsmöjligheterna vid utvärdering är möjligheten att uppfatta och kommunicera matematiska idéer på olika sätt. Ett exempel med fokus på visualisering är följande representation av bråk:



a) Kan du se 3/5 av någonting?
b) Kan du se 5/3 av någonting?
c) Kan du se 5/3 av 3/5 ?
d) Kan du se 2/3 av 3/5 ?

Samma figur kan utnyttjas som bas för utvärdering av förmågan att gå över till en annan representationsform:



Hela figuren motsvarar talet 1.
a) Märk ut på tallinjen det tal som den röda delen motsvarar
b) Märk ut på tallinjen det tal som den gröna delen motsvarar

Forskningen om representationer inom matematikundervisningen ger vid handen att:
- Effektiva representationer är centrala för begreppsbildningen.
- Effektiva representationer är viktiga för den matematiska kommunikationen.
- Talförståelse (number sense) och symbolförståelse (symbol sense) är hörnstenar.
- Speciellt konstruerade representationer (laborativa hjälpmedel) i vissa fall kan försnabba lärandet.
- Datorerna öppnar helt nya möjligheter i fråga om representationer.

Kvalitetskrav på utvärderingen*Utvärderingen utnyttjar forskningsresultat i fråga om lärande av matematik, där det är möjligt.*

Att bli van med nya utvärderingsmetoder

Ett problem med nya utvärderingsmetoder är att de ofta förefaller mindre tillförlitliga än de traditionella matematikproven. Lärare vill gärna utvärdera matematiskt kunnande med metoder som man känner sig säker på och van med. Att öka reliabiliteten i utvärderingen är angeläget.

Erfarenheten vid försök visar dock att man tillsammans med kollegor kan diskutera sig fram till en gemensam syn på utvärdering av nyare typ (bland annat på bedömningen), även om alla är deltagare är ovana. Det är ett utmärkt tema för fortbildning i form av workshops.

För elevernas del krävs gradvis tillvänjning – komplicerade eller ovana tillvägagångssätt kan övas stegvis.

Att hinna med nya utvärderingsmetoder

Nya utvärderingsmetoder förefaller ta mycket mer tid än tidigare, och den ”tas av undervisningstiden”.Det är därför viktigt att påvisa, att man sparar tid på något annat sätt, till exempel så att eleverna förvärvar nytt kunnande medan utvärderingen pågår.
Då bättre utvärdering leder till bättre kännedom om vilken undervisning enskilda elever behöver, effektiverar man också tidsanvändningen.

Kvalitetskrav på utvärderingen

Utvärderingsmetoden accepteras av lärare, elever och övriga intressenter

Till övriga intressenter hör förutom vårdnadshavare och skoladministratörer också till exempel universitetsmatematiker.

Öppenhet vid utvärdering

Utvärderingens styrande effekt på andra delar av undervisningsprocessen framgår av dess integration med undervisningen, men också till exempel på elevernas motivation för lärande. Detta exemplifieras av ofta förekommande frågor av typen
- ”Kommer det här med i provet?”
- ”Vad skall provet handla om?”

Det finns alltså en förväntning att läraren öppet skall deklarera sina avsikter i fråga om utvärderingen. Öppenhet är en del av det ”didaktiska kontraktet” mellan lärare och elever. Detta oskrivna kontrakt reglerar deltagarnas roller vid undervisning och lärande i enlighet med ett i klassrumskulturen utvecklat mönster. Eftersom utvärderingen är ett centralt element, hör det till att parterna vet vad de kan förvänta av varandra, även om det i många fall inte baserar sig på direkta löften.

Öppenhet innebär att man delar information med varandra, samtidigt som man uppfyller sin roll i den didaktiska situationen.

Kvalitetskrav på utvärderingen

Utvärderingen är öppen för alla parter i fråga om syfte och metod

Öppenhetsprincipen gäller bland annat i fråga om vilka kriterier man använder när man ger betyg. Då sammanställer man information från olika utvärderingar, som kan ha genomförts med mycket olika metoder.

Slutord

Också om man kan förknippa en hel del problem och tills vidare olösta frågor med utvecklandet av utvärderingsmetoderna i matematik, framstår det som en positiv utmaning för alla deltagande parter.

För en enskild lärare kan det innebära både ny teori och ny praktik. Vardera måste komma i ganska måttliga doser, för att man skall hinna vänja sig.

För en enskild elev gäller att det sätt på vilket utvärderingen genomförs måste stå i linje med elevens förväntningar på utvärderingen.

Sammanfattning av kvalitetskraven på utvärderingen

- Utvärderingen och undervisningen är en integrerad helhet.
- Utvärderingens syfte är klart.
- Alla uppgifter är relevanta med avseende på läroplanen.
- Valet av provuppgifter är representativt med avseende på läroplanen (balans och tyngdpunkter beaktas).
- Utvärderingen utnyttjar de existerande möjligheterna till variation.
- Utvärderingen utnyttjar forskningsresultat i fråga om lärande av matematik, där det är möjligt.

- Utvärderingsmetoden accepteras av lärare, elever och övriga intressenter.
- Utvärderingen är öppen för alla parter i fråga om syfte och metod.

Referens

Niss, M. (1993). Assessment in mathematics education and its effects: An introduction. In M. Niss, (Ed.), *Investigations into Assessment in Mathematics Education. An ICMI Stud*y. Dordrecht,: Kluwer.

Lars Gustafsson
har i drygt 20 år arbetat som matematiklärare på svensk folkhögskola. För närvarande är han verksam vid Nationellt Centrum för Matematikutbildning (NCM) vid Göteborgs universitet där han ansvarar för området vuxnas matematiklärande. Han medverkar också i redaktionen för tidskriften Nämnaren och är huvudförfattare till rapporten Vuxna och matematik - ett livsviktigt ämne.

Validering av vuxnas matematikkunnande -lägesbeskrivning, möjligheter, spänningsfält

Validering av vuxnas samlade kunnande eller reella kompetens är en viktig del i uppbyggandet av en infrastruktur för vuxnas lärande som är en del i reformeringen av vuxenutbildningen i Sverige. Bakgrunden till och grundtankarna i detta arbete presenteras. Några tankar kring möjligheter och spänningsfält i valideringsprocessen presenteras.

Med ett konkret exempel från en kommun får vi se hur validering av vuxnas matematikkunnande kan gå till i praktiken.
Med detta som bakgrund inbjuder jag till diskussion kring den komplexa frågan om validering av vuxnas matematikkunnande.

Kristine Jess
er lektor ved Københavns Dag- og Aften Seminarium og underviser i matematik. Begyndte 1978 som lærer i folkeskolen og blev fra 1996 tilknyttet Danmarks Lærerhøjskole, nu DPU. Fra 1997 – 2000 samtidig ansat som matematikkonsulent i en omegnskommune til København. Har deltaget i undervisningsministeriets arbejdsgruppe for Kompetencer og matematiklæring 2000 – 2002.

Evaluering i matematikundervisningen

Forskellige aspekter ved evaluering i matematikundervisningen belyses, og der fokuseres på negative konsekvenser af den tilbagevirkende effekt, som evaluering/testning har på undervisningen – herunder inddrages erfaringer fra England og USA, disse erfaringer indgår også i en kritik af offentliggørelse af testresultater. Der ses endvidere på positive effekter og på, hvilke krav man kan stille til evaluering. Herefter omtales en måde at foretage formativ evaluering på, der især henvender sig til 1.– 6. klasse, og der fremlægges resultater fra et dansk evalueringsprojekt med ca.100 lærere og 2000 elever, hvor denne evalueringsform har været anvendt.
Herefter følger en kort præsentation af det danske projekt om kompetencer og matematiklæring, som har inspireret til den vurdering af kompetencer, der indgår i det norske tiltag om obligatorisk evaluering. På denne baggrund ses på, om det er muligt at indfange og evaluere matematiske kompetencer ud fra en elevbesvarelse i det danske evalueringsprojekt.

Baggrund

I internationale sammenhænge og i Norden er der gennem det sidste årti kommet en stadig stigende opmærksomhed på evaluering i matematikundervisningen og i andre fag. Der er en tendens til frontdannelse på området, og der er mange begrundelser for og imod øget evaluering. Angående evaluering i matematik er man nok enig så langt, at evaluering har meget væsentlige konsekvenser for matematikundervisningen, men uenig om hvilke. Det er min hensigt at bidrage til en afklaring af dette. Men først en præcisering af evalueringsformer.

Formativ og summativ evaluering

Formativ evaluering anvendes med henblik på at forme eller danne i fremtiden. I den formative evaluering er der en intention om at afdække elevens læringspotentialer, dvs. forsøge at finde det bedste afsæt for den fremtidige læreproces med henblik på at tilrettelægge undervisningen, så den tilgodeser elevens læreproces bedst muligt.

Den summative evaluering er karakteriseret ved, at man forsøger at

bestemme resultatet af et afsluttet undervisningsforløb, og den giver således et billede af elevens matematiske formåen på det givne tidspunkt. Det er ikke hensigten, at den skal give pædagogiske handleanvisninger.

Betegnelserne formativ og summativ evaluering angår hensigten med evalureringsformen - ikke indhold og udformning. Som eksempel på forskellige summative evalueringsformer har vi grundskolens afsluttende prøver i matematik i Danmark. De består af tre dele, hvoraf de to er skriftlige prøver, dels en færdighedsprøve som skal besvares uden hjælpemidler, og dels en problemløsningsdel hvor alle hjælpemidler er tilladte. Den tredje del er en mundtlig prøve, hvor elever i små grupper arbejder i ca. en og en halv time med en matematisk problemstilling, som enten er formuleret af læreren på forhånd, eller som eleverne selv formulerer og derefter får godkendt af lærer og censor.

Evaluering har konsekvenser

Umiddelbart kan det synes ukompliceret at give eleverne fx en skriftlig prøve, hvor de skal udføre elementære regneopgaver eller blot skrive resultater. Desværre er det ikke helt så enkelt. Man har gennem mange år haft den opfattelse, at især den summative evaluering har en tilbagevirkende indflydelse på undervisningen, en såkaldt "backwash effekt". David Clarke, en anerkendt international forsker inden for matematikevaluering, udtrykker det således: hvad der skal evalueres bestemmer, hvad der skal undervises i. Og at det, der bliver værdsat i evalueringen, fungerer som mål i undervisningen. Heraf følger at hvis vi ikke kan evaluere det, vi værdsætter, vil indholdet i undervisningen indsnævres og afspejle den mangelfulde evaluering (Clarke, 1996).

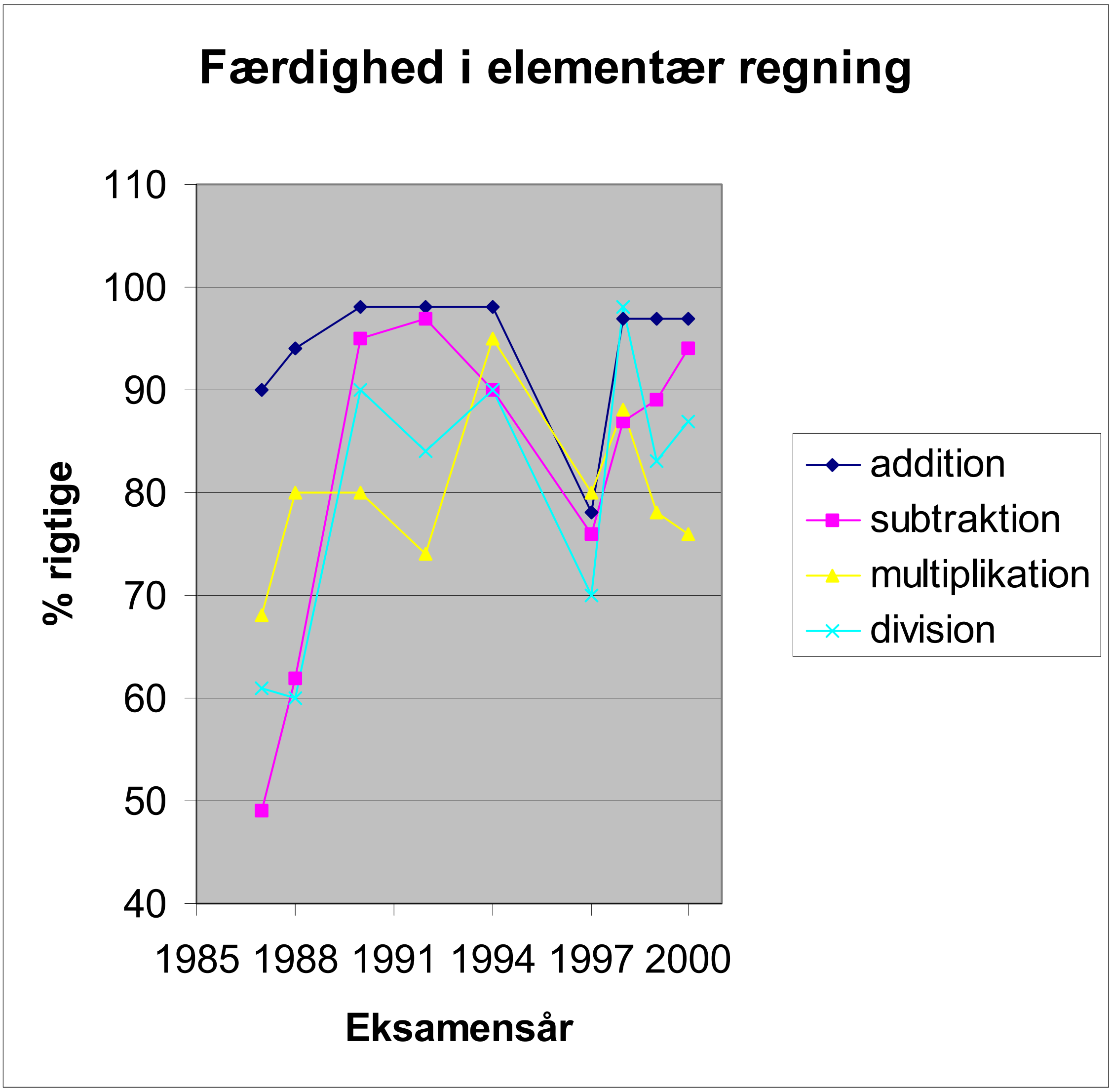
Dette blev dokumenteret i en stor undersøgelse fra Australien, hvor undervisning og afsluttende evalueringsformer blev sammenlignet i de to mest folkerige stater. Indholdet i de obligatoriske evalueringsformer viste sig at have en gennemgribende indflydelse på lærernes opfattelse af, hvad der var vigtigt at undervise i. Forfatterne konkluderer, at testformer har en fundamental indflydelse på valg af indhold i undervisningen, således at det, der er vanskeligt at teste, bliver udeladt i undervisningen. Men de skriver også, at ændringer i testformer kan fremme reformer i matematikundervisningen. (Barnes et al., 2000)

Nogle vil stille sig skeptiske over for disse resultater, så lad os foretage et tankeeksperiment. Læseren bedes forestille sig en situation, hvor han/hun som matematiklærer får besked om, at eleverne i slutningen af skoleåret skal til en færdighedsprøve, der går ud på at finde det rigtige facit til så mange opgaver som muligt. Da man som lærer naturligt ønsker, at ens elever klarer sig godt i de prøver, vil man let komme til at vægte netop det stof i sin undervisning, som prøven omhandler. Tankeeksperimentet skulle gerne overbevise os om, at få af os vil kunne sige sig fri for at lade vores undervisning blive påvirket i en sådan situation. Der kan tillige være andre faktorer, der lægger et mere eller mindre udtalt pres på læreren fx forældre, skoleleder eller det, at resultaterne bliver offentliggjort, således at både elever og lærer bliver udstillet.

Jeg har erfaret, at nogle matematiklærere reagerede sådan. I Danmark havde vi i årene op til 1995 en færdighedsprøve som en del af den afsluttende prøve efter 9. klasse, men denne blev fjernet i forbindelse med et nyt faghæfte (læreplan m.m.) i 1995. I begyndelsen af 1997 blev det politisk bestemt, at den skulle genindføres, men ca. en uge efter blev denne tanke opgivet, for alligevel at blive gennemført efter endnu en ugestid. I den periode afholdt jeg hver uge efteruddannelse på en skole. Her erfarede jeg, hvordan matematiklærerne forholdt sig til i første omgang meddelelsen om færdighedsprøvens (gen)indførelse. Reaktionen var, at nu blev de nødt til at "træne eleverne op" til denne. Ugen efter, da prøven var ude igen, gav lærerne udtryk for lettelse over, at nu kunne de foretage sig noget mere fornuftigt. Og så ugen efter, ja så blev de altså alligevel nødt til at træne færdigheder.

Herunder er gengivet et statistisk materiale fra undervisningsministeriet, der viser en opgørelse over antal korrekte besvarelser af de fire første opgaver i færdighedsregningsdelen ved afgangsprøven i 9. kl. i perioden 1987 – 2000. De fire opgaver består hver for sig af et regnestykke i en af de fire regningsarter, og der må som tidligere nævnt ikke anvendes hjælpemidler.

Diagrammet viser procentdelen af elever med korrekte besvarelser af de fire første elementære regneopgaver i færdighedsprøven efter 9. kl.



	addition	subtraktion	multiplikation	division
1987	90	49	68	61
1988	94	62	80	60
1990	98	95	80	90
1992	98	97	74	84
1994	98	90	95	90
1997	78	76	80	70
1998	97	87	88	98
1999	97	89	78	83
2000	97	94	76	87

Det fremgår tydeligt af oversigten, at eleverne i 1997 har klaret de fire spørgsmål i færdighedsprøven langt dårligere end både før og efter. Fra 1987 og frem til og med 1994 ses en markant stigning i antal rigtige besvarelser inden for alle fire regningsarter. Herefter kommer et brat fald i 1997, hvor færdighedsprøven først blev genindført et stykke tid efter jul. Herefter har der været en klar stigning i addition og subtraktion, nogen stigning i division og både lidt frem- og tilbagegang i multiplikation. Udsvingene i resultaterne er så markante, at de må tages som dokumentation for den omtalte backwash effekt.

Det er yderst forståeligt, hvis læreren i sin undervisning vægter det, som evalueringsformen måler, og bruger en stor del af tiden på at træne færdigheder, hvis evalueringen angår disse. Umiddelbart kan dette synes rigtigt, da det er nyttigt at kunne regne hurtigt og præcist. Men ser man igen på diagrammet og tager i betragtning, at resultaterne ikke alene afspejler eksamenstræning, men også er et udtryk for, hvad eleverne har lært sig igennem ni skoleår, kan man tolke dykket i 1997 som et tegn på, at eleverne glemmer de færdigheder, de har erhvervet gennem skoletiden, med mindre de bliver brugt hyppigt. Hvis den tolkning holder, betyder det, at eleverne glemmer algoritmer i løbet af et par år, hvis de ikke bliver brugt regelmæssigt. Dette må føre til overvejelser over, hvor stor en del af undervisningstiden der bør anvendes på at vedligeholde algoritmeregning.

Ensidig færdighedstræning har desuden alvorlige konsekvenser. For det første er der begrænset undervisningstid til rådighed, og hvis vægten lægges på færdighedstræning, kan det ikke undgås, at væsentlige områder forsømmes. Det kan dreje sig om de matematiske kompetencer, der i Danmark er beskrevet i KOM-projektet, som omtales senere, eller mere præcist kan det fx dreje sig om undersøgende og eksperimenterende virksomhed, problemløsning og formulering af egne problemstillinger samt kommunikation i med og om matematik. Hvis det sker, indsnævres undervisningen i matematik og lever således ikke op til det, der lægges vægt på i den danske læreplan for faget.

Men der sker også noget andet, der kommer til udtryk i elevudtalelser som: “Blot sig mig, om jeg skal gange eller dividere, så skal jeg nok regne det”. Når færdighedstræning indtager en dominerende rolle i matematikundervisningen, får eleverne en opfattelse af, at det at lære matematik er noget med at kunne gennemføre regneprocedurer – nogle vil kalde det et traditionelt fagsyn. Hermed cementeres en opfattelse, som i forvejen er udbredt hos forældre og, viser det sig, hos førskolebørn.

Det fremgår af en norsk undersøgelse, at dette traditionelle syn på matematikundervisning allerede findes hos børn i førskolealderen. I undersøgelsen har man gennem rollespil undersøgt børns opfattelse af, hvordan undervisning i matematik skal foregå. Børnene planlægger selv spillet, og det gør de sådan, at i en matematiktime skal eleverne sidde ved borde vendt mod tavlen, de skal skrive regnestykker i en bog, og matematiklæreren skal i sin rolle være vældig streng og undervise ved gennemgang på tavlen. Af spillet fremgår det, at læreren altid har ret, uanset om dette faktisk er tilfældet. Der foregår ikke nogen samtale og undersøgende virksomhed, ingen diskussion om rigtig og forkert, og det er ikke acceptabelt at lave fejl. (Fosse 1996)

Den traditionelle opfattelse hos eleverne virker hindrende for en undervisning, hvor eleverne skal være aktive og selv tage initiativ til undersøgende virksomhed. Hvis undervisningen fx er tilrettelagt, så eleverne skal eksperimentere med konkrete materialer med henblik på at støtte begrebsdannelsen inden for et bestemt område, vil mange matematiklærere nikke genkendende til spørgsmålet: “Hvornår skal vi have matematik?” – underforstået man skal regne stykker i bogen for, at det er rigtig matematik. Med den opfattelse kan man naturligvis ikke forvente, at eleverne skal arbejde seriøst med andre ting, disse kan opleves som en underholdende afveksling, men eleverne forventer ikke, at de lærer noget – eller lærer det, de skal i matematik.

Negative konsekvenser i USA og England

Når man beskæftiger sig med konsekvenser af evaluering, er det værd at kaste et blik vest på til England og USA. Det har før vist sig, at tendenser herfra siver østover og kommer til at præge de nordiske lande[1]. Derfor er det vigtigt at være opmærksom på deres erfaringer med brug af evaluering.

Igennem nogle år har jeg modtaget klip om evaluering fra aviser og tidsskrifter i USA, hvor konsekvenser af den udbredte testning bliver omtalt. Jeg refererer her nogle uddrag, hvor de første viser noget om bekymringen ved den indsnævrende effekt af de mange tests.
Focus on testing … narrows the curriculum and encourages rote learning.
High-stakes testing weakens academic standards when it discourages the most qualified teachers and principals from remaining in the professions … [and] affects instructional practices, public image, salaries, school takeovers, and the resources available to schools.
… the tests tell us little about the quality of the education program … They tells us mostly about … how much the school teaches to the test (or about occasional cheating). (Rotberg, 2001)
Parents complained bitterly about a curriculum that is structured around teaching to the test and that crowds out other learning (Traub, 2002)
Det fremgår, at også forældre er bekymrede, men de er ikke blot bekymrede over, at børnene ikke lærer noget væsentligt, men mange forældre udtrykker bekymring over det store pres, der lægges på deres børn. I Texas har man eksempler på, at 8-årige sidder en hel dag med en test, da der ikke er nogen tidsbegrænsning på. (Huges, 2003). De fleste bruger tre til fem timer, men en tredjedel bruger mere tid og nogle bliver til efter skoletids ophør – en enkelt til 17.30. I sig selv er det udmærket, at de ikke skal testes inden for en bestemt tidsramme, men at 8-årige skal se sig nødsaget til at sidde ti og en halv time forekommer helt urimeligt.
Der er vældig mange penge involveret i tilknytning til testresultater:
Maryland reports not only how well schools did on MSPAP but offers cash awards to schools that improve (Mathews, 2002)
The tests are also used to evaluate teachers and principals and to decide how much tax money school districts receive. How well schools perform on these tests can even affect values in surrounding neighborhoods. (Henriques and Steinberg, 2001)
In some parts of the country, educators can get bonuses of as much as $ 25,000 if they raise their students' scores. In other places, school officials can lose their jobs if their students don't produce the right number. (Kantrowitz and McGinn, 2000)
…every teacher in a successful school receives a $ 1,500 bonus. (Traub, 2002)
Der er ganske langt imellem 25.000 og 1.500 dollars, som en lærer åbenbart kan få, men selve det, at der er så mange penge involveret virker foruroligende. Ud fra en skandinavisk tankegang forekommer det også besynderligt, at de skoler, der scorer lavt skal have færre penge, da det kan få en meget selvforstærkende effekt.
Der er flere eksempler på, at det er ufordelagtigt at beholde de svage elever i skolen, fx:
… it looks like it's to a school advantage to get kids to drop out rather than to keep them on the rolls and have poor test scores at grade 12. (Rotberg, 2001)
Igen er det et eksempel på, at det er de dårligst stillede, det går ud over.
Et klip fra Washington Times fra september i år vidner om, at der stadig evalueres meget i USA:
The study, just completed, compared test scores of 46,000 charter school students in 20 states … More than two-thirds of charter students were found to perform better in reading and math and to have a significant achievement advantage over students in the nearest regular public school. (Archibald, 2004)

[1] Privathospitalernes opdukken i Danmark er et eksempel herpå.

Hertil bliver der svaret:
When as a teacher you are put in a position of misusing assessments to support comparisons between your class or school and other classes or schools – rather than support instruction – you are being asked to participate in a process that is unsound and rife with potential for misuse and abuse. (Pelton, 2004)
Det sidste citat er igen et udtryk for, at der i nogle kredse i USA er endog meget voldsom modstand mod, at evalueringsresultater bliver anvendt til sammenligninger af klasser og skoler.
I slutningen af oktober 2004 beskriver Robert Sternberg (director of the Center for the Psychology of Abilities, Competencies, and Expertise and the IBM professor of psychology and education at Yale University) et dusin grunde til, hvorfor "No Child Left Behind Act"[2] slår fejl. Hans begrundelser er i hovedtræk de samme som ovennævnte. Han opsummerer:
In sum, No Child Left Behind is an act used to produce the nation's educational report card. But it, itself, receives a failing grade. Schools are being straitjacketed in attaining what is best for our children, and straitjackets cannot produce the kind of flourishing education system our children need and deserve. (Sternberg, 2004)
Han fremhæver til slut, at det vigtigste er, at skoler giver hver elev den bedst mulige uddannelse, og at skolerne ikke bliver til testforberedende centre.
I England ser man de samme tendenser som i USA, og her bliver resultaterne ligeledes offentliggjort. Imidlertid høres også her kritiske røster, David Fielker påpeger følgende:
First, the SATs [Standard Attainment Test] detrimental effect on teaching. They [the tests] have focused attention on a small part of the mathematics syllabus. Teachers, as always, tend to concentrate not only to those items which will appear in the tests, but also on the types of questions which will be asked, rather than, say, on more extended investigations …
Second, the tests take up an inordinate amount of time. It is not just the time spent on actual tests themselves but the even greater amount of time taking in preparing and practising for them.
Third, there is ample evidence to show that tests cause considerable stress among pupils … but it is also due to the anxiety felt by harassed teachers, concerned with both the welfare of the pupils and the ranking of their schools in the Government's league tables.
Fourth, the pupils are developing an undesirable attitude to mathematics itself, treating the test as the reason why they are learning mathematics…

(Fielker, 2004)

Hvis man sammenholder disse mange negative konsekvenser med, "at engelske skolebørn kan gå op til 75 eksamener i løbet af deres skoleliv" (Fielker, 2001) bliver den dominerende indflydelse meget voldsom for både elever og lærere.
Det værste er formodentlig, at mange politikere er overbeviste om, at indførelsen af obligatorisk evaluering sikrer, at eleverne lærer mere. Hensigten er prisværdig, men risikoen for at overse de negative konsekvenser er stor.
Clarke tager skarpt afstand fra at karakterisere en klasse eller en skole med et gennemsnit af de involverede elevers karakterer. Han påpeger, at beslutninger baseret på et tal, der er fremkommet som gennemsnit af karakterer for en klasse eller en skole, meget vel kunne blive helt anderledes, hvis det var et gennemsnit af elevers karakterer i helt andre grupperinger fx etniske grupper, socialgrupper etc. Han får hermed gjort opmærksom på, hvor spinkelt et grundlag et enkelt tal udgør for beslutninger om fx ansættelse, kvalifikationstillæg og i værste fald afskedigelser. (Clarke, 1996 s. 361)

[2] En lov, der er blevet til på præsident Bush's initiativ, som sigter mod, at alle elever i offentlige skoler i USA skal score "proficient" i læsning, skrivning og matematik 2014.

Et sidste citat fra USA tages der også afstand fra at offentliggøre testresultater, og der sættes spørgsmålstegn ved, om man ud fra testresultater kan konkludere noget om kvaliteten af undervisningen.

Thus ignorance would be the most charitable explanation for why charts are published that rank schools (or towns or states) by these scores – or why anyone would use those rankings to draw conclusions about classroom quality (Sharp, 2002)

Offentliggørelse af resultater

Resultater bliver offentliggjort og med hvilket formål? Et svar kunne være: For at fremme konkurrencen og få alle til at yde deres bedste. Formodentlig arbejder elever og lærere hårdt for at opnå gode resultater – men i hvad? Kvalitet i undervisningen er besværlig og dyr at evaluere, et eksempel herpå er den mundtlige afgangsprøve i matematik ved folkeskolens afslutning, som bliver omtalt senere.

Et ofte fremført argument for offentliggørelse er, at brugerne skal have et grundlag for at vælge skole. Men gode resultater er ikke nødvendigvis ensbetydende med god undervisning og trivsel blandt eleverne. Desuden er det ofte de ressourcestærke forældre, der vælger, hvilket fører til en polarisering mellem skoler med høje og lave testresultater.

Har man til hensigt at støtte skoler med dårlige resultater, er det svært at se, det skulle gavne at offentliggøre resultaterne.

Offentliggørelse i sig selv kan medføre et pres, der frister til snyderi. En engelsk lærer skriver anonymt i Education Guardian, 16. marts 2004 (Fielker, 2004), at han:

who, although ‘not an opponent of testing in principle’, found that because of the pressures of league tables and of performance related pay, cheating in a number of ways was going on among primary teachers to such an extent that secondary schools were disregarding individual pupils’ test scores and carrying out their own diagnostic testing.

Man kunne håbe, at det kun var i England. Imidlertid sker det også i USA, det fremgår af det tidligere citat af Rotberg: “or about occasional cheating”, og Sternberg skriver:

Encouraging cheating. Because the stakes for high scores are so high, schools are inadvertently encouraged to fudge the data, give children answers to tests, or make various attempts to exclude children from testing who, according to the act, should be tested. The result is that schools are now under the same pressure students feel in high-stakes testing, and act similarly. They have started to cheat. There are many ways to cheat. For example, one is purposely to exclude scores of children with special needs and thereby ‘fudge’ the data. (Sternberg, 2004)

Set udefra er det forståeligt, hvis nogen fristes til at pynte på resultaterne med det pres, der bliver lagt på de involverede, men det er erfaringer, man bør lære af i de nordiske lande.

Med dette slutter jeg min dokumentation for negative konsekvenser af evaluering og ser herefter på positive konsekvenser heraf og på krav til evaluering.

Positive konsekvenser af evaluering

Flere har påpeget, at ændringer i testformer kan fremme reformer i matematikundervisningen, tidligere er Barnes et al. refereret for, at ændringer i testformer kan fremme reformer i matematikundervisningen, og Cooney et al. mener, at:

…evaluation can be construed not only as an object of reform but as an instrument of reform as well. (Cooney et al. 1993, s. 239)

Efter påvisning af alle de negative aspekter forekommer disse udtalelser interessante – findes der eksempler på dette? Herpå vil jeg svare ud fra egen erfaring. Jeg har afholdt utallige efteruddannelseskurser og i den sammenhæng erfaret, at mange matematiklærere har den opfattelse, at den mundtlige afgangsprøve efter henholdsvis 9. og 10. klasse i Danmark har haft en endog meget stor og også positiv indflydelse på den forudgående undervisning. Der er især fremkommet en forøget opmærksomhed på at arbejde med matematiske problemstillinger og samarbejde om løsning af disse og på, at eleverne selv skal formulere problemstillinger, som de efterfølgende skal behandle, hvilket fører til, at eleverne får mulighed for at lære at udtrykke sig om matematiske forhold. Disse tendenser er i overensstemmelse med det danske faghæfte fra 1995, og et eksempel på, at en

evalueringsform har fungeret som et instrument for at fremme implementeringen af de ret omfattende nyskabelser, der dengang blev lanceret.
Men hvordan sikrer man sig, at en evalueringsform fremmer de reformer, der afspejles i nye læreplaner?

Krav til evaluering

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) har udgivet *Assessment Standards for School Mathematics* (1995), heri definerer de, hvad de forstår ved assessment (som tildels svarer til min brug af ordet evaluering):
Assessment is defined as the process of gathering evidence about a student's knowledge of, ability to use, and dispositions toward, mathematics and of making inferences from that evidence for a variety of purposes.(s. 3)
Her stilles også krav om at:
Assessment should reflect the mathematics that all students need to know and be able to do (s. 11)
Dette sammenholdes med følgende 5 punkter, fremsat af Jan de Lange fra Freudenthalinstituttet i Holland:

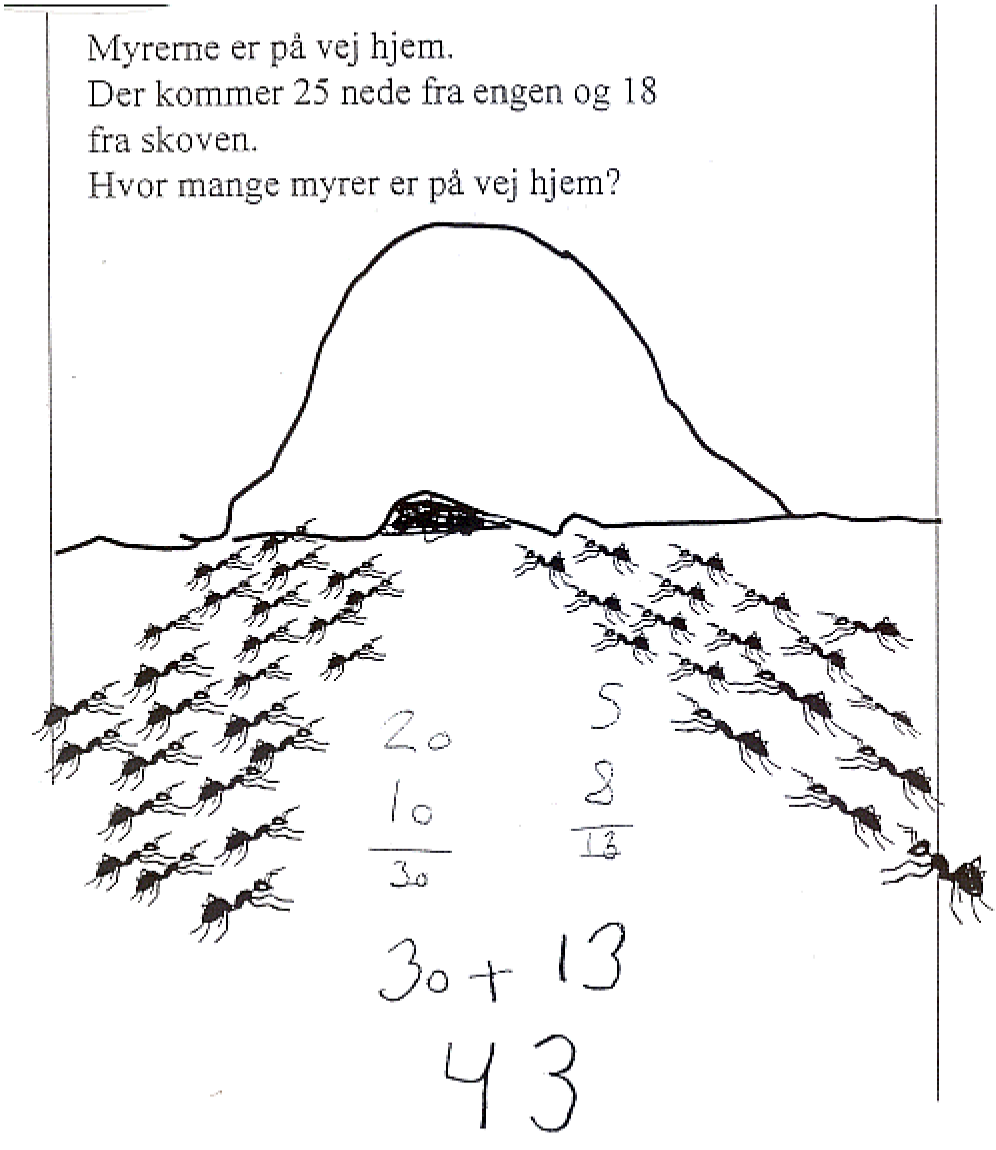
1. Tests should be an integral part of the learning process, so test should improve learning.
2. Tests should enable students to show what they know rather than what they do not know. We call this 'positive testing'.
3. Test should measure all goals.
4. The quality of the test is not dictated by its possibilities for objective scoring.
5. Test should be practical enough to fit into school practice. (de Lange, 1993)

NCTM's krav om at evaluering skal reflektere al den matematik, som eleven ved og kan bruge svarer til punkt 3 hos de Lange, og begge indeholder således en advarsel om for snævre evalueringer. Punkt 1 henviser til formativ evaluering, da der skal evalueres med henblik på at give eleverne optimale muligheder for læring. Punkt 2 afspejler en holdning til elevens kunnen, idet det er denne, der værdsættes og ikke mangler, der skal afsløres. I punkt 4 understreges, at kvaliteten af en evalueringsform ikke må bero på, om den kan måle objektivt. Clarke går endnu længere, idet han skriver, at selve det at udtrykke en vurdering af en elevs matematiske formåen i form af noget så snævert som en karakter er diskutabelt, han udtrykker det således:
Schools and school system can no longer pretend that a one-dimensional number or grade can adequately or usefully characterize a student's mathematical learning. (Clarke, 1996 s. 359)
Clarke pointerer, at en kvalitativ vurdering baseret på langt mere end en enkelt test vil yde eleven større retfærdighed, og at det vil give et mere fyldestgørende billede af elevens matematiske kompetencer, hvis der anvendes forskellige former for evaluering. Hertil findes i dag et rigt udbud af evalueringsformer så som logbog, portfolio, færdighedsprøver, skriftlige prøver, begrebskort, det at formulere opgaver til kammerater, samtale med den enkelte elev med flere.
Som tilføjelse til allerede kendte evalueringsformer vil jeg nærmere beskrive en formativ evalueringsform, der blev indført i en forstadskommune til København i en periode, hvor jeg var ansat som matematikkonsulent. Denne måde at evaluere på viste sig at have positive effekter, som jeg senere vil komme ind på.

Evalueringsprojekt i Brøndby

Projektet startede med et pilotprojekt, der blev gennemført i 1997/98, og som konsekvens heraf blev alle kommunens 1. - 5. klasser og deres matematiklærere involveret i projektet i 1998/99, i alt ca. 2000 elever og 100 lærere. Lærerne deltog i et efteruddannelseskursus med fokus på evaluering. De skulle afprøve det evalueringsmateriale (Andersen & Jess, 2000), der var blevet udviklet i perioden, i deres klasser med henblik på senere at diskutere dets udformning og muligheder på kurset.

Materialet er inspireret af Heuvel-Panhuizen fra Freudenthalinstituttet (1996) og af PRIM-gruppen fra Sverige (1996). Udformningen af evalueringsmaterialet er baseret på en opfattelse af, at læreren er professionel og er den, der bedst ved, hvad der er behov for i praksis, samt på en vurdering af hvad der er praktisk muligt og overkommeligt – jf. de Langes punkt 5 i krav til evaluering. Materialet er skriftligt og består af elementære regneopgaver, åbne opgaver og problemløsningsopgaver. De opgaver, der ikke er elementære regneopgaver, er forsøgt sat ind i en sammenhæng, der tænkes at forekomme børn på de pågældende alderstrin vedkommende. På hvert ark er der afsat plads til, at eleverne ved hjælp af tegninger, ord og/eller matematiske symboler skal redegøre for deres løsningsmetoder. Her vises et eksempel fra 2. klasse, der angår addition. Et andet eksempel med et bredere sigte fra 5. klasse ses til sidst i artiklen.



Gennem elevernes besvarelser kan lærerne opnå indsigt i, hvordan den enkelte elev tænker, når denne arbejder med en matematiske problemstilling og dermed i elevernes begrebsdannelse. Lærerne får tillige en mulighed for at afdække potentielle læringsmuligheder, og at opdage uhensigtsmæssige løsningsstrategier, eleverne får mulighed for at vise, hvad de kan, jf. punkt 1 og 2 i "Krav til evaluering".

Der er udarbejdet mange forskellige opgaver ud fra en tillid til, at læreren vælger de opgaver ud, der passer til den undervisning, der er foregået i klassen. Det er læreren, der bestemmer, hvornår og i hvilket omfang evalueringen skal finde sted. Materialet er ikke normgivende for undervisningen. De tolkningsresultater, læreren kommer til, skal kun bruges til at kvalificere den efterfølgende undervisning og bidrage til at gøre forældreinformationen mere fyldestgørende. Samtidig er det tolkninger, som ikke er egnet til at danne grundlag for offentliggørelse og sammenligninger, jf. punkt 4 i "Krav til evaluering".

Opgaverne ligger på en CD-rom, så lærerne selv kan ændre i dem efter behov. Det medfører, at læreren kan give opgaver – ikke nødvendigvis ens eller af samme sværhedsgrad – til alle elever i klassen i samme tidsrum. Imidlertid har den skriftlige form en begrænsning, og derfor må en evalueringsopgave i nogle tilfælde uddybes gennem en samtale.

Effekter af den formative evaluering

I forlængelse af projektet i Brøndby er der foretaget en undersøgelse (Jess, 2000 og 2001) af hvilke ændringer eller intentioner om ændringer i lærernes praksis, der udspringer af arbejdet med denne form for formativ evaluering.

Det fremgår af undersøgelsen, at hensigten med at afdække den enkelte elevs læringspotentialer kun er nået i begrænset omfang, der er ikke ret mange lærere, der helt klart har beskrevet denne effekt. Men der er meget andet, der er blevet påvirket af projektet. Den dominerende effekt har været en stærkt forøget opmærksomhed på sprogets betydning for læring af matematik, hvilket formodentlig kan tilskrives udformningen af evalueringsmaterialet, idet eleverne skal mere end blot skrive et resultat, og denne indsats hviler på sproglig formåen. I mange kommentarer har lærerne udtrykt intentioner om "at lære eleverne at sætte ord på", hvilket er i overensstemmelse med faghæftet, hvor der står, at eleverne skal kunne "benytte sproglige beskrivelser" og må betragtes som en positiv konsekvens, da begrebsdannelsen styrkes gennem brug af sproglige udtryk.

Evalueringsformen har givet anledning til, at nogle lærere har fået et mere nuanceret syn på elevernes matematiske formåen. Nogle af de elever, som lærerne havde anset for at være dygtige, viste sig at have svært ved at redegøre for deres løsningsstrategier, hvilket måske er udtryk for, at disse elever blot er gode procedureregnere.

Der var elever, som overraskede læreren ved uventet at kunne løse opgaver og redegøre for deres løsningsstrategier. Måske får nogle elever med denne evalueringsform en ny chance for at demonstrere matematisk kompetence, fordi kravet om at redegøre for deres løsningsstrategi - for små elevers vedkommende oftest i form af tegning - giver dem et redskab, som støtter løsningsprocessen. Det er min erfaring, at nogle børn forsøger at skjule, at det er nødvendigt at bruge hjælpemidler, som de tror afslører, at de ikke er så gode til matematik fx ved at tælle på fingre skjult under bordet, så læreren ikke ser det. Men i denne sammenhæng er det blevet legalt fx at tegne, og det kan udnyttes i løsningsprocessen og bliver ydermere værdsat af læreren som en brugbar forklaring. "Sprog er ikke blot et beskrivelsesværktøj. Gennem sproget handler man." (Alrø & Skovsmose, 1999 s.14) og tegning er også en form for sprog.

Nogle lærere beskriver, at de i den daglige undervisning er blevet mere opmærksomme på at bede eleverne om at forklare deres løsningsstrategier. Der er også blevet sat mere fokus på indholdet i undervisningen, og lærebøgernes styrende funktion er i nogen grad blevet formindsket.

Endelig skal det understreges, at der også har vist sig en negativ effekt. Det udarbejdede materiale har haft en styrende effekt, hvilket bl.a. kom til udtryk i denne udtalelse fra en lærer: "Materialet har delvist styret undervisningen".

Alt i alt har dette projekt ført til ændringer praksis, hvoraf de fleste må betragtes som positive, samtidig er det endnu engang blevet understreget, at enhver evalueringsform har en bachwash effekt.

I undersøgelsen er der ikke blevet fokuseret på eleven. Mange spørgsmål står ubesvaret hen: Hvilket betydning har denne evalueringsform for den enkelte elevs opfattelse af, hvad matematik er for noget, hvad der er væsentligt at lære, og hvordan egne læreprocesser forløber. Får eleven gennem den her beskrevne form for evaluering styrket sine refleksioner over egen læring? Eller er nogle af de andre former for formativ evaluering bedre egnet hertil?

Evaluering af matematiske kompetencer

Vil det være muligt at evaluere tilegnelsen af matematiske kompetencer med den her beskrevne evalueringsform? Et spørgsmål som formodentlig også vil være af interesse for norske lærere, efter det fra foråret 2005 er meningen, at alle elever skal gennemføre tre nationale delprøver, hvoraf én skal måle elevernes kompetencer inden for:

- Kommunikation (i og med matematik)
- Matematisk ræsonnement og tankegang
- Repræsentationer, brug af symboler og formalismer
- Matematisk modellering og anvendelse af matematik
- Problembehandling
- Brug af hjælpemidler

Jeg vil forsøge at svare på spørgsmålet senere, men da brugen af matematiske kompetencer i Norge ifølge Ingvill Stedøy (foredrag på Nordisk konferanse i matematikkdidaktikk, nov. 2004))bygger på den danske rapport om Kompetencer og Matematiklæring (KOM-rapporten) vil jeg først redegøre for nogle hovedtræk i denne.

Matematiske kompetencer

I sommeren 2002 udgav undervisningsministeriet en rapport, Kompetencer og matematiklæring, KOM-rapporten, udarbejdet af en arbejdsgruppe under ledelse af professor Mogens Niss, Roskilde Universitetscenter. Baggrunden for rapporten var bl.a. tidligere artikler af Niss.

Med en kompetencebaseret beskrivelse er det et ønske at indfange og beskrive det væsentlige ved matematisk faglighed på alle uddannelsesniveauer. Dette indebærer også en mulighed for at kunne beskrive udvikling og progression i matematiktilegnelsen samt at kunne foretage sammenligninger mellem forskellige uddannelsestrin, der rækker ud over sammenligning af pensa. Kompetencebeskrivelsen bygger ikke på en videnskabelig dokumentation, men skal snarere ses som en pragmatiske påstand.

Men hvad vil det sige at have matematisk kompetence? Ved matematisk kompetence forstås: at have viden om, at forstå, udøve, anvende og kunne tage stilling til matematik og matematikvirksomhed i en mangfoldighed af sammenhænge, hvori matematik indgår eller kan komme til at indgå. En forudsætning herfor er konkret viden og konkrete færdigheder, men at besidde matematisk kompetence kan ikke reduceres hertil. De enkelte matematiske kompetencer indgår som komponenter, og man kan sige, at en matematisk kompetence er indsigtsfuld parathed til at handle hensigtsmæssigt i situationer som rummer specifikke matematiske udfordringer.

Der er udpeget otte centrale matematiske kompetencer, der er inddelt i to grupper, *at kunne spørge og svare i og med matematik* , som rummer de fire første kompetencer og *at kunne håndtere matematikkens sprog og redskaber*, som indeholder de fire sidste. Opdelingen skal imidlertid ikke opfattes for bastant, idet kompetencerne på forskellig vis og i forskelligt omfang er indbyrdes forbundne, men alligevel er de karakteristiske i sig selv, og ingen af dem kan reduceres til en af de øvrige kompetencer. Tilsammen udgør de en helhed, og besiddelse heraf giver matematisk kompetence, hvilket i øvrigt skal forstås relativt, for hvornår besidder man matematisk kompetence fuldt og helt?

Kompetencebeskrivelsen kan ikke står alene som fagbeskrivelse, men skal ses i sammenhæng med fagligt stof, hvorimod udvælgelsen af det faglige stof kan være bestemt af, hvilke matematiske kompetencer der søges udviklet i den pågældende sammenhæng.

Desværre må karakteristikken af kompetencerne af pladsmæssige hensyn udelades i denne sammenhæng, det fører til en opremsning af betegnelserne for de enkelte kompetencer, som måske kan give associationer til en pensumliste. Derfor skal det understreges, at kompetencerne skal opfattes som en klynge, der udgør et samlet hele. Men nævnt en efter en er de som følger:

At kunne spørge og svare i og med matematik

Tankegangskompetence - at kunne udøve matematisk tankegang

(fx at kunne stille spørgsmål som er karakteristiske for matematik og have blik for typen af svar)

Problembehandlingskompetence - at kunne formulere og løse matematiske problemer

Modelleringskompetence - at kunne analysere og bygge matematiske modeller vedrørende andre felter

Ræsonnementskompetence - at kunne ræsonnere matematisk (fx at kunne forstå og selv udtænke matematiske ræsonnementer)

At kunne håndtere matematikkens sprog og redskaber

Repræsentationskompetence - at kunne håndtere forskellige repræsentationer af matematiske sagsforhold

(fx symbolske, geometriske, grafiske eller verbale repræsentationer)

Symbol- og formalismekompetence - at kunne håndtere matematisk symbolsprog og formalisme

(bl.a. at kunne forstå og anvende symbol- og formelsprog)

Kommunikationskompetence - at kunne kommunikere i, med og om matematik

Hjælpemiddelskompetence - at kunne betjene sig af og forholde sig til hjælpemidler for matematisk virksomhed (inkl. IT)

For en fyldestgørende beskrivelse henvises til rapporten om Kompetencer og matematiklæring (Niss og Jensen, 2002), her er de enkelte kompetencer beskrevet og eksemplificeret både generelt, for grundskole og gymnasium samt for flere uddannelser.

Disse kompetencer har alle et handlingspræg, idet de anvendes i forhold til matematiske udfordringer. Ud over de sider af matematisk faglighed, der med de nævnte kompetencer er forsøgt indfanget, tilføjes en type "aktive indsigter", der vedrører matematikkens karakter og rolle i forhold til natur, samfund og kultur. Disse giver i forskellig grad overblik og dømmekraft vedrørende:

Matematikkens faktiske anvendelse i andre fag- og praksisområder

Matematikkens historiske udvikling, såvel internt som i samfundsmæssig belysning

Matematikens særlige karakter som fagområde

Kompetencebeskrivelsen af matematisk faglighed kan dels anvendes *normativt*, dvs. til beslutninger om med hvilken vægt og på hvilket beherskelsesniveau, de enkelte kompetencer bør være på dagsordenen på et givent uddannelsestrin. Dels kan kompetencerne anvendes *deskriptivt*, dvs. til at beskrive og analysere, hvad der faktisk er foregået i undervisningen. Endelig kan kompetencebeskrivelsen bruges som *metakognitiv støtte* ved, at de gøres til genstand for diskussioner mellem lærer og elever/studerende.

Et eksempel

På baggrund af beskrivelsen af kompetencetænkningen vil jeg se på en besvarelse af en evalueringsopgave og forsøge at svare på, om det er muligt at indfange nogle af de ovennævnte kompetencer ved hjælp af denne type evaluering.

En opgave beregnet til 5. klasse:

$\frac{2}{7}$ 14 $\frac{3}{7}$ 21

Sorteper flyttede ind i en landsby, hvor der boede 33 mus.
Efter 14 dage var der 12 mus tilbage.
Hvor mange havde den spist om dagen?

måske er der kommet unger eller nogle er døde, men umilbart kan den havde spist 21

14 = $\frac{2}{7}$ 21 = $\frac{3}{7}$ så ved jeg deT er en $\frac{1}{2}$ mus om dagen (men der kunne ligeså godt voere blevet spist en første dag og to anden dag

Eleven har sat 2/7 = 14 og 3/7 = 21. Efterfølgende forklarede han, at han ikke kunne dividere 21 med 14, men hvis han forestillede sig, at 21 var tre 7-taller, og 14 var to 7-taller, så kunne han godt regne det.

Hvis man ser på opgaven med kompetencebriller, ser man, at eleven magter flere led i en modelleringsproces. Først gør han sig overvejelser over, om det passer, at katten har spist 21 mus i alt. Han skriver "måske er der kommet unger eller nogle er døde, men umiddelbart kan den have spist 21". Dernæst kommer han via en matematisk beregning frem til: "så ved jeg at det er en halv mus om dagen". Den mundtlig forklaring sikrer, at han har regnet rigtigt, idet han siger "en og en halv mus". Dernæst gør han sig overvejelser over, om det nu også kan passe: "men den kunne lige så godt have spist en første dag og to anden dag". Det må konkluderes, at denne elev har tilegnet sig en modelleringskompetence i højere grad, end man kan forvente af en 5. klasses elev.

Ser vi på symbolbehandlingskompetencen så kniber det med, at denne er tilfredsstillende, han skriver: 2/7 = 14 og 3/7 = 21, men det er ikke det, han mener ifølge hans forklaring. Hans brug af lighedstegnet er noget lemfældigt, og han skriver brøker, men mener multiplikation. Notationen virker for ham, han kan anvende den i sin beregning. Men her er noget, læreren bør være opmærksom på.

Endelig kan vi se på hans kommunikationskompetence. Bortset fra stavefejlene, der ikke er et matematisk anliggende som sådan, klarer han at gøre rede for sine overvejelser i modelleringsprocessen, bortset fra, hvad der blev nævnt under symbolbehandlingskompetencen samt det, at han skriver en halv mus, når han mener en og en halv mus.

Besvarelsen af denne opgave giver er godt indblik i nogle af elevens matematiske kompetencer. Det vil sige, at denne type af opgaver indebærer en mulighed for at evaluere elevernes kompetencetilegnelse.

Konklusion

Som afslutning vil jeg fremhæve, at evaluering kan have både positive og negative effekter på undervisningen, og at det indebærer en udfordring for den enkelte lærer at gennemskue de konsekvenser, der vil forekomme ved brug af forskellige evalueringsmetoder. Oftest kan man selv vælge formative evalueringsformer, og her er det vigtigste selvsagt, at de virkelig giver information, som kan være ledetråd i fremtidige handlinger for eleven, læreren eller for begge. Tillige er det væsentligt at være opmærksom på, om den valgte evalueringsform indebærer, at man skal bruge lang tid på at udfylde skemaer og lignende. Måske kan den tid bruges meget bedre på at overveje sin undervisning og planlægge nye tiltag.

Bliver man som matematiklærer pålagt at bruge bestemte former, og her vil der især være tale om de summative, er det uhyre væsentligt at forholde sig kritisk til i hvilken grad, denne form skal have indflydelse på ens undervisning. Jeg vil stærkt anbefale, at man diskuterer disse forhold med fagkolleger, da det kan være vanskeligt at stå alene med, men også for at få skærpet sin opmærksomhed på eventuelle faldgruber.

For mig har det været afskrækkende at følge udviklingen vestpå, og jeg håber, at politikere og skolemyndigheder i Norden vil fastholde den opfattelse, at man får det bedste skolesystem, hvis man bygger det på tillid til den professionelle lærer fremfor at lade sig smitte af de forhold, der hersker i USA og England, der i korthed bygger på en opfattelse af, at kontrol og konkurrence fremmer kvaliteten i skolerne.

Men at der kan ske forbedringer i det danske skolesystem, er jeg til gengæld ikke i tvivl om – det samme er formodentlig også tilfældet i de andre nordiske lande. I danske skoler vil det at lade linjefagsuddannede lærere (lærere med 42 ECTS i matematik) varetage undervisningen i matematik være et skridt fremad i forhold til de nuværende forhold, hvor i gennemsnit halvdelen af dem, der underviser i matematik ikke er uddannede i faget. Ligesom der i Danmark kunne ske væsentlige forbedringer, hvis man satsede på en efteruddannelse af matematiklærere, der kunne igangsætte langsigtede kvalitative ændringer på den enkelte skole – fremfor nu, hvor megen efteruddannelse ikke fører til generelle kvalitetsløft på skolen, blandt andet fordi læreren ikke har mange muligheder for at dele sin nyerhvervede viden med kolleger.

Det fører til en understregning af, hvor væsentligt der er, at skolen giver matematiklærerne tid og rum til fagligt samarbejde til at lære af hinanden og udvikle deres undervisning. Et forhold, der gang på gang blev nævnt på en stor verdenskongres sommeren 2004 (ICME) som en væsentlig forudsætning for udvikling af undervisningens kvalitet.

Men det mest aktuelle er, at ønsker man obligatoriske nationale evalueringer fra politisk side, så skal de have en form og et indhold, der giver en positiv backwash effekt. Og politikere må gøres opmærksomme på, at offentliggørelse af resultater ifølge erfaringer fra USA og England har meget voldsomme negative konsekvenser.

Litteraturliste

Andersen, M. og Jess, K. (2000). *Evaluering i matematikundervisning.* København: Alinea.

Alrø, H. & Skovsmose, O. (1999). *Samtalen som et støttende stillads.* Skrift nr. 7. Center for Forskning i Matematiklæring. Danmarks Pædagogiske Universitet, Roskilde Universitetscenter, Aalborg Universitet.

Archibald, G. (2004). *Washington Times*, September 18.

Barnes, M., Clarke, D. J. & Stephens, M. (2000). *Assessment: The engine of systematic curricular reform?* Journal of Curriculum Studies 32(5), 623-650.

Clarke, D. (1996). *"Assessment".* A. J. Bishop et al. (Eds.) International Handbook of Mathematics Education, (327-370). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cooney, T. et al. (1993). *Assessment, understanding mathematics, and distinguishing visions from mirages.* I: Assessment in the mathematics classroom (239-247). Yearbook. National Council of Teachers of Mathematics.

Fielker, D. *(2000). Det var ikke min skyld. MATEMATIK, (6), 21-23.*

Fielker, D. (*2004). Endnu upubliceret materiale*

Fælles Mål, Matematik, Faghæfte 12, Undervisningsministeriet, Uddannelsesstyrelsens håndbogsserie nr. 10 – 2003. Grundskolen.

Fosse, T. (1996). *Hvad venter de seg – av skolens matematikk.* En studie af seksåringers socialisering til matematikkundervisningen. I: Marit Johnsen Høines (red.), De små tæller også. Caspar, Norge.

Henriques, D. og Steinberg, J. (2001). New York Times, May 20.

Heuvel-Panhuizen, Maria van den (1996). *Assessment and Realistic Mathematics Education*. CD-β Press, Center for Science and Mathematics Education Utrecht.

Huges, K. (2003). Dallas Morning News, March 28.

Jess, K. (2000). *Formativ Evaluering i Matematikundervisningen – Ændringer i praksis.* Skrift nr. 22. Center for Forskning i Matematiklæring. Danmarks Pædagogiske Universitet, Roskilde Universitetscenter, Aalborg Universitet.

Jess, K. (2001). Positive og negative aspekter ved evaluering. MATEMATIK, (3), 25-29.

Kantrowitz, B. og McGinn, D. (2000). Newsweek, June 19.

de Lange, J. (1993). *Assessment in Problem-oriented Curricula.* I: Assessment in the mathematics classroom (197-208). Yearbook. National Council of Teachers of Mathematics.

Matematik, Faghæfte 12. Undervisningsministeriet 1995. Folkeskoleafdelingen.

Mathews, J. (2002). Washington Post, February 5.

NCTM, (1995). *Assessment Standards for School Mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M. & Jensen, T. H. (red.) (2002). *Kompetencer og matematiklæring*. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisningen i Danmark. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18. Undervisningsministeriet.

Pelton, T. (2004). Washington Times, September 18?

PRIM-gruppen (1996). *Diagnostiskt material i matematik.* Lärarhögskolan i Stockholm.

Rotberg, I. C. (2001). *Phi Delta Kappan,* October, vol. 83, 2, 170-171.

Sharp, T. (2002). Substance, May, 22- 23. (Et referat af et foredrag holdt af Alfie Kohn)

Sternberg, R. J. (2004). Good Intentions, Bad Results. A Dozen Reasons Why the No Child Left Behind Act Is Failing Our Schools. In EdWeek.org, Wednesday, October 27, Volume 24, Number 9, p. 42,56.

Traub, J. (2002). New York Times [Magazine], April 7.

Geir Botten
er førstelektor i matematikk ved Høgskolen i Sør-Trøndelag. Han har vært dekan ved avdeling for lærer- og tolkeutdanning og er for tiden programansvarlig for avdelingens mastergradsutdanninger, blant annet en master i grunnskolens matematikkfag som blir startet høsten 2005. Han leder også et nasjonalt kompetansehevingsprosjekt for lærerutdanning, innenfor grunnleggende lese-, skrive og matematikkopplæring.

Fra retting med rød penn til grønn tilbakemelding

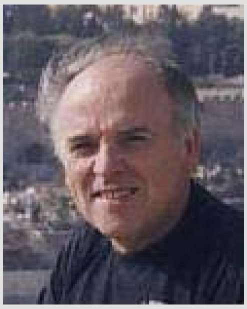
Noen tradisjonelle og fortsatt utbredte oppfatninger av hva matematikk er og hvordan matematikk læres, er blant annet:

- Nesten alle matematiske problemer kan løses direkte ved å anvende kjente fakta, regler, formler og prosedyrer
- Bare den matematikk som blir testet til eksamen, er viktig og verdt å kunne
- Alle matematikkoppgaver kan løses på noen få minutter
- Alle matematikkoppgaver har et entydig, riktig svar, og selv om en oppgave kan løses på mange måter, er det en metode som er mer riktig enn andre

Slike oppfatninger av, eller kanskje mer dekkende: myter om matematikk, blir forsterket av skolens tradisjonelle metoder for respons og vurdering. I dette foredraget vil jeg vise hvordan ulike måter å gi respons og vurdering av prosess og prestasjoner i faget, vil kunne ha avgjørende betydning både for hvordan elevene lærer og hva de lærer. Jeg vil også presentere ideer til annerledes vurderingsmåter der støtte til elevenes læreprosess er det viktigste, og der sluttvurdering av svaret og rangering av elevene ikke er premissleverandør for evalueringen. I denne presentasjonen spiller metaforen ”Å rette med grønt” og bruk av ”godbitark” en sentral rolle.

Per Sigurd Hundeland
er ansatt som stipendiat i matematikkdidaktikk ved Høgskolen i Agder. Han har tidligere undervist flere år i videregående skole og ved lærerutdanningen. Han har sammen med kolleger utgitt læreverk i matematikkdidatikk og skrevet artikler for Tangenten. Hans interessefelt er undervisning på alle trinn i utdanningssystemet.

Barbro Grevholm
er professor i matematikdidaktik vid Høgskolen i Agder och arbetar med utvecklingen av ett forskarutbildningsprogram der. Før nærvarande ingår tretton doktorgradsstudenter i programmet, varav flera från andra lænder enn Norge. Barbro handleder doktorander på HiA och i Sverige samt undervisar i doktorandkurser. Hon er even ledare før den Nordiska Forskarskolan i Matematikdidaktik. Hon har nyligen gett ut boken Matematikk for skolen på Fagboksforlaget.



Trygve Breiteig
er lærerutdannet med hovedfag i matematikk, og er tilsatt som dosent ved Høgskolen i Agder. Han arbeider med matematikk, matematikkdidaktikk og lærerutdanning. Han har veiledet til hovedfag og også ved forskeropplæring: fram til doktorgrad i mathematics education i et samarbeidsprosjekt i sørlige Afrika. Ellers er han opptatt av tilrettelegging av matematiske emner, som geometri og tallteori i lærerstudium, av mening, sammenheng og forståelse i matematikklæringen. Han har utviklet lærebøker for grunnskolens ungdomstrinn og for lærerutdanning.
Hjemmeside: http://home.hia.no/~trygvebr/

Læreres oppfatninger om matematikkundervisning

Innledning

I denne artikkelen redegjør vi for en delstudie som inngår i et flerårig forskningsprosjekt ved Høgskolen i Agder, Learning Communities in Mathematics, LCM. Hensikten med prosjektet er å bygge opp et læringsfelleskap blant matematikklærere i utvalgte skoler og matematikkdidaktikere ved høgskolen. Gjennom de skapende læringsfellesskapene vil vi utvikle matematikkundervisning og på sikt kunne tilby elever bedre muligheter for å lære seg matematikk. Hva dette skal innebære konkret må vokse fram som et resultat av de prosessene som skapes. For å kunne forstå hva som hender under prosjektet ønsker vi å danne oss et bilde av hvordan tilstanden er når vi starter. En måte for oss å få et slikt bilde er å intervjue noen lærere om hvordan de ser på matematikkproblem som vi anvender i en test for elever. I det datamaterialet som vi presenterer her, forsøker vi å tolke hva som er lærernes oppfatninger og syn på skolematematikken. Siden det ikke er mulig å direkte å observere lærernes oppfatninger må vi stole på hva de sier og gir uttrykk for.

Tidligere forskning om læreres oppfatning i matematikk

I sin forskning om læreres oppfatninger peker Alba Thompson på at det ikke fins noen universelt syn på hva det er som utgjør god matematikkundervisning (Thompson, 1992). Hun hevder også at forskere allerede på 1970-tallet konstaterte at all pedagogikk knyttet til matematikk, om enn usammenhengende, hviler på matematisk filosofi. Således kan spørsmål om god matematikkundervisning ikke løses uten å ta med viktige spørsmål knyttet til matematikkens natur. Thompsons gjennomgang av forskningen viser at den er omfattende, men hun påpeker at det ikke er tydelig hva denne forskningen har kunne bidratt med i matematikkutdanningen (s.141). Thompson har (1991) foreslått et teoretisk rammeverk for å studere hvordan lærere endrer sine oppfatninger om matematikkundervisning. Hun har i sin studie observert tre nivåer for lærernes utvikling. Hvert nivå kjennetegnes av oppfatninger om

- Hva matematikk egentlig er,
- Hva det innebærer å lære seg matematikk,
- Hva man underviser når man lærer bort matematikk,
- Hvilke roller lærere og elever bør ha,
- Hva som utgjør kriteriet for elevenes kunnskap og kriteriene for bedømmelse av riktighet når det gjelder matematiske resultat.
  (Thompson, 1991)

Pehkonen har bearbeidet Thompsons beskrivelse og utarbeidet en tabell over nivåene som gir en bedre oversikt (Pehkonen, 2003, side 170-171):

	Hva er matematikk?	Hva innebærer innlæring av og undervisning i matematikk?	Hva er elevens og lærernes roller?	Hva er kriteriene for å vurdere riktige svar?	Hva går problemløsning ut på?
NIVÅ 0	Bruk av aritmetiske ferdigheter i hverdagslige situasjoner. Matematisk kunnskap innebærer mekaniske og prosedyremessige ferdigheter.	Memorering av fakta, regler, formler og prosedyrer. Undervisnings-sekvenser som angår temaer og ferdigheter som spesifiseres i en lærebok.	Læreren er den som beskriver veletablerte tilnærmingsmåter Elevene imiterer dette.	Læreren er autoritet ved vurdering av riktighet. Korrekte svar er målet for undervisningen.	Å komme fram til svar på "historie-problemer". Å hjelpe elevene til å bruke de riktige prosedyrene ("tommel-fingerregler")
NIVÅ 1	Regler styrer alt matematisk arbeid. Vurdering og forståelse av de begrepene og prinsippene som ligger til grunn for reglene.	En stadig større bevissthet om hvordan man bruker de representasjonene undervisningen inneholder. Bruk av manipulative grep i undervisningen	Støtte for synet om at "matte er gøy" Stort sett det samme som nivå 0 Læreren retter oppmerksomheten mot "logikken bak reglene" Elevene får en viss forståelse.	Autoriteten når det gjelder om et bestemt svar er riktig eller ikke, ligger fremdeles hos eksperten.	Oppfattes som en spesiell ingrediens i fagplanen. Læres bort "for seg" Problemene har ingen forbindelse med de matematiske temaene som studeres.

	Hva er matematikk?	Hva innebærer innlæring av og undervisning i matematikk?	Hva er elevens og lærernes roller?	Hva er kriteriene for å vurdere riktige svar?	Hva går problemløsning ut på?
N I V Å 2	Forståelse av matematikk som et kompleks system av flere begreper, prosedyrer og representasjoner med relasjoner seg imellom.	Undervisning for forståelse. Forståelse skapes ut fra et engasjement i den prosessen som bruken av matematikk innebærer.	Læreren styrer elevenes tenking på en matematisk produktiv måte. Læreren lytter til elevenes ideer. Elevene får gi uttrykk for ideene sine.	Å drive med og jobbe med matematikk er målet med undervisningen. Det er elevene selv som kontrollerer at svarene deres er riktige.	Problemløsning oppfattes som en undervisnings-metode. Undervisning "via" problemløsning.

Denne modellen kan være et mulig redskap for å tolke det bilde lærerne i vårt studie gir av sine oppfatninger om matematikkundervisning. Spørsmålet er i hvilken grad lærerne i studien kommer til å endre sine oppfatninger om matematikkundervisning og om det kan lede til en utvikling av matematikkundervisningen.

Metode

Lærerne ble intervjuet i forkant av elevenes tester. Vi tok utgangspunkt i noen oppgaver i elevtesten. To didaktikere fra høgskolen samtalet i enerom med læreren. Den ene var mer aktivt, mens den andre først og fremst observerte. Innledningsvis stilte vi ikke spesifikke spørsmål, men bad læreren om kommentar til ulike oppgaver som elevene ville møte. Læreren fikk dermed spillerom til å ikke bare uttrykke synspunkter om de konkrete oppgavene, men også om matematikkundervisning generelt. Intervjuene ble transkribert og analysert. Transkriberingen ble gjennomført med det for øyet at lærerens budskap skulle framkomme tydelig, men ikke andre forhold som tonefall, avbrytelser eller omformuleringer. Ortografien er også tilpassset bokmål for å øke lesbarheten. Videre har vi vektlagt Steinar Kvales aspekter ved det kvalitative forskningsintervjuet. Blant de punktene vi spesielt vektla var følgende (s.39):

- *Formålet med det kvalitative forskningsintervjuet er å innhente beskrivelser av intervjupersonens livsverden, særlig med hensyn til tolkninger av meninger med fenomenene som ble beskrevet.*

- *Mening. Intervjuet har som formål å tolke meningen med sentrale temaer i intervjupersonens livsverden. Intervjueren registrerer og tolker meningen med det som blir sagt og måten det blir sagt på*

- *Bevisst naivitet. Intervjueren utviser åpenhet overfor nye og uventede fenomener og unngår ferdigoppsatte kategorier og tolkningsskjemaer.* (Kvale, 2001)

Enkelte eksempler ble utvalgt til en nærmere analyse. Da dette må betraktes som en pilotstudie av begrenset omfang ble noen episoder valgt ut for å begrense datamengden i denne omgang. Det ble ikke vektlagt spesielle faglige forhold ved denne utvelgelsen.

Intervju med lærer på 4.trinn

Under følger noen eksempler som viser hva slags innfallsvinkel læreren på 4. trinn har til elevenes læring og undervisning generelt. I løpet av intervjuet var det spesielt tre momenter som var framtredende i lærerens tilbakemeldinger: Elevenes bruk av ulike strategier, tilpassingsaspektet og variasjonen i metodikken.

Strategier
Følgende oppgave gir et fint utgangspunkt for samtale om strategi:

7 Fyll inn tallet som mangler.

a 27 + 12 = ☐	**b** 35 - 3 = ☐
c 15 + 17 = ☐	**d** 46 – 18 = ☐
e 73 + ☐ = 99	**f** 43 - ☐ = 27

Læreren kommenterer oppgave 7d [46-18 =] slik:

Lærer: *De har jobbet tidligere med å telle seg opp og ned av tallrekker, og drive med låning på tierplass og flytte rent teknisk, men sånn i utgangspunket så tror jeg at på en eller annen strategi så vil de kunne løse det, de har litt ulike strategier å løse oppgaven, men på et eller annet vis ved hjelp av telling opp og ned på tallinje for eksempel, som de visuelt har i hodet, kanskje, så tror jeg det kunne gå.*

Videre kommenterer læreren oppgave 7e [73 + … = 99] og oppgave 7f [43 - … = 27]

Intervjuer: *På e-en, kommer de til å få den til?*

Lærer: *Ja der kommer de til å fylle opp til full tier, og fylle på oppover. Altså, de bruker tiervenn opp til åtti, og så legger til 90 og så de ni siste. Den strategien tror jeg mange vil bruke.*

Lærer: *[..] Noen vil begynne å telle på fingrene oppover mot 99.*

Intervjuer: *Er det samme på f, eller? [43 - …=27]*

Lærer: *Ja, telle nedover. Vi har jobbet litt sånn for å se forskjellige løsninger, og kanskje instruere en hovedløsning, og vise andre strategier.*

Om løsning av følgende oppgave

24: *Ole er 4 år eldre enn Petter. De er til sammen 34 år gamle. Hvor gamle er de? Regn eller forklar her*:

Lærer: *De har jo vært ute for sånt både skriftlig og muntlig i det siste. Det er en problemstilling, en oppgave som de har prøvd seg på. Men det blir mange spørsmål da, når du får sånne oppgaver." Hva er dette for noe?" Men det som vi har prøvd å få til er […] at vi går inn i en dialog med dem og ikke gir dem svaret, men "hva er det de spør etter?" Prøve å finne kjernen i problemstillingen.*

Læreren antyder interesse for hvordan eleven tenker og bruk av ulike strategier. Han forteller blant annet at de i undervisningen introduserer en hovedløsning, samt viser andre strategier. Vi merker oss at bruk av den velkjente vertikale algoritmen ikke nevnes. Dialogen som læreren foreslår, er sannsynligvis med på å hjelpe eleven til å tenke matematisk, derfor kan vi si at dette både er en strategi for eleven, samtidig som vi kan si at det er en type metodikk sett fra lærerens synsvinkel. Vi får en ide om at denne læreren arbeider både innenfor en konstruktivistisk og et sosiokulturelt perspektiv. Elevene skal selv, og gjennom samtale med andre forsøke å konstruere kunnskap og forståelse.

Variasjon
Elevene i denne gruppen møter lærebok for første gang dette skoleåret. De tre første årene har matematikktimene vært fylt med andre gjøremål. Mye tyder på læreren fortsatt vektlegger å bruke ulike aktiviteter slik at læreboken ikke blir en dominerende faktor i undervisningen. Følgende klipp fra dialoger antyder dette:

Lærer: *Vi har jobbet med abacus og brukt det, og jobbet mye med klosser og brikker og tellestreker, og brukt mye klosser i de tre første årene for å bygge opp det med tiervenner og illustrert det med å jobbe på datamaskin og med klosser.*

Lærer: […] *og så har vi jobbet med dataspill, som da visuelt viser mengder, og rekker og sånn*

Læreren forteller videre om han noen ganger får elevene muntlige problemoppgaver, og man prøver å sammen diskutere og søke om løsninger i en dialog:

Lærer: *Mor til Petter har bursdag. I fjor var hun i femgangen, i år er hun i firegangen. Hvor gammel er mor til Petter?*

[…] De fleste måtte streve mye med slike oppgaver, og da hadde vi jobbet mye med for eksempel treerrekker, firerrekker, femmerrekker. Så du kan si at siden hun var mor så kunne ikke 12 være et svar, og 13 og sannsynligvis ikke 16, det måtte være et sted mellom 25 og 40. […] Det jeg syntes er gøy med elever som mestrer dette bra er, hvis man ikke bare går inn og gir dem svaret så er dette veldig spennende.

I et forskningsperspektiv vil det være interessant å studere en undervisningssekvens over tid slik at vi kan foreta en nærmere analyse av om undervisningen til daglig er så variert som det her antydes. Det vil også være av stor interesse å vite mer om hvordan læreren begrunner denne variasjonen i undervisningen. Det kan skyldes lærerens kjennskap til elevenes begrensinger med hensyn til konsentrasjon og deres adferdsmønster eller læreren kan begrunne variasjonen ved hans didaktisk og pedagogiske kompetanse. På den annen side kan den tilsynelatende variasjonen også være av tilfeldig art og ikke være faglig begrunnet.

Undervisning tilpasset den enkelte elev
Læreren gikk gjennom testen sammen med oss på forhånd og pekte på en rekke muligheter for tilpassing i forbindelse med gjennomføring. Han mente det var helt nødvendig med en rekke justeringer. Dette gikk spesielt på lengden av testen sett i relasjon til elevenes konsentrasjonsevne. Følgene "glimt" fra intervjuet illustrerer at læreren er opptatt av tilpassing i sin undervisning:

Lærer: *Men om denne prøven skal tas i ett, så vil en god del av disse 49 ikke komme [gjennom] i det hele tatt. […] Hvis jeg hadde laget denne prøven og gitt den til elevene, så hadde jeg organisert det slik at de hadde fått en økt med denne, og alternative oppgaver en stund, og komme tilbake igjen, at målet var at de fra halv ni til de skal gå hjem så skal den være gjort ferdig.*

Oppgaven under ser umiddelbart ut til å være konsis og enkel å forstå. Læreren påpeker imidlertid at oppgaven kan skape problemer for de med svakere leseferdigheter.

4	Hvilket siffer står på tierplassen i 132?
	(Sett ring rundt svaret)
	1 3 2

Lærer: *[…] det som jeg ser kan være et problem med slike oppgaver, er leseferdighetene til barna som kan stilles på prøve, mer enn matematikkunnskapene. […] For enkeltelever vil oppgave 4 være litt kinkig, det er et lengre ord der, som krever leseferdighet som kanskje noen ikke innehar. Men matematikkferdigheten kan jo være på topp.*

Læreren antyder her en helhetskjennskap til elevene. Det antydes at elevenes kompetanse i matematikk ikke uten videre kan fristilles fra deres leseferdighet. Det kan være av interesse å vite mer om hvordan denne læreren tar hensyn til dette forholdet i sin undervisning. Er det slik at matematikklæringen på dette nivået i størst grad foregår på det muntlig-verbale og konkrete nivået? Når og i hvilken form "verbaliseres" undervisningen? Læreren skiller også mellom elevens evner til å arbeide på konkret og abstrakt nivå

Lærer: *På subtraksjon kan det være at noen må ha hjelpemidler, ved hjelp av noen brikker.*

Lærer: *Men de som ikke har mulighet til å jobbe abstrakt med det eller har prøvd det konkret vil jo slite litt da.*

Læreren antyder implisitt at det i klassen arbeides på ulike måter med ulike problemer. I hvilket omfang dette foregår kan vi ikke vite ut i fra disse utsagnene. Elever har muligens konkretiseringsmidler tilgjengelige som naturlige hjelpemidler når man ikke klarer å løse oppgavene kun med den indre tankegangen.

Diskusjon
Gjennom disse utdragene fra intervjuet læreren på 4. trinn har vi fått vite mye om hvordan denne læreren tenker. Vi har et førsteinntrykk av en lærer som er opptatt av at elevene forstår, at de blir i stand til å utvikle strategier, at det er sammenheng mellom språk og matematikk. Læreren har gitt inntrykk av å ha et godt kjennskap til elevenes arbeidskapasitet og evne til å arbeide abstrakt. Igjen må vi påpeke at dette er kun inntrykk, og en nærmere studie vil bekrefte eller avkrefte disse inntrykkene. Vi vil da også få et nærmere inntrykk av hvor bevisst læreren er overfor de nevnte forhold.

Intervju med lærer på videregående trinn
Denne læreren gir uttrykk for et noe annet syn på matematikkundervisning enn læreren på 4. trinn. Videre følger eksempler fra intervjuet med ham.

Forståelse
Læreren blir tidlig bedt om å ta stilling til følgende tre oppgaver:

12 a Sett ring rundt det tallet som ligger nærmest i størrelse til 0,16

0,1 0,2 15 0,21 10

b Sett ring rundt det tallet som ligger nærmest i størrelse til 2,08

209 2,9 2,05 2,1 20,9

13 Skriv riktig tall i rutene

$5{,}074 = 5 \cdot 1 + 7 \cdot \boxed{} + 4 \cdot \boxed{}$

14 Skriv som desimaltall

a $\frac{3}{10}$ .... **b** $\frac{46}{100}$ ....

c 45 tusendeler .... **d** 28 tideler ....

Læreren sier blant annet:

Slik som vi har hatt det til nå så har vi ikke trent så mye på slike oppgaver. Så jeg tror kanskje at de som har litt teft av matematikk vil si at dette er lett, men hvis man ikke definerer seg i den gruppen så vil de slite.

Læreren legger videre til:
Jeg har lite erfaringer med denne typen oppgaver…[…] Våre elever har ikke blitt prøvd akkurat så mye i dette… flinke elever vil jo ikke ha noe problem med å svare på dette.

Fra vår side ble oppgavene tolket i retning av å teste grunnleggende begreper knyttet til tallforståelse. Læreren ser oppgavene mer i et trene og drille- perspektiv. Det er vanskelig å tolke hva disse uttalelsene er et uttrykk for, men foreløpig vil vi antyde at de muligens avspeiler den hverdagen som læreren befinner seg i sett i forhold til lærebok, pensum og eksamen. Umiddelbart gir uttalelsene oss grunn til å lure på om læreren skiller mellom forståelse og ferdigheter i sitt pensum? Og om øvelse og annen ferdighetstrening dominerer i videregående skole, og i tilfelle hvorfor? Læreren blir også spurt om han tror at elevene ville løst denne typen oppgaver bedre dersom de fikk trent en dag på liknende oppgaver. Dette svarer læreren bestemt ja på. Men her skilles det også mellom ferdighet og forståelse i lærerens resonnement:

[…] når det gjelder drill, har de lært seg noe fordi de kanskje har fått noen regler som de går etter […] så får de det jo til. Det er jo det som er det skumle hvis du kommer tilbake til den type spørsmål. Hvis de ikke har skjønt problemet, så svarer de kanskje like på viddene andre gang som de gjorde første gang…

Uttalelsen tyder på at læreren har et reflektert forhold til å forstå matematikk i motsetning til bare å kunne gjennomføre noen prosedyrer for å få rett svar. Læreren gir også tydelig uttrykk for det utilfredsstillende i at elevene kun skal kunne matematikk på et mekanisk nivå. Dette nyanserer noen av uttalelsene i starten av intervjuet hvor øvingsaspektet var mer framtredende. Læreren kommenterer videre drilling av matematikk, sett i forhold til de elevene som velger 1MY-retningen. Følgende sekvens kan være interessant å se på:

Lærer: *Det er jo der vi føler at vi sliter med disse folka på Y.*

Intervjuer: *At de lærer seg en god del av pensumet som drillkunnskap, eller?*

Lærer: *Det har vi bevisst også måtte gjøre med de. For å få dem igjennom. Ren eksamensdrill. Vi sier til dem at dere skal klare en toer, og da må dere klare litt på hver oppgave og da driller vi de for å kunne klare det. Og mange av dem går ut med veldig beskjeden matematikkunnskap, men vi klarer å få dem igjennom i 1MY, for å si det sånn.*

Her er vi sannsynligvis ved et av kjerneområdene mht. de utfordringene som lærerne står overfor i undervisning på videregående nivå, og kanskje på ungdomsstrinnet. Læreren har et svært spesifikt pensum som "de skal igjennom". Dette pensumet er godt definert gjennom læreboka. Læreren kan da føle seg bunden på hender og føtter. Da kan man komme opp i slike situasjoner hvor man tydeligvis ikke er tilfreds med måten ting må gjøres på, men at det heller ikke er andre måter å gjøre det på. Det hadde vært interessant å vite om lærerne ser noen vei ut av dette uføre? Videre er det interessant å vite litt mer om hva læreren legger i "beskjeden matematikkunnskap"? Ville elevene klart seg bedre om de ikke var heftet med karaktermål og en spesifikk eksamen?

Strategier
Vi presenterer læreren følgende oppgave om likningsbegrepet

19 **a** $x + y + z = x + p + z$ Dette

☐ er alltid sant ☐ er aldri sant ☐ *kan* være sant, nemlig når ……………

b $a + b \cdot 2 = 2b + a$ Dette

☐ er alltid sant ☐ er aldri sant ☐ *kan* være sant, nemlig når ……………

c $\dfrac{2x+1}{2x+1+5} = \dfrac{1}{6}$ Dette

☐ er alltid sant ☐ er aldri sant ☐ *kan* være sant, nemlig når ……………

Lærer: *Nå kjenner ikke jeg i detalj planene fra ungdomsskolen, men slik jeg vil vurdere det ut fra første klasse, så tror jeg få vil ha et forhold til slike typer oppgaver.*

Intervjuer: *Hva er problemet slik du ser det?*

Lærer: *Jeg tror de ikke vil ha en strategi for å begynne å løse på den? [...] Noen vil kanskje teste med noen verdier, som kanskje ikke vil være så dumt – for en litt flinkere elev, men jeg tror ikke de har noen trening i det hele tatt. Her tenker du litt likninger og identitet og sånn kanskje veldig få har et forhold til. [...]*

Lærer: *Jeg tror det vil være interessant å se resultatet av dette her. Jeg har liten erfaring med å uttale meg om den type problemer. Så det blir bare synsing fra min side.*

Deretter fulgte en samtale hvor intervjueren og læreren diskuterte innholdet i oppgaven. Det var enighet om at oppgaven testet i hvilken grad elevene hadde sikre begreper om likninger, ikke nødvendigvis prosedyrekunnskaper knyttet til løsning av slike oppgaver. Intervjueren spør derfor om lærerens synspunkter på å vektlegge denne type forståelse:

Intervjuer: *Syntes du dette er et viktig spørsmål å tenke på?*

Lærer: *Igjen litt avhengig av hvem du henvender deg til. For Y [1MY-elevene] vil det være helt uinteressant, ikke sant. Vi skal bare få dem igjennom […].*

Det kan være lett å trekke forhastede slutninger om denne lærerens oppfatninger om faget og undervisningen. Umiddelbart kan det være fristende å tro at hans undervisning preges av at

- matematikken sees på som et ferdig produkt som skal læres, et ferdig sett av algoritmer og faktakunnskaper.
- man lærer ved øvelse, og målet er å lære ulike ferdigheter.
- det er noen som ikke kan lære matematikk på så høyt nivå, og de må prøve å automatisere tilstrekkelige prosedyrer slik at de kan bestå en sluttest.

Oppgaven oppfattes ikke som en ”vanlig” oppgave i den forstand at elevene har møtt den i læreboka eller på annen måte i forbindelse med undervisning i 1MX/1MY. Læreren ser for seg at en del elever ikke vil ha noen strategier for å løse oppgaven. Man kan da spørre seg om det meste av pensum i 1MX/1MY er knyttet opp til å lære bestemte strategier som igjen kan brukes til å løse veldefinerte problemer. Læreren nevner også mangel på trening som en begrensende faktor for å kunne løse denne oppgaven. Dette kan skyldes kursets natur, at 1MX/1MY handler om å trene inn spesifiserte ferdigheter.

Tidsaspektet
Læreren bekrefter at 1MX/1MY kurset er sprengt på tid, at det er vanskelig å komme igjennom alle de fragmenterte delene av pensum. Før var det i større grad mulig å gå i dybden. Og målet for de svakeste i forhold til disse rammene klargjøres ytterliggere. De skal reddes igjennom på en eller annen måte. I intervjuet utdyper læreren tidsproblemet og forteller at i år går matematikken over fem timer som er fordelt over tre dager med 2 timer + 2 timer + 1 time. Begrensinger knyttet til tidsressursen framheves som en av de mest sentrale utfordringene flere ganger i intervjuet:

> *Man må nesten gi et nytt avsnitt til hver av de dagene. Hvis man er uheldig som i fjor, da jeg hadde en mandagstime og den ene dobbeltimen var helt på slutten av fredagen, så kan du tenke deg.*
>
> *Du underviser nok annerledes når du har et tight skjema, og jeg vil jo si at det er en veldig fordel at du har undervist gjennom pensumet noen ganger, når du har et tight skjema, og du vet hvilke ting som funker og hvilke ting som ikke funker, og du vet hvor elevene gjør mest feil og du setter inn støtet på akkurat de tingene der.*
>
> *Det er jo det jeg gjerne sier til kandidater som er her, ”det der er viktig å jobbe med, men det kan du ta litt lettere på”.*
>
> *Det er ikke sikkert at noe er mer viktig enn annet, men det er bare ut i fra erfaringer at det er ting de gjør feil. Så skal det være mest mulig effektivt å få dem igjennom.*

Læreren besitter rutine i forhold til dette kurset. Videre virker det som han har god oversikt over de ferdighetsmålene som elevene skal gjennom. Denne oversikten kan læreren bruke for å gjøre undervisningsøktene så effektive som mulig. Slik læreren beskriver sin rolle, kan det også se ut som at opplæringen i stor grad er lærerstyrt. Det handler i stor grad om å forklare pensumets ulike deler på beste måte, og å prioritere de delene av pensum som erfaringsmessig er tyngst for elevene. Uttalelsen

> *"Så skal det være mest mulig effektivt å få dem igjennom* "

tyder på at pensumet oppfattes som ganske veldefinert. Det store spørsmålet er hva som menes med

> "*få dem igjennom*"

Man må stille spørsmålet om hva det er læreren ønsker å få dem igjennom? Er man gjennom likninger dersom ulike typer likninger er presentert og man har hatt anledning til å øve på dem, eller er man igjennom emnet når man har nådd en viss erkjennelse av likningsbegrepet? I og med at uttalelsen kommer i denne konteksten fra en lærer midt oppi kurset, er det lett å tolke at vedkommende mener den første forklaringen. Dersom det skal være mulig å måle om man "har kommet igjennom" et pensum, så må det være svært veldefinert. Kurset må for eksempel være knyttet til kompetanse i svært avgrensede ferdigheter og faktakunnskaper som er målbare. Mye tyder på at dette er situasjonen i gjennomføring av 1MX og 1MY kurs i dag. Om det er riktig å betrakte kurset på den måten er en annen sak. Dersom vi ser på læreplanen for kurset møter vi mange formuleringer som understreker faget som noe målbart, men kurset inneholder også generelle mål som ikke like lett kan måles.

Diskusjon
I dette intervjuet har vi fått et inntrykk av hvordan en lærer vurderer formidling av matematikk i kurset 1 MX og 1MY. Vi sitter igjen med følgende inntrykk som det vil være av interesse å se nærmere på:

- Kurset 1MX/MY oppleves som fragmentert i små ferdighetsmål som elevene skal nå.
- Kurset er innholdsrikt, og inneholder en stor mengde fakta og ferdighetsmål.
- Målene formidles i stor grad av læreren (i motsetning til ved hjelp av mer elevaktive metoder).
- Kurset er vanskelig å tilpasse elever med matematikkvansker. Siden det er så mange obligatoriske ferdighetsmål, blir det vanskelig å tilrettelegge begrepsforståelsen for den enkelte.
- Læreren er opptatt av elevenes forståelse, men rammebetingelsene gir ikke læreren anledning til å legge opp undervisningen med en slik prioritering. Læreren blir tvunget til å bruke utilfredsstillende snarveier "for å få dem igjennom".

Vi vet ikke ut i fra dette intervjuet noe om lærerens undervisningspraksis er forankret i en bestemt filosofi om matematikklæring eller om han kun må tilpasse seg stramme rammer. Vi vet heller ikke om læreren er representativ i sine oppfatninger om undervisning. En rød tråd gjennom hele intervjuet er dårlige rammefaktorer. Det vil derfor være av stor interesse å avdekke hvilke begrensinger som lærerne ser i sin undervisningspraksis. Like interessant vil det være å få fram om lærere mener at en endring i rammevilkårene vil føre til at de endrer praksis, og i tilfelle på hvilken måte og hvorfor?

Konklusjon
Begge intervjuene har generert mange interessante problemstillinger for videre forskning. De har vist oss at lærere utgjør en ressurs for skolen og at de har en verdifull kompetanse som de sammen med didaktikere og pedagoger kan bruke til å videreutvikle undervisningspraksisen.

Hvor befinner de to intervjuede lærerne seg i Thompsons modell for oppfatninger? Muligens kan man si at læreren i videregående skole er nærmere nivå null og at læreren på barnetrinnet representerer nivå tre. Imidlertid har vi ikke data fra alle fem områdene Thompson nevner og vi må gjøre dypere analyser for å se om konklusjonene virkelig holder. Dette kommer til å skje i det fortsatte arbeidet i studien. Pehkonen påpeker at om man ønsker å forandre oppfatninger må man være beredt på at dette vil ta lang tid (2003, s.167-168). Videre påpekes det at for å få i stand en framgangsrik og positiv endring, må følgende vilkår være oppfylt:

- *Lærerne bør støte på en utfordring eller en inkonsekvens i sin egen tenking og handling.*
- *De må føle et ansvar for å gjøre noe med denne forstyrrelsen eller motsigelsen.*
- *De må ha et bilde eller en visjon av hvordan de vil ha det i klasserommet.*
- *Endelig må de utforme en plan for hvordan de skal realisere denne visjonen.* (Pehkonen, 2003)

For å kunne bidra til endring, er det derfor vesentlig for oss i studien å kunne følge de samme lærerne i flere år og få innblikk i deres måte å tenke på. Den påvirkningen som de utsettes for er vår felles opplevelser i læringsfellesskapet, ideutbyttet med kolleger og matematikkdidaktikere og egne erfaringer og elevenes reaksjoner på deres undervisning.

Referanser

Kvale, S. (2001). *Det kvalitative forskningsintervjuet*. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag.

Pehkonen, E. (2003). Lærere og elevers oppfatninger som en skjult faktor i matematikkundervisningen. In B.Grevholm (red), *Matematikk for skolen* (pp. 154-181). Bergen: Fagbokforlaget.

Thompson, A. G. (1991). The development of teachers' conceptions of mathematics teaching. In R.G.Underhill (red), *Proceedings of PME-NA 13* (pp. 8-14). Blacksburg (VA): Virginia Tech.

Thompson, A. G. (1992). Teacher's beliefs and conceptions: a synthesis of research. In D.A.Grouws (red), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York: NCTM.

Lars Burman
är lektor i matematikens och datateknikens didaktik vid Institutionen för lärarutbildning, Åbo Akademi i Vasa. Han arbetar med utbildning av ämnes- och klasslärare, medverkar i läromedelsprojekt och forskar kring utvärdering inom matematikundervisningen.

Minitest – ett sätt att utvärdera elever och fördjupa deras inlärning

Vad är ett minitest?

Ett minitest är ett litet prov som innehåller två eller tre uppgifter, som i sin tur ibland kan bestå av deluppgifter, och det tar 20 eller 30 minuter av en lektion. Inom en kurs med totalt drygt 30 timmar har jag oftast använt tre eller fyra minitest med sammanlagt åtta uppgifter. Uppgifterna i ett minitest kan vara en eller ev. två basuppgifter och en litet mer krävande uppgift. Den senare kan innehålla speciell problemlösning eller en metodbeskrivning. Minitestet ger eleverna övning och visar vad som är viktigt i en kurs.

Följande tre exempel utgör inte exempel på basuppgifter utan visar uppgifter som kräver problemlösning i någon form.

Exempel 1 Medelvärdet av sju olika stora positiva hela tal är 23 och medianen är 20. Hur stort kan det största av de sju talen högst vara?

Uppgiften förutsätter att eleverna behärskar de statistiska grundbegreppen. Den är inte rutinmässig till sin karaktär utan den kräver en form av problemlösning.

Exempel 2 Talen m och n väljs på måfå ur mängden $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Bestäm sannolikheten att ekvationen $x^2 + mx + n^2 = 0$ har åtminstone en reell lösning.

Denna uppgift verkar vid första anblicken vara så jobbig att eleverna kan tycka att tiden inte kommer att räcka till fastän den kanske är den enda uppgiften i minitestet. Vid närmare försök med systematisk prövning som lösningsmetod visar det sig att man med uteslutningsmetoden kan begränsa antalet möjliga lösningar så att rätt få möjligheter behöver kontrolleras. Uppgiften kan också med fördel användas så att eleverna skall jobba med den i grupper och då förväntas de fördela prövningen så att alla gör var sin del.

Exempel 3 Ett lag i ”Fångarna på fortet” måste för att befria en lagmedlem fördela tio vita kulor och tio svarta kulor i två askar. Sedan väljer fångvaktaren på måfå ut en av askarna och drar en kula ur den asken. Om kulan är vit blir fången fri, annars inte. Hur skall laget fördela kulorna så att sannolikheten att befria lagmedlemmen blir så stor som möjligt?

I denna uppgift förefaller den största stötestenen vara elevernas benägenhet att anta att det finns lika många kulor i båda askarna. Om man inte låser sig till denna utgångspunkt visar det sig att man får en sannolikhet som ligger rätt nära 75 %.

Inom vilka ramar har tanken på minitest uppstått?

I gymnasiet i Finland kan eleven välja mellan lång kurs i matematik med minst tio kurser och kort kurs med minst sex kurser. Varje kurs består av drygt 30 lektioner, om man har lektioner som omfattar 45 minuter. Kurserna i kort matematik är inte de samma som vissa kurser i lång matematik fastän en stor del av innehållet i kort matematik också ingår i den långa matematiken. Trots att man ännu kan välja några tilläggskurser är den tid som matematiken får i gymnasiet jämförelsevis liten. I stället är det typiskt för Finland att alla som går i gymnasiet läser många språk: de två inhemska språken och oftast minst två främmande språk.

Eleverna kan få två slutvitsord i matematik från gymnasiet. Läraren (lärarna) ger ett vitsord som är baserat på vitsorden i de matematikkurser som eleverna har avlagt, skalan är 5 – 10. Studentexamensnämnden ger ett vitsord som är baserat på deras centrala prov i lång eller kort matematik, skalan är approbatur – laudatur eller A – L. Studentexamensprovet innehåller 15 uppgifter, varav skribenterna skall välja 10, och alla uppgifter ger 6 p. Provet skall skrivas inom 6 timmar vid ett bestämt provtillfälle, som erbjuds två gånger i året.

Studentexamen (SE) i Finland har inte genomgått så stora förändringar genom åren och det gör att Finland har ett mycket stabilt utvärderingssystem. De två vitsorden kompletterar varandra så att skolans vitsord fångar upp framgången i det kontinuerliga arbetet inom kurserna, medan vitsordet i studentexamen visar den nivå eleven har nått upp till. Eftersom vitsord i SE kan ha stor betydelse för om man blir antagen till universitet, är det givet att eleverna vill prestera goda resultat i SE. Studentexamen fungerar alltså som en stark styrfaktor och påverkar undervisningen i gymnasiet och inte minst hur de enskilda kurserna utvärderas, se Burman (2000).

Det föreligger alltså en fara att de uppgifter som förekommer i kursproven är relativt likartade och att de tenderar att likna den typ av uppgifter som förekommer i SE, se Palm & Burman (2004). Det betyder att verklighetsnära tillämpningar, en del typer av problemlösning samt projektarbete och samarbete inom matematiken inte utvärderas. Denna effekt förstärks när kurserna innehåller så mycket stoff att lärarna har en ständig känsla av tidsbrist och därför inte upplever sig ha tid för sådant som inte utvärderas i SE.

Lärarutbildning och projekt i Vasa

Utbildningen av svenskspråkiga matematiklärare i Finland handhas av Pedagogiska fakulteten vid Åbo Akademi i Vasa. Den största delen av övningsundervisningen sker vid Vasa övningsskola. I anslutning till min uppgift som lektor i matematikens didaktik inom Lärarutbildningsinstitutionen och handledare vid undervisningsövningarna på Vasa övningsskola har jag sedan några år tillbaka engagerat mig i ett utvecklings- och forskningsprojekt i samarbete mellan Lärarutbildningsinstitutionen och Vasa övningsskola. Projektet har fått namnet Effektiv MatematikUndervisning eller EMU och det har senare gått upp i det större projektet Kvalitet I MatematikUndervisningen eller KIMU.

Inom ramen för detta projekt har jag alltså haft förmånen att agera i olika roller: lärare, lärarutbildare, utvecklare/forskare samt läromedelsproducent. Jag har då bl. a. undersökt hur man kan effektivera undervisningen. Det är främst fyra vägar som jag har försökt gå:

1. Analysera stoffet och de grundläggande metoder som kurserna innehåller.
2. Utöka elevernas engagemang och det ansvar de tar för sin egen inlärning.
3. Utveckla arbetsmetoderna, främst med problemlösning och projektarbete.
4. Göra elevutvärderingen mera mångsidig.

Det kanske mest lovande och intressanta i detta arbete kan sägas vara en kombination av de två sistnämnda vägarna. Man kan beskriva denna kombination som en utvecklad arbetsmetod med en starkare betoning på olika former av problemlösning och framför allt en mera mångsidig utvärdering. Det bästa uttrycket för arbetsmetoden är – minitest. Det är klart att mycket av utformningen av minitest förklaras av de ramar inom vilka minitesten uppstått.

Eftersom minitesten har visat sig vara livskraftiga och ha god spridning i Svenskfinland är det dock min förhoppning att de kan modifieras och anpassas också till andra miljöer.

Minitestens roll i utvärderingen

En möjlig sammanvägning av resultat i minitesten och kursprovet ser ut så här:

Minitest	4	4	3	2	1	1	15 p
Kursprov	6	5	4	1	1	0	17 p
Resultat	6	5	4	2	1	1	19 p

Här ordnas poängtalen i minitestet och kursprovet från högsta till lägsta. Resultatets poäng fås så att man i varje par tar med det högre poängtalet, vilket gör att minitesten ev. kommer att i någon mån kunna höja kursprovets poängtal, här från 17 p till 19 p. Naturligtvis kan man också på ett mera traditionellt sätt väga samman minitest och kursprov så att de får t. ex. vikterna 1 och 2. Denna effekt på slutresultatet kan kallas minitestens ”direkta effekt”.

För en hel del elever betyder poängen i minitesten att man är säker på att bli godkänd i kursen redan innan man går upp till kursprovet, vilket kan ha en positiv effekt på prestationerna i kursprovet. Det har också visat sig att 3-4 minitest under kursens gång gör att eleverna följer med i kursen på ett bättre sätt. Det betyder i sin tur mindre stress sista kvällen före kursprovet (och kanske en hel natts sömn) och därmed ett bättre resultat i kursprovet. Denna effekt på slutresultatet kan kallas ”den indirekta effekten”. På basis av de försök som jag har gjort i Vasa finns det anledning att tro att den indirekta effekten är större än den direkta effekten!

Minitest kan också förbättra elevernas förståelse för begrepp och metoder inom matematiken och därigenom fördjupa deras inlärning. Förutom traditionella uppgifter kan eleverna i ett minitest få uppgifter där de skall beskriva lösningsmetoder och öva problemlösningsmetoder, t. ex. systematisk prövning som i exempel 2 ovan. Eleverna kan också ges i uppgift att utreda olika saker, t. ex. om det är möjligt att åstadkomma 0, 1, 2, 3, 4, 5 eller 6 skärningspunkter med hjälp av 1, 2, 3, 4, 5 och 6 räta linjer. De två senast nämnda exemplen är också lämpliga att utföras i grupp vilket ännu bäddar för kommunikation om matematik mellan eleverna.

En av de grundläggande provkategorierna är formativa prov och minitest kan också ha samma funktion som formativa prov och förse lärare och elever med information. Det är främst basuppgifterna i ett minitest som kan ge eleven information om hur väl uppgifter som är baserade på stoff från de senaste avsnitten kan klaras av. Läraren kan på samma gång få en uppfattning om hur undervisningen den senaste tiden har lyckats och om det finns utbredda svårigheter hos eleverna som ev. förhindrar en direkt fortsättning framåt i kursen.

Förutom att ge både lärare och elever nyttig information borde utvärderingen göras för eleverna och inte bara med dem och därför bli en integrerad del av klassrumsaktiviteten och inte ett avbrott i den. Här lånar jag ”slagord” från Principles and Standards som NCTM i USA gav ut år 2000. En grundtanke inom KIMU-projektet har också hela tiden varit att göra utvärderingen mera mångsidig. Det är ju sannolikt att man får en riktigare bild av vad eleverna behärskar, om man samlar information vid flera tillfällen och på flera olika sätt.

Att göra utvärderingen för eleverna understöder också tanken om självutvärdering, dvs. att eleverna själva utnyttjar resultaten i testen under kursens gång och vid behov förbättrar kunskaperna och färdigheterna på de områden som inte gett så gott resultat. Detta går hand i hand med en allmän strävan att eleverna under sin gymnasietid i allt högre grad skall ta ansvar för sin egen inlärning, vilket i Finland är inskrivet som ett övergripande mål för gymnasiet.

Minitest ger onekligen eleverna större lust (eller tvingar dem?) att jobba med matematiken under kursens gång, de satsar kanske litet mera tid och förbereder sig noggrannare än för vanliga lektioner. Detta är mycket viktigt när matematiken inte direkt lämpar sig för stormläsning sista kvällen före ett kursprov. Bättre jobb under kursens gång underlättar också inlärningen under senare delar av kursen, i synnerhet när det nya avsnittet bygger på tidigare avsnitt. Denna minitestens psykologiska roll kan väl jämföras med tankar som inom matematikdidaktiken går under namnet ”didaktiskt kontrakt”.

Elevresponser och avslutande kommentarer

Eleverna respons på minitesten är mycket positiv. Visst kan någon elev känna sig pressad av ”många prov” men de flesta uppskattar, åtminstone efteråt, att de tvingats följa bättre med i kursen och fått goda tillfällen att öva sig inför kursprovet. Ett minitest som lyckats bra ger bättre självförtroende och har det inte lyckats så bra vet man litet mera om vad man inte kan och alltså borde titta mera på inför kursprovet. Många elever uppskattar möjligheten att med minitest höja sina poäng och att få känna att man har poäng med sig i bagaget när man går till kursprovet. Det finns t.o.m. elever som inser att metodbeskrivningar och problemlösning ger en bättre förståelse för ämnet och kanske kan hjälpa dem att klara uppgifter som inte hör till basuppgifterna i den kommande Studentexamen.

Från lärarens synpunkt är det eftersträvansvärt att skaffa sig mera information om eleverna och att bredda underlaget för vitsordsgivningen. Minitesten ger möjlighet till detta och dessutom kan speciellt inslaget av problemlösning ha flera andra positiva effekter. I EMU-projektet ingår dessutom inom vissa kurser utprövning av miniprojekt, vilket ytterligare kompletterar de former av utvärdering som används. Sammantaget finns det alltså fog för att använda begreppet mångsidig utvärdering, dvs. att informationen för utvärdering av eleverna samlats in beträffande flera olika kompetenser och vid flera olika tillfällen.

Litteratur

Burman L. (2000). Förutsättningarna för matematikundervisningen i gymnasiet i Finland. Ingår i Jan Sjöberg & Sven-Erik Hansén (red), *Kasvatus tulevaisuuteen, Pedagogik för framtiden*, ss. 193 – 203. Rapporter från Pedagogiska fakulteten vid Åbo Akademi, Vasa, Nr 22 2000. (311 s.) ISBN 952-12-0753-1

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. ISBN 0-87353-480-8

Palm T. & Burman L. (2004). Reality in mathematics assessment. I *Nordisk matematikdidaktik, 9 (3)*, 1 – 33. ISSN 1104-2176

Pernille Pind
Uddannet cand. scient. i matematik og fysik. Arbejder ved Jysk Center for Videregående Uddannelse, afdelingen for Uddannelse og Udvikling. Arbejder med efteruddannelse og udviklingsprojekter, primært for Undervisningsministeriet og Århus Kommune. Min særlige interesse er matematikvanskeligheder. Siden 2001 formand for opgavekommissionen for Forberedende voksenundervisning i matematik.

Prøver i hverdagsmatematik

Etablering af FVU matematik

I 2000 startede en uddannelse af undervisere til en ny matematikuddannelse: Forberedende voksenundervisning (FVU) i matematik. Denne uddannelse af underviserne var en pilotuddannelse, og samtidig skulle piloterne være med til at udforme uddannelsen. Det var to forskere og en konsulent fra undervisningsministeriet, der stod for uddannelsen af piloterne, det var også disse tre, der havde ansvaret for beskrivelsen af FVU uddannelsen.

Parallelt med uddannelsen af piloterne foregik altså beskrivelsen af uddannelsen FVU-matematik. Med en lidt senere start, men dog stadig samme år, gik udviklingen af de afsluttende prøver til FVU matematik i gang. Til udvikling af disse prøver blev etableret en gruppe. Denne gruppe bestod af:

- Konsulenten fra undervisningsministeriet
- 4 Piloter fra pilotuddannelsen
- 1 potentiel FVU-matematikunderviser, som ikke var med i Pilotudddanelsen
- 1 PhD studerende
- og jeg selv, som projektleder

Pointen med ovenstående er at vise, at der i udviklingen af FVU-matematik var stort samarbejde mellem forskere, ministerium og undervisere. Og en stor sammenhæng mellem udviklingen af: bekendtgørelsen, læreruddannelsen til FVU-matematik og prøverne til FVU matematik

Det er helt sikkert at dette tætte samarbejde og tætte sammenhæng har givet alle involverede parter et stort ejerforhold til FVU-matematikuddannelsen og til prøverne.
Undervisningens formål og mål
De centrale linier fra formålsbeskrivelsen af FVU-matematik er:

”Formålet med undervisningen i talforståelse, regning og basale matematiske begreber (FVU-matematik) er at sikre deltagerne mulighed for at afklare, forbedre og supplere deres funktionelle regne- og matematikfærdigheder. Undervisningen skal give deltagerne øgede muligheder for at kunne overskue, behandle og producere matematikholdige informationer og materialer.

”På både trin 1 og trin 2 gælder at ”**Undervisningens mål** er, at deltagerne udvikler de funktionelle matematikfærdigheder og -forståelser, alle voksne i samfundet principielt har brug for at have (numeralitet).”

Det centrale begreb i forståelsen af FVU-matematik er numeralitet. Det næst-vigtigste i forståelsen af FVU-matematik er begrebet hverdagsmatematik. Faktisk var det et ikke opfyldt ønske fra både forskerne og piloterne at uddannelsen skulle have heddet FVU-hverdagsmatematik.

Hvor den overordnede formålsbeskrivelse af FVU-matematik stort set kan samles i begrebet numeralitet og hverdagsmatematik, er målbeskrivelsen for de to trin meget mere deltaljeret:

Trin 1

"Undervisningens mål er, at deltagerne kan

- aflæse, vurdere og sammenligne numeriske data, numre og koder
- læse og forstå information i enkle tabeller
- sammenligne, ordne og afrunde tal og størrelser
- anslå antal samt afstande, højder, rummål, vægt og tid ud fra en fornemmelse for måleenhederne (cm/m; dl/l; g/kg; sek/min)
- addere, subtrahere, multiplicere og dividere hele tal og decimaltal med benævnelser samt vurdere/kontrollere resultatet med eller uden hjælpemidler
- tælle og måle både præcist og ved overslag beregne antal, længde, højde og afstande, vægt, materialer, tid og beløb
- omsætte mål for længde (cm/m), vægt (g/kg), tid (min/time og dag/uge) og rummål (dl/l)
- opstille regnestykke til behandling af enkle kvantificerbare spørgsmål."

Trin 2

"Undervisningens mål er, at deltagerne kan

- aflæse, sammenligne og vurdere angivelser af længde, areal og rummål
- måle og beregne arealer og rumfang (præcist og ved overslag)
- genkende og tegne geometriske figurer (trekant, firkant, cirkel)
- omsætte inden for metersystemet i relevante sammenhænge
- læse og forstå information i enkle tabeller og grafer
- indsamle og bearbejde data ved brug af simple statistiske metoder
- blive opmærksomme på om data er repræsentative
- læse og forstå angivelser af chance og risiko
- regne med og vurdere forholdstal og procent i relevante sammenhænge
- anvende simple matematiske konventioner, der bruges i relevante videreuddannelser
- opstille regneudtryk til behandling af enkle kvantificerbare spørgsmål."

Kampen om rammerne for prøverne

Med udgangspunkt i målbeskrivelser gik vi i prøvegruppen i gang med at finde på prøveformer, der kunne evaluere netop disse mål. Ved også at holde FVU målgruppen in mente kredsede vore ideer for prøverne i retning af:

- Prøve over flere dage med virkelige problemstillinger
- Mundtlig prøve med virkelige aktiviteter
- Brug af virkelige konkrete materialer i prøven
- Brug af videoklip i prøven
- Brug af lydoptagelse i prøven

Det blev dog tydeligt for gruppen, at ministeriet havde en meget anderledes (og helt klar holdning) til rammerne for FVU-prøverne:

- Afsluttende prøver
- Centralt stillede
- Skriftlige prøver
- Bedømmelsen: Bestået eller ikke bestået
- Prøverne aflægges individuelt
- Prøverne er frivillige
- Det skal være muligt at mangfoldiggøre prøverne på prøveinstitutionerne.

Desuden havde ministeriet et par mere langsigtede mål med FVU-prøverne:

- Der skal arbejdes hen imod fleksible prøveterminer
- Der skal arbejdes hen imod en opgavedatabase

Kravet om skriftlige prøver var os meget imod i prøvegruppen. Den skriftlige prøveform sætter begrænsninger i forhold til:

- Konkret dagligdags måling fx længdemål, vejning, temperaturmåling

- Konkret optælling
- Konkret kategorisering
- I praksis at kunne følge en skriftlig eller mundtlig instruktion
- I forhold til udnyttelse af prøvedeltagernes praktiske livserfaring
- Anvendelse af forskellige medier fx lyd, levende billeder
- I prøvedeltagernes udtryksmuligheder fx mundtlighed, produktion af konkrete materialer

Vi kæmpede meget for at overbevise ministeriet om det uhensigtsmæssige i skriftlig prøve for netop denne uddannelse, men forgæves. Vi måtte endda indse, at kravet til skriftlighed var meget stor, selv muligheden for at afspille en lydoptagelse med dertilhørende skriftlige opgaver blev afvist. (Vi har dog fået lov til at lave forsøg med lydopgaver i to omgange, og netop nu i efteråret 2004 er der et lille håb om at lydopgaver kan blive en permanent del af FVU-prøverne)

Dobbelt autenticitet

Vores udfordring var, at lave prøver som både levede op til ministeriets krav, og som samtidig afspejlede de centrale kvaliteter i uddannelsen.

Vi ville undgå at lave skriftlige matematikopgaver, der fuldstændig lignede de traditionelle skriftlige matematikopgaver. FVU-matematik er fundamentalt anderledes end andre matematikfag, og derfor skulle prøverne naturligvis også være det.

Vi besluttede os for at kræve at

- alle opgaver skal tage udgangspunkt i autentisk materiale
- alle spørgsmål i opgaverne skal være realistiske

Det kalder vi dobbelt autenticitet.

Vi var bevidste om den tilbagevirkende effekt som afsluttende prøver har på den daglige undervisning, så vi ønskede at lave opgaver, der kunne tåle at have denne effekt. Samtidig ville vi helst undgå at prøvetræning fyldte for meget i undervisningen. Det prøvede vi at sikre ved, at ingen deltagere skulle føle sig presset af tiden til prøven. Desuden ønskede vi åbenhed om prøverne og en vis forudsigelighed af prøveopgaverne, så de ikke virkede overraskende for deltagerne.

Er FVU-matematikprøverne anderledes end andre matematikprøver?

Ja, det er de. En sammenligning med de afsluttende skriftlige prøver for folkeskolen og Almen Voksenundervisning (AVU) trin 2 viser tydeligt, at der er forskel, netop vedrørende dobbelt autenticitet. I folkeskolens prøver og AVU prøverne bliver autentiske dokumenter kun brugt som illustration, aldrig som en egentlig del af opgaven. Der er flere eksempler på ikke realistiske spørgsmål. Og endelig er det meget brugt at tilpasse virkeligheden til matematikken, hvor vi i FVU ikke vil pille ved virkeligheden for at tilpasse den matematikken. Også vi bliver dog nødt til at udvælge brugbare dele af virkeligheden.

Med database i tankerne

Hvordan sikrede vi bredde og overblik? Med opbygning af en database i tankerne, arbejdede vi på at finde en datastruktur for beskrivelse af opgaverne.

Vi arbejdede nedefra og op, på den måde at vi simpelthen prøvede at fremstille en hel masse opgaver, som levede op til alle områder af bekendtgørelsen og vore krav. Vi fik også piloterne til at fremstille opgaver.

I dette arbejde dukkede nogle grupperinger – opgavetyper – op. De allerfleste typer viste sig at træde frem ud fra dokumenterne – dvs. typerne er stort set en opdeling af dokumenter. Nogle få af typerne: Måling og Tælle knytter sig ikke til bestemte dokumenttyper men til en bestemt aktivitet.

Typerne er en under stadig stille udvikling. Et par nye er kommet til, en har skiftet navn og et par stykker er hver splittet op i to.

For øjeblikket opererer vi med følgende typer:

	Trin 1	Trin 2
Diagrammer og tabeller		x
Former og figurer		x
Indkøb	x	x
Instrumenter	x	
Kort		x
Måling	x	
Numre og koder	x	
Opskrift	x	x
Regn på samme måde		x
Rente		x
Takster	x	x
Tal i tekst		x
Tid	x	x
Tælle	x	
Udfyldning	x	x
Valuta		x
Varedeklaration	x	x
Verden i billeder		x

Yderligere beskrivelse af opgaverne

Vi havde brug for at sikre, at alle opgavesæt havde en tilpas dækning af FVU-matematik bekendtgørelsen. Opgavetyperne var ikke tilstrækkeligt hertil.

Med udgangspunkt i FVU-matematikbekendtgørelsens detaljerede mål og indholdsbeskrivelse for de to trin, og med inspiration fra ALL Numeracy Framework udviklede vi et opgavekategoriseringssystem, OKS, hvor enhver opgave skulle beskrives på en række parametre, nemlig: Kontekst, Medier, Datatyper, Begreber, Aktiviteter, Svartyper og Sværhedsgrad.

Eksempler på parametrene er:

Kontekst: privatliv, arbejdsliv.
Medier: Udfyldningstekster, instruerende tekster
Datatyper: Klokkeslæt, pris
Begreber: Omkreds, rabat
Aktiviteter: Måle, afrunde tal
Svartyper: Tal med enhed, tegning
Sværhedsgrad var fx en vurdering af støjmængden i dokumentet og udregningsmængden i opgaven

Ialt ca. 150 forskellige egenskaber, der kunne tildeles en enkelt opgave. Det viste sig hurtigt at være uhåndterligt i det konkrete arbejde med opgavefremstilling. Og heller ikke nyttigt, da flere af egenskaberne lå så tæt, at det i praksis var svært at skelne dem fra hinanden.

Nu har vi reduceret OKS til følgende parametre:

Kontekst, Begreber, Aktiviteter, Svartyper. Vi har bevaret sværhedsgraden som en parameter, der har værdien 1, 2 eller 3. Antallet af egenskaber indenfor de fire parametre Kontekst, Begreber, Aktiviteter, Svartyper er reduceret til ca. 35

OKS har nu en størrelse, der fungerer for os. Vi kan overskue at beskrive hver opgave, og vi kan med rimelighed skelne de forskellige egenskaber fra hinanden. I hvert opgavesæt kan vi således sikre, at vi får en tilpas dækning af målene for FVU-matematik.

Det er svært!

Vi må erkende, at det er svært at leve op til vores krav om dobbelt autenticitet. Det er svært at finde autentiske dokumenter, der er passende generelle til at kunne dække hele landet, begge køn, aldre mellem 18 og 65 år, mange erhverv osv. Det er svært at finde autentiske dokumenter uden ret store mængder støj. Støj er for eksempel tekst, der ikke nødvendigvis skal læses, tal, der ikke skal bruges eller tegninger, der ikke skal bruges. Det er svært at finde dokumenter, der er "pædagogiske", det vil bl.a. sige at dokumentet fremtræder uden faldgruber, mulige misforståelser eller interne uoverensstemmelser. Og endelig er det svært at formulere spørgsmål, som mange finder realistiske.

Ris og ros af prøverne

Fra personer udenfor FVU-matematikundervisningen har det været kritiseret, at tekstmængden er for stor, både for personer med dansk som 2.sprog og for personer med læsevanskeligheder. Censorerne er blevet spurgt, og ingen af dem finder, at det er et stort problem. Flere censorer kommenterede endog at FVU-matematik er et godt tilbud til 2-sprogede, da de både får lært matematik og lært noget om det danske samfund.

Flere undervisere efterlyser en anden prøveform end den skriftlige, da der er flere aktiviteter og medier, som ikke inddrages i prøverne. Generelt er der dog stor tilfredshed med prøverne blandt underviserne.

I opgavekommissionen finder vi, at vi indenfor de stillede rammer har skabt nogle prøver, der på rimelig vis måler deltagernes kompetencer indenfor hverdagsmatematik.

ALL Numeracy Framework kan findes på: http://www.ets.org/all/survey.html#numeracy

Michael Wahl Andersen,
pædagogiosk konsulent, cand. pæd.psych.
Er ansat i Videncenter for Specialpædagogik, CVU København & Nordsjælland.
Afholder kurser og konferencer i matematik og specialpædagogik.
Deltager i øjeblikket i forskellige udviklingsarbejder vedrørende undervisning af to-sprogede i matematik og undervisning i matematik for elever med dyslektiske vanskeligheder. Har skrevet flere artikler skrevet lærebogsmaterialer i specialundervisning i matematik.

Dansk kontaktperson for det nordiske netværk for undervisning af elever med særlige behov i matematik.

Sprog som forudsætning for at lære matematik

(Gjengitt med tillatelse fra Unge Pædagoger, Danmark (http://www.u-p.dk))

I en inkluderende skole bliver forskelligheden eleverne imellem mere udtalt, skriver Engström, (2003)[1]. Forskellighed bliver med andre ord normen. Engström (ibid.) argumenterer for, at denne forskellighed derfor bør opfattes som en naturlig variation, som skolen skal lære at håndtere. En af mulighederne for at arbejde med denne problemstilling i matematik er, at læreren søger at skabe sig en indsigt i, hvordan den enkelte elev tænker matematik. Da det ikke umiddelbart er muligt at se, hvordan den enkelte tænker, bliver elevernes individuelle repræsentationer af deres tænkning relevant.
Set i denne sammenhæng og med OECD-rapportens (2004)[2] punkt 6 in mente kan det derfor være en overvejelse værd at diskutere sprogets betydning for undervisningens tilrettelæggelse og elevernes læring i matematik, med fokus på de elever, der ikke lykkes i faget. Forståelsen af, at der kan være forskellige sammenhænge mellem sproglige vanskeligheder og vanskeligheder ved læring af matematik, er ikke af nyere dato, men kan i denne forbindelse opfattes som et led i et paradigmeskift inden for arbejdet med matematikvanskeligheder.

Artiklen falder i tre dele:
- Første del handler om relationen mellem matematikvanskeligheder og sproglige vanskeligheder.
- Anden del handler om sprogets betydning for at skabe repræsentationer som en forudsætning for tilegnelsen af funktionelle begreber.
- Tredje del handler om sprogets muligheder for at kommunikere mening.

Om matematikvanskeligheder i relation til sproglige vanskeligheder
Silver og Pennett (1999)[3] mener, at det blandt andet er muligt at identificere to grupper af elever med vanskeligheder i matematik/aritmetik,
- en meget stor gruppe af elever med læsevanskeligheder i tilknytning til sproglige problemer,
- en relativt stor gruppe elever med neuropsykologiske problemstillinger.

[1] Engström, A. (2003): *Specialpedagogiske frågeställningar i matematik*. Pedagogiske institutionen, Ôrebro Universitet
[2] http://presse.uvm.dk/nyt/pm/dansk.doc
[3] Silver, C. H. og H. D.-L., Pennett, et al. (1999): "Stability of Arithmetic Disability Subtypes." *Journal of Learning Disabilities*, 32, 108-119.

I denne artikel diskuteres nogle forhold ved gruppen af elever med læse- og sprogproblemer. I artiklen "En neuropædagogisk tilgang til vanskeligheder" i dette temahæfte diskuteres mere generelle forhold omkring neuropsykologiske problemstillinger. Det skal dog i en parentes bemærkes, at der i de senere år er rettet stadig større opmærksomhed mod at inddrage den neurologiske forståelsesramme i studiet af eventuelle sammenhænge mellem læse - og matematikvanskeligheder.

En række forskere inden for såvel læsning og matematik kæder ifølge Sterner og Lundberg (2002)[4] sproglige vanskeligheder og matematikvanskeligheder sammen. Såvel skriftsproget som matematikken bygger på sprog i form af tekster, instruktioner og symboler, som bogstavrækken "s-y-r-e-n" ikke giver umiddelbart associationer til "et træ med smukke, velduftende, blåviolette blomsterranker i juni", giver symbolet "27" ikke i sig selv nogen indikation om en "syv-og-tyve-mængde". For at kunne afkode bogstaver og tal symboler er man nødt til at kende til konteksten samt forstå og håndtere de hierarkisk sekventielt opbyggede strukturer med deres regler og logik.
Sterner og Lundberg (ibid.) henviser videre til, at man inden for forskningen i læsning og matematik (aritmetik) har observeret en sammenhæng mellem elevers læse - og matematik udvikling. Når man lærer at læse, er det vigtigt, at man tilegner sig en forståelse af relationen mellem dele og helheder, at det er muligt at dele for eksempel et ord op i mindre enheder (fonemer).
I matematik (aritmetik), skal eleverne forstå, at også tal består af dele og helheder. Tallet er helheden, og cifrene er tallets enkeltdele. Et eksempel kunne være tallet trehundrede-syv-og-fyrre (347), hvor hvert ciffers betydning er afhængig af dets placering i rækken.
Hvis det ikke lykkes for eleverne at skabe denne sammenhængsforståelse, kan det lede til vanskeligheder i såvel læselæringen som matematiklæringen.

Lyster (1994)[5] peger på, at mange elever med lærevanskeligheder har udvist tidlig sprogforstyrrelse. Færdigheder i læsning skrivning og matematik forudsætter blandt andet evnen til at afkode, huske og genkalde sig symboler og strategier.
Sterner (2004)[6] argumenterer for, at vanskeligheder med sprogforståelsen bidrager til, at elever kan få vanskeligheder med at tilegne sig en grundlæggende talforståelse og lære matematiske symbolers form og indhold.
Lunde (2002)[7] pointerer, at både hos elever med vanskeligheder af generel karakter og hos elever med mere afgrænsede vanskeligheder, synes det at være sprog- og kommunikationsvanskeligheder, som i stort omfang hindrer faglig fremgang og udvikling.

Dale og Cuevas (1987)[8] peger på, at sproget blandt andet spiller en sandsynlig rolle i følgende sammenhænge:

- Sproget fungerer som formidler for matematisk tænkning og refleksion. Pointen er, at matematisk tænkning formidlet gennem sproget er en forudsætning for fremgang i matematik.
- Matematiklæring fordrer at eleverne tilegner sig kognitive kompetencer i matematik for at kunne udtrykke reflekterede matematiske tanker og ideer.
- Sproget, der anvendes i matematik, er en integreret del af de matematiske begreber, processer og applikationer det udtrykker.

[4] Sterner G., I. Lundberg (2002): *Läs och skrivsvårigheter och lärende i matematik*. NCM-Rapport 2002:2. Göteborg universitet
[5] Lyster, S. A. H. (1994): *Språkrelaterte lærevansker hos barn og ungdom : kartlegging og tiltak* / Solveig-Alma Halaas Lyster. - Oslo, Universitetsforlaget.
[6] Sterner, G. (2004): Abstract udarbejdet til forelæsning ved Matematikbienalen i Malmø, 21. – 23. januar, 2004.
[7] Lunde, O. (2002): *Rummelighed i matematik*. Malling Beck A/S.
[8] Dale, T.C. & G. J. Cuevas (1987): *Integrating Language and Mathematics Learning*. I J. Crandall edits. ESL through Content-Area Instruction, Prentice Hall Regents Engelwood Cliffs, New jersey.

Hvis det er muligt at drage nogle konklusioner på ovenstående, må det være, at undervisningen i matematik også involverer en sproglig dimension. Eleverne skal have mulighed for at arbejde i overskuelige sammenhænge, de skal have muligheder for at anvende sproget som udgangspunkt for at danne sig forestillinger som grundlag for deres begrebsdannelse. Det skal ligeledes være muligt for eleverne at anvende sproget til at kommunikere mening og refleksion, om hvordan de tænker matematik.

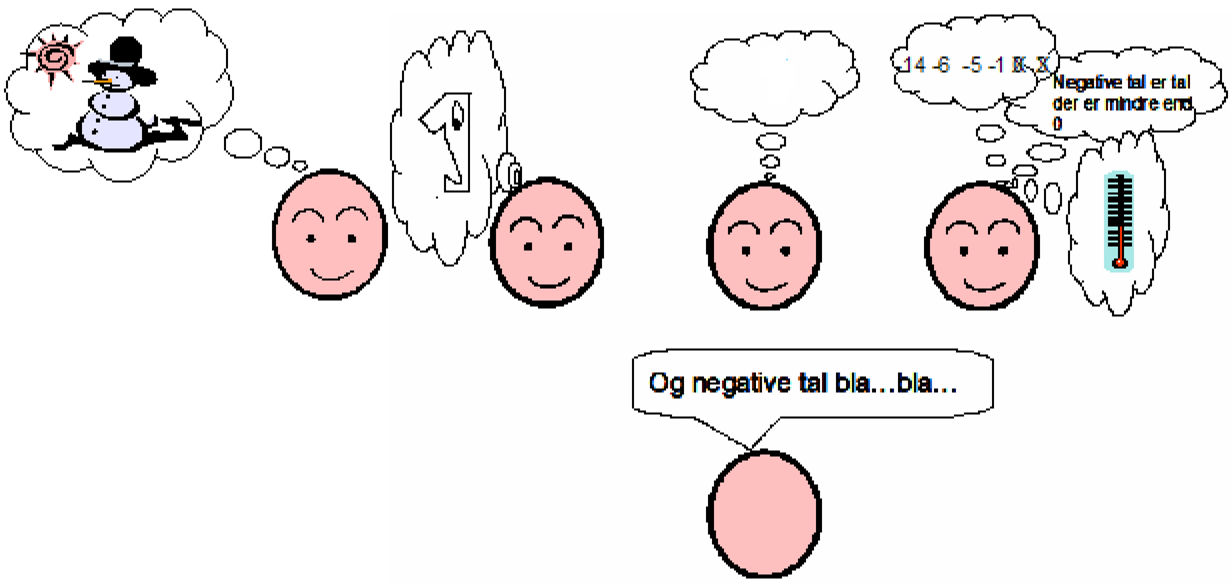
Om sprogets betydning for at kunne skabe sig repræsentationer

Der er mange forskellige intentioner på spil i matematikundervisningen, en af disse er at udvikle elevernes forståelse af begreber og deres repræsentationer. En repræsentation er noget, der kan træde i stedet for eller understøtte en situation eller et begreb. Man lader noget, der ikke umiddelbart er synligt, blive nærværende ved hjælp af repræsentationer.

En *mental repræsentation* er den samlede gruppe af forestillinger, der er relateret til en situation eller et begreb. Sproget giver eleven mulighed for at beskæftige sig med genstande og begreber, der ikke perceptuelt er til stede, at man med andre ord er i stand til på et indre plan at kunne forestille sig situationer og begreber.
En *observerbar repræsentation* er det konkret sproglige udtryk for den mentale repræsentation og de forestillinger, der er knyttet til den givne situation eller det givne begreb.

Matematik er i mange henseender et abstrakt fag, hvor evnen til at kunne skabe sig mentale repræsentationer - i form af forestillinger - er en forudsætning for at kunne tilegne sig faglige begreber og videre at kunne anvende dem funktionelt. Mange elever med vanskeligheder i matematik savner de forestillinger, der er præmissen for begrebstilegnelsen. Nogle elever behøver derfor at få støtte til at skabe sig disse forestillinger.

Her er et eksempel på fire elevers mentale repræsentation af ”negative tal” i form af forskellige forestillinger i forbindelse med en klassesamtale om måling af temperatur.

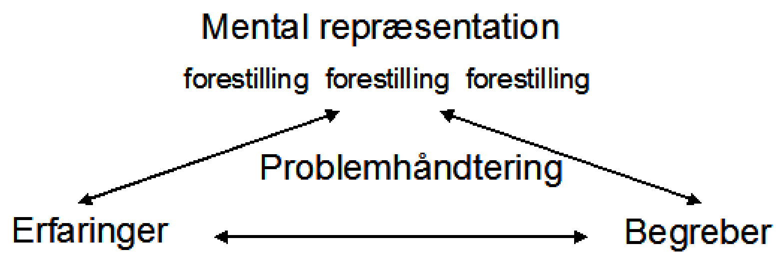


Den første elev tænker drømmende tilbage på sidste år, da han var på ferie i Norge, hvor han sammen med sin far og mor byggede en flot snemand. Den anden elev er lidt forvirret over, hvad læreren mon mener: ”Er der tale om tal, der er sure eller kede af det?”. Den tredje elev forstår ikke de ord, der bliver sagt, og har derfor ikke mulighed for skabe sig forestillinger om, hvad læreren fortæller. Den fjerde elev har flere forskellige forestillinger. Denne elev

kender for eksempel til, at det er tal på tallinjen, at det er alle de tal, der er mindre end nul, og at man kan måle temperatur ved hjælp af et termometer.
De elever, der besidder et veludviklet sprog relateret til den givne kontekst, har de bedste forudsætninger for at knytte lærerens forklaringer til deres egne forestillinger og dermed gode muligheder for læring, mens de elever med mindre sproglige forudsætninger ofte får store vanskeligheder med den grundlæggende begrebsudvikling, skriver Malmer (1998)[9].

Det er vigtigt at skelne imellem, om ordene ikke knytter an til de forventede forestillinger, eller om forestillingen, der korresponderer med ordene, ikke er udviklet, skriver Nolte (2004)[10].
Der kan være tale om en sproglig problemstilling, hvor der når læreren siger ”negativ” knyttes an til til en hverdagsforståelse, eller at ordene er meningsløse på grund af vanskeligheder med sprogforståelsen.
Der kan også være tale om, at eleven ikke har de forudsætninger, der skal til for at knytte ordene til meningsbærende erfaringer, hvorfor eleven får vanskeligt ved at skabe sig forestillinger om ”negative tal”?
De undervisningsmæssige overvejelser i forhold til de to problemstillinger vil være principielt forskellige. I den første situation vil det handle om at anvende forskellige materialer og anvisninger, der understøtter og visualiserer undervisningen. I den anden situation vil det dreje sig om at skabe de forudsætninger, der skal til for, at eleven kan deltage i undervisningen. Man skal dog være opmærksom på, at de undervisningsmæssige tiltag ikke nødvendigvis behøver at afvige fra hinanden.

Nyere forskning (Sterner og Lundberg, 2002)[11] understreger vigtigheden af, at eleverne får mulighed for at tilegne sig forestillinger som led i deres matematiklæring. Forestillingerne fungerer som medierende led fra det konkrete arbejde med matematik til dannelsen af abstrakte matematiske begreber. Det er gennem tilknytningen af forskellige forestillinger til de matematiske begreber, at det for eksempel bliver muligt at håndtere problemer i matematik.



Sproget – det indre som det ydre – er væsentlige elementer i trianguleringen af erfaringer, forestillinger og begreber ved tilegnelsen af funktionelle matematiske kompetencer.

[9] Malmer G. (1998):Matematik och dyslexi ett försummat samband, *DYSLEXI,* nr 3.
[10] Nolte, M. (2004): *Language Reception and Dyscalculia*, i A. Engström, (ed.). I Democracy and Participation a Challenge for Special Needs Education in Mathematics. Reports from Department of Education, Örebro Univercity, 7, Västra Frölunda.
[11] Sterner G., I. Lundberg (2002): *Läs och skrivsvårigheter och lärende i matematik.* NCM-Rapport 2002:2. Göteborg universitet

En mulighed for at styrke elevernes mentale repræsentationer af tal i forbindelse med de fire regningsarter er at arbejde med hovedregning (Öberg, 1990)[12]. Eleverne må på det indre plan kunne forestille sig hvordan forskellige tal kan kombineres. For eksempel kan opgaven 52 + 34 forestilles på følgende måder:
50+30+2+4 (tierne først)
52+30+4 (det første tal først, derefter tierne)
52+4+30 (det første tal først, derefter enerne)
34+50+2, 34+2+50 (det er lettere at lægge 50 til)
2+4=6 og 5+3=8 ("blyant-og-papir-regning i hovedet")

Man kan ligeledes arbejde med opgaver, hvor eleverne på det mentale plan skal prøve at forestille sig forskellige situationer som for eksempel:
"Luk øjnene og forestil dig et kvadrat af papir. Fold det på midten, så du nu har et rektangel. Fold papiret igen, så du nu har et kvadrat. Forestil dig, at du klipper langs den anden fold. Hvilken form vil papiret have, når du folder det ud?"
"Hvilken form vil man få, hvis man tager et nyt kvadrat og folder langs diagonalerne?"
Eller
"Forestil dig en terning. Forestil dig, at du skærer et hjørne af. Hvilken form har snitfladen?"

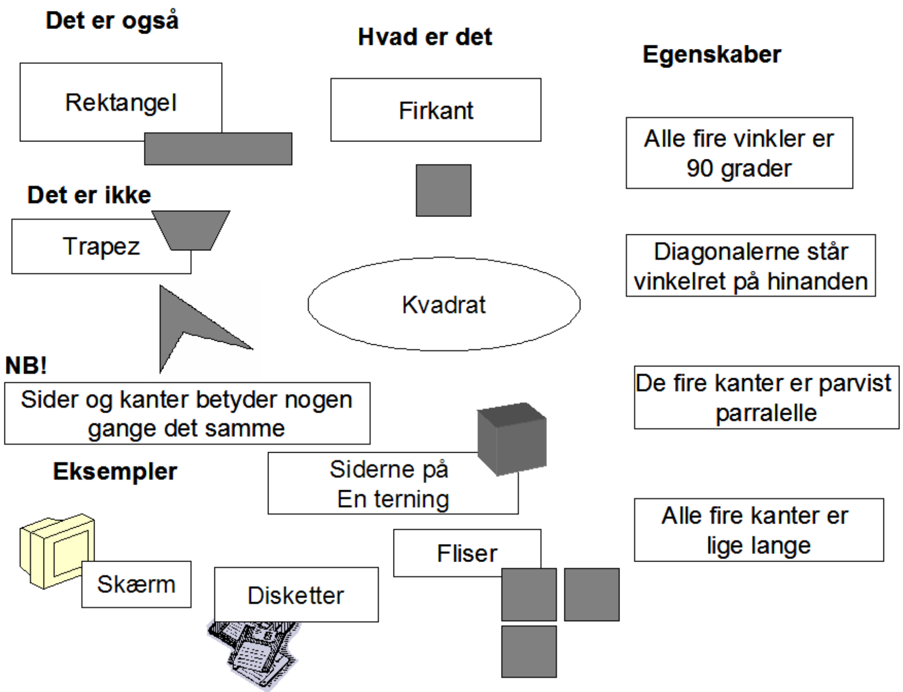
En anden mulighed er at give eleverne mulighed for ved hjælp af for eksempel et tankekort at arbejde med mange forskellige udtryksformer, derved har alle elever mulighed for at træne og udtrykke sig i forskellige sproglige modaliteter, samtidig med at de giver udtryk for de forestillinger, de har om det matematiske tema, der skal arbejdes med.
Tankekort kan være meget forskellige i deres form. Her følger ét eksempel - inspireret af Santa og Engen (1996)[13] - på opbygningen af et tankekort:

"Hvad kendetegner et kvadrat?"

Et forslag til en arbejdsgang:

- Eleverne arbejder sammen i grupper. Grupperne får udleveret en stabel kort.
- Grupperne formulerer deres tanker omkring emnet.
- Eleverne må anvende ord, tegninger, matematisk symbolsprog.
- Der sættes et tomt ark op på væggen, hvor det begreb, der skal fremstilles et tankekort over, skrives.
- Grupperne skiftes til at sætte et kort på det opsatte tankekort og forklare, hvorfor dette kort skal på tavlen.
- Hvis de andre grupper har et kort, der ligner, skal de lægge det til side.
- Når alle kort er væk, er tankekort aktiviteten delvist færdig. Det kan vise sig, at man under forløbet er nødt til at opsætte flere kort.
- Et tankekort kan endvidere benyttes til opsamling, når forløbet er afsluttet.

[12] Ôberg, U. (1990): *Konsten at se metoden och utveckla tankeformer i hovudräkning.* Notat, Lärarhögskolan i Malmö.
[13] Santa, C og L. Engen (1996): *Lære å lære*, Projekt Criss, Stiftelsen dysleksiforskning, Stavanger



Tankekortet hænger i klassen så længe, der arbejdes med det givne tema. Læreren kan understøtte sproglige forklaringer ved at pege på de ord billeder og symboler, der indgår i forklaringen, og dermed støtte eleverne i at koble ord, billeder og symboler til, hvad der undervejs i forløbet kan blive til en mental repræsentation i form af forskellige forestillinger, der kan styrke og befæste begrebsdannelsen.

(Sterner og Lundberg, (2002)[14] argumenterer for, at forståelsen for de matematiske symbolers indhold og deres anvendelse er grundlæggende problemstillinger for elever med læse- og skrivevanskeligheder. Derfor bør der i undervisningen lægges vægt på, at eleverne tilegner sig mentale repræsentationer, begreber og forståelser for sammenhænge og relationer mellem tal. Den sproglige tilgang kan være en god mulighed for dette arbejde.

Om sproget som meningsbærer

Tankerne om sprogets betydning for læring er alt overvejende begrundet i teorier om læreprocesser (Hiebert, 1992)[15]. De observerbare sproglige repræsentationer, der kan forstås som de konkrete udtryk for elevernes forestillinger og mentale repræsentationer.
For elever med læse- og skrivevanskeligheder (Lunde, 2002)[16] er det vigtigt at få mulighed for at tilegne sig viden via mange forskellige sproglige tilgange.
Det er et centralt træk ved børns sprogproduktion/tegn, at den kan foregå i et hvilket som helst medium. Eleverne skelner ikke mellem det at skrive, illustrere, tegne eller bygge modeller af ting (Kress, 1995)[17].
Der findes mange måder at inddele elevers sprogproduktion på. Inspireret af Bruner (1964)[18] tages der i denne artikel udgangspunkt i følgende idealtypiske kategorier:

- enaktive repræsentationer – udtrykt ved konkret handlen

[14] Sterner G., I. Lundberg (2002): *Läs och skrivsvårigheter och lärende i matematik*. NCM-Rapport 2002:2. Göteborg universitet
[15] Hiebert, J. (1992): Reflection and communication; Cognitive considerrations in school mathematics reform. *International Journal of Educational Research,* 17(5), 439-456.
[16] Lunde, O. (2002): *Rummelighed i matematik*. Malling Beck A/S.
[17] Kress, G. (1995): "Repræsentation, læring og subjektivitet: Et socialsemiotisk perspektiv" i Bjerg, J. (red.) i *Pædagogik – en grundbog til et fag*. Hans Reitzels Forlag, København.
[18] Bruner, J.S. (1964): The course of cognitive growth. *American Psychologist, 19*.

- ikoniske repræsentationer – udtrykt ved tegning
- symbolske repræsentationer – udtrykt ved skrifttegn

I tillæg til disse kategorier inddrages ligeledes Malmers (Solem og Reikerås, 2002)[19] kategori om:

- sproglige repræsentationer – udtrykt ved det verbale sprog

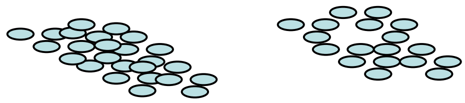
Man skal være opmærksom på, at det til tider kan være vanskeligt – og vel heller ikke ønskeligt - at placere elevers observerbare repræsentationer entydigt i en af de fire kategorier. I nedenstående elevbesvarelser er der eksempler på alle kategorier.

Formålet med eksemplerne er at vise, hvordan forskellige observerbare repræsentationer til sammen afspejler elevernes begrebsforståelse. Dette synliggør mangfoldigheden i elevernes forestillinger og forståelser, hvilket kan danne udgangspunkt for undervisningstiltag og skole/hjem samtaler med et synligt og håndgribeligt udgangspunkt.
De forskellige observerbare repræsentationer kan være et naturligt udgangspunkt for at synliggøre elevernes tænkning i matematik. Eleverne kan på forskellig måde illustrere forskellige situationer og berette, hvad de tænker. Ud fra de forskellige udtryk kan læreren danne sig en hypotese om elevens mentale repræsentation af en given problemstilling

Følgende eksempel handler om forståelse af positionssystemet i forbindelse med addition hos tre elever fra 2. klasse.
Positionssystemet kan forekomme som en selvfølgelighed for de elever, der forstår det umiddelbart. Det er nemt som lærer at komme til at undervurdere de vanskeligheder, som mange elever oplever med dette begreb, fordi positionssystemet virker så indlysende. Mange elever har fx svært ved at se forskellen på 34 og 43, eventuelt på grund af sproglige vanskeligheder. De siger ”fireogtredive” og skriver 43. Der er med andre ord ikke overensstemmelse mellem det mundtlige udtryk og tallenes symbolske udtryk.

Opgaven, eleverne arbejder med, lyder således:

Kristian har 25 kroner. Han får 18 kroner af sin mor.
Hvor mange kroner har han i alt?



Dans observerbare repræsentationer:

$$\begin{array}{rr} & 25 \\ + & 18 \\ \hline & 313 \end{array}$$

Dan fortæller:
” 2 og 1 er 3. 5 til 8 (tæller på fingrene fra 5) *er 13. Stykket bliver 3 og 13. ”*

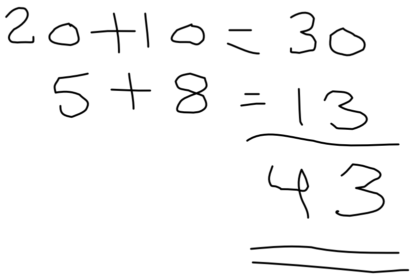
Lærerens evaluering:
Dan har en usikker forståelse af talsystemets opbygning, når det gælder flercifrede tal. Det ser ikke ud til, at Dan opfatter 313 som et flercifret tal. Det kunne se ud som om, at Dan opfatter flercifrede tal som talrækker frem for positioner i titalssystemet.
Dan anvender en traditionel opstilling som løsningsstrategi. Dans symbolske udtryk og forklaring tyder på, at han mestrer addition med et-cifrede tal og ved hjælp af en tællestrategi.

[19] Solem, H. I. og E. K. L. Reikerås (2002): *Det matematiske barnet.* Caspar forlag, Bergen.

Hypotese:
Dan kan tælle, men det ser ikke ud til, at han har forstået titalssystemets opbygning. Der kan evt. være tale om afkodningsvanskeligheder. Det skal afklares, om Dan har vanskeligheder med at læse og skrive.

Handleplan:
Der skal arbejdes med, at Dan får forståelse af titalssystemets opbygning.

Louises observerbare repræsentationer:



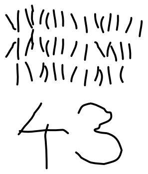
Louise fortæller:
"Jeg lægger først tierne sammen, og så enerne, og så tierne og enerne, det bliver 43"

Lærerens evaluering:
Louise viser med sin tegning forståelse af positionsystemet ved addition, at hun arbejder systematisk med at opdele i tiere og enere. Tegningen og forklaringer vidner om en solid forståelse af titalssytemets opbygning og udtrykker en funktionel kompetence ved antalsbestemmelse.

Hypotese:
Louise har tilegnet sig, hvad der var intentionen med undervisningsforløbet.

Handleplan:
Der sættes ikke specielle foranstaltninger i værk.

Milles observerbare repræsentationer:



Mille fortæller:
"jeg tager alle kronerne og tæller dem, der er 43"

Lærerens evaluering:
Mille anvender en tællestrategi, og hun er i stand til at komme frem til et resultat. Der er dog ikke noget system i de tællepinde, hun anvender, hvilket kunne indikere, at hun ikke arbejder inden for positionssystemet for at nå frem til et resultat. Det kan være en mulighed, at Mille forstår tallene som en remse – ligesom alfabetet, hvor "treogfyrre" er navnet på det bestemte tal og ikke som et bestemt størrelse, der præcis ligger mellem 42 og 44. Det er vigtigt at få

afklaret, om hun tæller i alle situationer, og om hun anvender en bestemt strategi. Neuman (1989)[20] skriver, at de elever, der senere hen ikke lykkes i matematik, er dem, der vedholdende fastholder ensidigt at anvende tællestrategier.
Man skal ligeledes være opmærksom på, om Mille har hukommelsesvanskeligheder. Ovenstående kan være et resultat af, at Mille har svært ved at huske og genkalde sig additionsproceduren.

Hypotese:
Det ser ud til, at Mille ensidigt anvender en bestemt tællestrategi, hvilket kan være forårsaget af en manglende forståelse af positionssystemet.

Handleplan:
I undervisningen skal der lægges op til andre former for antalsbestemmelse, og der skal være opmærksomhed på hendes forståelse af positionssystemet. Under forløbet skal man være opmærksom på, hvordan Mille anvender sin hukommelse.

♦

I denne artikel er der argumenteret for, at det er muligt at støtte elever med vanskeligheder i matematik ved hjælp af sproglige tilgange, der giver dem mulighed for at reflektere over deres fremgangsmåde. Man skal dog være opmærksom på, at selv om opgaven er den samme for de tre elever i ovenstående eksempel, så er deres læringsprojekter forskellige. Elever, der arbejder med at udrede deres egen tankegang i forbindelse med en opgave, kan have vanskeligt ved radikalt at omstrukturere deres tænkning omkring en given opgave, fordi deres løsningsstrategier er knyttet til deres forestillinger og begrebsdannelse.
Der er derfor en række forhold, læreren må medtænke:

- Er der en gensidig forståelse mellem lærer og elev om, hvad der er læringsprojektet?
- Er det muligt for lærer og elev at forhandle sig til en fælles forståelse af læringsprojektet?
- Ligger læringsprojektet inden for elevens potentielle udviklingsmuligheder?

Det er her, at begrebet om undervisningsdifferentiering bliver en udfordring. Læreren skal forsøge at forstå hvad eleverne prøver at sætte sprog på og danne sig en hypotese om elevernes aktuelle faglige kompetencer for at kunne støtte eleverne hver især i deres læringsarbejde. Det er altså ikke alene interessant at se på resultatet, men også at se på hvilken tænkning, der ligger bag resultatet. Man kan ofte forundres over hvilken konsekvent tænkning, der kan ligge til grund for selv meget skæve resultater.

Denne undervisningsform forudsætter, at lærerne i deres evaluering af eleverne er sig bevidste om, hvad der kendetegner elevers forskellige arbejdsformer og strategier, og hvilke implikationer det kan have på deres vanskeligheder i matematik. Dette understreger vigtigheden af lærernes efter/videreuddannelse, jævnfør anbefalingerne i OECD-rapportens punkt 14 og 19. Disse punkter handler om udvidelse af efteruddannelsen og en styrkelse af uddannelsen af lærere til elever med særlige behov.

Om perspektiverne
Sprogliggørelsen af elevernes arbejde i matematik har altså flere funktioner. Der er tale om støtte for elevernes forestillingsevne, tænkning og læring samt støtte for tilrettelæggelsen af undervisningen i relation til den enkelte elev (undervisningsdifferentiering).
Denne arbejdsform er ligeledes et godt redskab i den løbende evaluering i matematik, som er med i anbefalingerne i OECD- rapporten (punkt 2 og 4).

[20] Neuman, D. (1989): *Rägnefærdighetens rötter. Utbildningsforlaget*, Helsingborg.

De observerbare sproglige repræsentationer synliggør Dans, Louises og Milles individuelle begrebsforståelser og mentale repræsentationer. Her pointeres sprogets mulige betydninger for tilegnelsen af funktionelle matematiske kompetencer, og understreger hermed sproget som et potentiale for at skabe det læringsrum, der forbinder forudsætningerne med mulighederne.

Tor Andersen
er Lektor i videregående skole siden 1972 med fagene matematikk, fysikk og pedagogikk. Har vært særlig opptatt av bruk av IKT i matematikk og er for tiden medlem av en IKT-nemnd som blant annet utarbeider IKT-tilpassede eksamensoppgaver i matematikk for videregående skole. Fra 1.august i år er han også ansatt som forsker ved matematikksenteret på NTNU i Trondheim.

IKT-basert eksamen i videregående skole

Siden midten av 90-tallet har det foregått en rekke forsøk i norsk skole med bruk av IKT i matematikk. For de såkalte IKT-skolene har det blitt utarbeidet IKT-tilpassede eksamensoppgaver. Denne typen oppgaver tar utgangspunkt i at elevene ved forsøk-skolene har benyttet avanserte matematikkprogram på PC eller symbolbehandlende lommeregnere.

I mitt foredrag la jeg fram eksempler på slike oppgaver. Samtidig forsøkte jeg å skape debatt om hva som er hensiktsmessig bruk av IKT i matematikk – særlig med tanke på å fremme læringsutbyttet i faget.

Interesserte som ønsker dokumentene under hyperlinkene, kan få disse ved å henvende seg på e-post til Tor.Andersen@matematikksenteret.no. *En oversikt over hyperlinkene finner du bakerst i dette dokumentet. Her kommer presentasjonen med noen kommentarer.*

1

Tannhjulene roterer og griper perfekt i hverandre. Uten et godt samarbeid kommer vi ikke særlig langt i å utvikle nye og gode undervisnings-metoder i matematikk.

2

I siste del av fordraget fokuserer jeg på motivasjonsproblem i matematikkfaget. Jeg kommer altså tilbake til dette viktige temaet.

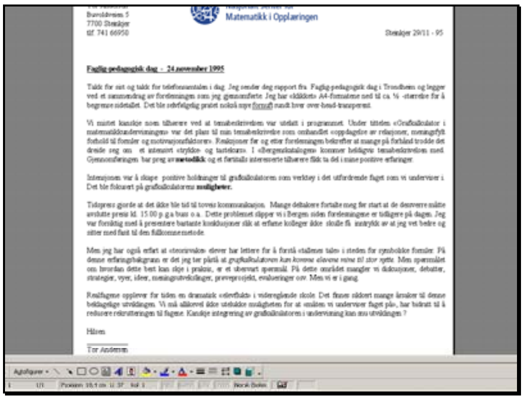
3

Bildet viser en vakker portal med mye matematikk i seg. Samtidig ble oppgaveteksten brukt både til å skape litt debatt om ordbruken i faget vårt og til stolt å fortelle at foredragsholderen er trønder.

4

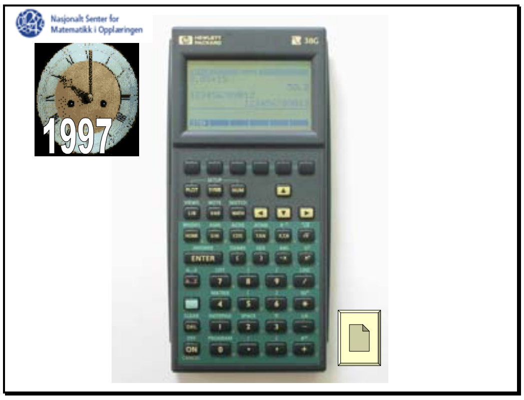
Et elegant vikingskip som inviterer til matematiske beregninger – gjerne med bruk av IKT-verktøy. Hva kan ny teknologi lære oss om god gammel teknologi?

5



Brevet er fra 1995 og blir vist for å minne om at debatten omkring bruk av IKT-verktøy ikke er av ny dato. Sitat fra mitt foredrag på faglig-pedagogisk dag på NTNU i 1995*: ” Intensjonen var å skape positive holdninger til grafkalkulatoren som verktøy i det utfordrende faget som vi underviser i. Det ble fokusert på grafkalkulatorens muligheter.”*

6



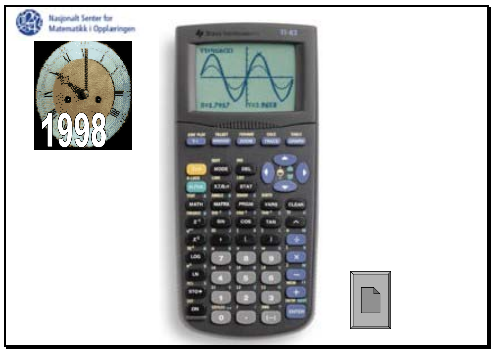
Under denne hyperlinken viser jeg til en innstilling om å godkjenne ”HP-38G - Grafisk programmerbar lommeregner” til bruk ved eksamen i videregående skole. Sammenlignet med dagens IKT-verktøy framsto denne lommeregneren fra 1997 som et ikke særlig brukervennlig regne-verktøy. Men den var en klar indikasjon på hva som snart ville komme.

7

Det ble gitt klare rammebetingelser for konstruksjon av eksamens-oppgaver i IKT-forsøket som startet i 1998.

Samtidig ble vi også kurset i ”positiv sensurering” som innprenter at kandidatene skal belønnes for det de faktisk makter mer enn å trekkes for det de ikke får til.

Karaktergivningen blir som i et skihopp. Dersom hopperen ikke velger å sette utfor, må det bli null. Men selv etter kråkehopp og fall skal kandidaten honoreres.



8

Fire år etter at Reform 94 slo fast at grafisk lommeregner skal være obligatorisk i videregående skole - allmennfaglig studieretning - fikk jeg i oppdrag i å vurdere ”Bruk av grafisk lommeregner i 3MX våren 1998”. Fra vurderingen siterer jeg – ” En god avslutning på 3MX-settet ville det vært om svaret hadde vært benyttet til å skape lyst til å utforske om arealet i det generelle tilfellet virkelig er $2ab$. Pedagogisk riktig bruk av lomme-regneren er nemlig avhengig av hvordan problemet stilles.” Jeg avslutter med ” Grafisk lommeregner har kommet for å bli og har helt sikkert sin berettigelse i videregående skole. Men jeg føler sterkt at innføringen burde vært ledsaget av en landsomfattende opplæring i metodisk riktig bruk av dette verktøyet. ”

9

I samband med oppstartingen av IKT-forsøket i videregående skole i 1998 fikk jeg gleden av å delta på en studietur til Østerrike, Nederland og Frankrike. Formålet med turen var å få innblikk i anvendelse av grafiske og symbolbehandlende lomme-regnere i matematikk i videregående skole i disse landene.

10

Rapporten inneholder blant annet opplysninger om læreplaner, eksamens-ordninger, finansieringer, etterutdanning, læringsmiljøer, endrede lærerroller og kjønnforskjeller sett i lys av innføring av IKT-verktøy i matematikk i Østerrike, Nederland og Frankrike. Vi har nok mye å lære av hverandre.

11

Våren 1999 fikk elever ved de såkalte IKT-forsøksskolene en tilpasset eksamen i matematikk. Jeg nevner her 2MX hvor den såkalte IKT-tilpassede oppgaven i settet hadde følgende ordlyd: " Marie som benytter symbolregner, bestemmer seg for å finne ut hvordan ståltråden må bøyes dersom arealet innenfor tråden skal bli størst mulig. Hun ønsker også å finne det største arealet. Hun løser oppgaven på symbolregneren på følgende måte: ….. Forklar tankegangen bak hvert steg i denne løsningsprosedyren."

12

Debatten om nødvendig basiskunnskap i matematikk er i gang. Læreplanen forordner arbeid med åpne og virkelig-hetsnære problemstillinger som ofte krever bruk av avansert regneverktøy. Samtidig kommer signaler fra universiteter og høyskoler om at blant annet ferdigheter i algebra er i fritt fall. Valg av metode og innhold som følge av bruk av IKT-verktøy er langt fra opplagt. Vi befinner oss i upløyd mark og trenger sårt brede fagmiljø som kan gi råd og vink om hensiktsmessig bruk av IKT i matematikkfaget.

13

Så utvides eksamen i matematikk for IKT-skolene med en ekstra dag. Første dag er en såkalt produksjons-del mens andre dag er en dokumentasjonsdel. På produksjonsdelen får elevene anledning til å samarbeide halve dagen i såkalte myldrerom, mens andre halvdel er individuell. Piggdekkoppgaven blir brukt som heldagsprøve for å forberede elevene på produksjons-delen. Oppgaven (innledning) " En videregående skole ligger tett ved Europavei 6 (E6). I skolens nærhet er det en rett strekning på 1 km med mye trafikk både nordover og sørover. Lang piggdekksesong gjør at veien slites fort. Piggene lager dype groper i veien. Etter noen år med slitasje legges ny asfalt i gropene. Bare sjelden asfalteres vei-strekningen i hele bredden. En 3MX-gruppe fatter interesse for både formen til gropene og kostnader med å legge ny asfalt på denne strekningen.

14

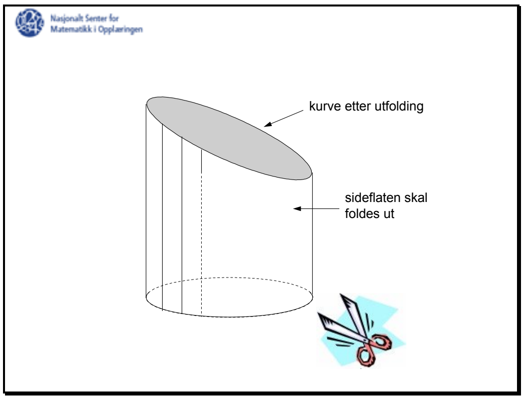
Våren 2000 holdes eksamen i matematikk for VKII – 3MX – IKT-skolene hvor følgende er å finne i produksjonsdelen: ” En sylinder er gjennomskåret av et plan som ligger på skrå i forhold til grunnflata. Sylinderen er lukket både i toppen og bunnen. Se figuren til høyre.

Lag en modell av en sylinder med skeiv toppflate. Beskriv modellen ved blant annet hjelp av en figur som du målsetter. Klipp opp sylinderen langs en loddlinje og fold ut sideflaten. Legg sideflaten inn i et koordinatsystem. Vis dette på en figur. Drøft ulike metoder for å finne overflata av modellen din. Regn ut overflata med topp og bunn. En liten revolusjon er det kanskje at kandidatene får rede på vurderings-grunnlaget. Følgende opplysning står skrevet:

Ved vurdering av arbeidet ditt vil det bli lagt særlig vekt på

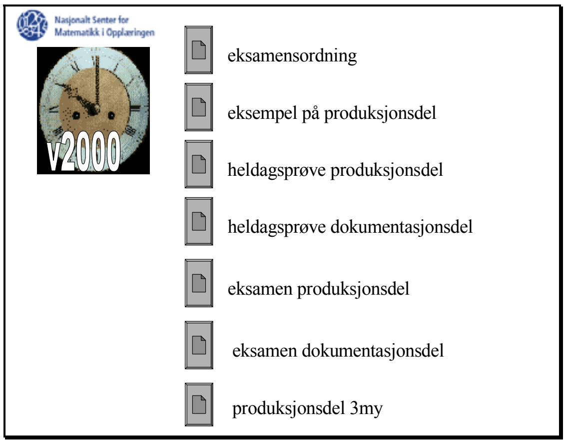
- om du har valgt fornuftige metoder
- hvor klare dine drøftinger og konklusjoner er
- om du har gjort korrekte utregninger
- hvilke matematiske kunnskaper du har vist

15



Formen til sideflaten overasket svært mange. Kanskje du får lyst til å skråskjære en dorullkjerne, klippe opp og folde ut sideflaten? I dokumentasjonsdelen ble kunnskap og ferdigheter kontrollert i ”oppfølgingsoppgaven”.

Dokumentasjonsdelen er i sin helhet individuell.



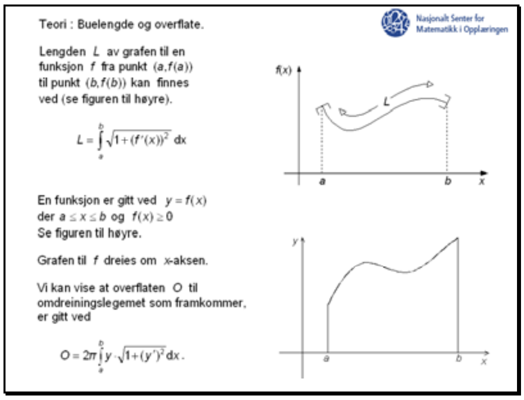
16

Dokumentene under hyperkoblingene kan sendes på bestilling.

17

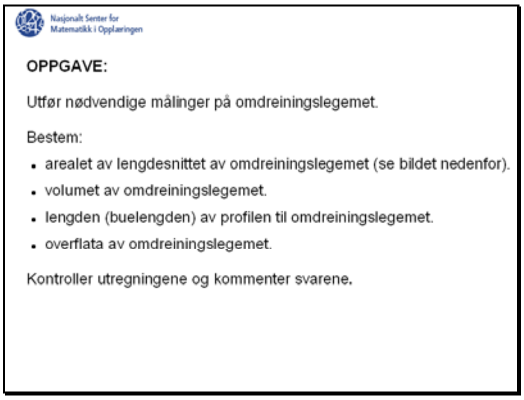
Produksjonsdelen våren 2001 hadde ”omdreiningslegeme” som overskrift. Jeg fikk god øving i bruk av drei-benken da tremodellene ble masse-produsert til alle forsøksskolene.

18



Buelengde og overflate var ikke i lære-planen i 2001. Kandidatene måtte altså sette seg inn i ukjent teori på eksamens-dagen.

19

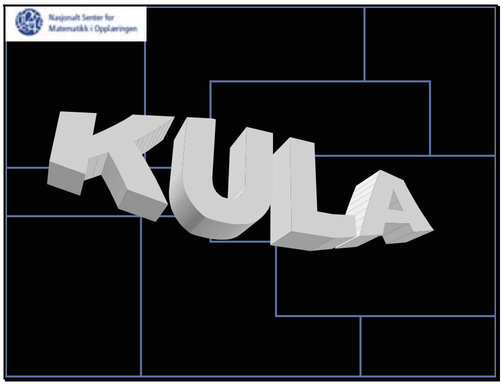


”Bestemt integral” har utvilsomt et omfattende og svært nyttig bruksområde. Dette ble med all tydelighet vist under eksamen våren 2001.

20

Hyperkoblingen viser produksjonsdelen våren 2001.

21

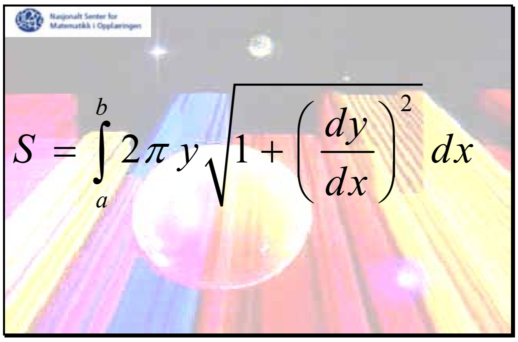


Dokumentasjonsdelen fulgte opp med spørsmål av typen ” Vis ved regning og ved å bruke formelen ovenfor at overflaten til en kule med radius r er $4\pi r^2$ .Ta utgangspunkt i en halvsirkel plassert i et koordinat-system slik figuren til høyre viser.

22

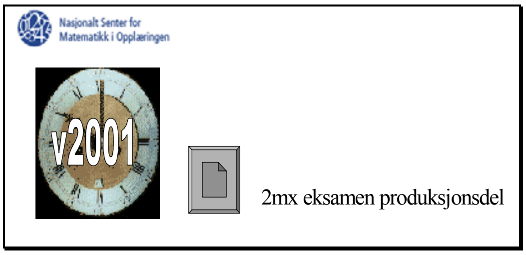
”Bestemt integral” ble til slutt i doku-mentasjonsdelen brukt til å besvare spørsmålet: ”En marsipankule dekket med sjokolade skjæres opp i skiver med samme tykkelse. Vis at alle skivene får like stor sjokoladeflate.” Et overraskende resultat?

23

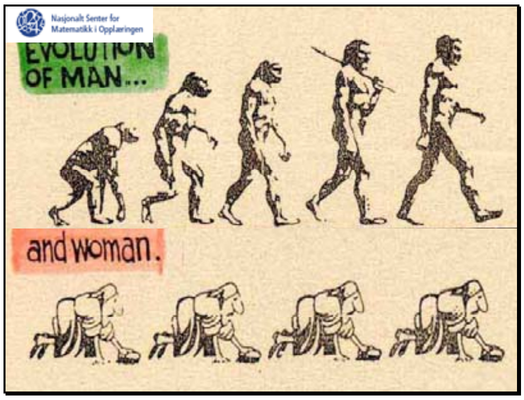


Har innføring av IKT-verktøy i matematikk gjort det mulig å beskjeftige seg med interessante problem-stillinger som var utenfor rekkevidde da håndregning var eneste alternativ?

25

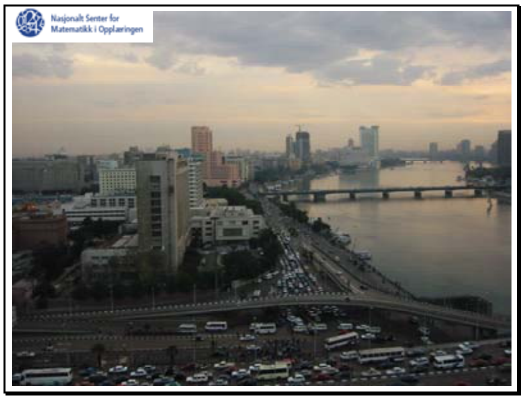


Produksjonsdelen våren 2001 eksamen i 2MX (videregående kurs II) mente vi skulle appellere til både jenter og gutter. Ingressen til oppgaven lyder som følger: ”En kunde kommer til en smykke-designer med et perlekjede som hun vil ha plassert langs kanten på et tynt flatt smykke. Smykket skal ha form som en sirkelsektor og det skal graveres inn et navn på smykket.
Samtidig ønsker kunden at smykket skal ha størst mulig areal. Hun mener at det da blir mest plass til gravering. Se figuren nedenfor.”



24

Så er spørsmålet om den teknologiske utviklingen i skolen har skjedd på hannkjønnets premisser?



26

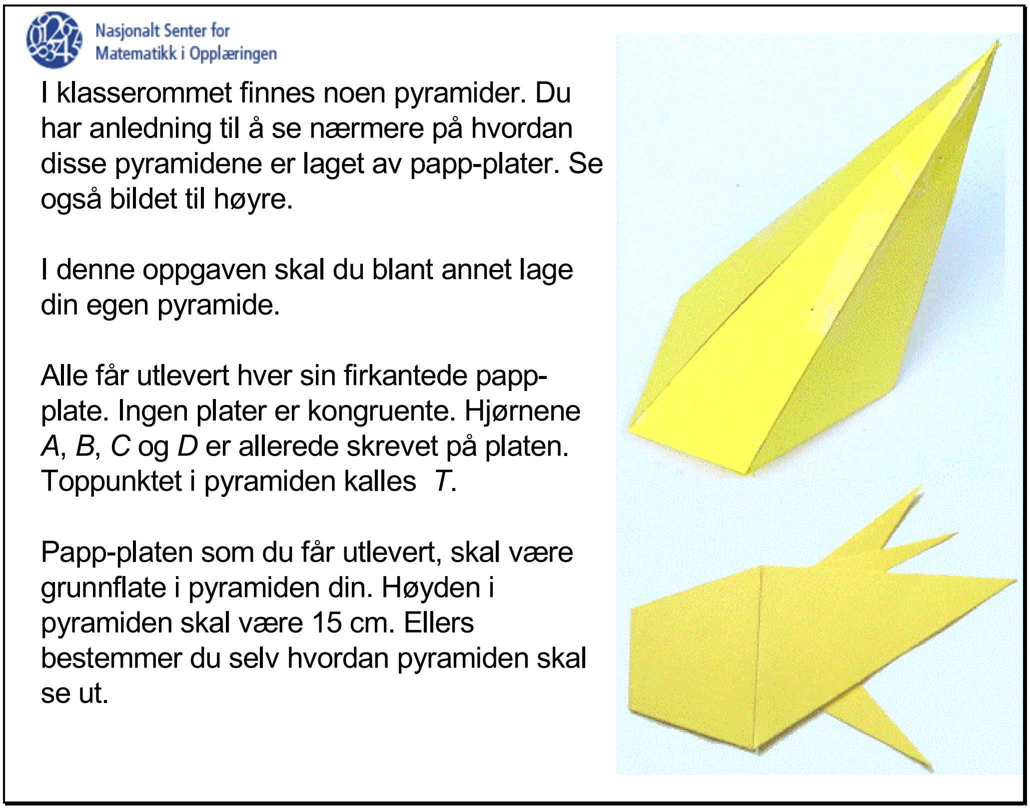
Våren 2002 gikk turen til Egypt og Kairo. Oppgaven handler ikke om vannføringen i Nilen, luftforurensing og støy eller sann-synligheten for å omkomme i trafikken i en by der tofelts vei betyr fem biler i bredden i hver kjøreretning.

Overskriften for oppgaven på produksjonsdelen er PYRAMIDEN.

27 

Våren 2002 ble siste eksamen med to-delt eksamen med produksjonsdel og dokumentasjonsdel gjennomført. Produksjonsdelen hadde altså ”pyramiden” som overskrift.

Fra våren 2003 ble matematikk/IKT-tilpasset todelt med en del uten hjelpe-midler og en del med symbolbehandlende lommeregner eller matematikkprogram på PC.

28 

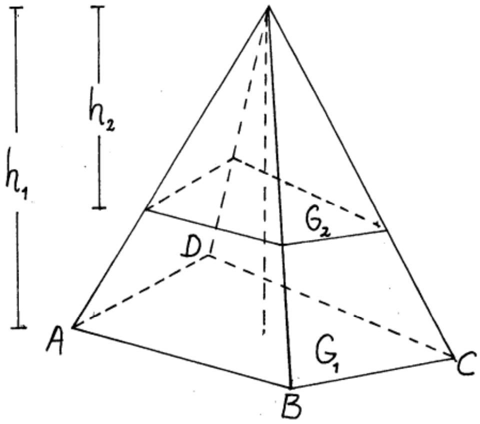
Vi som sensurerte matematikk/ikt-eksamen denne våren, ble møtt med skeptiske blikk da vi hentet merkelig bulende konvolutter med "flatpakkede" pyramider på post-kontoret. En æra med tremodeller av Tycho Brahes planetarium, sektorformede smykker av papp, finpussede omdreiningslegemer av kvalitetsfuru, marsipankuler med sjokoladetrekk, skeive papp-pyramider i flatpakke osv. var kommet til veis ende. Denne eksamensformen lar seg kanskje ikke gjennomføre på landsbasis.

29

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{h_1^2}{h_2^2}$$

$$V_1 = 2V_2$$



Oppgaver:

* Vis blant annet ved hjelp av notatene ovenfor at $h_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} h_1$

Ta utgangspunkt i den pyramiden du selv har laget, når du løser de neste oppgavene. Delingen skal ikke utføres i praksis.

30

* Finn høyden til hver av de to romfigurene du får etter delingen.

* Finn koordinatene til hjørnene i grunnflaten til den øverste pyramiden..

* Finn til slutt arealet G_2 av grunnflaten i den øverste pyramiden.

Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

* Lag pyramiden. Forklar kort hvordan du går fram. Pyramiden skal leveres flatpakket sammen med resten av besvarelsen din. Se bildet ovenfor.

* Tegn pyramiden din i et 3-dimensjonalt koordinatsystem. Grunnflaten *ABCD* skal ligge i *xy*-planet. Hvilke koordinater får hjørnene *A*, *B*, *C* og *D* og toppunktet *T*?

* Bruk vektorregning til å beregne arealet av grunnflaten og volumet av pyramiden.

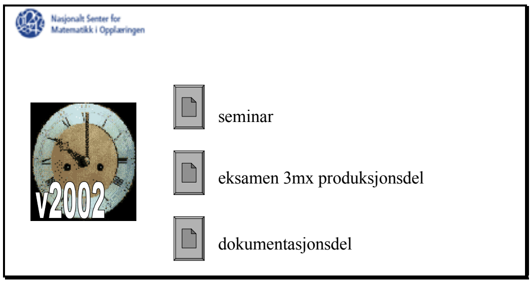
* Finn også volumet av pyramiden på en annen måte.

* Regn ut vinkelen mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AT}$. Regn også ut vinkelen mellom to andre vektorer.

Pyramiden tenkes delt i to deler av et plan som er parallelt med *xy*-planet, og slik at de to delene får samme volum.

En matematiker har påbegynt arbeidet med å løse oppgaven. Hun har laget en hjelpetegning og gjort noen notater. Se nedenfor.

31



IKT-FORSØKET, Seminar på Sundvollen Hotell onsdag 6/2 og torsdag 7/2 år 2002.
Innholdet på seminaret blir evaluering av prosjektet, litt fore-lesning fra ekstern foreleser, noe informasjon fra Læringssenteret, samt arbeid med vårens/høstens IKT-baserte eksamensoppgaver.

32

Formen på doringen inspirerte meg til nok en produksjonsoppgave. Etter to landings-forsøk i Khartoum undret jeg meg plutselig på om det var nok bensin lagret i flyvingen til å fly oss til en nødlanding i Jedda i Saudi-Arabia. Det er matematikk rundt oss over alt. Men IKT-forsøket med to dagers eksamen ble avviklet før doringen og flyvingen ble realisert.

33

Vil integrering av IKT i matematikk-faget åpne for flere oppgaver med undring? Er det samtidig mulig å holde fokus på helt nødvendige basiskunnskaper i faget. Kanskje det er mulig med et "både og".

34

Selv om såkalte "regnesvake" ikke har forutsetning for å bli med helt til mål – fra for eksempel det spesielle til det allment lovmessige – er vi forpliktet til også å gi denne gruppen elever gleden over å undre seg i matematikktimene. Et resultat kan i seg selv vekke begeistring, selv hos barn og unge som ikke fullt ut forstår hvorfor.

35 

Våren 2003 får skoler som bruker IKT-verktøy i 1MX, 1MY, 2MX, 2MZ, 3MX og 3MZ tilbud om såkalte IKT-tilpassede og todelte eksamens-oppgaver. I løpet av skoleåret utarbeides eksempelsett. Strukturen er som følger:

Delprøve I:

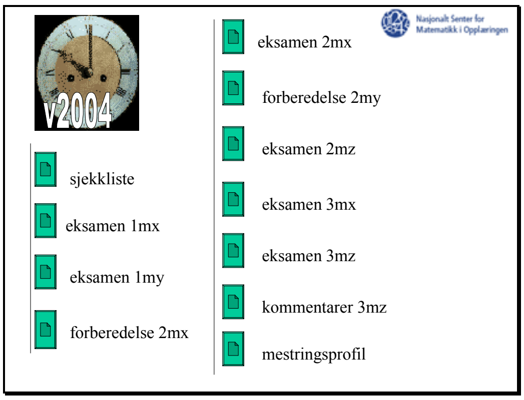
- Kun bruk av formelhefte.
- Varighet 90 min (1,5 time)
- Oppgaver i delprøve I bør være evaluering av på forhånd angitte basis-kunnskaper, hvor forståelsen ikke kan testes minst like godt i tilknytning til praktiske anvendelser i delprøve II.

Delprøve II:

- Med alle hjelpemidler unntatt ekstern kommunikasjon.
- Avanserte tekn. hjelpemidler tillates (bl.a. PC og symbol-behandlende kalkulator)
- Varighet på delprøve II er 3,5 timer.
- Anvendelse av matematikk på praktiske og teoretiske problemstillinger.
- For grunnkurs og VKI vil en av oppgavene være basert på problemstilling(er) fra et for-beredende arbeid.

Praktisk gjennomføring :

- Forberedelsesarket deles ut til alle elever som skal opp til eksamen et døgn (24 timer) før den individuelle eksamensprøven starter.
- Delprøve I og II leveres begge ut ved starten av eksamen. Etter 90 min. samles delprøve I inn for alle, og alle får tilgang til hjelpemidlene.
- Kandidater som bruker kortere tid enn 90 minutter på delprøve I kan starte med delprøve II, men da uten hjelpemidler.

36 

Utdanningsdirektoratet blir ofte utsatt for negativ kritikk i forbindelse med produksjon av eksamensoppgaver. Jeg synes det er på sin plass å minne om at eksamensarbeid er en meget krevende og ansvarsfull oppgave som involverte parter tar meget alvorlig.

En stor del av kritikken er etter min mening usaklig og kan skyldes skuffelse over manglende samsvar mellom egen undervisningen og vektlegging til eksamen, både når det gjelder form og innhold. Kritikeren avslører ofte uvitenhet om arbeidsrutiner i Utdanningsdirektoratet hva angår produksjon av eksamensoppgaver. Nedenfor følger deler av en sjekkliste for kvalitetssikring av eksamensoppgaver i matematikk. Sjekklisten er fra våren 2004.

For at sensur skal bli mest mulig rettferdig blir utvalgte sensorer bedt om å sende inn såkalte mestringsprofiler og kommentarer til forhåndsensurmøte. Se mestrings-profilen nedenfor. Det er min erfaring at Utdanningsdirektoratet arbeider meget profesjonelt med utarbeidelse av eksamensoppgaver og sensurering.

	Ja	nei
• Oppgaven er kontrollert **faglig**.	X	
• Oppgaven er **regnet gjennom på nytt etter** at oppgaven er reinskrevet og klar for trykking. (Sett deg i elevens sted, og sjekk **alt** som eleven vil trenge av opplysninger under eksamen.)	X	
• Det er sjekket **samsvar mellom henvisninger** innen oppgavesettet, til vedlegg, tabeller, skjemaer, dokumentasjon, figurer og bilder.	X	

• **Forside** med fagkode/kurs/linje/st.retning og riktig dato er sjekket.	X	
• Opplysningene på **side 2** (og ev. 3) i oppgavesettet er sjekket.	X	
• Hver eneste **bunntekst** og hvert **sidetall** er kontrollert.	X	
• **”abc-testen”**: nr. og bokstav på hver eneste deloppgave er sjekket.	X	
• Alle vedlegg, tabeller, skjemaer, dokumentasjon, figurer, tegninger og fotografier er **tydelige og lett leselige** i svart-hvittutgave.	X	

• Det er **faglig samsvar mellom bokmål- og nynorskversjonen.** (”Pekefingerkontrollen”: Bruk venstre og høyre pekefinger og kontroller bokstav for bokstav, tall for tall, ord for ord, setning for setning, avsnitt for avsnitt – avstand mellom avsnitt, tekst foran og etter innlimte elementer, siste setning på hver side, innrykk.)	kun bokmål	

Oppgavene kan trykkes:	X	

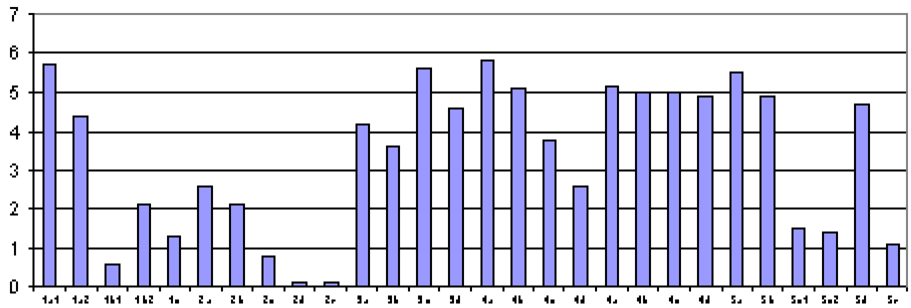
Kommentarer:

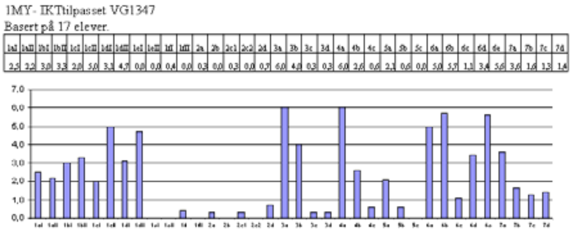
Dato: 19.mai 2004 **Navn:** Tor Andersen

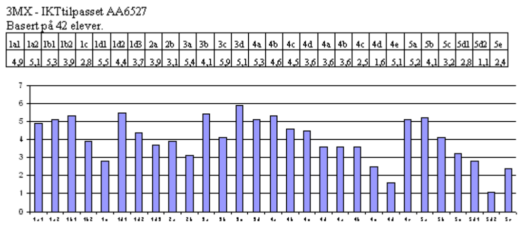
Mestringsprofil i matematikk – eksamen våren 2004.
Fra sensor Tor Andersen, Egge videregående skole, Steinkjer.

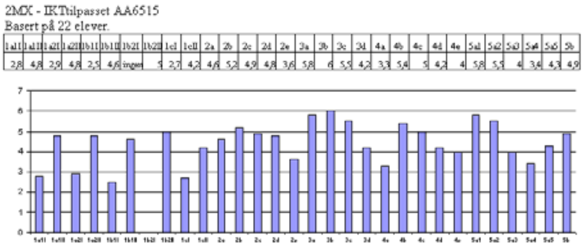
3MZ - IKTtilpasset AA6547
Basert på 24 elever.

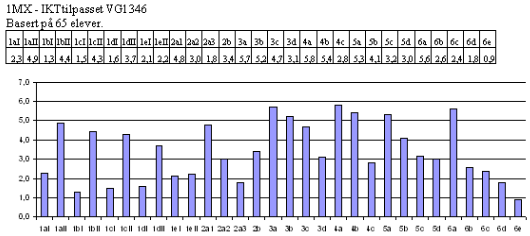
1a1	1a2	1b1	1b2	1c	2a	2b	2c	2d	2e	3a	3b	3c	3d	4a	4b	4c	4d	4a	4b	4c	4d	5a	5b	5c1	5c2	5d	5e
5,7	4,4	0,6	2,1	1,3	2,6	2,1	0,8	0,1	0,1	4,2	3,6	5,6	4,6	5,8	5,1	3,8	2,6	5,2	5	5	4,9	5,5	4,9	1,5	1,4	4,7	1,1











37


Men feil kan forekomme. Lærere og byråkrater er tross alt bare mennesker.

38


39 MOTIVASJONSPROBLEMER

Egentlig pakker jeg en standard problemstilling inn i en "setting" som jeg håper skal virke mer interessant for mine elever. Men er oppgaven "rik" nok til at dagens ungdom vil gå løs på problemstillingen med liv og lyst.

40


Et knippe bilder av "dagens ungdom".

"Var det kappe ståltråd du sa, gamle mann."

41

En liten historie som jeg kom over i ei bok om elektriske maskiner - 1929.

Fra kapitlet om vekselstrømsmaskiner siterer jeg følgende:

For å kunne komme fram til de moderne vekselstrømsmaskiner, har det vært nødvendig å utvikle en matematisk lærebygning av umåtelig omfang og med tinder som strekker seg opp i tankens luftigste høyder.

En student var oppe til eksamen for den store forsker og vitenskapsmann professor Bragstad ved Norges Tekniske Høgskole. Han ble hørt i teorien for motorer med kortslutningsanker, og han sto ikke fast. Med stor dyktighet rodde han den svære utvikling i havn og kom fram til formler for ytelse, dreiemoment osv. Professoren belønnet ham også med en god karakter og gratulerte med bestått eksamen.

Da sa studenten: "Herr professor! Siden vi nu kan snakke sammen som mann til mann, ville jeg gjerne få stille Dem et spørsmål, det er nemlig en ting jeg aldri har begrepet:

Hvorfor går egentlig en slik motor rundt?

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

42

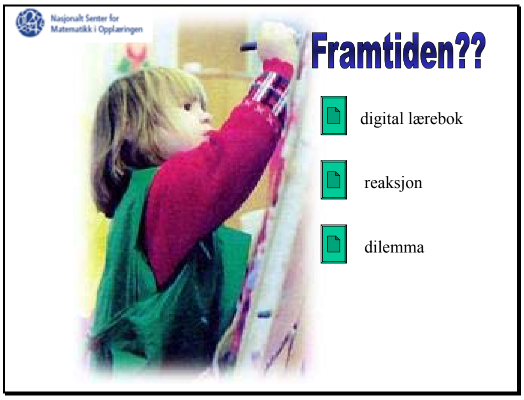
Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Moralen i historien er for så vidt meget oppmuntrende, da den peker på at selv ikke den som virkelig har trengt inn i teorien, forstår så meget.

Jeg mener bestemt at eksamen i matematikk er den faktor som alene har størst påvirkningskraft overfor lærere som under-viser i faget. Jeg tror eksamensoppgavene er mer retningsgivende for metode og nivå enn lære-bøkene og selve lære-planen.

43

44



Hvert eneste år driver hormon-strømmen stadig nye unge jenter fra Egge ungdomsskole oppover til Egge videregående. Det er neppe guttenes nyervervede trigonometri-kunnskap som jentene vil dele i kriker og kroker på vår skole.

Enkelte videregående skoler satser friskt på digital læring og ligger et hestehode foran den nye læreplanen som vil trå i kraft fra 2006. Men jeg forstår representanter for Utdanningsdirektoratet som blant annet skriver " *det er et dilemma når man på den ene side vil at eksamen skal ikt-baseres, samtidig som man vil at algebrakunnskapene skal bedres. Det er ikke sikkert at disse ønskene kan forenes sånn uten videre!"*

45

46

Vil forholdene endre seg når gjennom-snittsalderen blant matematikklærere i videregående skole omsider kryper nedover? Til det bedre?

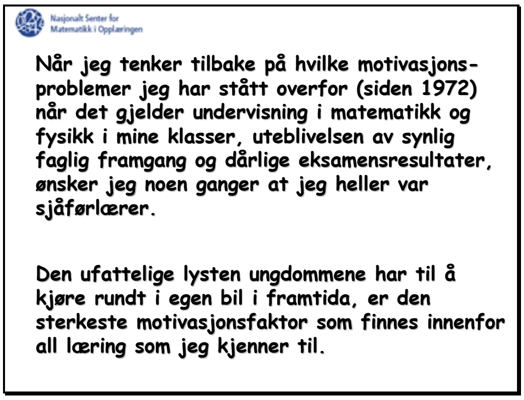
47

Er vi for lett påvirkelig og for snar til å hoppe på nye pedagogiske trender? Blir vi nødvendigvis bedre matematikklærere gjennom å veilede i stedet for å undervise?

48

Mon tro om alt gruppearbeid, prosjekt-arbeid og selvstendig arbeid som preger norsk skole, er tuftet på faglige og pedagogiske gevinster definert av læreren før ”selvstendigheten” starter.

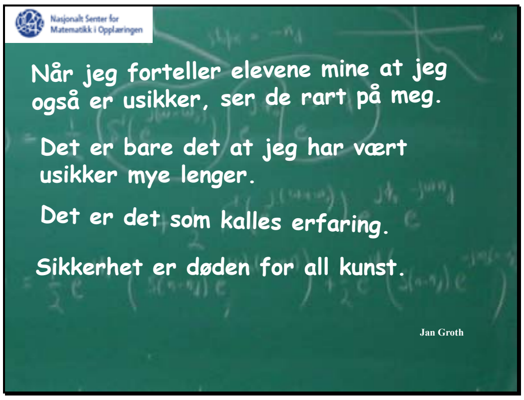
49



50

Men det skjøre korthuset som står og vakler, raser nok sammen for mange av mine elever når vi går ut av klasse-rommet og lukker døra etter en matematikktime.

51

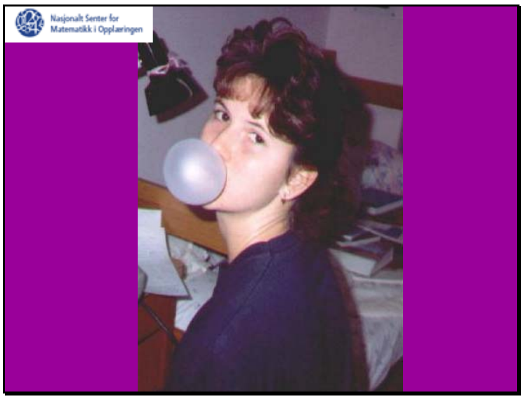


Kan vi kanskje slutte oss til Jan Groth å si ”sikkerhet er døden for all pedagogikk”?

52

Vi må holde undringen i hevd. Sitatet er fra Aristoteles.

53



Hun lurer kanskje på når bobla vil sprekke? La oss regne på problemet.

54

I perioder hvor jeg sliter med min egen arbeidsmoral og giv, har jeg erfart at monotoni og kjedsomhet representerer den største fare for framgang, både rent faglig og sosialt.

For å bryte monotonien, er det viktig å variere undervisningsmetoder.

Jeg erkjenner at periodevis bruk av grafregner, symbolregner og datamaskin i matematikk- og fysikkundervisningen, blir et middel til variasjon, og like mye et rent motivasjonsmiddel som et faglig verktøy.

Vi må ikke glemme den rent mental-hygieniske gevinst som variasjon i seg selv representerer. Jeg tenker selvfølgelig kun på pedagogikk.

55

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Vi bør vel ikke unnlate å nevne vår egen personlighet som menneske og lærer, i sammenheng med muligheter for å lykkes med å få elevene til å delta med åpne sanser i matematikkundervisningen.

Fokuseringen på personlighet, er ikke et resultat av at jeg på noen måte ser på meg selv som et idealtilfelle.

Men vi har vel erfart at elevene utmerket godt kan bli motivert bare på grunn av vår væremåte som lærer.

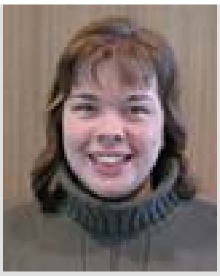
Gjennom å være entusiastisk og engasjert eller å opptre fordelaktig på andre måter (det vil si anspore, oppmuntre), kan vi lykkes med å få elevene til å arbeide med fagene.

Dersom det er perioder hvor dette talentet ikke er særlig fremtredende, kan vi forhåpentligvis med rimelig arbeid med oss selv, tross alt komme på talefot med elevene. Det absolutte minstekrav i så henseende, er at vi som lærere oppfører oss slik at elevene ikke vender ryggen til faget.

Vedlegg på neste side.

Følgende dokumenter finnes under hyperlinkene:

1	Faglig-pedagogisk dag - 24.november 1995
2	Vurdering av HP-38G - Grafisk programmerbar lommeregner
3	Bruk av grafisk lommeregner i 3MX våren 1998
4	Besøk i det franske undervisningsdepartement
5	Rapport - Østerrike, Nederland og Frankrike - 16.nov -21.nov 1998
6	Rapport - Østerrike, Nederland og Frankrike - 16.nov -21.nov 1998
7	Spesialoppgave 2MX eksamen våren 1999.
8	IT-forsøket OPPGAVESKISSER TIL DISKUSJON
9	Produksjonsdel 3MY vekstmodeller
10	PRODUKSJONSDEL - HELDAGSPRØVE I 3MX OG 3MY
11	DOKUMENTASJONSDEL - HELDAGSPRØVE I 3MX OG 3MY
12	Produksjonsdel 3MX. Sylinder skåret på skrå.
13	Produksjonsdel – diverse eksempler
14	OPPGAVE – produksjonsdelen 3MX – skisse til diskusjon på IKT-møtet 25.september 2000
15	PRODUKSJONSDEL 3MX – OMDREININGSLEGEME
16	Befolkningsstatistikk. Folkemengd etter alder, kjønn og sivilstand, 1. januar 2000
17	Flyvingene som drivstofftank
18	Oppgave - 2MX - produksjonsdel - Smykke
19	IKT-FORSØKET, Seminar på Sundvollen Hotell onsdag 6/2 og torsdag 7/2 år 2002.
20	PRODUKSJONSDEL – 2MX – V2002 Tema: Rettvinklet trekant og størst mulig rektangel
21	3MX eksamen våren 2002 Produksjonsdel: PYRAMIDEN
22	Eksempelsett for to-delt eksamen med ikt-tilpasning. 1MX/1MY. Januar 2003
23	Eksempelsett for to-delt eksamen med ikt-tilpasning. 2MX. Januar 2003
24	Eksempelsett for to-delt eksamen med ikt-tilpasning. 3MX/3MY. Januar 2003
25	Struktur for to-delt og IKT-tilpasset eksamen i matematikk.
26	AREALBEREGNING MED POLARKOORDINATER Muligheter og begrensninger på CASIO 9850.
27	Sjekkliste for kvalitetssikring av eksamensoppgaver
28	Mestringsprofil i matematikk – eksamen våren 2004.
29	Eksamensoppgaver våren 2004 to-delt og IKT-tilpasset
30	Digital lærebok
31	Dilemma i matematikk



Ann-Sofi Loo
är assistent i de matematiska ämnenas didaktik och forskarstuderande i pedagogik vid Institutionen för lärarutbildning i Vasa. Har tidigare verkat som klasslärare, främst i de lägre årskurserna. Intresseområde är matematiskt begåvade elever och hur man kan tillgodose deras behov inom ramen för normal klassrumsundervisning.

Matematiskt begåvade elever i åk 1-6

(**Ann-Sofi Loo** (ann-sofi.loo@abo.fi) är assistent i de matematiska ämnenas didaktik och forskarstuderande i pedagogik vid Institutionen för lärarutbildning i Vasa. Har tidigare verkat som klasslärare, främst i de lägre årskurserna. Intresseområde är matematiskt begåvade elever och hur man kan tillgodose deras behov inom ramen för normal klassrumsundervisning.)

Varje elev borde i skolan erbjudas möjlighet att få inhämta nya kunskaper och färdigheter på sin egen nivå. Då det gäller elever med svårigheter har vi flera möjligheter att ta till; stödundervisning, specialundervisning och även individuella läroplaner. Och det är bra. Men då det gäller bemötandet av de elever som vi brukar kalla begåvade kan man som lärare känna sig rätt så handfallen. Vad avses egentligen med att vara matematiskt begåvad? Hur hittar och upptäcker man de matematiskt begåvade eleverna? Och sist, men inte minst, hur skall man erbjuda dessa elever möjlighet att få utvecklas optimalt, dvs. vilken typ av undervisning behöver de? Föreläsningen tar upp några olika synsätt på detta dilemma. Därtill presenteras ett pågående projekt där föreläsaren tillsammans med några lärare på fältet försöker utveckla och utvärdera metoder som kunde lämpa sig för sammanhanget.

Bakgrund

Under de år som jag verkade som klasslärare, vilket skedde främst i de lägre årskurserna, kände jag ofta frustration över de matematiskt duktiga eleverna. Vad skulle jag ge dem för tilläggsmaterial att jobba vidare med? Var hittar man sådant material? Hur får jag dessa elever att utvecklas på sin egen nivå så de inte tröttnar på grund av leda?

I läroplanen från 1994 finns det stöd för detta. Där sägs: *”Effektiv undervisning innebär framför allt att man erbjuder optimala inlärningsmöjligheter och med pedagogiska medel hos eleven skapar och bevarar en positiv inre vilja att lära sig.”* Så långt alltså väl, men exempel på hur man praktiskt skall gå tillväga är inte lätta att hitta.

Ur elevperspektiv kan man se det som viktigt att alla får chans att lära sig på sin egen nivå och få uppgifter som är meningsfulla och motiverande. Jag har en känsla av att vi kommit rätt långt på väg med dessa tankegångar vad gäller svaga elever, och det är förstås mycket bra, men vi behöver också uppmärksamma de elever som klarar sig bra och behöver utmaningar. Sett ur samhällets perspektiv är det också av vikt att vi i framtiden säkrar tillgången av matematiskt kunniga människor som driver utvecklingen framåt.

Begåvning – definition

Begreppet begåvning är mycket mångtydigt och beror på såväl kulturella som kontextuella faktorer. Det har gjorts flera försök att definiera och förklara vad begåvning är. Jag skall nedan ange några av dessa.

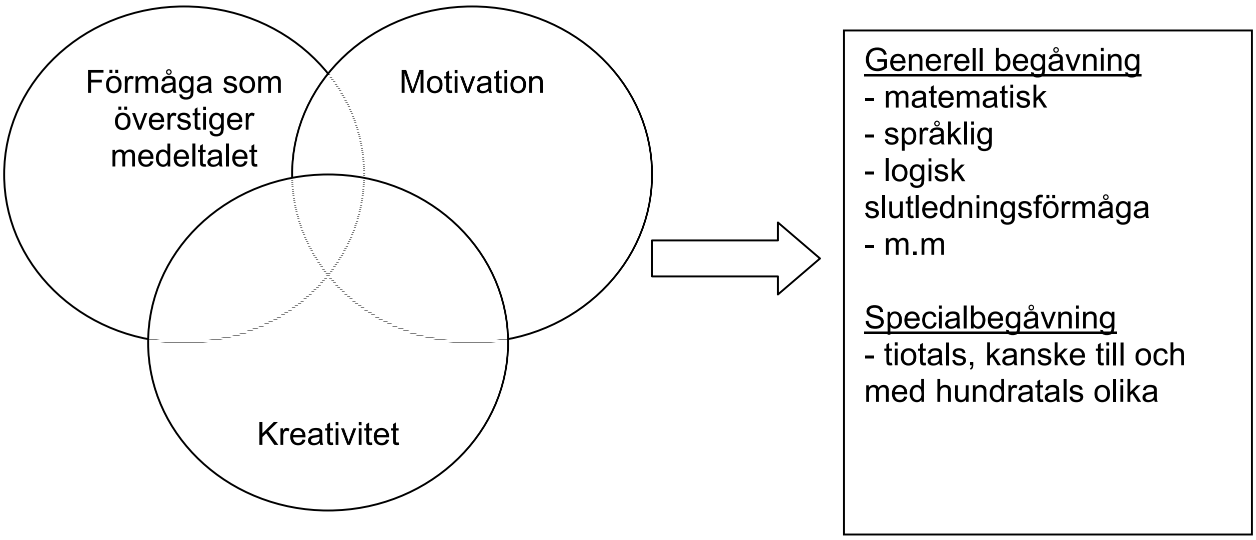
Marland-rapporten

År 1972 fick Förenta staternas kongress en rapport som omfattade en indelning av begåvade barns förmåga i följande delområden:

1. Allmän intellektuell begåvning
2. Teoretisk begåvning
3. Förmåga till produktivt och kreativt tänkande
4. Ledarförmåga; personligt ledarskap
5. Konstnärlig begåvning
6. Psykomotorisk färdighet

Denna modell kritiserades bl.a. av Renzulli, som ansåg att indelningen inte beaktade motivationsfaktorer, att kategorierna överlappade varandra samt att de som använde den i praktiken tenderade att misstolka den. I stället valde han att framställa begåvning genom tre cirklar, vilka åskådliggörs nedan.

Renzullis modell



Det är skäl att påpeka att Renzulli noggrant påpekade att ingen av dessa delar ensam utgör begåvning utan att alla tre delarna behövs.

Gardners sju intelligenser

Gardner delar in intelligens i sju olika kategorier. Jag kommer bara kort att nämna dessa här, eftersom jag i huvudsak koncentrerar mig på matematisk begåvning.

1. Lingvistisk intelligens
   - ❑ Förmåga att använda ord ändamålsenligt.
   - ❑ Retorik, memoreringsteknik, informationsförmåga.
2. Logisk – matematisk intelligens
   - ❑ Förmåga att använda siffror ändamålsenligt.
   - ❑ Kategorisering, klassificering, slutledning.
3. Spatial intelligens
   - ❑ Förmåga att uppfatta den visuella - spatiala världen exakt.
   - ❑ Visualisering, orientering i tre dimensioner.
4. Kroppslig – kinestetisk intelligens

- ❑ Förmåga att skickligt använda hela kroppen.
- ❑ Koordination, balans, styrka, smidighet.

5. Musikalisk intelligens
   - ❑ Förmåga att uppfatta, urskilja olikheter, omforma och uttrycka olika sorters musik.
   - ❑ Känsla för rytm, tonhöjd, melodi, klangfärg.
6. Interpersonell intelligens
   - ❑ Förmåga att uppfatta och urskilja skillnader i bl.a. humör och avsikter hos andra.
   - ❑ Känslighet för ansiktsuttryck, röstlägen, gester.
7. Intrapersonell intelligens
   - ❑ Självkännedom.
   - ❑ En riktig bild av sig själv, starka och svaga sidor, självdisciplin.

Krutetskiis tre matematiska typer
Krutetskii definierar i *"The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren"* från 1976, förmågan att lära sig matematik i form av tre olika typer. Dessa är den analytiska, den geometriska och den harmoniska.

Den analytiska typen är välutvecklad på det verbalt-logiska planet, medan den visuella-bildliga delen är svag. Den geometriska typen har en dominerande visuell-bildlig del medan den verbalt-logiska delen är svag. Vilken typ en person hör till är avgörande för på vilket sätt han eller hon tolkar och löser matematiska problem. Den harmoniska typen kan tolka och lösa problem såväl analytiskt som geometriskt.

Lovande istället för begåvad?

I jakten på en bra och heltäckande definition för dessa elever som vi som lärare nog känner igen, men har svårt att namnge, hittade jag ett utdrag ur en rapport given av NCTM – Task Force on the Mathematically Promising (här återgiven på originalspråk):
"Students with mathematical promise are those who have the potential to become the leaders and problem solvers of the future. We see mathematical promise as a function of

- *Ability*
- *Motivation*
- *Belief*
- *Experience or opportunity"*

För närvarande anser jag att denna benämning, dvs. lovande, samt det som ingår i definitionen, ligger närmast det som jag själv avser med dessa elever som är i behov av särskilt stöd på grund av att de är matematiskt kapabla.

Identifiering av matematiskt lovande elever

Innan man sätter igång med att fundera över *hur* man skall identifiera de elever som hör till kategorin lovande, bör man ställa sig frågan *varför* dessa skall identifieras? För att kunna svara på den senare frågan måste man veta vilka åtgärder som följer på en dylik identifiering. Skall dessa elever särbehandlas och vad händer om man missar någon som borde ha identifierats som lovande?

Här igen tror jag att det är lärarens sunda förnuft som måste råda. Genom att observera och prata med eleverna kommer läraren nog underfund med vilka som behöver extra utmaningar. Det gäller bara att vara uppmärksam på det faktum att vissa elevers förmågor kan kamoufleras och behöver lockas fram. Och naturligtvis behöver man som lärare erbjuda utmanande uppgifter och problem för att man skall se vilka som klarar av och är i behov av dessa möjligheter.

Ett fältprojekt

Sedan hösten 2004 samarbetar jag med två lärare i grundskolans tredje årskurs. Bägge lärarna jobbar på samma skola och har ett väl fungerande samarbete. Dessa lärare har gått med på att, med stöd och handledning av mig, arbeta med kreativ matematik i skolan. Kreativ matematik innebär i det här fallet att de använder sig av öppna problem och problemlösning i grupp. Varje vecka har de en extra knepig mattenöt som de även får fundera på hemma. De elever som blir snabbt färdiga med sina uppgifter skall ges utmanande uppgifter istället för att fortsätta att öva på sådant som de redan kan.

Ungefär en gång i månaden besöker jag klasserna och håller en lektion med olika inslag av kreativ matematik. På detta sätt lär jag och eleverna känna varandra och jag får en uppfattning om vad som är genomförbart i just dessa klasser. ”Matteprofessorns” besök är mycket efterlängtade och uppskattade.

Efter två månader frågade jag lärarna vad de tänker och tycker om detta arbetssätt. Lärare A, som från början nog var positivt inställd men inte ansåg sig kunna så mycket, tyckte att *”för mig är det nytt, roligt, enormt givande att få göra så här med handledning”*. Hon ansåg vidare att ivern bland eleverna är stor och att arbetssättet upplevs motiverande. På frågan vem som gynnas av att jobba med kreativ matematik svarade hon att det är de starka eleverna som gör det. Lärare M, som redan tidigare jobbat på det här sättet, ansåg att hon föredrar denna typ av undervisning. Hon å sin sida ansåg att alla gynnas av detta arbetssätt; *”... de duktiga eleverna får stimulans och behöver inte jobba sida upp och sida ner med sådant de redan kan, svaga elever är del i en grupp där man lyckas och får positiva erfarenheter av matten”*.

Jag skall fortsätta att följa med dessa klasser och också dokumentera hur eleverna upplever ämnet matematik, sig själva som matematiker och det att ”utsättas” för utmaningar. Min förhoppning är att samma lärare skall undervisa dessa klasser åtminstone i två års tid, gärna i fyra år, så att jag kan följa upp hur det går och eventuellt få kunskap och erfarenhet som även andra lärare kan ha nytta av i sin matematikundervisning.

Litteratur

Providing opportunities for the mathematically gifted K-12. NCTM.(1987).

Armstrong, T.(1998). *Barns olika intelligenser.* Falun. Brain Books.

Finne, L. (1994). *Det matematiska klassrummet.* Pedagogiska fakulteten, Åbo Akademi, Vasa, Finland.

Kirk, Gallagher & Anastasiow. *Educating Exceptional Children*. 9th ed. (2000). Boston. Houghton Mifflin.

Krutetskii, V.A. (1968/1976). *The psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Chicago: The University of Chicago Press.

Sheffield, L.(ed.)(1999). *Developing Mathematically Promising Students*. NCTM. Reston.

Irene Skoland Andreassen *er student ved mastergradsprogrammet ved Høgskolen i Agder.*
Mastergradsstudiet er en del av et større forskningsprosjekt ved hia, KUL-LCM (Kunnskap-Utdanning-Læring – Learning Communities in Mathematics). Hun har permisjon fra sin lærerstilling på Fjære ungdomsskole i Grimstad, hvor hun har vært ansatt siden 1993.

Irene Skoland Andreassen, Barbro Grevholm og Trygve Breiteig

Innsikt i elevers prestasjoner innenfor tall og algebra

Innledning

Ved Høgskolen i Agder arbeider vi med et flerårig forskningsprojekt sammen med lærere i grunnskoler og videregående skoler i distriktet. Prosjektet er finansiert av Norges forskningsråd innenfor programmet KUL, Kunnskap, Utdanning og Læring. Vårt prosjekt handler om å skape og studere læringsfelleskap i matematikk – *Learning Communities in Mathematics*. I denne artikkelen vil vi presentere en delstudie fra prosjektet.

Hensikten med prosjektet er å bygge opp læringsfelleskap blant matematikklærere i sju utvalgte skoler og matematikkdidaktikere ved høgskolen. Gjennom de skapende læringsfellesskapene vil vi utvikle matematikkundervisningen, og på sikt kunne tilby elever bedre muligheter for å lære matematikk. Hva dette skal innebære mer konkret må vokse fram som et resultat av de prosessene som skapes. For å kunne forstå og dokumentere hva som skjer under prosjektet, ønsker vi å danne oss et bilde av hvordan tilstanden er med tanke på elevenes læringsutbytte når vi starter, og hvordan dette utvikler seg.

En måte å kartlegge elevers kunnskaper på, er å la dem løse oppgaver på spesielt utviklede matematiske tester. Vi er klar over at dette ikke lar oss få vite noe om elevenes kunnskaper når det gjelder f.eks. muntlig framstilling, eller deres evne til å resonnere matematisk, eller deres strategier ved utforsking og problemløsing. Vi får kunnskaper bare om de områdene i matematikken og læringen som vi kan teste. Men av praktiske grunner, av kostnads- og av tidsgrunner, er en tradisjonell test, som er omhyggelig utformet, ofte det mest realistiske verktøy. Raskt og sikkert kan det gi oss et bilde av elevenes kunnskaper. Denne delstudien tar opp noen resultater fra en samling tester i matematikk som vi har utviklet og brukt innenfor prosjektet.

Kartlegging av elevers prestasjoner innenfor tall og algebra

I nesten all undervisning forekommer situasjoner der læreren skal bedømme hver elevs arbeid og sette en karakter. Det er gjennomført svært mye forskning omkring evaluering og kartlegging av elevers læringsutbytte, og det er ikke mulig å beskrive resultatene kort. For å få en oversikt over aktuell internasjonal forskning henvises til Norman Webbs artikkel Assessment of students’ knowledge of mathematics: Steps toward a theory (Webb, 1993), og til de to bøkene fra ICMI-studien fra 1993 om vurdering (Niss, 1993a og 1993b). En rekke rapporter er publisert omkring de store internasjonale undersøkelsene av elevers prestasjoner som er gjennomført de siste tiårene. (Se f.eks. Robitaille & Travers, 1992; Brekke, Kobberstad, Lie & Turnmo, 1996; Jaworski & Phillips, 1999; Kaiser, Luna & Huntley, 1999).

Når det gjelder forskning om hvordan elever tenker og presterer innenfor tall, tallregning og algebra, finner vi en rekke forskningsresultater oppsummert i Handbook of Research on mathematics teaching and learning (Grouws, 1992). Spesielt kan nevnes artiklene av Fuson, Greer og Kieran. De norske studiene som vi har brukt ved forberedelsen av våre instrumenter, bygger i høy grad på disse internasjonale resultater (Brekke, 1995a; Brekke, Grönmo & Rosén, 2000).

Spørsmål om hvordan elevers læring i matematikk og lærernes vurdering av dette spiller sammen, er viktige og interessante. Også slike aspekter er studert, og interessante resultater fins. Se f.eks. Leder (1992). De resultater vi finner spesielt verdifulle for vår studie, har vi kommentert nedenfor til den respektive oppgaven. Vi har også reflektert over slike resultater i avsnittet om diskusjon og konklusjon. Derfor har vi nøyd oss her med bare å nevne kort hvilke studier som har vært av spesiell verdi for denne studien.

Metode og gjennomføring

Innenfor rammen av KUL-LCM-prosjektet har vi utformet instrumenter for å teste elever på de skoler som er tilknyttet prosjektet. Utvikling av disse instrumentene har foregått i et samarbeid mellom Trygve Breiteig, Barbro Grevholm og Irene Skoland Andreassen. Per Sigurd Hundeland, som er doktorgradstipendiat ved HiA, har også vært involvert i denne prosessen.

For å sikre kvaliteten på oppgavene har vi stort sett valgt oppgaver som tidligere er blitt utprøvd i andre studier. Noen av oppgavene er bearbeidet for å passe til et ønsket alderstrinn. Vi har anvendt oppgaver fra KIM-prosjektet (Kvalitet i matematikkundervisningen, Brekke, 1995a) og Evaluering av Reform 97 (Alseth, Breiteig og Brekke, 2003). Vi har hentet oppgaver fra to internasjonale studier. Disse er Kassel-Exeter-prosjektet (Hinna, 1996; Jaworski & Phillips, 1999) og Third International Mathematics and Science Study (Brekke, Kobberstad, Lie og Turnmo, 1998). Hensikten er at oppgavene skal teste sentrale kunnskaper og ferdigheter i matematikk innenfor noen av fagets områder.

Vi har testet elever på 4., 7. og 9. trinn i grunnskolen, og 1. trinn i den videregående skolen. Det ble utviklet to forskjellige tester for de to første og en for hvert av de to siste trinnene, og oppgavene er tilpasset elevenes alder. Noen oppgaver ble gitt på flere alderstrinn, dette for å kunne se eventuelle endringer i forhold til elevenes modning.

Testene ble gjennomført i september og oktober 2004. Elevene gjennomførte testene i en vanlig matematikktime, hvor klassens lærer var til stede. Læreren tildelte hver elev et kodenummer, og kun læreren vet hvilken elev som har den respektive koden. På denne måten er besvarelsene anonyme for alle unntatt klassens lærer, for å sikre hver elevs integritet. Vi ønsket at testene skulle kunne inngå i en longitudinell studie, for på den måten å teste elevenes fremgang i matematikk. Den samme elevgruppen vil derfor etter planen bli testet på nytt våren 2005. Disse testene, eventuelt bearbeidet, skal kunne brukes over et lenger tidsrom enn det som til nå er fastlagt.

Resultater og kommentarer

På 1. trinn i videregående skole ble 236 elever fra to forskjellige skoler testet. Testen omfattet emnene tall og algebra. Vi vil nå vise noen av resultatene.

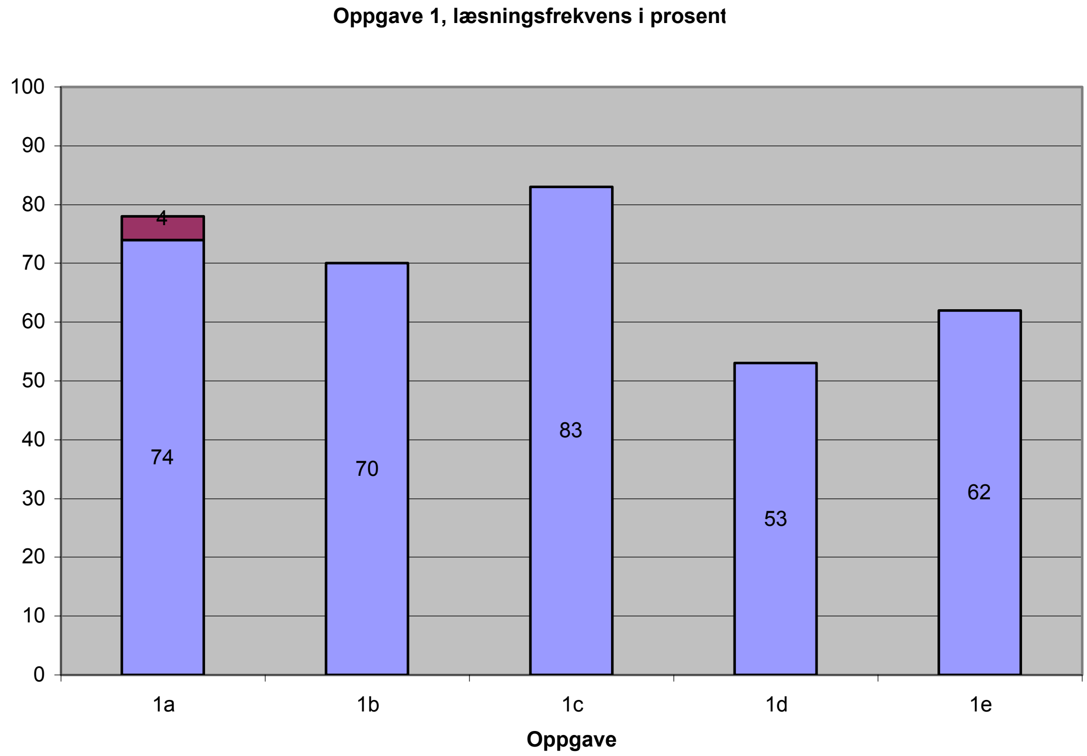
Vi velger nå å presentere et lite utsnitt og ser på fire oppgaver, som er hentet fra testen for 1. trinn i videregående skole. Oppgavene tester sentrale kunnskaper som ligger innenfor grunnskolens pensum. Først presenteres oppgaven. Deretter følger resultatet med løsningsfrekvens i prosent, og påfølgende kommentarer til resultatene. Riktige svar, og de vanligste feilsvarene vil deretter bli presentert og kommentert.

Tallforståelse og regning

Oppgave 1

a $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$ **b** $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$

c 900 : 30 = **d** $70 \cdot 0{,}3 =$ **e** $60 \cdot 450 =$



Alle disse fem oppgavene kan løses ved bruk av prosedyrer, og tester dermed elevenes ferdigheter i å kunne utføre operasjoner etter en skrittvis algoritme. For mange er det likevel mulig å løse oppgavene ved hoderegning. Spørsmålet blir da om elevene har gode nok strategier og begreper for å regne slike oppgaver i hodet. Søylediagrammet over viser at det går ganske bra i de tre første oppgavene, men så faller løsningsfrekvensen til henholdsvis 53 % og 62 % i de to siste. Spørsmålet som da melder seg, er om det er urovekkende at bare litt over halvparten av elevene i videregående skole klarer disse multiplikasjonsoppgavene.

Oppgave 1a

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$$

Tabell 1. Oppgave 1a: Svarfordeling i prosent.

$\frac{3}{4}$ (Riktig svar)	**74**
$\frac{6}{8}$ (Riktig svar, men ikke forenklet)	**4**
$\frac{2}{6}$	8
$\frac{2}{4}$	2
Andre svar (19 forskjellige)	9
Ubesvart	3

I denne oppgaven kan elevene svare intuitivt, siden det inngår enkle og velkjente brøker. Her burde man forvente at opp mot 100 % svarer rett. For å svare riktig holder det med forståelse av enkle begreper om brøk. Mye kan tyde på at mange elever ikke har tillit til å tenke selv, men at de isteden prøver å følge en regel. Elever er kanskje ikke vant til å lage seg en kontekst, hvis det ikke er oppgitt noen? Man ville muligens oppnå et bedre resultat om oppgaven hadde vært konkretisert i form av f.eks. timer på klokka eller pizza? Dersom elevene velger å løse oppgaven ved hjelp av algoritme, må de erstatte en av brøkene (1/2) med en likeverdig brøk (2/4). Det blir da et spørsmål om elevene har begrepet likeverdige brøker.

8 % av elevene svarer 2/6, ved at de adderer teller med teller, og nevner med nevner. Det er tankevekkende at så mange holder på en slik uriktig algoritme. Mengden av ulike, andre svar er overraskende stor.

Oppgave 1b

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=$$

Tabell 2. Oppgave 1b: Svarfordeling i prosent.

$\frac{1}{6}$ (Riktig svar)	**70**
$\frac{5}{6}$	8
$\frac{1}{1}$	4
$\frac{0}{1}$	2
Andre svar (10 forskjellige)	7
Ubesvart	9

Denne oppgaven så vi på som kognitivt noe mer krevende enn den forrige, og den har også en lavere løsningsfrekvens. De som har svart 5/6 har funnet summen av brøkene istedenfor differensen. Det betyr at disse elevene klarer å erstatte begge brøkene med likeverdige brøker, hvor minste felles nevner for dem er 6, og at de, med riktig operasjon, burde fått riktig svar. Dette viser at den manglende begrepsforståelse gjør at elevene får like store problemer i oppgave 1a som i 1b.

Svaret 1/1 kommer trolig fra subtraksjon av tellere for seg og nevnere for seg, i kombinasjon med at 1 – 1 får bli 1. Også her er antallet uriktige svarvarianter overraskende stort.

Oppgave 1c

900 : 30 =

Tabell 3. Oppgave 1c: Svarfordeling i prosent.

30 (Riktig svar)	**83**
300	2
27000	2
3	1
Andre svar (14 forskjellige)	5
Ubesvart	7

Oppgave 1c har den høyeste løsningsfrekvensen av de fem oppgavene. Man har her en enkel tallregningsoppgave, hvor det kun inngår hele tall, hele antall hundre og antall ti. Operasjonen er divisjon, og svaret blir et helt antall ti. Rundt en av seks elever svarer feil.

Oppgave 1d

$70 \cdot 0{,}3 =$

Tabell 4. Oppgave 1d: Svarfordeling i prosent.

21 (Riktig svar)	**53**
2,1	4
210	3
23,33	2
2100	2
Andre svar (28 forskjellige)	14
Ubesvart	22

Problemet med oppgave 1d er at man skal multiplisere med et desimaltall som er mindre enn 1, og det viser seg at denne oppgaven har lavest løsningsfrekvens av disse fem oppgavene. Svarene 2,1, 210 og 2100 viser elevenes vanskeligheter med å forstå tallenes størrelsesorden. Den lave løsningsprosenten viser også deres mangel på strategier av typen: ta 1/10 og multipliser med 3.

Svaret 23,33 kommer fra at disse elevene oppfatter 0,3 som 1/3, en interessant misoppfatning. Her er antallet ulike feilsvar meget stort.

Oppgave 1e

$60 \cdot 450 =$

Tabell 5. Oppgave 1e: Svarfordeling i prosent.

27000 (Riktig svar)	**62**
2700	10
24300	3
Andre svar (27 forskjellige)	15
Ubesvart	10

Denne oppgaven krever ferdighet med enkel tallregning i form av hoderegning, eller regning med papir og blyant. Elevenes manglende ferdighet i å ta hensyn til nullene fører til en del av feilene som gjøres i denne oppgaven. Det at hele 29 ulike typer av feilsvar er gitt, tyder i tillegg på usikkerhet, og på manglende regneferdigheter hos elevene. En elev med god talloppfatning burde kunne skrive om 60 til 2 · 30, og deretter beregne 2 · 450 = 900. Problemet er da overført til å beregne 30 · 900, som burde være en lett hoderegningsoppgave. Et spørsmål er om norske lærere i grunnskolen diskuterer slike metoder (nemlig å splitte opp) med elevene.

Sammenligning av resultater

De fem oppgavene som nå er diskutert, er tidligere blitt brukt i Kassel-Exeter undersøkelsen (Hinna, 1996) og i Evaluering av Reform 97 (Alseth, Breiteig og Brekke, 2003). I disse undersøkelsene ble aldersnivået tilsvarende nåværende 9. klasse testet, men det kan likevel være av interesse å sammenligne resultatene.

Tabell 6. Sammenligning av resultater. Løsningsfrekvens i prosent.

Oppgave	Kassel-Exeter 8. kl (1994)	Evaluering av R97 9. kl (2002)	1 vgs (2004)
1a	67	32	74
1b	60	17	70
1c	75	59	83
1d	68	37	53
1e	71	43	62

Det man særlig legger merke til i denne tabellen, ved siden av nedgangen fra 1994 til 2002, er at elever i daværende 8.klasse i 1994-undersøkelsen gjorde det bedre på oppgave 1d og 1e enn elevene på 1. trinn i den videregående skolen gjorde det i vår undersøkelse 2004. Kanskje er økt bruk av og dermed større avhengighet av kalkulator, og mindre trening av regneferdigheter med papir og blyant en av årsakene? Oppgavene 1c og 1d kan være en type oppgaver, hvor elevene normalt straks vil ta i bruk kalkulator i stedet for å tenke selv. Mindre fokus på algoritmer, øvelse og drill, kan være en annen, kanskje medvirkende, forklaring. Spørmålet er da om det er kompensert med en større vektlegging på begrepskunnskaper og forståelse i undervisningen.

Valg av regneoperasjon

Oppgave 6 og oppgave 7

6 Sett ring rundt *alle* regneuttrykkene som passer til regneoppgaven:

a *1 liter hvetemel veier 0,8 kg. Hvor mye veier 0,7 liter hvetemel?*

$0,8 \cdot 0,7$ $0,8 : 0,7$ $0,7 : 0,8$ $0,8 - 0,7$ $0,8 + 0,7$ $0,7 \cdot 0,8$

b *Kaker skal fylles i bokser, med 0,75 kg i hver. Hvor mange bokser trenger man til 6 kg kaker?*

$6 \cdot 0,75$ $6 : 0,75$ $0,75 : 6$ $0,75 \cdot 6$ $6 - 0,75$ $6 + 0,75$

c *Anne kjøper bananer i en butikk til 13,50 kr per kg. Hvor mye kan Anne kjøpe for 10,50 kr?*

$13,50 \cdot 10,50$ $10,50 : 13,50$ $13,50 : 10,50$ $13,50 - 10,50$ $13,50 + 10,50$

7 Skriv et regnestykke som passer for å løse oppgaven: (Du skal ikke regne det ut).

a *1 kg svinekoteletter koster 65,50 kr. Hva koster 0,76 kg?*

....

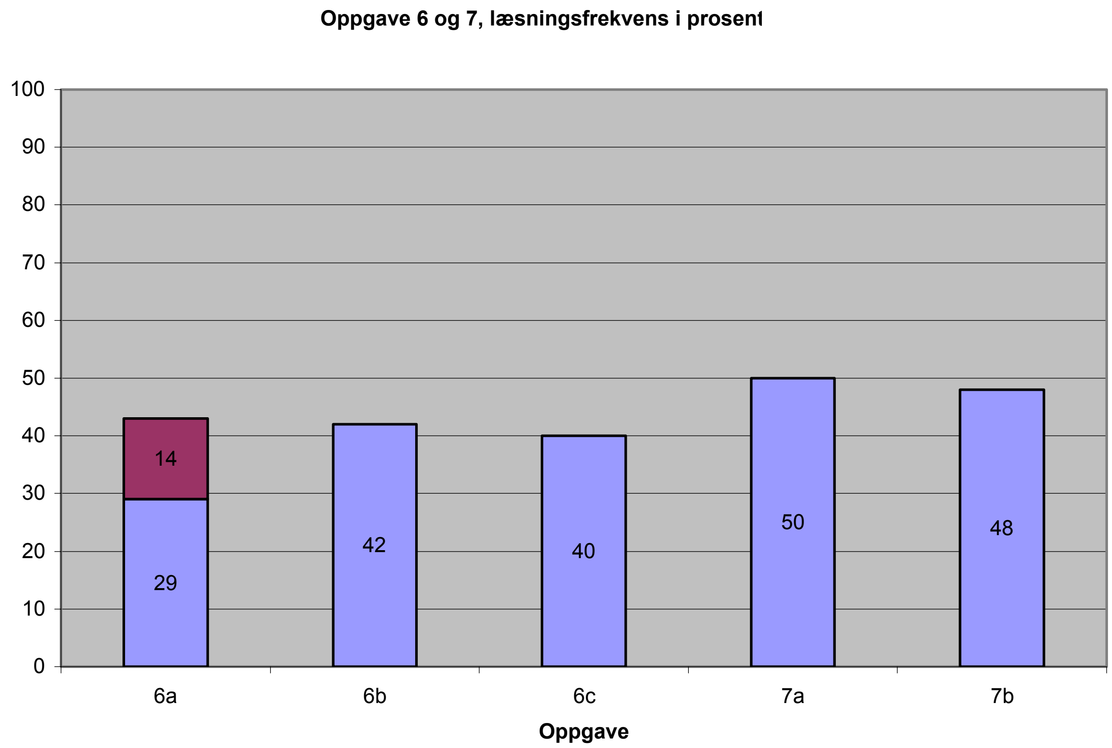
b *Et terrengløp går i ei løype som er 5,6 km. Hvor mange engelske mil er det? (Ei engelsk mil er 1,609 km).*

....

I hver av disse oppgavene skal elevene finne riktig regneuttrykk for å løse en tekstoppgave.

Oppgavene gir oss informasjon om hvordan elevene forstår regneoperasjonene. Oppgave 6 er en flervalgsoppgave, mens oppgave 7 er en åpen oppgave. Svarene skal ikke regnes ut i disse oppgavene, elevene skal kun velge riktig regneoperasjon. Vi velger å se de to oppgavene i sammenheng.

Oppgavene gjelder ulike situasjoner fra dagliglivet, der matematiske kunnskaper anvendes. Matematikk fra dagliglivet er understreket i L97. Andelen riktige svar var lavere enn forventet. Vi ser av søylediagrammet at mindre enn halvparten av elevene på 1. trinn på videregående skole klarer å velge riktig regneoperasjon til oppgavene. Oppgave 7 har noe høyere løsningsfrekvens enn oppgave 6. Årsaker til dette kan være forhold ved teksten og utformingen av oppgaven, og ved tallene som inngår.



Vi vil nå vise en oversikt over de vanligste feilsvarene, og på bakgrunn av det prøve å si noe om hvorfor dette er så vanskelig for elevene.

Oppgave 6a

1 liter hvetemel veier 0,8 kg. Hvor mye veier 0,7 liter hvetemel?

0,8 · 0,7 0,8 : 0,7 0,7 : 0,8 0,8 – 0,7 0,8 + 0,7 0,7 · 0,8

Tabell 7. Oppgave 6a: Svarfordeling i prosent.

0,8 · 0,7 og 0,7 · 0,8 (Riktig svar)	**29**
0,8 · 0,7 eller 0,7 · 0,8 (Delvis riktig svar)	**14**
0,8 : 0,7	20
0,7 : 0,8	11
0,8 : 0,7 og 0,7 : 0,8	4
Andre svar	14
Ubesvart	8

43 % av elevene velger riktig regneoperasjon i denne oppgaven. 14 % av disse tenker ikke på multiplikasjon som kommutativ operasjon. I denne oppgaven er både multiplikand og multiplikator et desimaltall som er mindre enn 1. Det at 35 % velger divisjon, kan skyldes at multiplikasjon med multiplikator mindre enn 1 ikke passer inn i modellen for gjentatt addisjon. Det viser at multiplikasjonsbegrepet ikke er tilstrekkelig rikt til å takle denne oppgaven.

Oppgave 7a

1 kg svinekoteletter koster 65,50 kr. Hva koster 0,76 kg?

....

Tabell 8. Oppgave 7a: Svarfordeling i prosent.

65,50 · 0,76 eller 0,76 · 65,50 (Riktig svar)	**50**
65,50 : 0,76	26
65,50 : 100 · 0,76	3
0,76 : 65,50	2
Andre svar	7
Ubesvart	12

I denne oppgaven er det bare multiplikator som er mindre enn 1. Vi ser at 26 % velger divisjon (65,50 : 0,76) som operasjon. Dette kan skyldes at svaret skal bli mindre enn 65,50, og misoppfatningen om at multiplikasjon gjør svaret større og divisjon gjør svaret mindre, kan være en mulig årsak (Brekke, 1995b). I tillegg har vi at en multiplikasjon hvor svaret blir mindre enn multiplikand står i konflikt med modellen for gjentatt addisjon.

Sammenligning av oppgave 6a og 7a

Tabell 9. Oppgave 6a og 7a: Løsningskombinasjoner i prosent.

Riktig svar i oppgave 6a og 7a	33
Riktig svar i oppgave 6a (Galt svar i oppgave 7a)	10
Riktig svar i oppgave 7a (Galt svar i oppgave 6a)	17

Til en viss grad kan oppgave 6a sammenlignes med 7a, men det viste seg at selv om en elev får riktig svar i 6a, kan den samme eleven velge feil regneoperasjon i 7a, og motsatt. Vi ser at oppgave 7a faller noe lettere enn 6a. Dette kan skyldes at i 7a er det bare multiplikator som er mindre enn 1, samt at konteksten med kr og kg er mer velkjent enn liter og kg.

Oppgave 6b

Kaker skal fylles i bokser, med 0,75 kg i hver. Hvor mange bokser trenger man til 6 kg kaker?

6 · 0,75 6 : 0,75 0,75 : 6 0,75 · 6 6 – 0,75 6 + 0,75

Tabell 10. Oppgave 6b: Svarfordeling i prosent.

6 : 0,75 (Riktig svar)	**42**
6 · 0,75 og 0,75 · 6	16
6 · 0,75 eller 0,75 · 6	19
Andre svar	19
Ubesvart	4

Dette er en divisjonsoppgave der divisor er mindre enn 1. Oppgaven krever tankemodell for målingsdivisjon. Man kan se på dette som gjentatt subtraksjon. Vi har 6 kg og tar så vekk 0,75 kg som vi legger i en boks, så nye 0,75 kg i neste boks, og så videre til vi ikke har flere kaker igjen. Oppgaven er også gitt i KIM-prosjektet, og Brekke (1995b) peker på at denne tankemodellen er like enkel å få tak i som modellen for delingsdivisjon, der en har gitt tallet på deler. Vanskeligheten i denne oppgaven er at målet på delen er gitt som et desimaltall. 35 % tror at de må bruke multiplikasjon i denne oppgaven. Grunnen til dette kan være at de ser en gruppering av 0,75, og tolker dette til gjentatt addisjon 6 ganger. Brekke (1995b) mener at oppgaven viser at det bør arbeides mer alvorlig med å bygge opp tankemodeller som passer til situasjoner der en trenger målingsdivisjon. Våre resultater viser at dette fortsatt er tilfelle.

Oppgave 7b

Et terrengløp går i ei løype som er 5,6 km. Hvor mange engelske mil er det? (Ei engelsk mil er 1,609 km).

....

Tabell 11. Oppgave 7b: Svarfordeling i prosent.

5,6 : 1,609 (Riktig svar)	**48**
5,6 · 1,609	27
Andre svar	14
Ubesvart	11

Denne oppgaven gir også en målingsdivisjon hvor divisor er et desimaltall som er større enn 1. Som i oppgave 6b har vi her et stort tall dividert på et lite tall, men her er andelen riktige svar større. Det er mulig at konteksten med avstand gjør det lettere for elevene å kjenne igjen oppgaven som en målingsdivisjon, enn det som var tilfelle i den forrige oppgaven. 27 % velger multiplikasjon i denne oppgaven. Det er 8 prosent-enheter færre enn i oppgave 6b.

Sammenligning av oppgave 6b og 7b

Tabell 12. Oppgave 6b og 7b: Løsningskombinasjoner i prosent.

Riktig svar i oppgave 6b og 7b	24
Riktig svar i oppgave 6b (Galt svar i oppgave 7b)	18
Riktig svar i oppgave 7b (Galt svar i oppgave 6b)	24

Begge disse oppgavene er oppgaver som krever tankemodell for målingsdivisjon, hvor vi har et stort tall delt på et lite tall. At 7b faller noe lettere enn 6b, kan skyldes at elevene har mest erfaring med lengder i målingsdivisjon. Lengde kan ligge nærmere den tenkningen som inngår i målingsdivisjon enn masse gjør det. En annen årsak til dette kan være at oppgave 6b har divisor mindre enn 1, noe som gjør det vanskeligere for elevene.

Oppgave 6c

Anne kjøper bananer i en butikk til 13,50 kr per kg. Hvor mye kan Anne kjøpe for 10,50 kr?

13,50 · 10,50   10,50 : 13,50   13,50 : 10,50   13,50 – 10,50   13,50 + 10,50

Tabell 13. Oppgave 6c: Svarfordeling i prosent.

10,50 : 13,50 (Riktig svar)	**40**
13,50 : 10,50	29
10,50 : 13,50 og 13,50 : 10,50	9
13,50 · 10,50	5
13,50 – 10,50	3
Andre svar	4
Ubesvart	10

På denne oppgaven velger de fleste divisjon som regneoperasjon. Grunnen kan være at svaret må bli mindre enn 1 kg. At så mange som 29 % velger 13,50 : 10,50 kan skyldes misoppfatningen om at man må ta stort tall delt på lite tall. En annen forklaring kan være at siden 13,50 kommer først i teksten, tror elevene at det må være dette tallet de skal starte med i divisjonen (Brekke, 1995b).

Man kan også legge merke til at 9 % tror at divisjon er kommutativ. Denne oppfatningen viser seg også i oppgave 6a og 6b. I tillegg er det en del av elevene som tror at man får riktig svar ved å bruke ulike regneoperasjoner for å løse samme oppgave (rundt 9 % i oppgave 6a og 6b). For eksempel at 6 : 0,75 og 0.75 · 6 vil gi samme svar. Mange ulike kombinasjoner er representert. Naturlig nok er ikke dette tilfelle i oppgave 7, hvor de blir bedt om å sette opp ett regneuttrykk. Det vi også kan legge merke til er at andelen av elevene som ikke svarer er høyere i oppgave 7 enn i oppgave 6. Dette kan skyldes at elevene stort sett prøver å svare når svaralternativer er gitt, uavhengig om de kan det eller ikke.

Sammenligning med resultater fra KIM-prosjektet.

KIM-prosjektet (Kvalitet i matematikkundervisningen) er et prosjekt som er utført av Telemarksforsking-Notodden og Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling ved UiO (Brekke, 1995a). KIM-prosjektet har de siste årene bidratt bl.a. til en økende oppmerksomhet rundt problemer med å velge riktig regneart. Oppgave 6b og 7a ble gitt til elever i 8. klasse (etter M87) , og det kan være interessant og se på disse resultatene.

Tabell 14. Løsningsfrekvens i prosent.

	KIM 8. klasse	1 vgs
Oppgave 6b	41	42
Oppgave 7a	47	50

Forskjellen er liten, til tross for to år eldre elever. Det gir oss en indikasjon på at problemer og misoppfatninger knyttet til det å velge riktig regneoperasjon vedvarer. Dette er altså noe som bør jobbes med på alle trinn i skolen.

Forståelse av variabel

Oppgave 10

a $x + y + z = x + p + z$ Dette

☐ er alltid sant ☐ er aldri sant ☐ *kan* være sant, nemlig når ....

b $a + b \cdot 2 = 2b + a$ Dette

☐ er alltid sant ☐ er aldri sant ☐ *kan* være sant, nemlig når ....

c $\frac{2x+1}{2x+1+5} = \frac{1}{6}$ Dette

☐ er alltid sant ☐ er aldri sant ☐ *kan* være sant, nemlig når ....

Dette er en oppgave om lignings- og variabelbegrepet, og om elevers oppfatning av bokstaver i matematikk. Slik ble resultatene.

Oppgave 10a

Tabell 15. Oppgave 10a: Svarfordeling i prosent.

Riktig svar	**22**
Manglende eller utilfredstillende begrunnelse	9
Aldri sant	56
Alltid sant	8
Både aldri sant og kan være sant	1
Ubesvart	4

Oppgave 10a tester om elevene vet at x og y kan representere et generelt tall, og at likhetstegnet vil gjelde hvis y og p har samme verdi. Mer enn halvparten av elevene svarer "aldri sant" på denne oppgaven. Grunnen til det kan være en oppfatning om at siden y og p er forskjellige bokstaver, må de representere ulike verdier.

KIM-prosjektet gav en tilsvarende oppgave ($l + m + n = l + p + n$) til elever i 10. klasse. Her var det 33 % som krysset av for "kan være sant", uten at det ble tatt hensyn til om det ble gitt forklaring, eller til kvaliteten på forklaringer som ble gitt. Også her var det vanligste feilsvaret at likheten aldri var sann (Brekke, Grønmo og Rosén, 2000). KIM-prsjektet hadde i tillegg følgende oppgave av samme struktur som den vi har her: $4 + x = 4 + y$. Her ble elevene bedt om å forklare hvordan de kom fram til svaret sitt. De vanligste av disse forklaringene gikk på at x og y må representere forskjellige verdier fordi de er symbolisert ved hjelp av forskjellige bokstaver. Svar som "x og y er forskjellige uansett", "$4 + x$ og $4 + y$ kan ikke være sant fordi x og y aldri står for samme tall" og "x og y verdiene er ikke lik i samme oppgave" var typiske for denne tenkningen (Brekke, Grønmo og Rosén, 2000).

Oppgave 10b

Tabell 16. Oppgave 10b: Svarfordeling i prosent.

Riktig svar	**81**
Aldri sant	13
Kan være sant	4
Ubesvart	2

I oppgave 10b ønsket vi å undersøke om elevene vet at det ikke har noe å si i hvilken rekkefølge man adderer. I tillegg tester den om elevene vet at multiplikasjon er kommutativ og at $2b$ betyr $2 \cdot b$. Denne oppgaven gav en høy løsningsfrekvens.

Oppgave 10c

Tabell 17. Oppgave 10c: Svarfordeling i prosent.

Riktig svar	**6**
Manglende eller utilfredsstillende begrunnelse	6
Aldri sant	48
Alltid sant	33
Ubesvart	7

I denne oppgaven tester man om elevene vet at x kan representere et generelt tall, og at likheten vil gjelde hvis $x = 0$. Dette viste seg å være vanskelig for elevene. Bare 12 % krysset av for ”kan være sant”. Begrepsproblemer er her meget utbredt. Det elevene gjør i denne oppgaven, er at de prøver å gjøre noe med uttrykket på venstre side, slik at man står igjen med noe som passer til ”alltid sant” eller ”aldri sant”.

Strategi 1: Elevene forkorter $2x$ i teller mot $2x$ i nevner, og står igjen med 1/6, dvs. ”alltid sant”.

Strategi 2: Elevene forkorter $2x$ i teller mot $2x$ i nevner, og 1 i teller mot 1 i nevner, og står igjen med noe som er forskjellig fra 1/6, dvs. ”aldri sant”.

Diskusjon og konklusjon

Om vi ser på oppgavene 1a-e i et samlet perspektiv, må det legges fast at det er ønskelig at alle som har fullført en 10-årig grunnskole skal kunne løse disse oppgavene ved hoderegning, eventuelt med en viss støtte av papir og blyant. Grunnskolens matematikkundervisning kan ikke anses å ha løst sin oppgave når en firedel av elevene ikke klarer dette. Matematikkundervisningen i skolen burde gi hver enkelt elev en slik tiltro til sin egen tankekraft, at han eller hun våger å tenke ut svarene etter sin egen metode. I oppgaven $70 \cdot 0{,}3$ går det bra å tenke på at 70 er $7 \cdot 10$ og at $10 \cdot 0{,}3$ er 3. Etter denne omskrivningen er problemet redusert til å beregne $7 \cdot 3$, og det skal alle kunne. En ung norsk lærer kommenterte denne måten å tenke på med at ”sånn har jeg aldri sett det... Jeg har lært meg å dekke over 0 i 70 og 0 i 0,3, og så blir det $7 \cdot 3$.” Slike hokuspokusregler bidrar naturligvis ikke til å få elever til å stole på, og til å utvikle sin egen tankekraft.

Elevers problemer med brøk kan skyldes at når de ikke har en klar regel for regning med brøk, så har de problemer med å finne andre strategier der de bruker sine begrepskunnskaper. L97 toner ned pugg av algoritmer og ferdighetstrening, og det er dermed viktig at dette blir veid opp av tilstrekkelig begrepsforståelse.

De tre første oppgavene vi valgte å presentere her, er en type oppgaver vi antar at det jobbes mye med i skolen. Våre resultater viser allikevel at dette er oppgaver elevene har problemer med. Særlig gjelder dette oppgave 6 og 7. Fra et matematisk synspunkt kan multiplikasjon og divisjon av hele og rasjonale tall se relativt enkelt ut. Forskning viser imidlertid at det psykologisk sett er komplekst. Spesielt viser kompleksiteten seg om en ser ikke bare på regneoperasjonene som beregninger, men på hvordan de er modeller for ulike situasjoner (Greer, 1992). Greer peker videre på den kritiske fasen i læring av matematikk som oppstår når tallområdet blir utvidet fra hele tall til å omfatte brøk og desimaltall. Brekke (1995a) tar opp dette problemet i forbindelse med KIM-prosjektet. I tillegg til at elevene skal utvide tallområdet sitt, må også deres tanker om multiplikasjon (og divisjon) utvides. Det er viktig at elevene får tilstrekkelig varierte erfaringer om hva multiplikasjon er, slik at nye og rike tankemodeller kan bygges opp.

I oppgave 6 og 7 skulle elevene finne riktig regneuttrykk til en tekstoppgave. Fischbein og medarbeidere fremsatte i 1985 en teori for å forklare elevers valg av regneoperasjon i tekstoppgaver (Fischbein, Deri, Nello & Marino, 1985). De fant at hver av regneartene er knyttet til en ubevisst, implisitt og primitiv intuitiv modell. Valget av regneoperasjon for å løse en oppgave med to tall er styrt av denne modellen. For multiplikasjon er modellen gjentatt addisjon. For denne modellen er det vesentlig at multiplikator er et helt tall, en slik restriksjon legges ikke på multiplikanden. Mange undersøkelser viser at hvor vanskelig det er å gjenkjenne multiplikasjon som den rette operasjonen for å løse et problem, avhenger av om multiplikator er et helt tall, et desimaltall større enn 1, eller et desimaltall mindre enn 1 (Greer, 1992). Når multiplikator er mindre enn 1, har man problemet at svaret blir mindre enn multiplikanden, noe som står i konflikt med modellen for gjentatt addisjon.

For divisjon fant Fischbein følgende to primitive modeller: Lik deling og måling. For at en oppgave straks skal gjenkjennes som en oppgave med lik deling, må divisor være et helt tall som er mindre enn dividenden. Om en oppgave straks skal gjenkjennes som målingsdivisjon, må divisor være mindre enn dividenden. Fischbein antyder også at ”lik deling” er den opprinnelige, intuitive primitive modellen for divisjon, og at målingsdivisjon læres senere gjennom undervisningen (Greer, 1992).

Forskning viser at elever er opptatt av det svaret de venter seg, og velger regneoperasjon i forhold til dette (Greer, 1992). Den vanlige misoppfatningen om at ”divisjon gjør mindre”, og ”multiplikasjon gjør større” vil da spille inn. På en entrinns multiplikasjonsoppgave falt løsningsfrekvensen med 40-50 % når man endret størrelsen på multiplikator til et desimaltall mindre enn 1, mens oppgaven ellers var uendret. Denne effekten er observert også hos voksne. Selv om de ble gjort oppmerksom på likheten mellom de to oppgavene, vil mange skifte operasjon. At mange velger multiplikasjon når multiplikator er større enn 1, og divisjon når multiplikator er mindre enn 1, henger sammen med at de i siste tilfelle forventer et svar mindre enn multiplikanden.

Ved divisjonsoppgaver er det registrert enda større utslag. Der ser en også at utregningens vanskegrad spiller inn. Elevene velger ikke lett en operasjon som gir en vanskelig utregning, selv om de ikke skal regne ut svaret, men bare skal velge operasjon. Effekten av tallene kommer fram i følgende oppgave: 15 mennesker skal dele 5 kg småkaker. Mange vil skrive 15 : 5. Dette kan skyldes at elever er vant til at i divisjonsoppgaver kommer det største tallet som dividend, og det minste som divisor.

Nesher (1988) har sett på hvordan elever forstår tekstoppgaver. Hun så på tanken og språket, og på forhold rundt språkets innhold. Nesher fant at når elever for eksempel skal oversette tekstoppgave til et matematisk språk, leter de etter ord og overfladiske kjennetegn i teksten. Elevene utvikler strategier som å se på tallene, for å vite hvilken regneoperasjon som skal brukes. En annen strategi kan være å prøve alle regneartene, for så å velge den som gir et svar som virker mest fornuftig. En tredje strategi kan være å se på nøkkelord, eller uttrykk som forteller hvilken regne-operasjon det gjelder. Således kan ordet ”til sammen” indikere at man skal addere.

Skal elevene få erfaring med å bruke regneoperasjonene funksjonelt, må de vinne erfaringer med operasjonene fra situasjoner der en bruker regneoperasjonene på ulik måte (Brekke, 1995a). Det er altså viktig at elevene blir stilt overfor problemet å velge riktig regneoperasjon, og at de får tilstrekkelig mange og varierte erfaringer med multiplikasjon og divisjon. Dette kan være med på å bygge opp en utvidet tanke-modell for disse regneartene, slik at elevene blir i stand til gjenkjenne situasjoner.

Oppgave 10 er en oppgave som gir informasjon om hvordan elever oppfatter bokstaver i matematikk. Oppgaven tester i tillegg ligningsbegrepet hos elevene. Elevene bygger sine oppfatninger om algebra på erfaringer fra tallregningen. De begrepene de har om tall og tallregning, må så utvides til også å omfatte algebraiske begreper. I første rekke gjelder dette i forhold til variabelbegrepet, bruk av bokstaver som generaliserte tall og en utvidet forståelse av likhetstegnet (Brekke, Grønmo og Rosén, 2000). Når begreper utvides, oppstår det ofte misoppfatninger knyttet til disse begrepene. I oppgave 10a ble dette illustrert gjennom oppfatningen om at siden *y* og *p* er forskjellige bokstaver, må de representere ulike verdier.

I tilknytning til KUL-LCM-prosjektet har Per Sigurd Hundeland intervjuet lærere om deres forventninger til elevenes prestasjoner på forskjellige oppgaver som ble gitt elevene. (Se Hundelands artikkel i denne boka). En av lærerne på 1. trinn i videregående skole ble presentert for denne oppgaven. I dette intervjuet kom det fram at denne læreren mente at få elever ville ha et forhold til en slik oppgavetype. Problemet slik denne læreren så det, var at han trodde ikke elevene ville ha en strategi for å begynne å løse den, og heller ikke trening i en sånn type oppgave. Dette indikerer at elevene stort sett presenteres for oppgaver hvor man har en klar løsningsmetode. Hundeland stiller spørsmål ved om man anser seg for å være gjennom likninger dersom ulike typer likninger er presentert, og man har hatt anledning til å øve på dem, eller er det slik at man er igjennom emnet når man har nådd en viss erkjennelse av likningsbegrepet? Det er viktig at elevene får trening i fundamentale ferdigheter og rutiner, og at de lærer seg å bruke formler, regler og prosedyrer til å løse matematiske problemer. I tillegg til dette bør man legge til rette for en undervisning hvor elevene lærer å innta en eksperimenterende holdning, hvor de kan være aktive og oppdagende i sin læring. På denne måten kan elevene tilegne seg grunnleggende begreper, oppdage matematiske sammenhenger, og velge hensiktsmessige løsningsstrategier. Det å kunne tolke en problemoppstilling, se at et problem kan ha flere løsninger, og evnen til å resonnere og begrunne, er andre ferdigheter man bør legge til rette for.

Våre sammenligninger med tidligere studier, som KIM-prosjektet og Kassel-Exeter undersøkelsen, viser at de vanskeligheter som er påvist tidligere, fremdeles eksisterer. Lærere har altså lenge vært klar over hvor elevene trenger hjelp i sin læring. Hva er det da som gjør at på tross av denne kunnskapen klarer man ikke å skape innlæringssituasjoner hvor elevene forstår og lærer? Om vi kunne løse denne gåten, ville kanskje fremtidens testresultater se annerledes ut?

Takk

Prosjektet LCM er støttet av Norges Forskningsråd innenfor KUL-programmet, Kunnskap, utdanning og læring (Norges Forskningsråd, prosjekt nr 157949/S20).

Referanser

Alseth, B., Breiteig, T. & Brekke, G. (2003). *Endringer og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering: matematikkfaget som kasus***.** Notodden: Telemarksforsking.

Brekke, G. (1995a). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk*. Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.

Brekke, G. (1995b). *Veiledning til tall og tallregning*. Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.

Brekke, G., Grønmo, L. S. & Rosén, B. (2000). *Veiledning til algebra*. Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.
Brekke, G., Kobberstad,T., Lie, S. & Turmo, A. (1998). *Hva i all verden kan eleven i matematikk?* Oslo: Universitetsforlaget.
Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division*. Journal for Research in Mathematics Education* **16,** 3-17.
Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). New York: Macmillan.
Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 276-295). New York: Macmillan.
Hinna, K. (1996). *Elevers kunnskaper og fremgang i matematikk: En toårig undersøkelse av 300 norske ungdomsskoleelever.* Hovedoppgave i matematikkdidaktikk. Kristiansand: Høgskolen i Agder.
Jaworski, B. & Phillips, D. (Eds.)(1999). *Comparing Standards Internationally research and practice in mathematics and beyond.* Oxford: Symposium Books
Kaiser, G., Luna, E. & Huntley, I. (Eds.)(1999). *International Comparisons in Mathematics Education.* London: Falmer Press.
Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.
Leder. G.C. (Ed.)(1992). *Assessment and learning of mathematics*. Victoria: ACER.
Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and empirical findings. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 19-40). Reston: NCTM
Niss, M. (Ed.)(1993a). *Investigations into assessment in mathematics education: An ICMI study.* Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
Niss, M. (Ed.)(1993b). *Cases of assessment in mathematics education: an ICMI study.* Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
Robitaille, D.F. & Travers, K.J. (1992). International studies of achievement in mathematics. In D.A. Grouwes (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 687-709). New York: Macmillan.
Webb, N. (Ed.)(1993). *Assessment in the mathematics classroom*. Yearbook NCTM. Reston: NCTM.

__Kirsti Kislenko__ is a PhD student in Mathematics Education at Agder University College and her home university is Tallinn Pedagogical University in Estonia. Kirsti's research interest is in beliefs and attitudes to mathematics. She has got a teacher education from Estonia and has worked there as mathematics teacher for two years in upper secondary school.

Kirsti Kislenko, Trygve Breiteig och Barbro Grevholm

Beliefs and attitudes in mathematics teaching and learning

Introduction

Beliefs play great role in mathematics learning and teaching. The learning outcomes of students are strongly related to their beliefs and attitudes about mathematics (Furinghetti & Pehkonen, 2000). Thus assessing or evaluating of students' mathematical knowledge must be made in awareness of their beliefs.

During the last twenty years the research area about beliefs and attitudes has grown considerably, and many different countries have been included in the research - the work of Erkki Pehkonen who has made several investigations in Finland; Peter Kloosterman from United States of America, Günter Törner from Germany, Gilah C. Leder from Australia, and many others. They have been looking for answers to several different questions. For example, Kloosterman asked (2002): "What do students think mathematics is and how does one learn mathematics?"; Pehkonen & Törner (2004) asked: "How well does information from different methodological sources and using different methodological tools to investigate teachers' beliefs of mathematics fit together?" and "Which method is best suited to which aspect?".

Before introducing our study we would like to emphasise the work of Alba G. Thompson who has been investigating teachers' beliefs extensively. She has looked into teachers' conceptions of mathematics and their relationship to instructional practice. The issue of changing teachers' beliefs, comments on methodology, and descriptions of theoretical frameworks, are included in her work (Thompson, 1992).

In our project the issue about students' beliefs are of interest because we want to find answers to questions about what Norwegian and Estonian students think about mathematics as a school subject, about the way one learns mathematics, and what is important in the study of mathematics. In this paper we report from a small pilot study carried out in Norway and an earlier study in Norway, which it is based upon.

Since 1995 the project KIM has collected national data on students' understanding of key concepts in the national mathematics curriculum. Students' performances related to *one* particular area of mathematics, named *Measurements and units*, were linked to their attitudes. 105 grade six classes (2106 students) and 90 grade nine classes (2150 students) took part. Amongst those students approximately 900 were selected according to their birthdays. The study is based on data from 891 grade 6 students and 893 students in grade 9. The same schools were asked to participate in the *attitude study* later in that school year, which made it possible to compare the mathematics test to the questions about their thoughts of mathematics and the teaching and learning mathematics. The conclusions of this project were following: those pupils who state a positive interest towards mathematics, on average, performed better on the mathematics test than their fellow students. There was a strong significant connection between the performance of the test and the self-confidence in both grades (Streitlien, Wiik & Brekke, 2001).

Definition of beliefs

Leder and Forgasz claimed that

> In everyday language, the term "belief" is often used loosely and synonymously with terms such as attitude, disposition, opinion, perception, philosophy, and value. Because these various concepts are not directly observable and have to be inferred, and because of their overlapping nature, it is not easy to produce a precise definition of beliefs. (Leder & Forgasz, 2002, p. 96).

Different researchers associate belief with motivation and conception. Kloosterman (2002) sees the direct connection between belief and effort. 'Student's belief is something the student knows or feels that affects effort – in this case effort to learn mathematics' (p. 248).
Moreover, Kloosterman (2002) argues that student's choices are on one hand based on beliefs and on the other hand on personal goals. Thus, there is a close connection between beliefs and choices. But sometimes the personal goals and the beliefs are at variance. One major example is the learning of mathematics. Many students believe that mathematics is boring, and strong effort is needed to learn it, but still find it important for life. This is a paradox. The reason for seeing mathematics as important can be practical – needs for a better profession and to some degree for a better life. 'Most youngsters know, as an empirical and sociological fact, that mathematical competence – even if for unclear reasons – is a key to attractive education and job opportunities' (Niss, 1994, p. 377). Jens Højgaard Jensen has marvellously expressed this idea in one sentence 'Mathematics is useless to me, but at the same time I know that I am useless without mathematics' (Niss, 1994, p. 377).

There have been two different notions about beliefs and conceptions in literature. In one case the beliefs are understood as a subclass of conceptions (Hart, 1989; Thompson, 1992) and on the other hand the conceptions are a subset of beliefs (Pehkonen, 1994). One can explain the concept of "conceptions" as an originations, comprehensions, ideas, rules, images etc.
The easiest to understand and thus the widest, is the definition given by Rokeach (1972). He says: 'a belief is any simple proposition, conscious or unconscious, inferred from what a person says or does, capable of being preceded by the phrase 'I believe that…'' (p. 113).

Rejecting the McLeod (1989) idea to watch the person's affective domain as an aggregate of beliefs, attitudes and emotions, there can be found the ideas which claim that belief is only one part of attitude in different researches (Aiken, 1980; Rokeach, 1972). More or less they see three aspects within an attitude: a cognitive component (beliefs and knowledge), an affective component (emotions, motivation, feelings) and a performance/behavioural component (actions). Here, the emotions are one component of attitude, and beliefs with knowledge are seen as a cognitive component of attitude.

As long as there are different people there will be dissimilar views about belief, attitude, emotions, meanings, mental images, concepts and so on. The definition does not play a major part in research, and thus every scientist will ascribe the importance of different aspects related to particular investigations. It means that the definition is affected by the questions and the motive of the research. Hence one cannot say that some definition is wrong and the other is right, they can be considered to be more or less suitable.

Relationship between beliefs and knowledge

The two parts of the individual – the affective domain and the cognitive domain - are inseparable and in complex connection. 'The main difficulty has been the inability to distinguish beliefs from knowledge, and the question is still unclarified' (Pehkonen, 1994, p. 27).

Thompson (1992) points out two ways to distinguish knowledge from belief – 'degree of conviction' (p. 129) and consensus. Firstly, beliefs can be held weakly or strongly. One can claim: "the new mathematics teacher is nice but she has not assessed us still so it can be changed" or "I know that the test in mathematics will be hard". Beliefs can compartmentalize as something uncertain or certain, important or not so important. But one cannot say that one knows the fact weakly or strongly. Water starts boiling at a hundred degrees Celsius at sea level, and that's it! Secondly, it is possible to believe something despite the awareness that the others do not agree with it and think about it differently. For example, "I believe gold can be found in North Pole".

Underhill (1991) uses the word 'knowing' and takes the position that 'knowing is believing' (p. 20). Whatever one knows or does not know is simply the same that one believes and does not believe.

> A. whenever we say we know something, we are simply asserting that we believe something, whether it is about quality called "red" or the being called "God" or the relationship "3+4=7";
>
> B. whatever we do not know, we may not know passively (we have no belief; we have never been exposed to it!), or negatively (we believe it's opposite or some anti-belief or substitute belief; we believe something other than that);
>
> C. all that we know reflects our beliefs based on empirical data or reason or faith; these might be thought to exist continuum.
>
> (ibid, p. 21)

Saying that "the delta parameter of the option price shows how quickly the option price changes when the asset price is changing" only means that there is general belief in that. It can be because some trustable person (expert) has said so or because it has worked very well before, and why should it not work now (importance of the long experiences), or one does not believe that there is something else that will work better. Most scientific discoveries have started from the point that somebody believes in its validity and universality. If one does not believe in what one wants to prove then it is impossible to do that. We think the belief in rightness of doing research is one of the basic components of being scientist. To constructivists 'knowledge without belief is contradictory' (Confrey, 1990, p. 111).

One does not have to evaluate or justify the beliefs, it is something which belongs to the person. But there is definitely a need to explain the ideas related to knowledge because without justification it will not be accepted as knowledge. If one starts to justify beliefs then, according to Plato, the result will be the knowledge. 'Knowledge is justified true belief' (Mc Dowell, 1987, p. 94, and, in Furinghetti & Pehkonen, 2002, p. 42).

Differences between knowledge and beliefs can and cannot be seen. It all depends on how we define these two words. All knowledge is devised from human persons who believed in it, thus the claim: '*All knowledge is a set of beliefs*' (Underhill, 1991, p. 5, emphasis original) can be professed as true.

Belief systems

There are different types of beliefs detached into different sections of questionnaires. This assortment is based on the idea of *belief system*. Green (1971) points out that individual's beliefs are quasi-logically connected where the logic between the beliefs is defined individually. Talking about mathematics, then individual mathematics-related belief system is called his/her view of mathematics (Pehkonen, 1999; Schoenfeld, 1985). The human person's belief system is dynamic, changeable and when individuals evaluate and assess their experiences and beliefs, then they are restructuring their system continuously (Thompson, 1992). Based on observations, Green (1971) has pointed out three dimensions of belief system where he emphasises the relations between the beliefs in system.

Firstly, the structure of the belief system is quasi-logical. Some beliefs are *primary* and some *derivative*. For example, a student believes that mathematics is useful for his/her life (this is a primary belief). And herewith s/he thinks that it is important (1) to work hard in mathematics class during the lessons, and (2) to work with problem-solving, and to try to relate the exercises to everyday life (these are the derivative beliefs).

Secondly, Green (1971) talks about *central* and *peripheral* beliefs in the system. Central beliefs are more important and held most strongly, whereas the peripheral ones can be changed more easily. In our view it is with experiences, practice and affirmation one's own beliefs become more central. For instance, the newcomer teacher in school holds more peripheral beliefs, which are more changeable and negotiable. Experienced teachers' beliefs are more central and thus more deep-rooted. Researchers have probably heard the sentence - "I have been teaching for 20 years, and I know precisely which method is effective" - several times during their studies. In some cases beliefs can be an insuperable obstacle for development. 'Teachers' conceptions of "good mathematics teaching" have been so deeply rooted that surface changes (changes in peripheral beliefs) – as changing curriculum, teaching materials, classroom management – can not influence them' (Pehkonen, 1999, p. 7). The idea is not to underestimate the importance of experience, but emphasise the importance of flexibility and open-mindedness of others' techniques and suggestions.

Thirdly, Green (1971) uses the word "cluster". It means that beliefs are occurring in clusters, beliefs are not independent from each other. The clusters are in weak relationship or are not connected at all (Pehkonen, 1999). This phenomenon can explain the contradictions in pupils' and teachers' beliefs. Talking about mathematics related belief system there is a possibility to classify beliefs related to mathematics in several ways. Different researchers have different ways of grouping (Op't Eynde, de Corte & Verschaffel, 2002) but broadly there are four sets of beliefs about mathematics

- beliefs about the nature of mathematics,
- beliefs about teaching and learning of mathematics,
- beliefs about the self in context of mathematics teaching and learning,
- beliefs about the nature of knowledge and the process of knowing.

The study

Methods and methodology

We plan to investigate students' beliefs about mathematics teaching and learning. Our main project will take part in Estonia, presumably in spring 2006, but first we will carry out a pilot project in Norway. One of the main reasons is that there is a lack of investigations about beliefs in Estonia. After the studies we would like to make an analysis and compare the results between Estonia and Norway.

For now, we have done a small pilot study in Norway. We randomly chose one ordinary Norwegian class in grade 9 and gave the pupils the questionnaire. There were 25 pupils, who participated in this study. We used with permission the KIM-project questionnaire that was carried out in research in 1994, in order to be able to compare the results (Streitlien, Wiik & Brekke, 2001). Since our study was a pilot, the instrument was in main focus, and comparison is just showing a tendency besides a critical view on the function of the research instrument. There were 112 questions divided into 13 groups, and these were beliefs about: mathematics as a subject; learning mathematics; own mathematical abilities; own experiences (security) during mathematics lesson; teaching of mathematics; learning a new topic in mathematics; environment in class; environment in school; differences between boys and girls; teaching tools in mathematics lesson; own evaluation for importance of mathematics; evaluation for teaching mathematics; mathematics and the future.

The questionnaire was based on the Likert–scales method. Likert-scales method is

> a series of statements about the attitude object comprise a Likert-scale. Items are typically rated from "strongly agree" to "strongly disagree" and five divisions are very common. Ease of administration and scoring of instruments using such items have ensured that this is a commonly used method for tapping attitudes and beliefs '(Leder & Forgaz, 2002, p. 98).

The good points of using this method are easiness to make a conclusions (for example, calculate the average), the answers are concrete and the researcher does not have to struggle with answers (in written sentences), which are often hard to read and even more hard too understand and interprete. Thirdly, we call this method a "language free" method. It means that the answers, which the researcher will get are not based on knowledge of language, to carry out the investigation the researcher does not have to speak or understand the language in which the questionnaire is printed. As long as s/he has the translation of the questions s/he is able to collect the necessary data. Of course there are some problems too using this method. One is the lack of 'ability to explain how such beliefs formed or how beliefs are likely to influence action' (Kloosterman, 2002, p. 262). In other words, one can get the answer to questions "what" and "which" but not "why" or "how".

Comparison

In this part some of the results from our study are compared with the results from KIM-project. The numbers are given in percentages. For explanation, there are three lines in one row – first is the original line from questionnaire (in Norwegian), then our results and after that the results from the KIM-investigation. We have chosen to expose some sections of the questionnaire that are highly important. For reasons of space we cannot expose the full result in this paper.

The coloumns refers to respectively: totally agree, partially agree, uncertain, partially disagree, and totally disagree.

Interest	Ta.	La	U	Ld	Td
1b Matematikk er spennende og interessant.					
Mathematics is exciting and interesting.	8	52	20	16	4
Mathematics is exciting and interesting KIM.	8	36	18	22	15
1c Matematikk er ett av de fagene jeg liker minst på skolen.					
Mathematics is one of the subjects I like least.	8	20	32	12	28
Mathematics is one of the subjects I like least KIM.	25	21	16	24	14
1h Matematikk er ett av de fagene jeg liker best på skolen.					
Mathematics is one of the subjects I like best.	12	16	28	24	20
Mathematics is one of the subjects I like best KIM.	8	19	15	24	33
1i Jeg blir aldri lei av å jobbe med matematikk.					
I never get tired of doing mathematics.	8	8	16	52	16
I never get tired of doing mathematics KIM.	3	11	12	36	38
1j Jeg liker å arbeide med og tenke på matematikk også utenom skoletid.					
I like to do and think about mathematics also out of school.	0	12	20	44	24
I like to do and think about mathematics also out of school KIM.	3	9	13	31	44
1m Matematikk er kjedelig.					
Mathematics is boring.	20	32	24	16	8
Mathematics is boring KIM.	25	29	13	22	10

Table 1

There is a small tendency of more positive thinking about mathematics in our group. More pupils think that mathematics is interesting and exciting. Pupils' views are not so radical, they tend to be more uncertain and do not claim that mathematics is the subject which they like best/least. But nevertheless pupils agree to a high extent that mathematics is boring.

Usefulness	Ta.	La.	U	Ld	Td
1a Matematikk er viktig.					
Mathematics is important.	68	32	0	0	0
Mathematics is important KIM.	60	34	3	2	1
1e Matematikk er nyttig for meg I livet.					
Mathematics is useful for me in my life.	80	16	4	0	0
Mathematics is useful for me in my life KIM.	49	32	14	4	2
1f På skolen er det viktig å være flink I matematikk.					
It is important to be good at mathematics in school.	40	48	12	0	0
It is important to be good at mathematics in school KIM.	36	41	16	5	2
1g Jeg trenger matematikk for å kunne studere det jeg vil etter skolen.					
I need mathematics in order to study what I would like after I finish school.	52	32	16	0	0
I need mathematics in order to study what I would like after I finish school KIM	40	26	26	6	3
1k Matematikk hjelper meg til å forstå livet omkring meg.					
Mathematics helps me to understand life in general.	16	32	12	32	8
Mathematics helps me to understand life in general KIM.	6	20	31	23	19
1l Matematikk hjelper dem som skal ta viktige avgjørelser.					
Mathematics helps those who make important decisions.	16	32	36	12	4
Mathematics helps those who make important decisions KIM.	13	28	38	12	8
1o Jeg har ikke bruk for å kunne matematikk.					
I do not need to know mathematics.	0	4	8	12	76
I do not need to know mathematics KIM.	2	5	14	28	50

1p Gode kunnskaper I matematikk gjør det lettere å lære andre fag.					
Good mathematical knowledge makes it easier to learn other subjects.	20	48	32	0	0
Good mathematical knowledge makes it easier to learn other subjects KIM.	14	29	36	14	7

Table 2

Children are often told that mathematics knowledge is useful, and sometimes necessary, especially when it comes to a future choice of profession. In KIM- study the students express a positive statement regarding the usefulness of mathematics. In both investigations almost all students agree (or were at least uncertain) that mathematics is useful in life. Now, more students affirm themselves: I will use mathematics after school. Fewer pupils are certain that they do not need to know mathematics.

Self-confidence (Attribution)	Ta	La	Ld	Td
3c Matematikk passer ikke for meg				
Mathematics does not suit me.	0	24	52	24
Mathematics does not suit me KIM.	17	25	32	25
3h Matematikk er lett for meg.				
Mathematics is easy for me.	13	54	23	10
Mathematics is easy for me KIM.	10	31	32	25

Table 3

More pupils in our group think that mathematics suits them and is easy for them.

Diligence	Ta	La	Ld	Td
2h Å bli god I matematikk er avhengig av hardt arbeid.				
To become good at mathematics is dependent on hard work.	36	64	0	0
To become good at mathematics is dependent on hard work KIM	49	37	12	2
3f Jeg kan bli flink I matematikk hvis jeg lærer meg alle reglene.				
I can become clever in mathematics if I learn all the rules.	21	71	8	0
I can become clever in mathematics if I learn all the rules KIM.	40	45	12	2

Table 4

It is a high degree of agreement among the students that hard work is needed to become good at mathematics and that it is important to solve many tasks to remember the "procedures". Both in our and in the KIM-study, there is a widespread conception among the students that diligence is crucial for learning mathematics. Even if the students stated that mathematics is quite easy, they are more aware that it needs much work, and they have to learn the rules to become good at mathematics.

Conclusion

The results from the KIM-study (Streitlien, Wiik & Brekke, 2001) are in principle confirmed by our small investigation. In our group there is a tendency to answer in a slightly more positive way. If this is just a coincidence or if it is a sign of a change over time in the attitudes and beliefs, must be studied in our further investigation. In conclusion we can bring out some interesting results:

- 96 % of students agree that mathematics is useful for life and 100 % agree that mathematics is important.
- 52 % claim that mathematics is boring, while 88 % are sure that they need to know mathematics.
- 84 % of pupils disagree that there is just one right answer in mathematics tasks.
- 96 % think that it is important to get good marks and 83 % find it important to cooperate in mathematics class. Everybody feels that it is important to know something about numbers and calculations and to know how to solve practical problems.
- Most pupils are good friends and have fun during classes and they are quite satisfied with the environment in class and school.

We can claim that most of the beliefs are going in positive direction from the KIM-study to our study. Students are aware the importance of mathematics in life. But there is still great emphasis on the rules and keeping in mind in mathematics, and 28 % of the students still think that it is innate to be good in mathematics.

As students claim that mathematics is important, it is unfortunate that school has not been able to arrange teaching is such a way that they also find it challenging and fascinating. What is the reason that so many pupils find mathematics boring? How are the beliefs influencing pupils' learning in mathematics? What can be changed in school to change this conception?

In our coming study we are going to relate pupils' beliefs to their learning outcomes in order to find more knowledge about the relation between beliefs and learning. Pupils will answer both questionnaire about attitudes and beliefs and tests in mathematics, and some follow up interviews will be made. Some analysis of curricular content and working style will be considered in relation to beliefs. Our data will be compared to the earlier result from the KIM-study, and students in Norway will be compared to students in Estonia. Assessment and evaluation in mathematics must take place in full awareness of the importance of students' attitudes and beliefs. The affective factors in the learning situation have important influence on the cognitive development of pupils.

Acknowledgement

The project LCM is supported by The Research Council of Norway within its KUL program, Kunnskap, utdanning og læring (Knowledge, education and learning, Norges Forskningsråd, project no. 157949/S20).

References

Aiken, L. R. (1980). Attitude measurement and research. In D. A. Payne (Ed.), *Recent Developments in Affective Measurement* (pp. 1-24). San Francisco: Jossey-Bass.

Confrey, J. (1990). What Constructivism Implies for Teaching. In R. B. Davis, C .A. Maher, and N. Noddings (Eds.), Constructivist Views on the Learning and Teaching of Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, Monograph Number 4* (pp. 107-124). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Furinghetti, F. & Pehkonen, E. (2002). Rethinking Characterizations of Beliefs. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 39-58). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Furinghetti, F. & Pehkonen, E. (2000). A comparative study of students' beliefs concerning their autonomy of doing mathematics. *NOMAD* **8**(4), 7-26.

Green, T. E. (1971). *The activities of teaching*. New York: McGraw-Hill.

Hart, L. E. (1989). Describing the Affective Domain: Saying What We Mean. In D. B. McLeod and V. M. Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective* (pp. 37-45). New York: Springer-Verlag.

Kloosterman, P. (2002). Beliefs about Mathematics and Mathematics Learning in the Secondary School: Measurement and Implications for Motivation. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 247-270). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Leder, G. C. & Forgasz, H. J. (2002) Measuring Mathematical Beliefs and Their Impact on the Learning of Mathematics. In G. C. Leder, E. Pehkonen, and G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 95-114). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

McLeod, D. B. (1989). Beliefs, Attitudes, and Emotions: New Views of Affect in Mathematics Education. In D. B. McLeod and V. M. Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective* (pp. 245-258). New York: Springer-Verlag.

Niss, M. (1994). Mathematics in Society. In R. Biehler et al (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 367-378). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Op't Eynde, P., de Corte, E. & Verschaffel, L. (2002). Framing Students' Mathematics Related Beliefs . A Quest for Conceptual Clarity and a Comprehensive Categorization. In G. C. Leder, E. Pehkonen, and G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 13-38). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Pehkonen, E. (1994). Teachers' and pupils' beliefs in focus – consequence of constructivism. In M. Ahtee, and E. Pehkonen (Eds.), *Constructivist Viewpoints for School Teaching and Learning in Mathematics and Science* (pp. 27-33). Helsinki: University of Helsinki. Department of Teacher Education. Reseach Report 131.

Pehkonen, E. (2003). Læreres og elevers oppfatninger som en skjult faktor i matematikk-undervisningen. In B. Grevholm (Ed.), *Matematikk for skolen* (pp. 154-181). Bergen: Fagbokforlaget,.

Pehkonen, E. & Törner. G. (2004). Methodological Considerations on Investigating Teachers' Beliefs of Mathematics and Its Teaching. *NOMAD - Nordic Studies in Mathematics Education*, **9**(1), 21-49.

Rokeach, M. (1972). *Beliefs, Attitudes, and Values*. San Francisco: Jossey-Bass Inc.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

Streitlien, Å., Wiik, L. & Brekke, G. (2001). *Tankar om matematikkfaget hos elever og lærarar.* Oslo: Læringssenteret.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. In D. A. Grouws, (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127-146). New York: Macmillan.

Underhill, R. G. (1991). Mathematics Teacher Education: A Constructivist Perspective. In *Constructivism and Mathematics Education* (pp. 3-26). Milton Keynes: Centre for Mathematics Education, The Open University.

Lene Østergaard Johansen
Studielektor i matematik ved Adgangskurs til ingeniøruddannelserne ved Aalborg Universitet. Ph.d.-studerende ved Institut for læring, Aalborg Universitet med projektet "Hvorfor skal voksne uden grundlæggende færdigheder i matematik tilbydes undervisning i matematik? En diskursanalytisk tilgang til begrundelsesproblemet. Mine forskningsinteresser er: Voksne og matematikundervisning, IT og matematikundervisning og Matematikvanskeligheder.

Voksnes regnefærdigheder hvordan testes de?[1]

Lene Østergaard Johansen, Aalborg Universitet, lj@ak.aau.dk

At spørge "Hvordan testes voksnes regnefærdigheder" fører hurtigt videre til et andet spørgsmål: hvad menes der med "regnefærdigheder"?

Vi befinder os i en *evalueringsbølge*. Børn og voksnes viden og færdigheder bliver i disse år evalueret gang på gang, og resultaterne bliver sammenlignet og diskuteret nationalt og internationalt. Når et lands befolkning klarer sig dårligt i forhold til andre landes befolkninger, bliver resultaterne af undersøgelserne offentliggjort i dagspressen med store overskrifter. I Danmark har vi set dette i forbindelse med OECD-undersøgelserne (TIMMS, PISA, SIALS). Dagspressen stille politikerne til regnskab for de dårlige resultater – "der må gøres noget", og politikerne sender oftest bolden videre til uddannelsessystemet – "skolen udfører ikke sit job ordentligt!". I nogle tilfælde får resultaterne af en international undersøgelse uddannelsesmæssige konsekvenser, der oprettes nye uddannelser eller der indføres løbende tests af elevernes færdigheder i det eksisterende skolesystem. Der er altså politisk interesse i at teste voksnes regnefærdigheder med det formål at sammenligne resultaterne med andre landes resultater.

I foråret 2000 blev resultaterne af OECD-undersøgelsen "Second International Adult Literacy Survey", kaldet SIALS, offentliggjort (OECD, 2000). SIALS undersøgte den voksne befolknings læse- og regnefærdigheder. De danske resultater var opsigtsvækkende. På sine præmisser viste undersøgelsen, at 46 % af den voksne danske befolkning (mellem 16 og 66 år) havde utilstrækkelige læsefærdigheder[2] og 28 % af befolkningen havde utilstrækkelige regnefærdigheder (Jensen og Holm, 2000).

SIALS-undersøgelsen fik uddannelsesmæssige konsekvenser i Danmark, idet de dårlige resultater blev brugt som hovedargument i forbindelse med vedtagelsen af en lov om en helt ny grundlæggende uddannelse for voksne "Forberedende Voksenundervisning" herefter kaldet FVU.

Forberedende voksenundervisning er det nederste niveau i et nyt parallelt kompetencesystem for voksne, og den består af to fag FVU-læsning og FVU-matematik. Formålet med FVU er beskrevet på følgende måde:

> "Formålet med FVU - forberedende voksenundervisning - er at give voksne mulighed for at forbedre og supplere deres grundlæggende færdigheder i læsning, stavning og skriftlig fremstilling samt talforståelse, regning og basale matematiske begreber med henblik på videre uddannelse samt at styrke deres forudsætninger for aktiv medvirken i alle sider af samfundslivet " (Undervisningsministeriet, 2000).

---

[1] Dele af denne artikel er tidligere publiceret i henholdsvis Johansen (2003) og i Johansen (2004).

[2] De tilsvarende tal for Norge, Sverige og Finland var: 33,2% af nordmændene havde utilstrækkelige læsefærdigheder og 29,7% havde utilstrækkelige regnefærdigheder, 27,8% af svenskerne havde utilstrækkelige læsefærdigheder og 25,2% havde utilstrækkelige regnefærdigheder, 36,7% af finnerne havde utilstrækkelige læsefærdigheder og 28,2% havde utilstrækkelige regnefærdigheder.

Fra politisk side blev det fastlagt, at fagene skulle være trinopdelte, og at hvert trin skulle kunne afsluttes med en centralt stillet prøve:

> ”Undervisningen på alle trin er prøveforberedende og kan afsluttes med en centralt stillet skriftlig prøve, som skal bidrage til at sikre et ensartet kvalitetsniveau. […] Selve prøven udvikles specielt til målgruppen.” (Undervisningsministeriet, 2000 – Bemærkningerne til FVU-loven)

I forbindelse med udviklingen af det nye fag FVU-matematik forelå der en opgave med at udvikle de centralt stillede prøver, der skulle afslutte de to trin i FVU-matematik. Undervisningsministeriet nedsatte derfor en gruppe af matematiklærere, Testgruppen, der havde til opgave at udvikle et forslag til de centralt stillede prøver til FVU-matematik. I denne artikel tages der udgangspunkt i Testgruppens første forslag til de centralt stillede prøver, der tidligere har været offentligt tilgængelige på http://us.uvm.dk/voksen/fvu/ , men som desværre ikke findes på denne hjemmeside længere (enkelte af opgaverne kan ses i Johansen, 2004).

Tilbage til de indledende spørgsmål hvad dækker begrebet ”regnefærdigheder”, og hvordan testes ”regnefærdighederne”. Jeg vil i denne artikel med udgangspunkt i SIALS-undersøgelsen (Johansen, 2002) og de centralt stillede prøver til FVU-matematik forsøge at afklare, hvad der menes med regnefærdigheder i disse to sammenhænge og forsøge at afklare, hvordan de testes, herunder finde forskelle og ligheder mellem de to typer af evalueringer.

SIALS-undersøgelsen

SIALS er en literacy-undersøgelse, hvor literacy-begrebet er defineret sådan:

> ”…a mode of adult behaviour, namely: Using printed and written information to function in society, to achieve one's goals, and to develop one's knowledge and potential” (OECD, 1995:14)

Det er en definition af et funktionelt begreb, idet literacy er defineret som evne til ikke bare at forstå, men også bruge skriftlige materialer, og ikke bare til at nå sine mål, men også til at udvikle sin viden og sit potentiale.

Literacy er i SIALS-undersøgelsen opdelt i tre underbegreber, Prose literacy (PL)– *læse-færdighed*; document literacy (DL) – *dokumentforståelse*; og quantitative literacy (QL)– *regnefærdigheder* . Definitionen af regnefærdigheder omfatter viden og færdigheder, der er nødvendige for at kunne bruge de forskellige regnearter – enten alene eller i sammenhæng – med hensyn til tal/cifre indeholdt i skriftligt materiale**.** Når der i den danske rapport ”Danskernes læse-regne-færdigheder. – i et internationalt lys” (Jensen og Holm, 2000) tales om ”danskernes regnefærdigheder” omhandler det udelukkende danskernes evne til at anvende de fire regningsarter på tal/cifre, angivet i et skriftligt dokument. Opgaverne i SIALS er formuleret, så der til hver testopgave kun er et korrekt svar. Det var ikke tilladt testpersonerne at bruge hjælpemidler, så som lommeregnere, til besvarelse af opgaverne. Det vil sige, at SIALS-undersøgelsen udelukkende tester deltagernes evne til hovedregning og måske også til ”papir og blyant regning”.

FVU-matematik

I forbindelse med udviklingen af faget FVU-matematik blev der indført et nyt begreb i dansk lovgivning, begrebet *numeralitet*. Numeralitet er Lena Lindenskov og Tine Wedeges oversættelse af det engelske begreb numeracy, og de har defineret numeralitet på følgende måde:

- *Numeralitet* er funktionelle matematikfærdigheder og –forståelser som alle mennesker i samfundet har brug for at have.
- Samfundets behov for numeralitet ændrer sig med tid og sted: samfundsudviklingen og den teknologiske udvikling (Wedege, 1998: 9).

Begrebet indføres i bekendtgørelsen for FVU-matematik, hvor der i målformuleringen står:

> ”At deltagerne udvikler de funktionelle matematikfærdigheder og –forståelser, alle i samfundet principielt har brug for at have (numeralitet)” (Undervisningsministeriet, 2001).

I FVU sammenhænge tales der ikke om regnefærdigheder men i stedet om numeralitet. Derfor er det numeralitet som de centralt stillede prøver i FVU-matematik skal teste for.

Gruppen, der udviklede de første testssæt, havde udviklet en række kriterier[3], som testopgaverne skal leve op til. For det første skal opgaverne være autentiske (virkelige dokumenter og virkelige spørgsmål), og opgaven skal ligeledes være relevant, om muligt for alle voksne eller i hvert fald for en stor del af den voksne befolkning. Opgaverne skal kunne løses på flere forskellige måder, og til nogle af opgaverne skal der være mere end et muligt svar. Alle almindelige hjælpemidler skal være tilladte i prøvesituationen.

Kontekst og dokumenttyper

Både SIALS-undersøgelsen og de centralt stillede prøver til FVU-matematik baserer sig på skriftlige dokumenter. Det vil sige, at alle opgaver refererer til et dokument. I begge tilfælde skal dokumenterne forestille at være hentet fra de voksnes liv. Med udgangspunkt i Wedeges (1999: 77-78) skelnen mellem situationskontekst og opgavekontekst, hvor s*ituationskonteksten* beskriver konteksten for matematiklæringen, brugen af matematik eller matematikundervisningen, og *opgavekonteksten* beskriver den virkelighed som opgaven repræsenterer, har jeg i mine analyser af opgavesættene valgt at skelne mellem tre typer af opgavekontekst: hverdagsliv, uddannelsesliv og arbejdsliv.

Hverdagsliv angiver, at dokumentet er et dokument vi møder i hverdagen (familien, fritiden osv.). *Arbejdsliv* indikerer, at dokumentet er en type, vi kan møde i forbindelse med lønarbejde. I den sidste kategori *uddannelsesliv* har jeg valgt at placere opgaver, hvor dokumentet er af en sådan karakter, at hvis vi møder det, vil det højst sandsynligt være i skolesammenhæng.

Alle opgaver i de centralt stillede prøver til FVU-matematik ligger inden for hverdagslivs-konteksten, hvilket jo også var et af de kriterier testgruppen opstillede for opgaverne. For SIALS-opgaverne gælder det, at opgaverne[4] er fordelt på følgende måde: 12 opgaver ligger indenfor hverdagsliv, 5 opgaver ligger i grænselandet mellem hverdagsliv og uddannelsesliv og 1 opgave ligger indenfor arbejdslivskontekst.

Hvad betyder det, for testningen af de voksnes regnefærdigheder, at opgavekonteksten er forskellig? Undersøgelser har vist, at voksne i en kontekst f.eks. i et supermarked kan være i stand til at "løse en hverdagsopgave" – hvilken varer er det bedste køb – hvor de samme voksne i en skolelignende situation ikke er i stand til at løse den samme opgave (Lave, 1988). Der er meget, som tyder på at voksnes matematikviden er kontekstafhængig. Derfor kan det have betydning for testresultater af voksne regnefærdigheder, hvilke opgavekontekster der indgår i prøverne. Er de dokumenter, som de voksne skal besvare spørgsmål til, kendte for de voksne? Møder de tilsvarende dokumenter i deres eget liv? Hvis det er en kendt opgavekontekst er der større sandsynlighed for at de voksne er i stand til at besvare opgaven korrekt. Er opgavekonteksten derimod ukendt, kan det være vanskeligt at skelne mellem de voksnes reelle regnefærdigheder og så evnen til at afkode opgavekonteksten.

Jeg skelner ikke imellem forskellige situationskontekster, idet den er den samme for begge typer af evalueringer. Situationen er en prøvesituation, og deltagernes hensigt er at løse de stillede opgaver bedst muligt.

Lindenskov og Wedege skelner i arbejdsmodellen for numeralitet mellem forskellige typer skriftlig information: Informerende eller instruerende tekster, opslagstekster og udfyldningstekster (Wedege, 1998). En informerende eller instruerende tekst er en prosatekst som udelukkende stiller læsefærdighedskrav. En opslagstekst derimod kræver ofte en vis form for kontekst-kendskab. Udfyldningstekster adskiller sig ved, at der skal skrives. Både i SIALS-undersøgelsen og FVU-prøverne indgår der enkelte informerende tekster (et

[3] Se eventuelt Pernille Pinds artikel i denne rapport. Pernille Pind har i udviklingsfasen været leder af testgruppen.

[4] Opgaver, der af OECD er klassificeret til at være på niveau 1-3.

læserbrev, en medicinetikette, en instruktion til medicintilskud) og enkelte udfyldningstekster i form af bestillingsblanketter. Men langt de fleste af opgavernes dokumenter er opslagstekster, som jeg har valgt at kategorisere i to typer: tabeller og grafiske fremstillinger. Både i SIALS og FVU indgår der en række forskellige tabeller, prislister, madopskrifter, vejrudsigter, køreplaner mv. De grafiske fremstillinger består i begge sæt af f.eks. et bjælkediagram og et cirkeldiagram. I FVU-opgaverne indgår der også en række fotos, som erstatning for konkrete materialer, og desuden opgaver hvor dokumentet er arbejdstegninger fra ”gør det selv opgaver” (læg terrasse, byg reol osv.).

Anvendelse af informerende tekster i tests af voksnes regnefærdigheder medfører et problem med at skelne mellem, hvilke opgaver der ikke er korrekt besvaret på grund af manglende regnefærdigheder, og hvilke opgaver der ikke er korrekt besvaret på grund af manglende læsefærdigheder.

Anvendelse af opslagstekster medfører samme problemer som de forskellige typer af opgavekontekster gør, nemlig at det kan være vanskeligt at skelne mellem regnefærdighederne og evnen til at afkode en ukendt kontekst.

Dokumenterne i de to prøvesæt adskiller sig fra hinanden ved, at SIALS-opgaverne skal bruges internationalt, mens dokumenterne i FVU-prøverne er danske og autentiske. Det får en del af dokumenterne i SIALS til at virke meget ”konstruerede” til denne bestemte undersøgelse.

Matematiske begreber

Da det er regnefærdigheder og numeralitet de to prøver tester for, må der nødvendigvis indgå krav om at deltagerne viser, at de behersker et antal matematiske begreber og operationer. For begge prøvers vedkommende skal deltagerne for at løse opgaverne kunne anvende de fire regningsarter. De skal være i stand til at opstille et antal regnestykker i hovedet eller evt. på papir på baggrund af skriftlig information. De skal håndtere heltal, decimaltal og procenttal. De skal aflæse tabeller og forskellige former for grafiske fremstillinger. De skal estimere en værdi ud fra henholdsvis en graf og et søjlediagram. De skal kunne regne med simple procenter.

SIALS-opgaverne tester yderligere for, om deltagerne kan håndtere minuttal, udenlandsk valuta og ukendte måleenheder.

FVU-opgaverne tester yderligere for, om deltagerne kan foretage arealberegning, regne med simple brøker. Om deltagerne er i stand til at tælle og måle. Om deltagerne kan afsætte mål og indtegne korrekte mål. Om deltagerne kan arbejde med målestoksforhold, både når det er angivet, og når de selv skal vælge et det. Om deltagerne kan afbilde en værdi på et måleinstrument. Om deltagerne kan genkende mønstre og systematik, og om deltagerne kan kopiere og færdiggøre et påbegyndt mønster. Endelig om deltagerne er i stand til at bruge forskellige hjælpemidler, f.eks. lommeregner og lineal.

Sværhedsgraden af regnestykkerne og antallet af operationer der indgår i beregningen adskiller sig, idet der i mange af FVU-opgaverne indgår både flere og vanskeligere operationer end i SIALS-opgaverne. Men her er det vigtigt at huske, at hjælpemidler er tilladte i FVU.

Opsamling

I denne artikel beskæftiger jeg mig med, hvordan voksnes regnefærdigheder testes i forbindelse med internationale sammenligninger af forskellige landes befolkningers færdigheder, og med hvordan voksnes numeralitet testes efter endt uddannelsesforløb. De to typer at tests opererer begge med et funktionelt regnefærdighedsbegreb, der dog adskiller sig væsentligt fra hinanden. SIALS-undersøgelsens ”regnefærdighedsbegreb” er begrænset til at omfatte de fire regningsarters anvendelse på tal og cifre, der indgår i skriftligt materiale, og begrebet er ligeledes afgrænset til, at regnefærdigheder er hovedregningsfærdigheder. I FVU opereres der med numeralitet. Numeralitetsbegrebet dækker over de matematikfærdigheder og matematikforståelser alle mennesker principielt har brug for at have. Numeralitet er i den forstand et meget bredt begreb, som vanskeligt lader sig afgrænse, men i opgaverne til FVU-matematik bliver deltagerne ikke bare testet for deres anvendelse af de fire regningsarter men også for fire af de seks typer af tværkulturelle matematiske hverdagsaktiviterer, som den engelske matematikdidaktikker Alan Bishop har identificeret: at tælle, at lokalisere, at måle og at konstruere (Bishop, 1988).

Begge former for tests inddrager tekster fra voksnes liv. I FVU-opgaverne er det danske tekster og grafiske fremstillinger hentet fra en dansk virkelighed. I SIALS-opgaverne er teksterne internationale og højst sandsynligt konstrueret med henblik på undersøgelsen. Det kan betyde, at tekster, der i princippet skulle være kendte for prøvedeltageren, alligevel virker fremmede og derfor kan forvirre deltageren. I begge prøvesæt indgår der en række forskellige opslagstekster. Ulempen ved at anvende opslagstekster er, at de ofte stille krav til deltagerens forhåndskendskab til konteksten. For eksempel indgår der i SIALS-opgaverne en afstandstabel og i FVU-prøverne et billede af en bils speedometer. For bilister vil speedometeret være en kendt kontekst, og det vil afstandstabellen højst sandsynligt også. Men for deltagere, som ikke kører bil, vil begge kontekster være ukendte.

Når konteksten er fremmed for prøvedeltageren kan det være svært at afgøre om, det er kendskab til konteksten der testes for eller om det er regnefærdigheder/numeralitet. I "Målgruppeanalysen" (Johansen, 2002) har jeg lavet en lille analyse af besvarelserne af opgaverne. Den antyder, at det for en del af opgaverne i SIALS-undersøgelsen måske nærmer er afkodning af kontekst, der bliver testet for frem for deltagerens regnefærdigheder. Hvordan det forholder sig med FVU-prøverne kan kun en nærmere analyse af besvarelser af prøvesættene afsløre.

Det er ikke nogen let opgave at udvikle prøver, der kan teste voksnes regnefærdigheder særligt ikke, hvis man ønsker skriftligt at teste funktionelle færdigheder. Selvom man ønsker at teste deltagerne i en kendt kontekst, så vil det have indflydelse på situationen, at man tager en hverdagsaktivitet eller et hverdagsdokument og "putter" det ind i en prøvesituation. FVU-opgaverne er utraditionelle eksempler på, hvordan opgaver kan formuleres og teste for andre færdigheder end de fire regningsarter.

Referencer

Bishop, A. (1988): *Mathematical Enculturation. A Cultural Perspective on Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Jensen, T. P. og Holm, A. (2000): *Danskernes læse-regne-færdigheder – i et internationalt lys*. København: AKF forlaget.

Johansen, L. Ø. (2002): *Målgruppeanalyse – en undersøgelse af resultaterne fra SIALS.* Roskilde: Center for Forskning i Matematiklæring.

Johansen, L. Ø. (2003): "Hvordan evalueres voksnes regnefærdigheder og voksnes numeralitet?" i nyhedsbrevet for *Forum for Matematikkens Didaktik, 7*(1), 4-7

Johansen, L. Ø. (2004): "Voksnes regnefærdigheder/numeralitet - hvordan testes det?" I Engström, A.: *Democracy and Participation. A Challenge for Special Needs Education in Mathematics. Proceedings of the 2th Nordic Research Conference on Special Needs Education in Mathematics.* Örebro: Department of education.

Lave, J. (1988): *Cognition in Practice.* Cambridge: Cambridge University Press.

OECD (1995): *Literacy, Economy and Society.* Statistics Canada.

OECD (2000): *Literacy in the Information Age.* Paris: OECD.

Undervisningsministeriet (2000): Lov *om forberedende voksenundervisning (FVU-loven).* København: Undervisningsministeriet.

Undervisningsministeriet (2001): *Bekendtgørelsen om undervisning m.v. indenfor forberedende voksenundervisning (FVU-bekendtgørelsen) Fagbeskrivelsen for FVU-matematik*. København: Undervisningsministeriet.

Wedege, T. (1998): Virksomhedsundersøgelsen. Delrapport 3. i Lindenskov, L. og Wedege, T. *Tre rapporter fra FAGMAT – et projekt om tal og faglig matematik i arbejdsmarkedsuddannelserne.* Roskilde: Roskilde Universitetscenter. IMFUFA-publikation nr. 349.

Wedege, T. (1999): *Matematikviden og teknologiske kompetencer hos kortuddannede voksne*. Roskilde: Roskilde Universitetscenter. IMFUFA-publikation nr. 381.

Jan Engstedt
er Undervisningsråd vid Skolverket i Sverige med ansvar för de nationella proven i matematik och kursbanksproven i matematik och fysik.
Har undervisat på gymnasiet i matematik i nästan 20 år. Mellan åren 2000 till 2003 ansvarig för Stockholms Utbildningsförvaltning center för matematik och naturvetenskap med tonvikt på kompetensutveckling.

Det svenska provsystemet för en likvärdig bedömning?

Material till seminariet kommer företrädesvis från Skolverkets hemsida, www.skolverket.se under flikarna *Nationella prov* och *Betyg.* Presentation finns också som en powerpointpresentation och har dispositionen: ramverket för ett provsystem, exempel på prov och provuppgifter samt resultat av de nationella proven.

Ett provsystem kan inte ses separat utan måste relateras till de läroplaner som är gällande, dvs. ska återspegla utbildningens syfte. En norsk studie gjord av Sivesind m. fl har kategoriserat läroplaner i fyra typer:

- **Läroplanen som ett formellt reglerande dokument**
- **Läroplanen som ett auktoriserande och innehållsbeskrivande dokument**
- **Läroplanen som ett politiskt normerande instrument**
- **Läroplanen som ett standardiserande dokument för central utvärdering (evaluering) av utbildningen**

Sveriges läroplaner beskrivs oftast som typ 3 med inslag av typ 2 och 4. I läroplanssystem typ 3 kan inte examensprov förekomma eftersom det förutsätter stor pedagogisk frihet att välja stoff och arbetssätt.

Skolverket har regeringens uppdrag att tillhandahålla nationella prov. Syftena som anges är att

- ge lärarna stöd i att analysera och bedöma elevers starka och svaga sidor i elevernas kunskaper
- ge läraren stöd vid bedömning av om eleverna har nått uppställda mål i kursplanerna
- stödja en likvärdig bedömning och en rättvis betygssättning
- ge underlag för lokal och nationell uppföljning av elevers kunskaper i de ämnen/kurser som har nationella prov.

Skolverket tillhandahåller nationella prov, ämnesprov och kursprov

- i årskurs 5 för att bedöma om elever uppnått målen i år 5 och bedöma elevers starka och svaga sidor
- i årskurs 9 och på gymnasiet för att ge lärarna stöd i en likvärdig betygsättning.

Proven konstrueras av PRIM-gruppen vid Lärarhögskolan i Stockholm (ämnesprov i år 5 och år 9 samt kursprov A) och av Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar vid Umeå universitet (kursproven B-D samt kursbanksprovet kurs E).
Att konstruera ett prov kan ta upp till 2 år och kostar i genomsnitt 1 miljon svenska kronor per prov och år. I provkonstruktion ingår konstruktion av enskilda uppgifter, utprövning av dessa, sammansättning av hela prov, bedömning av provet och fastställande av betygskriterier. Slutligen ska proven tryckas och distribueras till skolorna.

Under de senaste åren har provsystemet utsatts för påfrestningar genom att elever lyckats komma över prov före provtillfället. Hur detta har gått till har Skolverket inte kännedom om men mycket tyder på att proven på någon skola hanterats ovarsamt så att elev kommer över ett exemplar. Det har därigenom blivit en del i provhanteringen att skapa säkrare rutiner. En första åtgärd har varit att inskärpa rektors och lärares ansvar att hantera proven och hålla dessa inlåsta fram till provtillfället. Proven utförs numera i två likvärdiga versioner för att minska intresset bland elever att försöka komma över ett prov.

Proven i matematik består av två skriftliga delar; en med räknare och en utan. I årskurs 9 finns dessutom en muntlig del. Provuppgifterna har olika svårighetsgrad som indikerar godkänd-, väl godkänd och mycket väl godkänd-nivå. Betygskriterier bygger dels på totalpoäng men också antal uppgifter på väl godkänd- och mycket väl godkänd-nivå. Till varje prov finns en större uppgift som aspektbedöms ur tre aspekter; förståelse och metod, genomförande och analys samt redovisning och matematiskt språk.

Vid seminariet visas uppgiftsexempel som kan finnas under Skolverkets hemsida för betyg och bedömningsexempel, http://www.skolverket.se/betyg/bedomning/index.shtml.

Proven har mycket gott anseende bland lärare men de är tidskrävande att bedöma och rapportera. Skolverkets analys av utfallet visar att de flesta elever, 70-80 %, får samma ämnes- eller kursbetyg som provbetyg. Resterande, ca 25 %, får i allmänhet ett högre betyg. Skolverkets analys har visat att betygsinflationen varierar mycket mellan skolorna; allt från att alla elever får samma provbetyg som ämnes- eller kursbetyg till att upp till 70 % av eleverna får ett högre ämnes- eller kursbetyg jämfört med provbetyget.

De nationella proven är inte examensprov utan ska vara ett stöd för betygssättning. Att det är stora variationer kan ha naturliga förklaringar då lärarna tillsammans med elever har stor frihet att välja stoff och arbetssätt utifrån de gällande läroplanerna. Skolverket kommer i analyser försöka finna förklaringar till dessa variationer.

Peter Weng
er ansat som lektor på Frederiksberg Seminarium og forskningsassistent på Danmarks Pædagogiske Universitet.
Arbejder specielt med matematikvanskeligheder, test og evaluering i grundskolen og voksenundervisningen i både nationale og internationale projekter.
Medforfatter til. "Vurderinger og evalueringer i matematikundervisningen" DPU 2002.

Matematiklærer i en testkultur?

I Danmark kommer der sandsynligvis snart et endeligt forslag fra undervisningsministeriet om mere testning af eleverne i folkeskolen. For matematiks vedkommende ser det ud til at skulle ske på 6.klassetrin. Baggrunden for dette er dels resultaterne fra de internationale IEA [1)] - og OECD[2)] undersøgelser som Danmark begyndte at deltage i for cirka 15 år siden, dels en påvirkning fra de lande der har indført nationale test. Desuden har der gennem de senere år generelt været udvikling i gang med at få undervisningen gjort mere "ensartet" i Danmark selv om det er et lille land, som blandt andet har ført til indførelsen i 2003 af de nuværende bindende trinmål efter 3., 6. og 9.klassetrin. Dette har så igen frembragt et behov for at kunne "måle" i hvilken udstrækning disse mål er opfyldt.
Denne udvikling stiller nye krav til lærerrollen generelt og specifikt matematiklærernes rolle i undervisningen. Krav om at læreren på en kvalificeret måde kan inddrage testning som et led i en undervisning, der kan fremme læringen hos den enkelte elev og undgå at blive administrator af et politisk styret testsystem, der er uden sammenhæng med den undervisning læreren gennemfører til daglig.
Udfyldelsen af en sådan rolle er matematiklæreren generelt ***ikke*** *klædt på til!*

Ovenstående er en revideret udgave af oplægget til et foredrag på konferensen om Vurderinger i matematikk i Trondheim efteråret 2004. Baggrunden er en oplevelse hos lærere af, om ikke afmagt, så dog en hvis frustration over for de krav, der kontinuerligt stilles fra politisk - og anden side, til lærerne om større "faglighed" og mindre "pædagogik" i undervisningen. Dette sker både lovgivningsmæssigt og ikke mindst gennem næsten daglige meningstilkendegivelser i medierne fra både enkelte personer og grupper, der føler sig kaldet til at tilkendegive en mening om "undervisningen i skolen". Krav om større faglighed i undervisningen og om en dokumentation fra lærerens side, der skal vise hvad han eller hun har gjort for, at den enkelte elev skal kunne nå de nugældende bindende trinmål i den danske folkeskole, vil være en af flere forskellige kim til opblomstringen af en testkultur, der ikke tidligere har været set i folkeskolen. Hvis dette og andre kim ikke får en gennemtænkt "grobund", kan det få alvorlige følger for lærerens rolle i undervisningen. For hvis lærerne ikke bliver inddraget i denne udvikling og får lov til at påvirke udviklingen ud fra deres praktiske ståsted, vil kommende tests i stedet for at blive en reel støtte for lærernes samarbejde med elever og forældre meget let kunne gå i en negativ retning, som der er tegn på er sket i nogle lande der fået en ny testkultur.

Hvad er begrundelsen for denne påstand og hvilke tiltag kan fremme en påklædning af matematiklæreren til at kunne agere i en testkultur?

De nedenfor stillede spørgsmål belyser påstanden om, at matematiklærerne generelt ikke er klædt på til at agere i en ny testkultur, samt hvilke tiltag der kan fremme en påklædning til dette. Udgangspunktet er taget i nogle af de mange overskrifter, der har været fremme i de danske medier i år 2004 om folkeskolens tilstand og om hvorvidt anvendelse af flere test vil kunne effektivere undervisningen i denne.

1) The International Association for the Evaluation of Educational Achievement.
2) Organisation for Economic Co-operation and Development.

Testkultur?
I Danmark har systematisk anvendelse af skriftlige test, som et led i udviklingen af undervisning og læring ikke haft en fremtrædende plads i matematikfaget. Anvendelse af standardiserede prøver udgivet af et psykologisk forlag ved starten af skoleforløbet og inddragelse af gamle prøver fra Folkeskolens Afgangsprøve i de afsluttende år, har ikke været et ualmindeligt billede af testanvendelsen i den danske folkeskole i de sidste mange år. Dette billede er ved at ændre sig.
Skriftlige test og andre evalueringsredskaber tilbydes nu på alle klassetrin fra forlagene. Diagnostiske test, som færdighedstest og problemløsningstest, samt gruppetest er kommet på markedet, samtidig med at alle de nye lærebogssystemernes lægger vægt på evaluering og dermed test i forskellig iklædning. Ligeledes er de senere års ranglisten af skoler på grundlag af elevernes gennemsnitskarakter ved afgangsprøverne efter 9. klassetrin et tegn på at der er en ny testkultur på vej.
Disse tiltag sker i nogen grad på baggrund af en fokusering på uddannelse som en produktion af samfundsindivider, hvor politikerne i højere grad end tidligere vil sikre sig at samfundet for noget igen for investeringen i folkeskolen. "Noget for noget" – princippet gælder også på folkeskoleområdet. Test ses i den sammenhæng som et redskab til at måle, i hvilken grad samfundet får nok tilbage for de penge der investeres i "verdens dyreste uddannelsessystem", som mange danske politikere ofte understreger, at den danske folkeskole er. Erfaringer fra lande der har indført flere test kan findes i lande som England og USA, hvor skolers effektivitet er blevet målt ved testning. Erfaringerne herfra viser at der er god grund til at være opmærksom på at få lærerne med i denne udvikling af en testkultur, hvilket følgende udsagn signalerer:
"… De gode skoler bliver belønnet, mens de skoler, som har for lave karakterer, risikere at blive lukket. …" og "This is 'War on Education'" siger lærerinden Gayle Arendt. Hun har arbejdet som skolelelærerinde i 30 år. "Regeringen tror, at børn er maskiner, som kan programmeres til at blive lærdomsrige borgere. Programmeringen hedder terperi"(De terper for Bush www.information.dk 4.10.2004).
At en ny testkultur er ved at se dagens lys i Danmark er en realitet, men hvordan den endelig vil folde sig ud er endnu uvist.

Er testkulturen kun et overgangsfænomen?
Vil der komme flere test en overgang og så langsomt aftage igen? Vil der komme andre typer af test der ikke tidligere har været anvendt i folkeskolen? Der er som det vil fremgå nedenfor forskellige opfattelser af hvordan den kommende testkultur skal udvikle sig. Den nuværende borgerlige regering er fremkommet med forslag, der vil betyde flere nationale test, og oppositionen været fremme med forslag om færre obligatoriske afgangsprøver mod at der til gengæld skal være flere fag, der skal have en afgangsprøve. Det vil sige afgangsprøver i fag der ikke kan aflægges prøver i på nuværende tidspunkt.
"Der skal være færre eksaminer ved folkeskolens afgangsprøver. S og R mener, at de nuværende prøver tapper for mange ressourcer, og eleverne glemmer prøvefri fag ".
"Svært at motivere i fag uden eksamen" og " Det er en god idé at trække lod, så eleverne ikke koncentrerer sig om de fag, der skal prøves i"(www.Politiken.dk 13.9.2004)

Disse udsagn er fra oppositionen til den nuværende regering og viser at lige meget hvor i det politiske landskab man befinder sig, ses test som et instrument til at fremme ”effektiviteten” i den danske folkeskole.
Derfor er der ingen grund til at tro på at øget anvendelse af test i undervisningen er et fænomen der forsvinder lige med det samme.

Ud over ovennævnte nationale argument for at testkulturen ikke er et overgangsfænomente, er de internationale signaler med periodiske komparative undersøgelser som TIMSS [3)]og PISA [4)]med til at understøtte og fremme den nationale testkultur i de deltagende lande. Men man kan forvente at nogle af de erfaringer der for eksempel er gjort i England hurtigt vil blive inddraget og nyttiggjort i den danske debat. I England har testningen måske har haft sit toppunkt i grundskolen. ” England nedtoner nationale test” (www.Folkeskolen.dk 16.09.2004), er udsagn fra en artikel i Folkeskolen, der referer til at reglen om den samtidige test af alle syv-årige i England skal erstattes af en mere fleksibel anvendelse af denne test og kombinere den med lærerens generelle bedømmelse af den enkelte elev. Men stadig test!

Negative og positive aspekter ved test?
Angst for test fremmer ikke læring og der er ikke tvivl om at med flere test og testning af elever ved skolestarten vil påvirke mange elevers udvikling af læring negativt. En undersøgelse knyttet til testning af engelske børn i forbindelse med den første nationale prøve synes at bekræfte dette.
”Søvnløse nætter og trøstespisning forud for eksamen er ikke kun noget, der præger teenagere – også engelske skoleelever på fem år har symptomer på stress i dagene før deres første nationale prøve, viser ny undersøgelse. Det er forskere på Cambridge University, der har fundet ud af, at både børn og forældre bliver urolige, når familiens yngste skal tage sin første nationale prøve,…” og ”Lige unde halvdelen af børnene forbandt eksaminer med en del stress, …” siger forsker Terri Apter ifølge NUT til avisen The Guardien(www.folkeskolen.dk 26.08.2004).
Der er derfor god grund til at tænke på hvordan en øget testning vil påvirke det samarbejdsgrundlag som den danske folkeskole bygger på: ”Folkeskolens opgave er i samarbejde med forældrene at fremme elevernes tilegnelse af kundskaber, …”. (Lov om folkeskolen. Kapitel 1, §1.). Der er ingen tvivl om at udviklingen med en øgede opmærksomhed og deltagelse fra mange forældres side, skal ses som en positiv udvikling, men at en ufornuftig og kramagtig anvendelse af test meget let kan forpeste dette samarbejde og skabe konflikter, der ikke fremmer de fællesmål som alle i stort udstrækning er enige om. Derfor er det vigtigt at læreren kan anvende testning fornuftigt ud fra de elever og den undervisningssituation han eller hun står i og ikke bliver nødsaget til at anvende nationale test der er uafhængige af denne situation, og som læreren kommer til at opleve som værende mere eller mindre påtvunget fra politisk hold.
At der er nogle blandt test-fortalerne der er opmærksomme på ovennævnte viser følgende udsagn fra et af de folketingsmedlemmer, L. Frevert, der er positivt stemt over for test i folkeskolen. ”Men hvis man ser på test som et positivt hjælpemiddel til at få børn og unge til at kunne forstå, hvor deres eget niveau er og derved kunne gøre det endnu bedre, skal man måske ikke se en test som noget negativt, men som et tiltag” og ” Vi har nok alle oplevet i skoleforløbet, at når man fik udleveret en prøve, så sad man og rystede og fik våde håndflader og var skrækslagen for at lave fejl. Tit resulterede denne nervøsitet i, at der var alt for mange fejl. Hvis man som sagt kunne se disse test som et hjælpemiddel – en hjælp til at få klarlagt, hvor ens mangler var, så ville tests være med til at kunne forbedre indlæringen og forbedre niveauet”. Denne udmelding som indirekte indeholder betragtninger knyttet til løbende -, formativ – og summativ evaluering er værd at fastholde politikerne på. Hvis den nye testkulturs udvikling kan drejes mod en anvendelse af test både til udvikling af læring hos den

enkelte elev og til kontrol i et rimeligt forhold, når dette sker på baggrund af en meningsfuld begrundelse over for elever og forældre vil test blive et hjælpemiddel i undervisningen.
.

3) The Third International Mathematics and Science Study.
4) Programme for International Student Assessment.

Der vil altid være fordele og ulemper ved anvendelse af test, derfor er det nødvendigt at læreren har både indsigt i - og viden om, hvornår og hvordan en test skal anvendes til at udvikle eller kontrollere udviklingen hos den enkelte elev

Hvorfor er matematiklæreren ikke klædt godt nok på til at agere hensigtsmæssigt i en testkultur? Tiltag til at ændre dette?

Den løbende evaluering og undervisningsdifferentiering er centrale begreber i beskrivelsen af den danske folkeskoles virke, men er for mange lærere meget vanskelige at beskrive betydningen af og synliggøre i tilknytning til deres undervisning. Begreberne bliver derfor let meget luftige, så de mere skaber irritation end virker som begreber, der giver mening og støtte til den enkelte lærer.
Derfor er et af de tiltag, der skal tages for at give lærerne mulighed for at kunne arbejde konstruktivt med disse begreber med test implicit indbygget i sig som baggrund for undervisningen, at der sker dels en inddragelse af disse begreber i læreruddannelsen og efteruddannelsen, på en anden måde end hidtil.
"Test er ikke løsningen" i www.Folkeskolen.dk 19.05.2004: "… Det hjælper jo ikke noget at stå med en masse tests, hvis ikke lærerne er rustede til at bruge dem til at hjælpe eleverne videre. Det der er brug for, er at lærerne får bedre redskaber til at gennemføre og omsætte evalueringer af sig selv og eleverne til handling. Det kræver bedre efteruddannelse."
Dette krav er jo ikke nyt i sig selv, men det er ikke hver dag det kommer fra et dansk folketingsmedlem som ovennævnte er.
Fra samme kilde som ovenfor, den 17.05.2004, er følgende citat fra Kommunernes Landsforening, som er skolernes og lærernes kommunale samarbejdspartner: "Det bør overvejes at nedsætte antallet af ressourcekrævende mundtlige afgangsprøver med henblik på at styrke den løbende evalueringskultur i retning af mere skriftlighed og systematik".
Begge citater viser at "løbende evaluering" har vundet indpas i debatten, og på en måde der ikke har været tilfældet før. Dette skal ses i sammenhæng med begrebet undervisningsdifferentiering, der ofte har været debatteret i medierne, fordi de to begreber er uadskillelige. At den løbende evaluering er blevet et begreb politikere og andre uden for undervisningsmiljøerne er blevet opmærksom på og anbefaler mere eller mindre direkte og af forskellige grunde, bør noteres i lærerkredse, som noget positivt som politikerne skal holdes fat på. Dette kan for eksempel ske ved at gå ind i debatten om det indhold der skal være i den "værktøjskasse med redskaber til evaluering", som den nuværende undervisningsministers, Ulla Tørnæs, har annonceret til brug for testning af eleverne i 2., 4. og 6. klasse i henholdsvis, læsning, dansk og matematik(www.folkeskolen.dk 5.nov.2004).
Testene fra ministerens side tænkt som en del af redskaberne i en sådan værktøjskasse. Værktøjskassen kan som metafor vise sig at være god, hvis den udover basisværktøjer også kommer til at indeholde mange af de specialværktøjer en håndværker i dag har mulighed for at kunne bruge i sit arbejde. Det vil sige at en sådan værktøjskasse skal indeholde mange typer af skriftlige test, mundtlige test og praktiske(hands-on) test. Der skal være en mangfoldighed af test der gør chancen stor for at læreren kan finde lige netop det "test-værktøj" han har brug for i en given undervisningssituation.
Desuden skal der være forslag til udarbejdelse og anvendelse af spørgeskemaer, interviewguides, observeringsguides og lignende værktøjer, der kan anvendes til f å informationer om den enkelte elevs forestillinger, opfattelser og holdninger til matematik. Disse er ofte af større værdi for underviseren med henblik på udvikling af læring hos eleven

end informationer fra en test, der viser om eleven kan løse bestemte matematikopgaver, men de bliver alt for tit overset som et produkt af undervisningen.
Men for at en håndværker kan anvende et stykke specialværktøj optimalt, er det ofte nødvendigt han kommer på et specialkursus. Dette billede med håndværkeren og hans værktøjskasse kan overføres til matematiklæreren og evalueringsredskaber. I Danmark gøres der i matematiklæreruddannelse for lidt ud af at udvikle lærerens evalueringskompetencer, selv om der generelt er meget fokus på området. Endvidere er det sparsomt med udvalget af forskellige test til forskellige formål. Generelle klassetrinstest og tidligere prøveopgavesæt eller pendanter til disse på de afsluttende klassetrin udgør, som tidligere nævnt, stort set udvalget af mulige specialværktøjer på nuværende tidspunkt og dette er ikke tilstrækkeligt.
Så for at få den danske matematiklærer klædt på til at kunne deltage med indsigt og styrke i en ny testkultur er det nødvendigt med mere fokus evaluering og specielt anvendelse af test i uddannelsen og efteruddannelsen af lærere, samtidig med at der bliver sat projekter i gang der kan udvikle test af forskellig slags, der gør anvendelsen af test til en støtte i den løbende evaluering.
Hvis dette lykkes er der en chance for at læreren bliver klædt på til kunne ytre sig om undervisningsdifferentiering på baggrund af en løbende evaluering i en ny testkultur, der vil kunne støtte den enkelte elevs læring.
Dermed optimeres chancen for at nationale test og lignende kan blive en støtte og ikke det modsatte for den enkelte læreres arbejde.

Tone Dalvang *er rådgiver ved Sørlandet kompetansesenter. Har undervist på alle trinn i norsk skole, sist på Høgskolen i Agder. Arbeider i Forum for matematikkvansker med faglig bistand i utviklingsarbeid innen Statped, kommuner og forlag.*

Olav Lunde *er seniorrådgiver ved Sørlandet kompetansesenter. Har arbeidet som leder i PP-tjenesten. Arbeider nå i Forum for matematikkvansker med faglig bistand i utviklingsarbeid innen Statped og PPT.*

Tone Dalvang og Olav Lunde:

Dynamisk kartlegging og dynamisk undervisning

"Diagnostisering for diagnostiseringens egen skyld er etter vår oppfatning uetisk, og den er slett ikke uvanlig." Den må være meningsbærende ut fra et praktisk pedagogisk synspunkt og resultatene skal hindre ureflektert bruk av tid og læremidler.

Dette uttalte Hans Jørgen Gjessing (1978) for over 25 år siden om testing og kartlegging av lese- og skrivevansker. Vi tror dette har gyldighet også i dag – og også når det gjelder vansker i matematikk. Den tradisjonelle testingen er for snever.

I det følgende vil vi forsøke å vise en alternativ måte å evaluere elevene på i matematikk og poengtere hvordan evalueringen alltid må henge sammen med undervisningen.

Hva skjer når en elev arbeider med et problem?

Elever som strever med matematikken trenger flere måter å vise sin kompetanse på enn gjennom lærebok, blyant og papir.

Denne oppgaven innebærer arbeid i grupper på minst tre personer. Hjelpemiddelet er cuisenairestaver. Flere av deltagerne ble utfordret på å bruke et fremmed materiell som hjelpemiddel.

> Finn staver som kan representere de ulike delene og helheten. Vis med stavene hvordan dere løser problemet:
>
> En fjerdedel av mine karameller er lakris. Resten er gule. Jeg gir bort halvparten av de gule. Da har jeg 6 gule igjen. Hvor mange karameller hadde jeg fra begynnelsen.
>
> (T Dalvang 2004)

Deltagerne arbeidet med oppgaven i små grupper og diskuterte hva en slik oppgave inneholdt: Momenter som ble notert var bl.a: Problemløsning, gjøre seg kjent med, diskutere, drøfte ulike strategier.

Hvorfor noen ikke "får det til"…

Det er et problem i matematikkundervisningen at ikke alle elevene får det til – og på samme tid! Og faktisk er det ganske mange elever som ikke "får det til".

Fra Sverige foreligger det en omfattende undersøkelse, "Medelstad-undersøkelsen" (Engström & Magne, 2003) som bl.a. viser hvordan den matematiske ferdigheten hos elevene har utviklet seg over tid: i 1977, 1986 og 2002. De konkluderer slik:

- 15 % av elevene i avgangsklassene (9.kl.) hadde en matematisk ferdighet tilsvarende gjennomsnitt i 4. klasse.
- Disse resultatene var stabile over tre ulike læreplaner.
- Det er de enkle, dagligdagse ferdighetene som beherskes best. Samtidig er dette stoff som er lite profilert i den svenske "skolematematikken". – Det de kan synes de å ha tilegnet seg i ulike "ikke-skolske" situasjoner.

- Hvorfor er det slik?

For å finne svar på slike spørsmål, gir vi prøver, - vi tester og vi kartlegger: Noen eksempler med mulige svar:

11+3= 5 , 19-1=9 , 16-4=36 ,

$$\begin{array}{r} 12 \\ \underline{-\ \ 4} \\ \underline{\underline{=12}} \end{array}$$

Når vi så snakker med disse elevene, får vi kanskje slike forklaringer:

"Jo, det blir 5 fordi 1+1 =2 og 3 til blir 5."

"1-1 blir null, og da har jeg jo 9 igjen."

"1-4 går ikke, men 4-1 blir 3. Og så har jeg 6 fra før."

"12 ta bort 4" – og så legger eleven fingeren over 4-tallet – "Da har jeg 12 igjen". Og det er jo korrekt: Det er slik vi sier! At eleven forveksler tall og siffer, er en annen sak. Men det er jo nettopp slike misoppfatninger undervisningen må gripe fatt i hvis vi skal få eleven til å tenke rett.

Elevene tenker, men elever med matematikkvansker tenker ofte feil. Denne feil tenkingen får vi ikke tak i med tradisjonelle tester. Men det er nettopp denne tenkingen som undervisningen må gripe fatt i. Det viktigste for ny læring er hva eleven kan fra før. Hvis vi ikke tar utgangspunkt i dette, er vi redd for at mange elever slutter å tenke. (Se Price & Youé 2000 og van den Heuvel-Panhuizen 1994.)

Vi konkluderer slik mht. den tradisjonelle testprosedyren:

- Tradisjonelle tester er opptatt av å finne fram til, bestemme, hva som er lært (dvs. et læringsprodukt), mens de ser bort fra utprøving av selve læringsprosessen.
- Tradisjonelle tester prøver ikke ut hvordan barn reagerer på undervisningen fordi den har som premiss at tidligere læring best kan predikere framtidig funksjonering.
- Tradisjonelle tester gir ikke tilstrekkelig informasjon som kan danne grunnlaget for å utvikle effektive intervensjonsteknikker / effektive undervisningsopplegg.

Fokus på prosessen i stedet for fokus på produktet.

En dynamisk kartlegging vil gi mulighet for å avdekke de underliggende kunnskaper og kompetanser som kommer til uttrykk når elever f.eks bruker tegning som grunnlag for evaluering.

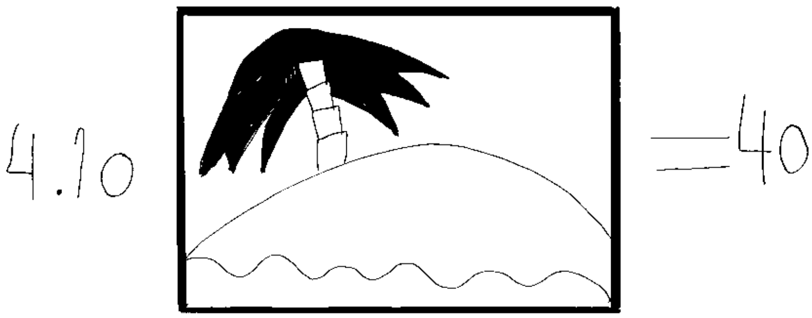
Et eksempel på multiplikasjon (Michael Wahl Andersen, 2001):

$\boxed{4 * 10}$

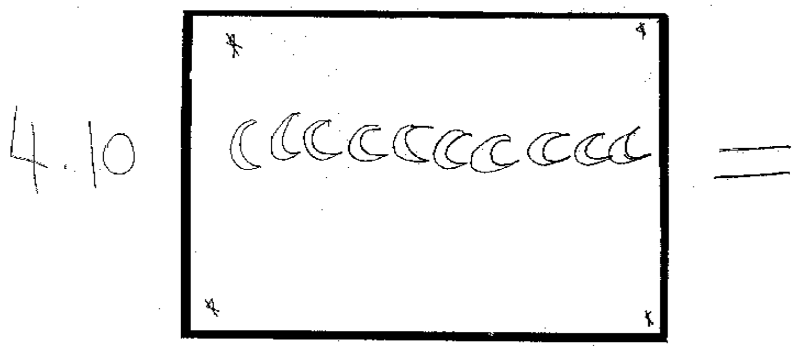
- Elevene skal beskrive hvordan de tenker, når de regner.
- Deretter skal hver og en beskrive deres tegning og hvordan den henger sammen med det multiplikasjonsstykke, de har arbeidet med.

Av dagboknotatene læreren gjør kan vi se

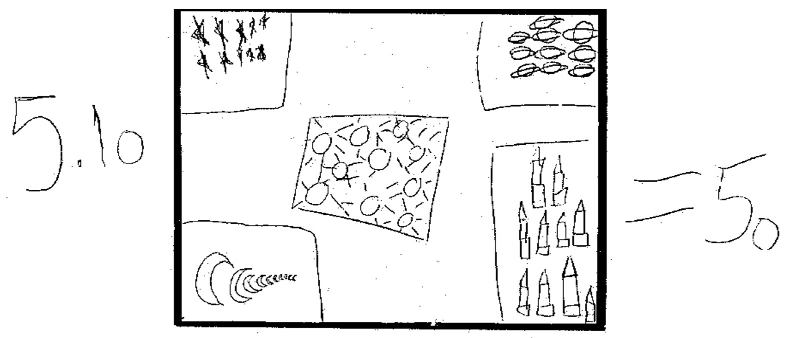
> Den første besvarelsen fra en elev som vet svaret på 4 * 10, men bare som utenatlære, ikke som matematisk forståelse. Svaret er rett, men hun klarer ikke gjøre rede for det verken i tegning eller forklaring. Tegningen viser tydelig at hun ikke har helt klar forståelse av hva det vil si å gange to tall med hverandre.



> Samme elev. Den neste tegning ca 10 dager senere viser fremgang. Det er nå sammenheng mellom tallene hun skal gange sammen og tingene på tegningen, men hun utelater svaret, for nå ser hun selv at det er noe som ikke helt stemmer. Antallet hun har tegnet stemmer ikke med det svaret hun mener det skal bli.



> Samme elev. Den tredje tegningen ca 10 dager senere viser begynnende forståelse. Antall ting på tegningen er gruppert i henhold til multiplikasjonen, og svaret stemmer også overens med det hun har tegnet.



Ved å bruke dette eksempelet fra en elevs arbeid med multiplikasjon ville vi vise hvordan vi gjennom bruk av dynamisk evaluering får et viktig verktøy for å klare å forstå den kunnskapen elevene konstruerer når de strever med et problem, hva slags innhold og forståelse de har av de matematiske begrepene som inngår i problemet, og de fremskritt de gjør i arbeidet med å gjøre de matematiske begrepene til sine egne.

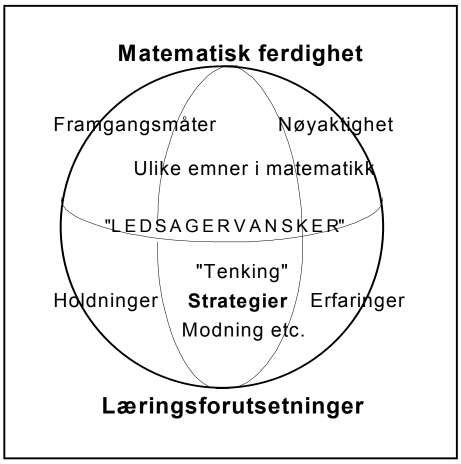
En kan stille seg spørsmål om hvordan og når en kan si at et barn har lært. Doverborg og Samuelson (1999) mener barnet har utviklet sin kunnskap når et fenomen fremstår på en annen måte enn tidligere. Med forståelse mener vi, hvordan barn ser, oppfatter og erfarer noe. Den nye kunnskapen er altså det, som fremtrer i barnets bevissthet og som av andre av og til blir kalt indre bilder.

Forutsetninger for å "få til" matematikkoppgaver

Innledningsvis ble beskrevet en Cuisenaire-oppgave. Det var tydelig at ikke alle tilhørerne fikk den til – og i alle fall ikke på samme tidspunkt. Men noen fikk det til!

Hvorfor?

Jo, de hadde de nødvendige forutsetningene for å forstå og finne løsningen! De hadde kanskje også erfaringer med Cuisenaire-materialet.



Figuren her tar utgangspunkt i Matematisk ferdighet som mål (Lunde 1997). Denne matematiske ferdigheten består av tre "områder".

Videre tenker vi at for å oppnå dette målet, må der skje en læringsprosess basert på elevens læringsforutsetninger, slik at undervisningen kan tilpasses elevens læringspotensiale.

Også læringsforutsetningene består av tre "områder": De tre nederste delene av "globen".

Som et filter ligger ledsagervansker, dvs. vansker som hemmer læringen, men som ikke direkte har noe med eleven eller faget å gjøre, f. eks. sykdom hjemme/mobbing etc.

De tre øverste feltene egner seg for det vi kan kalle statisk, tradisjonell kartlegging og undervisning. De tre nederste er det sentrale i dynamisk kartlegging og undervisning. (Hansen 2000, Lunde 1997) Etter vår mening må en kartlegging og undervisning konsentrere seg om disse. Det er her potensialet for læring ligger! (Se Ginsburg m.fl. 1993)

Vi har også valgt å bruke betegnelsen kartlegging i stedet for evaluering. Evaluering[1] kan bety vurdere, bedømme, den del av læreprosessen hvor en ser på om målene er nådd, karakterer, rangering, sensurering. Kartlegging kan bety beskrivelse, fortegnelse, sette dagsorden, lage en modell (et kart) som en kan finne fram etter.

Karlegging forsøker å svare på hvorfor. Evalueringen er mer konsentrert om hvor.

Didaktiske forutsetninger for læring

Kanskje finner vi at de individuelle forutsetningene er til stede, men at de behøver støtte fra forutsetninger som ligger i selve situasjonen, de didaktiske forutsetningene. Her finner vi igjen flere erfaringer fra cuisenaireoppgaven i oppstarten:

- Å få anledning til å samarbeide med andre fra tid til annen. Det er et stort læringspotensiale i samarbeidssituasjonen når den fungerer. Det gjelder å få i gang prosessen rundt samarbeidet; å få alle til å delta med sine forestillinger, sin forståelse av begreper, sin tenkning rundt strategier, i et samspill med andre. Dersom det er dette som evalueres, dette som vektlegges av læreren blir det verdifullt for elevene å få gruppa til å lære sammen, av hverandre.
  ” Many more students are successful because there are many more ways to be successful.” (Jo Boaler, ICME-10, 2004)

- Ansvar for egen læring er et godt og viktig mål for eleven, men det betyr ikke at eleven skal lære alene og ved egen hjelp. Vi trenger alle nærvær og samspill med kompetente andre. Vygotsky (1778), Jo Boaler (2000)

  Forum for matematikkvansker ønsker å legge vekt på at sosial interaksjon spiller en rolle for utvikling av høyere mentale funksjoner. Gjennom støtte i gode didaktiske forutsetninger kan læringen positivt påvirke utviklingen, og være med på å drive utviklingen fremover. Da må målet for læringen ligge litt utenfor det eleven allerede kan. Forskjellen mellom nivået for løste oppgaver, som kan klares under veiledning og ved kompetente andres hjelp – og nivået for løste oppgaver som kan klares selvstendig, er sonen for elevens nærmeste utvikling. Dette er prosesser som er i ferd med å modnes, og som kan settes i gang gjennom klok sosial interaksjon i læringssituasjonen.

- Dialogen er viktig (Alrø & Skovsmose, 2004). Alrø utfordrer oss på å legge til rette for den maktfrie samtalen i matematikktimene, der begge parter ønsker kontakt, der det er lov å tenke høyt, der en kan forvente å bli utfordret, og kan gjøre det samme i retur, der målet er å hjelpe hverandre videre i sin forståelse.

- En dynamisk undervisning betyr at elevene er engasjerte. Elevene blir engasjerte når læringen settes inn i sammenhenger som motiverer og gir mening, når konteksten er noe de kan kjenne igjen, noe som berører dem

- En dynamisk undervisning betyr at det er fleksibilitet i det elevene får å arbeide med, at oppgavene er åpne slik at de finnes flere måter og nivåer å arbeide med dem på. Gjennom åpne oppgaver skapes et fellesskap, fordi elevene arbeider med samme tema, men kan bruke forskjellige strategier og arbeide på forskjellige nivåer, og unngå negativ sammenligning med flinkere medelever.

[1] Betydningene av evaluering og kartlegging er basert på Tanums *Store rettskrivingsordbok* (Oslo, 1996) og Inge Bø: *Praktisk oppslagsbok for pedagogikk og psykologi.* Universitetsforlaget, Oslo, 1983

- Forum for matematikkvansker ønsker også å fokusere på den positive dynamikken mellom eleven og et materiell som eleven tar i bruk. (Dalvang, 2000) Mye matematisk tenkning ligger innbakt i strukturen et materiell har fått da det ble utviklet, og siden har denne tenkningen utvidet og endret seg gjennom bruk av mange lærere og elever.
  I cuisenairestavene ligger det en indre struktur som svært ofte får oss til å ordne stavene i størrelse, høyder, lengder, par m.m.m.

Den tause kunnskapen

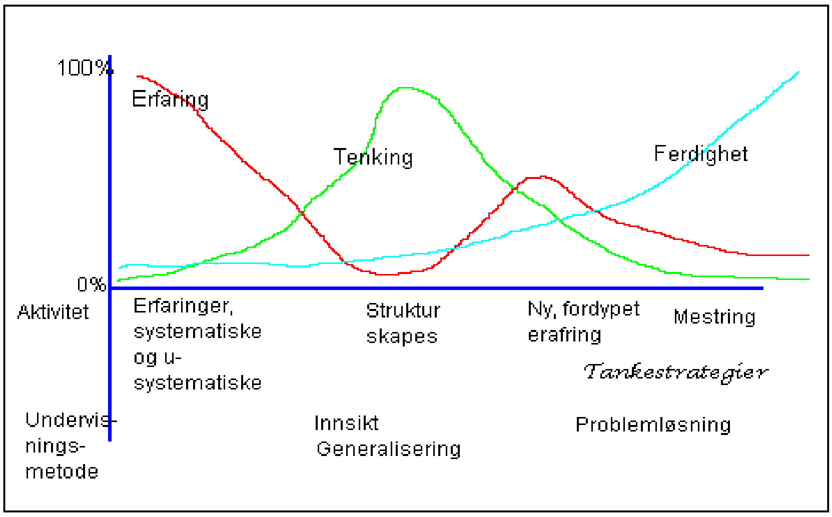
Prøv på dette: Velg en kollega. Nå skal du fortelle til denne kollegaen hvordan en skal gjøre når en knytter skosnorer. Du skal gjøre det uten å bruke hendene til å vise det med.
- Forstod den andre det du sa? - Var det lett å få forklart hvordan en gjør det? - Trengte du å tenke deg om – ha en pause? – visste du hvordan en knytter skosnorer? - Hadde den andre lært det ut fra din forklaring? - Kan det være slik at det også er en del matematisk ferdighet og forståelse som ikke egner seg for verbal formidlig?

Språkferdigheten har en vesentlig rolle i matematikklæringen (Lunde 2003). Dynamisk testing og undervisning er ofte utformet slik at det forutsettes god språkferdighet. Samtidig vet vi at en del av den matematiske ferdigheten og forståelsen er ikke-verbal, intuitiv.

Dette er et problem både ved bruk av dynamisk testing og ved matematikkdidaktisk arbeid: å få denne tause kunnskapen til å få form av aktiv språkferdighet. (Polanyi 2000) Det er derfor ofte nødvendig å la tegninger og lignende inngå som element i dynamisk kartlegging slik at vi får fram hva eleven virkelig kan og så bygge videre ut fra det. (Gaskins 2004) Og det er viktig også å bruke materiell som i liten grad er verbalt basert.

En mulig dynamisk modell for læringsforløpet: sammenhengen mellom erfaring, tenking og ferdighet.

Denne figuren illustrerer samspillet mellom ferdighet (som er målet) og erfaring og tenking. (Se også Magne 2003) Y-aksen viser den betydning hver av dem har, mens X-aksen viser tidsforløpet og hvilke aktvivitet/undervisnings metode som bør legges inn på ulike tidspunkter[2]. I begynnelsen er det erfaringer som står sentralt, mens tenkingen har liten betydning og ferdigheten knapt viser seg. Etter vår mening er det konstrueringen av strukturer som er det sentrale innen dynamisk undervisning. Utformingen av undervisningen bør da være slik at denne prosessen styrkes. Ferdigheten bygger på tankestrategier som er fleksible i nye situasjoner. (Hansen 2004)



Den dynamiske kartleggingen vil hele tiden måtte følge læringsforløpet for å kunne bidra til at undervisningen i størst mulig grad er utformet innen elevens proksimale sone.

[2] Denne modellen kan brukes på undervisningsforløp av kortere eller lengre varighet. Vi har hatt denne i tankene da vi utformet denne workshopen.

Referanser:

Alrø, H. & Skovsmose, O. (2004): *Dialogue and Learning in Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands 2004

Andersen, M. W. (2001): *Om at lære at gange - i den nærmeste udviklingszone.* I "En matematikk for alle i en skole for alle." Rapport fra det 1. nordiske forskerseminar om matematikkvansker, Kristiansand 2001

Boaler, J. (2000): *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning*, Ablex Pub, Stamford 2000

Dalvang,T. & Høines, M. & Avdem, M. (2000): *Byggverk i naturen. I* "Matematikk og undervisning", Norden 2000

Dalvang,T. (2004): *Cuisenairestaver.* I "Verkstadkompendium. Matematikk til glede og nytte." Fagsamling. Loen 2004

Doverborg, E.,Samuelson, I.P. (1999): *Förskolebarn i Matematikens värld.* Liber, Stockholm.

Engstrøm, A. (1999): *Specialpedagogiska Frågeställningar i matematikk*, Örebro Universitet.

Engström, A. & Magne, O. (2003): *Medelstad-matematik. Hur väl behärskar grundskolans elever lärostoffet enligt Lgr 69, Lgr 80 och Lgr. 94.* Rapporter från Pedagogiska Institutionen, Örebro Universitet, no. 4 , 2003

Gaskins, I.W. (2004): *Mediated Instruction*. Paper ved konferansen "Dynamiske arbeidsmåter i opplæring og kartlegging", Oslo okt. 2004

Ginsburg, H.P; Jacobs, S. & Lopez, L.S. (1993): *Assessing Mathematical Thinking and Learning Potential in Primary Grade Children.* Hos: Niss, M.: "Investigations into Assessment in Mathematical Education." Kluwer, Dordrecht, 1993. Side 157ff.

Gjessing, H.-J. (1978): *Lese- og skrivevansker. Dysleksi.* Universitetsforlaget, Oslo 1978

Hansen, A. (2000): *Hva innebærer dynamisk testing - og representerer slik testing et supplement eller et alternativ til tradisjonell bruk av tester....* Skolepsykologi nr. 1/2000

Hansen, A. (2004): *Dynamisk kartlegging og undervisning av grunnleggende begrepssystemer (GBS).* Paper ved konferansen "Dynamiske arbeidsmåter i opplæring og kartlegging", Oslo, okt. 2004

Lunde, O. (1997): *Kartlegging og undervisning ved lærevansker i matematikk.* InfoVest Forlag, Klepp st. 1997

Lunde, O. (2003): *Språket som fundament for matematikkmestring.* Spesialpedagogikk, nr. 1/2003, side 38ff

Magne, O. (2003*): Fem föredrag om den nya undervisningen för elever med särskilda utbildningsbehov i matematik.* Info Vest Forlag, Klepp st., 2003

Polanyi, M. (2000): *Den tause dimensjon.* En introduksjon til taus kunnskap. Spartacus Forlag, Oslo, 2000

Price, N. & Youé, S. (2000): *The Problems of Diagnosis and Remediation of Dyscalculia.* For the Learning of Mathematics, vol. 20. no 3 (nov. 2000), p. 23ff

van den Heuvel-Panhuizen, M. (1994): *New chances for paper-and-pencil tests in mathematical education.* Hos: Van Luit, J.: "Research on Learning and Instruction of Mathematics in Kindergarten and Primary School." Graviant Pub. Comp., Doetinchem, 1994

Vygotsky, L. S. (1978): *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes.* Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Anna Kristjánsdóttir *er professor i matematik didaktik ved Høgskolen i Agder og Islands Pædagogiske Universitet. Hendes forskningsfelt er bredt og inkluderer både indflydelse af kraftfuld teknologi og de forskellige opfattelser om matematik og matematik læring blandt lærere, elever og forældre. Anna var den første formand i Flötur, foreningen af islandske matematik lærere, og også specialist i matematik i det islandske udvalg for TIMSS. Hun var Islands repræsentant i den nordiske komité for ICME-10 og er leder af KappAbel i Island. I Norge styrer Anna forsknings- og udviklingsprojektet inden for Regn med Kristiansand.*

Kristjana Skúladóttir *er B.Ed. med matematik som liniefag. Hun har undervist længe i Melaskóli, en stor skole for 1.-7. klasse i Reykjavík. I 1995 deltog Kristjana, sammen med kollegaer, i et kursus arrangeret af den islandske matematiklærerforening Flötur. Der underviste Donald Chambers fra University of Wisconsin i Madison. Derefter begyndte hendes gruppe i Melaskóli at udvikle sin undervisning i takt med Cognitively Guided Instruction (CGI). Dette arbejde er enestående i islandske skoler og mange har været tilknyttet det, bl.a. Ólöf B. Steinþórsdóttir som gennemførte sine doktorgradsstudier i to klasser der.*

Anna Kristjánsdóttir og Kristjana Skúladóttir

Nationelle prøver i matematik versus evaluering som en del af den daglige undervisning

Foråret 2004 gennemførte Norge de første nationelle prøver i matematik for at kortlægge grundlæggende færdigheder i 4. klasse, og næste år vil de også være for 7. klasse. Der forsøges her at kortlægge et bredt spektrum. Men prøver på disse klassetrin er nye for lærere og elever og åbner mange spørgsmål om eveluering og hvad som bliver evalueret.

I Island begyndte vi i 1996 med nationelle prøver i matematik for de samme klasser. De holdes i oktobermåned hvert år. Vi vil give en indsigt i disse prøver og deres udvikling, samt hvilken rolle de spiller i den islandske skole.

Samtidig vil vi se på hvilke muligheder lærere har for at integrere evaluering i sin undervising og hvilken type evaluering der kan da være tale om. Eksemplerne kommer fra lærere som har udviklet sin undervisning efter modellen *Cognitively Guided Instruction* som oprindelig stammer fra University of Wisconsin i Madison. Vi vil se på hvilken information denne type evaluering giver en lærer og hvordan den information skiller sig fra resultater fra nationelle prøver. I lyset af dette vil vi igen se på de nationelle prøver og forsøge at identificere vigtige aspekter som bør få opmærksomhed.

Svein Kvalø
Cand Scient, seniorrådgiver på Vox, nasjonalt senter for voksnes læring i arbeidslivet.
Jeg har undervist i blant annet matematikk i 20 år i voksenopplæringen på videregående skole og har de senere årene vært involvert i prosjekter knyttet opp mot hvordan voksne lærer matematikk og praktisk regning i og utenfor arbeidslivet.

Kurs i relevant praktisk regning på storkjøkkenet på Ullevål universitetssykehus – øke innsikten i eget arbeid for kjøkkenmedarbeiderne på storkjøkkenet

Kompetansereformens intensjon er å heve arbeidstakernes kompetanse.

Kompetansereformen (også omtalt som etter- og videreutdanningsreformen) har som målsetting å gi den enkelte voksne bedre muligheter for opplæring og kompetanseheving. Reformen er basert på samfunnets, arbeidslivets og individets behov for kompetanse. Den omfatter alle voksne, bygger på en bred kunnskapsforståelse og har et langsiktig perspektiv. Bakgrunnen for Kompetansereformen er NOU 1997:25 Ny Kompetanse (1) og Stortingsmelding nr 42 (1997-98) Kompetansereformen (2). Stortinget behandlet meldingen i januar 1999. Den enighet som ble oppnådd mellom Regjeringen og partene i arbeidslivet i forbindelse med inntektsoppgjørene i 1999 og 2000 er også et viktig grunnlag for reformen. Arbeidet med Kompetansereformen er en prosess i et samspill mellom mange og ulike aktører/miljøer. Hovedansvaret ligger i utdannings- og forskningsdepartementet. En rekke andre departementer er også med, i tillegg til partene i arbeidslivet og institusjoner og organisasjoner som tilbyr utdanning for voksne.

Realkompetanse er all formell, ikke-formell og uformell kompetanse en person har (3), Formell kompetanse er den kompetansen som er formelt dokumentert fra utdanningssystemet. Ikke-formell kompetanse er kompetanse dokumentert med kursbevis eller sertifikater fra for eksempel kurs i studieforbund eller på arbeidsplassen. Uformell kompetanse er oppnådd kompetanse gjennom aktiviteter utenfor det etablerte formelle systemet. Blant annet kunnskaper og ferdigheter arbeidstakere får gjennom den jobben de utfører på arbeidsplassen. Kompetansereformen utrykker et ønske om at arbeidstakere skal ha god innsikt i eget arbeid og at de skal ha en mulighet til å få økt kompetanse slik at de kan utføre arbeidet sitt på en så god måte som mulig. Spesielt er det ønskelig å motarbeide matheus effekten. Det er med andre ord viktig at de med liten utdannelse skal få muligheten en kompetanseheving som kommer dem til nytte i og utenfor arbeidslivet.

Bakgrunnen for at det ble gjennomført kurs i praktisk regning på storkjøkkenet på Ullevål universitetssykehus.

Ullevål universitetssykehus inviterte Vox til å undersøke behovet for opplæring i grunnleggende ferdigheter i lesning og relevant praktisk regning på servicedivisjonen der det er mange ansatte med minoritetsspråklig bakgrunn. Det første leddet i denne prosessen var at en gruppe fra Vox hospiterte på storkjøkkenet, renholdsavdelingen og på vaskeriet. På bakgrunn av denne hospiteringen ble det skrevet en rapport der gruppen kom med sine anbefalinger.

Kjøkkensjefen på storkjøkkenet hadde selv observert at medarbeiderne manglet ferdigheter innen mål, vekt og prosentregning, og ville gjerne sette i gang kurs. Målsetningene med kurset var å bevisstgjøre kursdeltakerne om hvilke konsekvenser unødvendig sløsing med ressursene og hvilke konsekvenser budsjettkutt på servicedivisjonen kan få for storkjøkkenet. Derfor inkluderte vi også litt om budsjett i kurset. Virkemidlet for å gi medarbeiderne på storkjøkkenet bedre innsikt og bevissthet i eget arbeid var å tilby dem et kurs i relevant praktisk regning. Kurset ble gjennomført i arbeidstiden over 10 timer (to timer per gang) i juni 2004. De to første kursdagende falt på to påfølgende dager.

Ni personer meldte seg på kurset. To fra Pakistan, en fra Gambia, en fra Somalia, en fra Portugal og fire fra Norge. Fem av disse var menn og fire var kvinner. Deltakerne ble plukket ut ved at kjøkkensjefen tok med seg en plakat med beskrivelse av kurset og gikk rundt og spurte folk om de kunne tenke seg å delta.

Det var viktig for oss å få innsikt i hvilken uformell kompetanse kursdeltakerne hadde opparbeidet seg på arbeidsplassen. Vi anså det som helt nødvendig å lære så mye som mulig om hverdagen til de som skulle gjennomføre kurset. Det gjorde vi i flere omganger, først gjennom hospitering på storkjøkkenet. Deretter hadde vi samtaler med kjøkkensjefen der vi fikk eksempler på hvilke utfordringer kjøkkensjefen vurderte som viktige og nyttig for kjøkkenmedarbeiderne.

Vi som lagde kursmateriellet visste likevel lite om hvor mye relevant matematikk kjøkkenmedarbeiderne kunne. Siden de to første kursdagene falt på to påfølgende dager, lagde vi først materiell bare til disse. Materiell til de tre siste dagene ventet vi med å lage til vi hadde lært deltakerne bedre å kjenne. Derfor ønsket vi å få så mye kjennskap til hvilken uformell, formell og ikke-formell kompetanse deltakerne hadde den første kursdagen.

Vi bestemte oss for å ta utgangspunkt i artikkelen ”Kaster sykehusmat for 100 mill. i året” publisert i Dagsavisen den 17.04.2004 (4). Artikkelen tar opp problemstillinger som blant annet sløsing av mat på sykehuskjøkken. Dette hadde alle kursdeltakerne sterke meninger om. Gjennom diskusjon kom det fram omstendigheter der sløsing kan forekomme.

Et eksempel: En av arbeidsoppgavene de ansatte på storkjøkkenet har, er å lage mat til flere kantiner på sykehuset. Dersom medarbeiderne systematisk legger på for mye pålegg på smørbrødene som selges til kantinene, vil inntjening bli mindre enn forventet. For eksempel to reker for mye per rekesmørbrød utgjør ca. 10 g. Storkjøkkenet på Ullevål universitetssykehus selger 90 rekesmørbrød per dag fem dager i uken året i gjennom. Dersom det systematisk legges på 10 g for mye reker per smørbrød i løpet av ett år, utgjør det mer enn 30.000 kr mindre tjent i forhold til budsjettet. En annen kilde til sløsing er at avdelingene på sykehuset bestiller mer mat enn pasientene spiser. Det er mulig å bestille halve og fulle middagsporsjoner. Noen avdelinger bestiller fulle porsjoner til syke pasienter med manglende appetitt. Da kommer mat i retur til storkjøkkenet. Matavfall hentes å brukes som grisefōr. Det er faktisk en tjeneste sykehuset må betale for.

90 rekesmørbrød • 5 • 52 = <u>23400 rekesmørbrød</u>
10 g • 23400 = 234 000 g = <u>234 kg</u>
130 kr/kg · 234 kg = <u>30 420 kr</u>

De 20 minuttene vi brukte til å få fram synspunkter i forhold til innholdet i avisartikkelen mener vi var inspirerende for kursdeltakerne i tillegg til at vi ble noe bedre kjent med nivået til de som skulle gjennomføre kurset.

Sammenhengen mellom enheter for vekt (masse)

I tillegg til å løse oppgaver, gjennomførte deltakerne praktiske øvelser. En av øvelsene de fikk var å gjette vekten til blant annet et eple. Så veide de eplet på en digital vekt. Mange hadde relativt store avvik fra det de tippet til det eple veide. Et eple som veide 180 g var det noen som foreslo en vekt på 300 g. Det mest interessante vi registrerte i denne observasjonen, var at en av deltakerne kom med følgende kommentar: "Da skjønner jeg hvorfor vi noen ganger må koke flere poteter". Det var en kommentar som ble støttet fra de andre kjøkkenmedarbeiderne. Det er nemlig slik at når kjøkkenet mottar bestilling på et antall middagsporsjoner, beregner de hvor mye poteter, grønnsaker og for eksempel kjøttkaker som må gjøres i stand. Kjøkkenmedarbeiderne utporsjonerer maten på tallerkener på et transportbånd. Da kan det hende at det legges på for mye poteter per tallerken, eller for mye grønnsaker, slik at det ikke blir nok til alle porsjonene. For at alle pasientene på sykehuset skal få mat, må det på storkjøkkenet kokes mer av det de går tomt for. Det er ikke lett ved øyemål å vite hvor mye som utgjør 200 g poter. Spesielt ikke når størrelsen på potetene varierer. Denne episoden anskueliggjør at kjøkkenmedarbeiderne både har og har behov for forskjellig typer med matematikkholdig kompetanse i arbeidet de utfører hver dag.


Utporsjonering av mat på transportbåndet

Vi konsentrerte oss om sammenhengen mellom ulike enheter for vekt (masse). Kg, hg og g. Hvor mange kg svarer 35 hg til? Hvor mange gram er det i 5 hg?
Metodikken vi brukte: Vi drillet overgangen mellom kg, hg og g.
Eksempel:
Vi bruke tabellen til å gjøre 140 g om til kg. Fylle inn en null i kg-kolonnen.

	kg	hg	Dg	g	
	0	1	4	0	

Sett komma mellom kg- og hg-kolonnen.
Altså: 140 g = 0,140 kg (Her er kommaet flyttet tre plasser mot venstre).

Etter at kursdeltakerne hadde løst noen oppgaver virket som om de hadde fått relativt godt tak på overgangen mellom kg, hg og g. Selvfølgelig var det slik at noen fikk det til bedre enn andre.

Et eksempel på en relevant oppgave for kjøkkenmedarbeiderne:

a) En dag på Ullevål sykehus går det med 2350 rundstykker. Hvor mange kg rundstykker er det i alt?

b) 600 rundstykker skal ha to skiver ost hver. Hvor mange kg ost trenger vi til rundstykkene?

c) 500 rundstykker skal serveres med ett stort egg per rundstykke. Hvor mange kg store egg trenger vi til disse rundstykkene?

Porsjonsvis matvarer	Vekt
Store egg	70 g
Små egg	50 g
Brødskive	30 g
Rundstykke	50 g
Smør på brød	6 g
Skive ost	15 g
Skinke	15 g

d) 1000 rundstykker serveres med 15 g skinke per rundstykke. Hvor mange kg skinke trenger vi til disse rundstykkene?

e) Det går med i alt 4500 skiver brød. Hvor mye veier brødskivene til sammen? Hvor mye tror du et brød veier? Hvor mange brød tror du kjøkkenet bør kjøpe inn for å dekke behovet på 4500 skiver per dag.

Overgangen mellom volumenheter som liter og desiliter

Vi så spesielt på overgangen mellom l og dl. Vi begynte med noe tilsvarende det vi hadde gjennomgått i forhold til ulike enheter for vekt (masse).
Vi stilte følgende spørsmål: Først kommer hektoliter, så dekaliter og så liter. Hva kommer så? En av deltakerne svarte raskt. "Det er en halvliter og så kommer en kvartliter". Alle var selvfølgelig ikke enige i det, men vi stilte spørsmålet: "Hvordan måler dere volum?". Vi hadde sett oppskrifter på hvordan de laget mat, og der kom det fram at volum måtte de ha et forhold til. De viste oss hva slags utstyr de måler volum med. Det ble som oftest brukt utstyr som måler store volumer, opp til 30 og 300 liter.
De var vant til å håndtere store volumer, men alle var ikke like familiære med måling av små volumer. Selv om kjøkkenmedarbeiderne til daglig ikke opererer med små volumer oppfattet vi det som viktig at de lærte om overgangen mellom liter og desiliter.


På storkjøkkenet håndteres store volumer

Kokkene må kjenne til sammenhengen mellom små og store volumer.
Se utsnittet av en oppskrift:
Festgryte for 100 porsjoner:

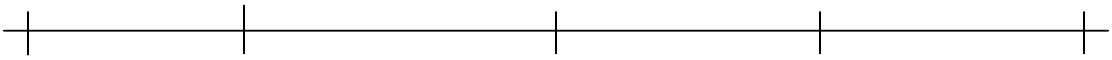
- 2,60 kg løk
- 4, 60 kg hermetisk sjampinjong
- 120,00 g sølvløk
- 5,00 l kremfløte med 38 % fett

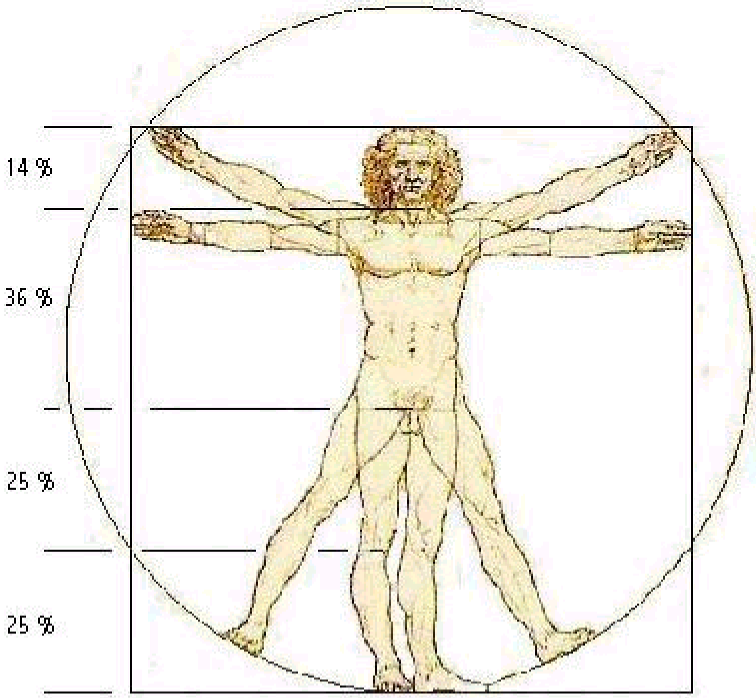
Den oppskriften skal på storkjøkkenet gjerne oppskaleres til for eksempel 1600 porsjoner. Selv om ikke kjøkkenmedarbeiderne utfører slike utregninger kan det være både nyttig og interessant for dem å ha kjennskap og innsikt til de utfordringene kokkene står ovenfor.

Prosentregning

Praktisk øvelse:

Gå sammen i grupper på 2. Mål på hverandre. Bruk det elastiske båndet som du deler opp i fire like store deler litt fra endene fra båndet (slik figuren under viser).





Stemmer de målene dere gjør overens med målene på Leonardo Da Vincis Vitruviusmann?

Slik introduserte vi prosentregning for kursdeltakerne. Dette er en øvelse som på en gøyal måte anskueliggjør at prosent har med et forhold å gjøre.

I arbeidet med prosentregning observerte vi at noen av kursdeltakerne kun trengte litt oppfriskning for å være i stand til å løse de oppgavene de skulle. Et eksempel: En mann, opprinnelig fra Pakistan, som hadde drevet butikk i Oslo, behersket prosentregning godt. Andre igjen, hadde større problemer.
En mann fra Gambia på ca. 50 år skulle regne ut hvor stor prosent 3999 er av 12999. Han husket fra skoledagene at det var mulig å forkorte siffer i slutten av et tall i teller mot siffer i slutten av et tall nevner, men husket ikke at det gjelder bare for tallet null. Følgelig strøk han nierne mot nierne og fikk svaret 25 % i stedet for 31 %.
Under utregning av hvor mye en viss prosent utgjør av et tall prøvde, vi i tillegg til den strategien kursdeltakerne selv valgte, å introdusere prosentfaktor. Noen likte det, mens andre overhodet ikke ville høre snakk om å prøve en annen måte å regne på enn den de lærte på skolen. Det vil si at prosenten av tallet ble satt lik en brøk med grunnlaget for prosenten multiplisert med prosenten i telleren og 100 i nevneren.

To eksempler på praktiske regneoppgaver kursdeltakerne regnet:

Oppgave A

Anta at du skal bruke 200 kg kjøtt til et måltid. Fersk kjøtt koster 45 kr/kg

Tilberedning av kjøtt	Svinn
Koke kjøttet	25 %
Trekke kjøttet	10 %

a) Hvor mange kg svinn får du dersom du koker 200 kg kjøtt?
b) Hvor mange kg svinn får du dersom du trekker 200 kg kjøtt?
c) Hvor mange kg mindre svinn kjøtt får du ved å trekke kjøttet i stedet for å koke det?
d) Hvor mye penger tjener kjøkkenet på å trekke kjøttet i stedet for å koke det?

Oppgave B

200 kg rå oksestek skal stekes. Oksesteken koster 80,6 kr/kg.

Tilberedning av kjøtt	Svinn
Langtidssteking på 180°C	12 %
Steking på 220°C	28 %

a) Hvor mange kg svinn får du dersom du steker 200 kg rå oksestek på 180°C?
b) Hvor mange kg svinn får du dersom du steker 200 kg rå oksestek på 220°C
c) Hvor mange kg mindre svinn får du ved å steke oksesteken på 180°C i stedet for å på 220°C?
d) Hvor mye penger tjener kjøkkenet på å steke oksesteken på 180°C i stedet for på 220°C?

Disse oppgavene er hentet rett ut fra deres hverdag og de viser at det finnes en måte å tilberede maten på som er mer økonomisk enn en annen.

Budsjett

For at kursdeltakerne skulle se sammenhengen mellom hvordan de og andre arbeidstakere utfører jobben i forhold til budsjettet tok vi med noe om det. Her var målsettingen ikke å lære veldig my om budsjett, men mer å se den større sammenhengen i at matematikkholdig kompetanse kan være nyttig å ha også for kjøkkenmedarbeidernes egen arbeidsplass.

Her er en oversikt over budsjett for storkjøkkenet.

	Inntekter	Utgifter
Uttak til sykehusavdelingene	29 848 606	
Salg eksternt kunder	26 441 540	
Rammetilskudd	24 835 495	
Lønn		42 608 491
Varekostnader		34 392 600
Drift		3 947 500
Sum		

Det vi gjorde var at vi prøvde å identifisere hvilke type aktiviteter som påvirket de ulike hovedpostene i budsjettet. For eksempel avhenger salgsinntektene til de eksterne kundene noe av hvor mye pålegg som legges på smørbrødene som distribueres for salg til kantinene. Varekostnadene blir større dersom det sløses mye. Tenk bare hvor mye mat som svarer til 100 millioner kroner. I følge avisartikkelen er det verdien av den mengden mat som sløses på norske sykehus i løpet av et år.
Vi la også vekt på å anskueliggjøre at dersom arbeidstakernes ikke utførte jobben nøyaktig nok kan salgsinntektene avta og varekostnadene øke så mye at storkjøkkenet må kutte i lønnsutgiftene som kan føre til at noen arbeidsplasser må legges ned.

Hva oppnådde vi

Noen av kursdeltakerne hadde relativt gode basiskunnskaper og klarte å løse de utfordringene de fikk. I den andre enden av skalaen var det nok noen som slet en del selv om vi prøvde å differensiere så godt vi kunne.
Det viktigste vi oppnådde var kanskje at vi sammen klarte å identifisere at kjøkkenmedarbeiderne daglig utfører en del oppgaver som krever matematikkholdig kompetanse og at den måten de utfører disse oppgavene på i ytterst konsekvens har noe å si for hvor trygg arbeidsplassen deres er. Vi mener også at kursdeltakerne etter gjennomføringen av kurset i praktisk regning fikk bedre innsikt i eget arbeid.
I samarbeid med kjøkkensjefen delte vi ut kursbevis til kursdeltakerne som er en dokumentasjon på en ikke-formell kompetanse.

Hvordan arbeidstakerne kan utnytte uformell og ikke-formell kompetanse

Vox har utviklet et verktøy for vurdering av realkompetanse som beskriver hva de ansatte kan på arbeidsplassen. Dette verktøyet består av en kompetanseattest og en cv (5). Vi mener det kan være nyttig for arbeidsplassen å kjenne til hvilken kompetanse arbeidstakerne har. Det vil i en slik sammenheng være naturlig å ha med kursbeviset i praktisk regning som en dokumentasjon for en ikke-formell kompetanse. Siden de individuelle ferdighetene i praktisk regning til kursdeltakerne varierte, går det an på bakgrunn av en samtale med den enkelte kursdeltaker, impliserte lærere og kjøkkensjefen å gi en individuell beskrivelse av hvilken type uformell kompetanse den enkelte kursdeltaker har i relevant praktisk regning. Uformell kompetanse som dokumenteres kan bli vurdert opp mot deler av for eksempel et fagbrev – ved fylkeskommunale sentre i en realkompetansevurdering. I en realkompetansevurdering blir all formell, uformell og ikke formell kompetanse vurdert opp mot læreplaner og kan føre fram til vitnemål/fag-eller svennebrev.

Kort om realkompetansevurdering

I 2003 ble 10549 realkompetansevurdert på fylkeskommunale sentre i Norge. Av disse ble 8524 vurdert opp fag og svennebrev i yrkesfaglige studieretninger, mens 2025 ble vurdert opp mot fag i videregående studieretning. Av de som er blitt realkompetansevurdert, er det veldig få som er blitt det i matematikk. Det er for eksempel ingen i Troms som er blitt realkompetansevurdert i matematikk. Av et tallmateriale på 750, ble kun 4 – 5 vurdert i matematikk i Sør- Trøndelag. I Nord-Trøndelag har 15 av 2000 blitt realkompetansevurdert i matematikk.(7)

1. NOU 1997:25. Ny kompetanse. Grunnlaget for en helhetlig etter- og videreutdanningspolitikk http://www.dep.no/ufd/norsk/publ/utredninger/NOU/014005-020007/index-dok000-b-n-a.html
2. Stortingsmelding 42, (1997 – 98), Kompetansereformen., http://www.dep.no/ufd/norsk/publ/stmeld/014005-040017/index-dok000-b-n-a.html
3. UNESCO, 2000, side 41: World Education Report: the Right to Education: Towards Education for All Throughout life.
4. Kaster sykehusmat for 100 mill. i året. http://www.dagsavisen.no/innenriks/article1084157.ece
5. Verktøy for cv og realkompetanse http://www.vox.no/templates/CommonPage.aspx?id=729
6. Tallene vi søker – kunnskapen vi får. Voksnes rett til videregående opplæring, Haugerud, Røstad og Stubberud, ISBN 82-7724-063-5, side 11.
7. Inntrykk om hvor mange som blir realkompetansevurdert i matematikk er innhentet ved telefonisk kontakt med de fylkeskommunale sentrene.

Torulf Palm, *Doktor, Matematiska institutionen, Umeå universitet*
Torulf arbetar med forskning och handledning i matematikdidaktik vid matematiska institutionen, Umeå universitet. Han har arbetat med de svenska nationella gymnasieproven i matematik vid Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar, Umeå universitet, och som gymnasielärare i matematik och fysik.

Jesper Boesen, *Doktorand, Matematiska institutionen, Umeå universitet*
Har arbetat vid institutionen för beteendevetenskapliga mätningar, Umeå universitet med de nationella proven. Han har även arbetat för PRIM-gruppen, vid Lärarhögskolan i Stockholm, med konstruktion av det nationella A-kursprovet. Jesper är utbildad gymnasielärare i matematik och samhällskunskap. Sedan 2001 är han doktorand i matematik med didaktisk inriktning.

Jesper Boesen & Torulf Palm

Vilka typer av matematiska resonemang (ut)värderas i skolmatematiken? -En analys av svenska gymnasieprov

Inledning

Prov kan ha flera syften och funktioner. Några av dessa är att (1) elever får ett bra tillfälle att lära sig (de är ofta motiverade och tänker till lite extra), (2) lärare och elever får ett tillfälle att inhämta information om elevens starka och svaga sidor för att användas i senare lärande, (3) lärare får tillfälle att inhämta information om elevernas kunskaper för att användas i betygssättning och (4) proven skickar signaler om vilken matematisk kunskap som är viktig. Det betyder att de typer av matematiska kunskaper som behövs och används för att lösa uppgifter i prov kan påverka både vad eleverna lär sig och den tolkning av elevernas kunskaper vi får möjlighet att göra. Den typ av kunskaper eleverna får möjlighet att visa är alltså fundamentalt för kvaliteten i ett prov.

I det följande presenteras en analys av prov som svenska gymnasieelever möter i sina studier. Det är Nationella prov och ett slumpmässigt urval av de prov lärarna själva gjort. Analysen är inriktad på vilka typer av matematiska resonemang som behövs för att lösa uppgifterna i proven. De resultat som presenteras här är preliminära delresultat från studien då all provklassificering i skrivande stund inte är helt färdig än. Det presenterade delresultaten är dock så pass säkra att huvudresultat och storleksordningen av procentsatser knappast kommer att ändras. Vi kommer också att diskutera konsekvenser av och möjliga orsaker till dessa resultat.

Termen *matematiska resonemang* har använts i olika betydelser i litteratur och praktik inom matematikutbildning. Här kommer vi att använda uttrycket lite löst definierat som det sätt elever tänker när de kommer fram till slutsatser vid matematisk uppgiftslösning. Konkreta exempel på olika typer av matematiska resonemang kommer att ges som ytterligare förtydligar denna beskrivning av uttrycket. Innan studien beskrivs kommer först en bakgrund med tidigare forskningsresultat att beskrivas för att sätta in studien i ett sammanhang och motivera varför den genomförs.

Bakgrund

Bakgrunden för analysen av proven är att de flesta idag är överens om att vi inte lyckas hjälpa tillräckligt många elever att nå en tillräckligt hög matematisk kompetens. Det visar sig t ex genom att många elever i grundskolan, gymnasieskolan och på universiteten har svårt att nå kursmålen.

Den matematikdidaktiska forskargruppen vid matematiska institutionen vid Umeå universitet bedriver ett större forskningsprojekt med de tre övergripande delarna (1) identifikation av lärandesvårigheternas karaktär, (2) huvudorsaker till lärandesvårigheterna och (3) åtgärder för att utveckla lärandemiljön och motverka lärandesvårigheterna. En av de slutsatser av studier genomförda för att undersöka lärandesvårigheternas karaktär är att matematiskt ytliga strävanden mot algoritmiska resonemang är vanliga hos eleverna, ofta dominerande och en av huvudorsakerna till deras lärandesvårigheter. Andra studier visar att denna typ av lösningsstrategier är vanliga bland elever i många länder. I detta sammanhang ska också sägas att projektet inte studerar orsaker till lärandesvårigheter som har att göra med sådant som lärare har mycket lite kontroll över som t ex ungdomstrender gällande allmän inställning till livet.

Matematiskt ytliga resonemang

Med matematiskt ytliga resonemang menar vi lösningsstrategier som bara bygger på igenkännande av ytliga likheter mellan den uppgift som ska lösas och uppgifter eller annan information som de tidigare stött på och att försöka komma ihåg de lösningsprocedurer som hör samman med de uppgifterna eller informationen. Dessa resonemang baseras inte på de relevanta matematiska egenskaperna hos de komponenter som resonemanget handlar om.

Följande två uppgifter kan användas för att illustrera uppgiftslösningar som baseras på matematiska resonemang som kan kännetecknas av att resonemanget är matematiskt ytligt.

Uppgift 1:
Hos Konsum kostar en stor läsk 15 kr. Hos ICA kostar läsken 2 kr mer.
Hur mycket kostar läsken hos ICA?

Uppgift 2:
Hos Konsum kostar en stor läsk 15 kr. Det är 2 kr mindre än vad läsken kostar hos ICA.
Hur mycket kostar läsken hos ICA?

Den första uppgiften kan lösas genom att använda ett resonemang som ofta brukar betecknas som användande av nyckelord. På grund av att eleverna har stött på många liknande uppgifter tidigare som inkluderat termen ”mer” och som lösts genom addition av de i uppgiften givna talen kan en elev koppla ihop termen ”mer” med operationen addition. De kan då lösa uppgiften genom att utföra additionen 15+2 där valet av operation grundar sig på förekomsten av termen ”mer” (sådana lösningsstrategier har genom ett flertal studier världen över visat sig vara relativt vanliga i många länder). Termen ”mer” ingår i uppgiften och är därför en egenskap hos uppgiften. Den är däremot inte någon matematisk egenskap som alltid har något med lämplig operation att göra. Detta kan illustreras av att försöka lösa uppgift 2 med ett sådant resonemang. Denna gång leder det fel att basera sin lösningsmetod på denna ytliga likhet med tidigare uppgifter (kopplingen mellan termen ”mer” och operationen addition).

Ett exempel från universitetsmatematik hämtad från Lithner (2003a) kan illustreras av en lösning till följande uppgift.

Uppgift 3:

Följande serie är given: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{(n+1)\ln(n+1))}$

Avgör om serien konvergerar absolut, konvergerar punktvis eller om den divergerar.

Universitetsstudenten Dan som försöker lösa denna uppgift i sin lärobok letar efter liknande lösta exempel i boken och hittar följande (Example 1):

EXAMPLE 1. Test for absolute convergence:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos n\pi}{2^n}$

SOLUTION: (a) $\lim_{n\to\infty} |\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}|/\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} > 0.$

Since the harmonic series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverges to infinity, therefore

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ does not converge absolutely (comparision test).

(b) $\rho = \lim_{n\to\infty} |\frac{(n+1)\cos((n+1)\pi)}{2^{n+1}} / \frac{n\cos(n\pi)}{2^n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{n+1}{2n}| = \frac{1}{2} < 1.$

(Note that $\cos(n\pi)$ is just a fancy way of writing $(-1)^n$.) Therefore

(ratio test) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos n\pi}{2^n}$ converges absolutely.

Dan bestämmer sig för att lösa uppgiften genom att använda kvottestet (ratio test). Detta strategival görs endast för att: (1) Dan tror att serien i uppgiften och i exemplet är liknande eftersom yttrycket $\cos n\pi$ finns i båda och (2) exemplet nämner explicit kvottestet i lösningen. Dan försöker använda proceduren för kvottestet men misslyckas eftersom uppgiften inte kan lösas med hjälp av den. Vid en jämförelse mellan uppgiften och exemplet syns att $\cos n\pi$ visserligen är en matematisk egenskap hos serien i både uppgiften och exemplet, men att det inte är en relevant egenskap att beakta i strategivalet. I en annan uppgift hade det kunnat vara det, men här är det bara en ytlig egenskap. Rollen för $\cos n\pi$ är faktiskt beskrivet i lösningen som bara ett häftigt sätt att skriva $(-1)^n$. Detta betyder att serien är alternerande, men detta är fallet för nästan alla serier i detta bokavsnitt. Dan läser detta men inser inte dess relevans.

Den inre relevanta och avgörande (i motsats till ytliga) egenskapen hos funktionsuttrycket i uppgiften ligger i nämnaren $(n+1)\ln(n+1)$. Utan att gå in på detaljer, där exemplet inte ger någon vägledning, är den alternerande serien i uppgiften (1) punktvis konvergent eftersom $\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ är avtagande och (2) inte absolut konvergent eftersom om man tillämpar integraltestet så ser man att $\int_1^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} dx$ divergerar.

Exempel på ytliga strategival på gymnasiet kan vara att val av en lösningsmetod som inkluderar derivering sker endast på basen av termer som 'största värde' och 'maximum'.

Problemet med matematiskt ytliga resonemang
Det är viktigt att påpeka att det absolut inte är något fel att vid uppgiftslösning försöka komma ihåg om man har stött på någon liknande uppgift eller problem förut och använda dessa erfarenheter. Tvärtom är det en bra strategi. Problemet är när kopplingen görs på ytliga egenskaper och när denna metod blir den enda som finns tillgänglig. När eleverna inte gör några försök alls (som observerats) till att konstruera egna lösningar som bygger på de inre relevanta matematiska egenskaperna hos de komponenter som ingår i uppgiften och i en lösning av den är det inte lika bra.

De blir då beroende av att kunna kopiera hela procedurer, att uppgifterna ser likadana ut och att den ytliga kopplingen stämmer överens med den matematiska kopplingen (i två av de ovanstående exemplen på matematiska resonemang överensstämde inte dessa kopplingar). Detta får naturligtvis till följd att de är chanslösa att lösa uppgifter som inte är likadana som de uppgifter de tidigare gjort. Men observationer av elevers arbete med uppgifter visar att även när elever arbetar med välkända uppgifter gör de väldigt ofta misstag i den procedur de avser att kopiera och hamnar i en problematisk situation när det inte stämmer. Dessa lägen klaras då inte alltid upp då de inte kan resonera kring matematiken utan bara kan försöka göra proceduren en gång till.

En viktig passus här är att dessa observationer inte rör en liten andel av eleverna som har det som svårast. Att hitta katastrofhistorier är inte svårt och de har de flesta av oss som arbetar med undervisning upplevt. Det som är viktigt här är att de beskrivna observationerna gäller en stor andel av eleverna. Även de som enligt betyg och prov bedöms prestera förhållandevis bra. Dessa elever kan dock få det svårare och svårare (speciellt om måttstocken ändras) och får naturligtvis svårt med icke-rutin uppgifter. Deras upplevelse av matematik kan också påverkas av att utföra saker de inte förstår.

Följande exempel illustrerar problemet med att följa procedurer som enda tillgängliga strategi, och potentialen av att även kunna resonera med hjälp av relevanta matematiska egenskaper hos komponenterna i en uppgift och dess lösning.

Uppgift 4:
Förenkla $x^5 \cdot x^3$

Denna uppgift kan lösas genom att komma ihåg logaritmlagen för multiplikation av potenser. Detta är t ex möjligt att göra om man har gjort många liknande uppgifter tidigare. Det är då ett bra och effektivt sätt att lösa uppgiften på. Men om man inte kommer ihåg logaritmlagen och funderar på om man skulle multiplicera eller addera exponenterna (vilket nog inte är alldeles ovanligt och det finns ju flera logaritmlagar att hålla reda på), vad gör man då? Ja, har man bara den strategien tillgänglig så är man såld nu. Om man å andra sidan också har en möjlighet att försöka konstruera en lösningsmetod genom att fundera på vad uttrycket egentligen betyder så ligger man mycket bättre till. Genom att använda sig av de inre relevanta matematiska egenskaperna hos komponenterna (i detta fall potenser) så kan de via att se en potens som ett annat sätt att skriva upprepad multiplikation formulera uttrycket som $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$. Med detta resonemang följer sedan också svaret på både uppgiften och på frågan om man ska addera eller multiplicera exponenterna. Värt att fundera över här är om inte ett sådant matematiskt resonemang ligger inom de flesta elevers möjligheter om deras undervisning och lärande har ett sådant fokus.

Ett annat och nog så stort problem är att kopieringar av procedurer baserade på ytliga resonemang kan göras med eller utan förståelse för matematiken de använder. Det betyder att eleverna tränar sig på att utföra algoritmen (vilket är bra) men att det i värsta fall mest kan vara fråga om att träna sig i aritmetik eller algebra och inte nämnvärt ökar deras förståelse för t ex de begrepp som kursen och uppgiften avser (t ex derivata eller sannolikhet).

Förståelse och olika typer av matematiska resonemang

Hittills har vi inte gått in så djupt på egenskaperna hos olika typer av matematiska resonemang och tänker inte heller göra det, men för att kunna studera de här fenomenen ordentligt behövs noggranna definitioner som i det följande beskrivs översiktligt.
Diskussionen om att det är fördelaktigt att eleverna förstår grundläggande begrepp, lagar och metoder och inte bara lär sig kopiering av procedurer utan förståelse för dem har funnits i många år. Nytt är däremot det ramverk som i det följande beskrivs översiktligt och som är baserat på empiriska data från elevers matematiska resonemang vid uppgiftslösning och som noggrant beskriver vad som menas med ytliga matematiska resonemang respektive resonemang som kräver förståelse eller en användning av de inre relevanta matematiska egenskaperna hos komponenter i uppgiftslösningen. Förutom att de ger bättre möjligheter för att studera viktiga fenomen så ger det också en större möjlighet att t ex konstruera uppgifter som prövar dessa kompetenser och att reflektera över på vilket sätt diskussionen med elever ser ut.

Ramverket (Lithner, under bearbetning) innehåller tre huvudtyper av matematiska resonemang; Minnesbaserat resonemang (MR), Algoritmiskt resonemang (AR) och Kreativt resonemang (CR). De, tillsammans med andra egenskaper hos matematiska resonemang, kan användas som grund för att beskriva olika typer av matematiska resonemang som används t ex för att lösa matematikuppgifter. I nedanstående figur är fyra av ett antal sådana empiriskt identifierade resonemangstyper namngivna (IS, FAR, LPR och GPR).

Resonemangstyper

MR: Minnesbaserat Resonemang

AR: Algoritmiskt Resonemang

- IS: Identifikation av likheter
- FAR: Familjärt algoritmiskt resonemang

CR: Kreativt Resonemang

- LPR: Lokalt plausibelt resonemang
- GPR: Globalt plausibelt resonemang

Ett resonemang i ett uppgiftslösningsförsök kallas *minnesbaserat resonemang* (MR) om resonemanget i huvudsak eller enbart baseras på att komma ihåg en komplett procedur eller en mängd av symboler med liten eller ingen förståelse av dess mening. Exempel på sådana resonemang är att försöka minnas ett bevis eller vad skärningen mellan x-axeln och y-axeln i ett koordinatsystem kallas.

Resonemanget i ett uppgiftslösningsförsök kallar vi för ett *algoritmiskt resonemang* (AR) om strategivalet bygger på att komma ihåg eller identifiera att en viss given algoritm troligen kommer att lösa uppgiften. Strategiimplementeringen fullföljs genom att följa algoritmen utan övriga överväganden. Kopplingen mellan uppgiften och algoritmen kan vara baserad på ytliga överväganden.

Exempel på empiriskt funna resonemangstyper som är varianter av algoritmiskt resonemang är *Identifikation av likheter* (IS) och *Familjärt algoritmiskt resonemang* (FAR). Identifikation av likheter används ofta vid uppgiftslösning i läroboken. Strategivalet grundar sig då på att *identifiera* liknande ytliga egenskaper i t ex ett exempel i boken och uppgiften de ska lösa. Eleven löser sedan uppgiften genom att kopiera proceduren från det lösta exemplet. Dans resonemang som beskrevs i samband med uppgift 3 ovan kan klassificeras som ett IS resonemang. En annan vanlig resonemangstyp är familjärt algoritmiskt resonemang. Ett sådant resonemang karaktäriseras av att eleven *känner igen* ytliga egenskaper i den aktuella uppgiften med liknande egenskaper i tidigare uppgifter som mötts och därför ser dem som uppgifter av samma typ. De kommer då ihåg och använder sig av samma lösningsprocedur som de använde vid lösandet av de tidigare uppgifterna. Resonemang av typen FAR är till skillnad från IS resonemang minnesbaserat och är vanligare än IS resonemang vid lösning av uppgifter i t ex prov. De två resonemangen som beskrevs i samband med uppgift 1 och 2 ovan är exempel på resonemang som kan klassificeras som Familjärt algoritmiskt resonemang.

I ett *kreativt resonemang* (CR) räcker det inte att komma ihåg tidigare använda lösningsprocedurer utan nya måste själv skapas. Här är det viktigt att det med kreativt resonemang i detta sammanhang inte menas kreativ i meningen nya genialiska tankegångar. I princip räcker det med en tankegång som inte direkt bygger på identifikation av ytliga likheter eller memorering av något de gjort eller sett förut, t ex fakta eller en hel procedur som löser hela uppgiften, för att resonemanget ska betecknas som kreativt.

Exempel på viktiga resonemangstyper som bygger på kreativa resonemang är *lokalt plausibelt resonemang* (LPR) och *globalt plausibelt resonemang* (GPR). Båda dessa innebär att eleverna, förutom att de måste skapa en lösning utan att komma ihåg en tidigare använd procedur, också behöver skapa den genom att använda sig av de inre relevanta matematiska egenskaperna hos de komponenter de resonerar om. De resonemang som löste uppgift 4 ovan är exempel på sådana resonemang. Skillnaden mellan ett lokalt plausibelt resonemang (LPR) och ett Globalt plausibelt resonemang (GPR) är att i den globala varianten så utgör det kreativa steget som bygger på de matematiska egenskaperna en stor del av lösningen (resonemanget vid uppgift 4 är ett sådant). I ett lokalt plausibelt resonemang kan den största delen av resonemanget var av t ex algoritmisk karaktär medan en liten del av resonemanget är ett kreativt steg baserat på relevanta matematiska egenskaper.

Som sammanfattning av dessa olika typer av matematiska resonemang är det värt att notera att det är endast de så kallade plausibla resonemangen (LPR och GPR) som kräver en förståelse för de matematiska idéerna för att genomföras. Övriga typer av resonemang kan utföras utan förståelse av de matematiska begrepp som är involverade i aktiviteten (t ex kan en uppgift om derivata endast bli en träning eller uppvisande av kunskap i algebra).

Orsaker till fokusering på matematiskt ytliga resonemang

Forskningen kring identifikationen av lärandesvårigheternas karaktär ger alltså starka indikationer på att elevers och studenters fokusering på ytliga strategier, på bekostnad av resonemang som bygger på beaktande av de relevanta matematiska egenskaperna hos komponenterna, är en av huvudorsakerna till många elevers svårigheter att lära sig matematik.

Det ger förstås anledning till att undersöka orsaker till denna fokusering på ytliga lösningsstrategier och att många elever i princip inte göra några som helst försök till att konstruera egna matematiska resonemang som bygger på matematiska egenskaper ens när de kör fast och inte kommer framåt via t ex AR eller MR. När vi nu dessutom har tillgång till ett ramverk som passar så har vi också bra förutsättningar för sådana studier.

En rimlig tanke är att det finns delar av deras lärandemiljö som befrämjar sådana strategier. Det finns därför anledning att undersöka olika delar av lärandemiljön. Den består t ex av läroböcker, lärargenomgångar, och eget arbete med uppgifter och prov (lärarkonstruerade och nationella prov).

Några sådana studier är redan utförda och några är under arbete. Ett exempel på en genomförd studie är en analys av läroböcker på en universitetskurs (Lithner, 2004). Den visade att 70 % av uppgifterna i böckerna kunde lösas med IS resonemang, 20 % krävde LPR och 10 % krävde GPR. De senare uppgifterna var oftast förlagda i slutet av uppgiftsavsnitten och försedda med märkning som indikerade att de var svåra. För många elever blir detta rimligen en signal till att inte göra dem vilket leder till att av de uppgifter många elever verkligen försöker lösa är andelen 'IS-uppgifter' än högre. Vid en senare studie av några elevers arbete med dessa uppgifter i läroboken så klassificerades elevernas arbete vid 95 % av uppgifterna som en satsning på IS och vid 5 % av uppgifterna som LPR (Lithner, 2003b).

Detta innebär att man med ytliga resonemang kan lösa många (läs de flesta) matematikuppgifterna. Utifrån denna viktiga del av lärandemiljön (i Sverige ägnas en stor del av elevernas tid till att räkna uppgifter i boken) kan man tänka sig att eleverna inte ges något större incitament till att byta strategier utan att det i det korta perspektivet kan vara effektivt med ytliga matematiska resonemang när de löser läroboksuppgifter.

Analys av gymnasieprov

Det är i detta sammanhang det kan vara värdefullt att analysera de prov eleverna stöter på under sina studier. Som sagts i inledningen kan prov ha flera syften och funktioner och vilken typ av matematiska resonemang som behöver användas för att lösa uppgifterna i proven kan påverka vad eleven lär sig är viktiga och gångbara typer av matematiska resonemang och vilken typ av matematisk kompetens vi som lärare har möjlighet att uttolka ur provresultaten. Vad betyder det t ex att en elev får många poäng på provet?

Syftet med analysen är att se hur stor andel av uppgifterna som kräver att eleverna använder sig av PR-resonemang och i hur stor andel av uppgifterna det räcker att använda någon av de matematiskt ytliga resonemangstyperna AR, MR för att lösa uppgifterna.

Urval

Studien är inriktad på den svenska gymnasieskolan där 98 % av en årskull går. Gymnasieskolan är indelat i ett antal program. Några så kallade studieförberedande program och några yrkesförberedande program. Matematiken är uppdelad i ett antal kurser, A-E, (plus några andra valbara kurser). Alla program läser kurs A. På några program är det obligatoriskt att även läsa högre kurser som innehåller mer avancerad matematik.

Vi valde att analysera nationella prov och lärargjorda prov. De nationella proven är obligatoriska för slutkurser i ett program och är därför prov som eleverna gör. De flesta andra prov eleverna stöter på görs, enligt en enkät som medföljt de Nationella proven, av lärarna själva. Av praktiska skäl har vi behövt begränsa oss till att fokusera på några av programmen. Ett av tre program vi valt att analysera prov från i denna studie är det Naturvetenskapliga programmet som är det näst största programmet, och det program där de läser mest matematik. Där är det obligatoriskt att läsa kurserna A-D. Det andra programmet som prov samlats in från är det Samhällsvetenskapliga programmet, som är det största programmet, och som i likhet med det naturvetenskapliga programmet är ett så kallat studieförberedande program. På detta program är det obligatoriskt att läsa kurs A och kurs B. Det tredje programmet är det yrkesförberedande Handels- och administrationsprogrammet där bara kurs A är obligatoriskt. Programmen valdes med utgångspunkt i att resultaten ska gälla för många elever. Därför valdes det naturvetenskapliga och det samhällsvetenskapliga programmen som är de två största programmen. Handelsprogrammet valdes för att vi också ville ha med ett yrkesföreberedande program som var relativt stort och med jämn könsfördelning.

Urvalet består av 56 stycken slumpmässigt utvalda lärargjorda prov från läsåret 2003/2004 och alla de 8 nationella prov som gavs det läsåret. Proven fördelas på kurser och program enligt tabellen nedan.

NV	A, B, C, D	32 prov
SP	A, B	16 prov
HP	A	8 prov
Nationella prov	A, B, C, D	8 prov
Summa		64 prov

Metod

Vid en analys av vilka matematiska resonemang som kan användas för att lösa läroboksuppgifter kan man analysera uppgiftsexempel och teoriavsnitt i boken för att se om det finns möjlighet för eleverna att hitta något där som påverkar deras möjligheter till lösningsstrategier. När man studerar de resonemang eleverna verkligen använder blir det svårare men då kan observationer och samtal vara effektiva metoder för analys. Vid en analys av vilka resonemang som kan användas vid uppgiftslösning i prov blir det än svårare. Detta gäller speciellt i en studie som denna där vi inte har direkt tillgång till all information om den undervisning och det lärande som föregått provet.

Val av analysmetod har då byggt på (1) att det eleverna har stött på i sin lärandemiljö är grundläggande för deras möjligheter att utföra olika typer av resonemang och (2) arbetet i läroboken är i de flesta klassrum en huvudkälla för de uppgifter eleven arbetar med. Innehållet i läroboken betraktas därför i denna studie som de huvudsakliga erfarenheter eleverna har av matematiken. Vid klassificering av uppgifterna i de nationella proven tas också hänsyn till tidigare utgivna nationella prov eftersom de används som repetition inför dessa prov.

Klassificeringen av uppgifterna bygger sedan på följande: För att kunna använda sig av AR eller MR resonemang för att lösa en provuppgift så måste (1) eleven ha stött på en likadan uppgift flera gånger tidigare i den lärobok som använts i hans/hennes klass (här definierat som minst tre gånger), eller (2) uppgiften innehålla andra ytliga egenskaper som kan leda till att ett algoritmiskt eller minnesbaserat resonemang kan användas. Om det sedan finns teoriavsnitt som beskriver lösningsproceduren så blir argumenten än starkare för den klassificering som görs. Om inte (1) eller (2) är uppfyllda så krävs någon form av kreativt inslag för att lösa uppgiften. Om inslaget är globalt eller lokalt beror på hur stor skillnad de är mellan provuppgiften och uppgifterna i boken, t ex om de endast skiljer sig åt i ett lokalt steg eller i stora delar av lösningsproceduren. Eftersom arbetet med uppgifter i läroboken inte är det enda eleven gör i klassrummet så kan det vara rimligt att anta att de andelar uppgifter som bedömts kunna lösas med matematiskt ytliga resonemang underskattas då läroboken är den enda källa till erfarenheter som tas hänsyn till. Å andra sidan är det inte säkert att alla elever gör alla uppgifter i boken vilket skulle kunna leda till en överskattning av andelarna av uppgifterna som kan lösas med ytliga resonemang. En ytterligare osäkerhet i klassificeringen av uppgifter är om tre likadana uppgifter är ett lämpligt mått på vad som krävs för att elever ska kunna komma ihåg dem.

För att testa om denna analysmetod är rimlig användes det analysverktyg och den analysprocedur som används i klassificeringen (se nedan) i en studie av elever som arbetade med nationella prov. Uppgifternas klassificering med hjälp av analysverktyget jämfördes med en bedömning av deras faktiska resonemang bedömt utifrån en studie där eleverna fick tänka högt. Förutom att de spelades in på video så samlades information in genom en intervju omedelbart efter att de avslutat sitt arbete med provet. En jämförelse mellan uppgiftsklassificeringarna och bedömningarna av deras faktiskt använda matematiska resonemang vid lyckade uppgiftslösningar visade god överensstämmelse.

För att beskriva vad som kan menas med att uppgifter liknar varandra har nedanstående analysverktyg skapats. Verktyget består av ett antal uppgiftsegenskaper som kan vara avgörande för om eleverna har möjlighet att se likheten med läroboksuppgifterna. Dessa egenskaper är med i verktyget baserat på egenskaper som visast sig vara sådana som elever använder för att känna igen uppgifter eller som verkar vara en förutsättning för det.

Analysverktyg

1. Frågan

2. Explicit information om situationen
   a) Matematiska komponenter (termer, värden mm.)
   b) Verklighetskontext (t ex banksparande mm.)

3. Representationsform (Algebraiskt funktionsuttryck, graf mm.)

4. Andra egenskaper (om de finns)
   a) Avgörande ord eller fraser
   b) Syntaktiska egenskaper
   c) Explicit uttalade vägledningar
   d) Annan viktig information

5. Förutsättningar (hjälpmedel, svarsformat mm.)

Analysprocedur
Analysen av uppgifterna genomfördes sedan enligt följande procedur:

I. Analys av provuppgiften (sök efter svar (MR) eller algoritmer (AR)
   En analys av algoritmer eller fakta som löser provuppgiften utförs.

II. Analys av provuppgiften (efter uppgiftsvariablerna)
   Provuppgiften beskrivs med hjälp av uppgiftsegenskaperna i analysverktyget ovan.

III. Analys av läroboken (sök efter svar och algoritmer)
   Läroboken analyseras för att se om den innehåller teori, exempel eller uppgifter som löses med den eller de algoritmer som löser provuppgiften. Beskrivna algoritmer och fakta i läroboken jämförs med algoritmer och fakta som krävs för att lösa provuppgiften.

IV. Analys av läroboken (uppgiftsvariabler)
   Läroboken analyseras för att se om den innehåller exempel eller uppgifter med liknande egenskaper (enligt analysverktyget) som provuppgiften och som kan lösas med samma fakta eller algoritmer.

V. Argumentation för resonemangskrav
   Med hjälp av punkterna I-IV argumenteras för det resonemang som verkar krävas för en lösning av provuppgiften.

Exempel på klassificeringar
Nedan följer några exempel på klassificeringar av uppgifter:

Uppgift 5

En bils värde, y kr, kan beskrivas med formeln $y = 120000 \cdot 0{,}85^x$, där x är tiden i år efter inköpet.
a) Vad kostade bilen när den var ny?
b) Hur mycket är bilen värd efter 3 år?

Klassificeringen av a-uppgiften blev LPR medan klassificeringen av b-uppgiften blev FAR. Det finns flertalet liknande uppgifter i den lärobok som eleverna som fick denna provuppgift använde. Anledningen till klassificeringen LPR på a-uppgiften är att de liknande uppgifterna i boken alltid inkluderade ett värde (som på b-uppgiften) som kan sättas in i funktionsuttrycket. I a-uppgiften behöver de därför först resonera sig fram till att bilen var ny när x=0 vilket bedömdes vara ett lokalt PR resonemang.

Uppgift 6 (hämtad från Nationellt prov i kurs C vårterminen 1996)
Om funktionen f vet man följande:

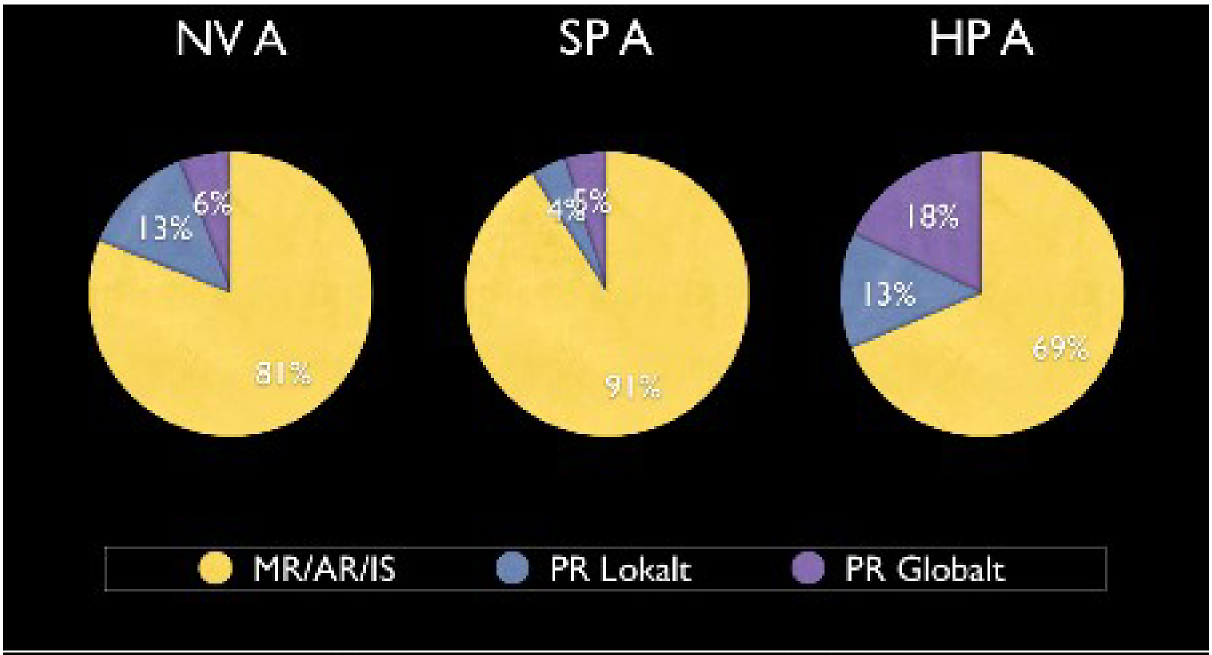
- $f(7) = 3$ och
- för $7 \leq x \leq 9$ gäller att $0{,}8 \leq f'(x) \leq 1{,}2$.

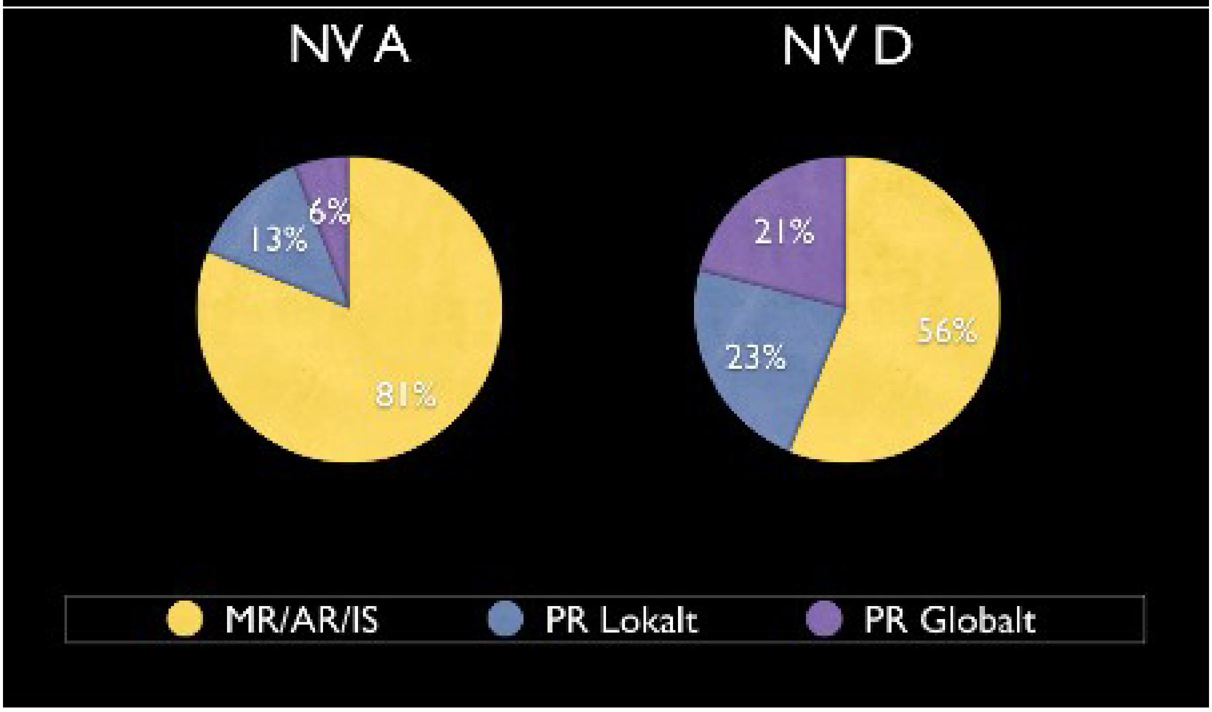
Bestäm största möjliga värde för $f(9)$.

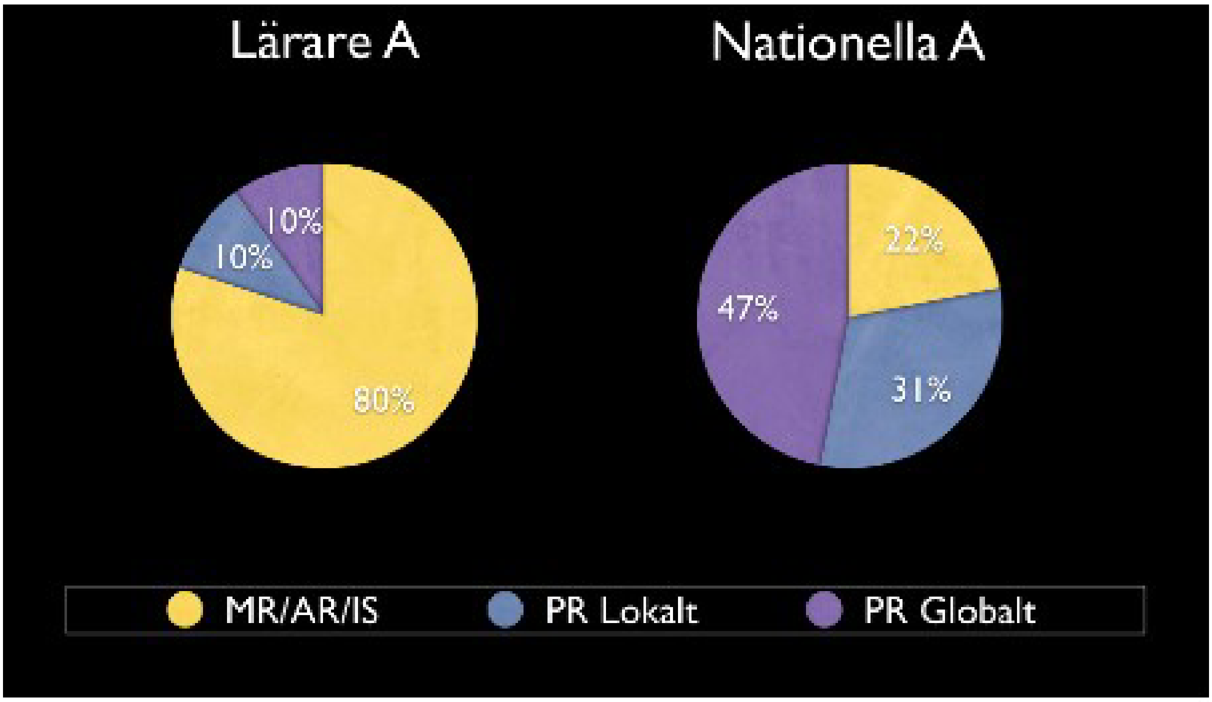
Denna uppgift klassificerades som GPR eftersom det inte fanns någon uppgift i boken som kan lösas med samma algoritm.

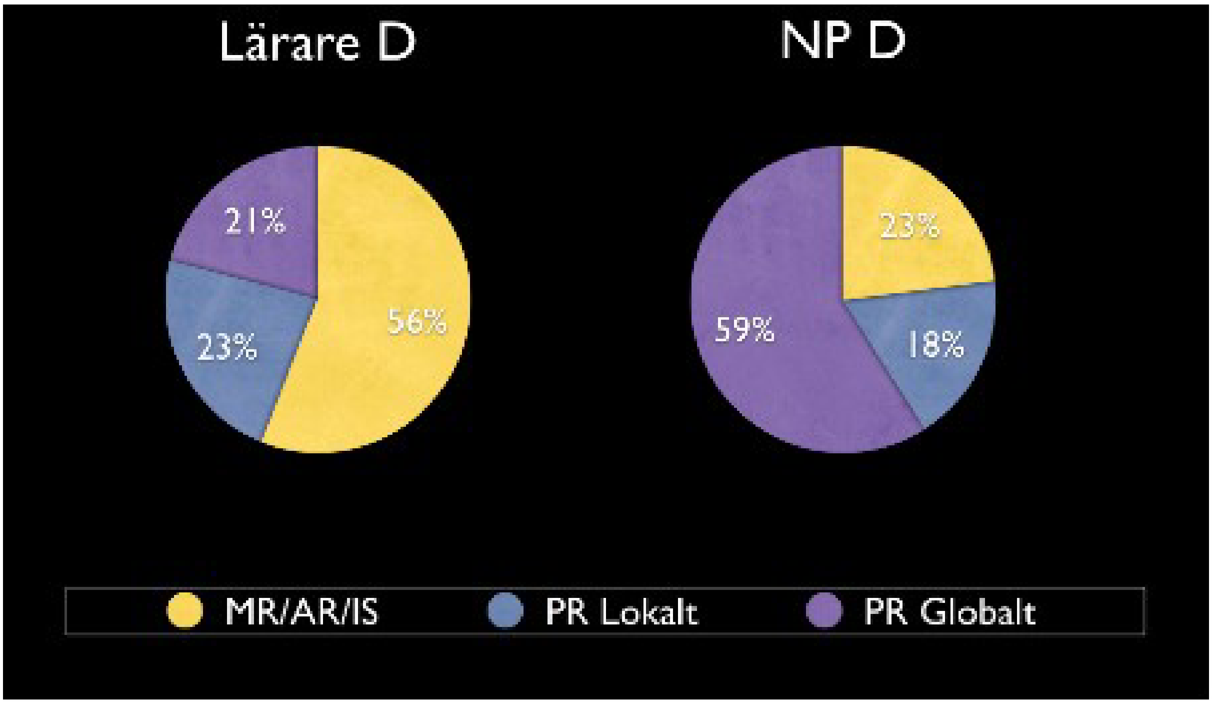
Resultat

Några delresultat av provanalysen kan sammanfattas i nedanstående diagram.









Diagrammen visar inga stora skillnader i andelen PR-uppgifter mellan proven för kurs A i de olika programmen NV, SP och HP. Inte heller mellan proven för kurs A och D på det naturvetenskapliga programmet. Detsamma gäller också i en jämförelse mellan de nationella proven i kurs A och D. Detta ska inte tolkas som att proven för de olika programmen är lika svåra. Analysen är gjord i förhållande till elevernas läroböcker (alltså vad det stött på tidigare) och även om de i teorin läser samma kurs så har de oftast inte samma läroböcker och innehållet varierar mellan böcker avsedda för olika program. T ex så innehåller böckerna för Naturvetenskapsprogrammet oftast mer tekniskt avancerade ekvationer. Däremot så krävs inte olika typer av matematiska resonemang enligt den beskrivning som gjorts ovan.

Analysen visar dock en stor skillnad mellan de lärargjorda proven och de nationella proven. Andelen uppgifter som förväntas kräva ett GPR för sin lösning är betydligt högre i de nationella proven.

Diskussion

Konsekvenser

I en diskussion om möjliga konsekvenser av att proven som eleverna möter har det innehåll som studien visar anknyter vi till de funktioner för prov som beskrevs i inledningen. Dessa funktioner inkluderar prov som redskap för elevernas skapande av kunskap och föreställningar om matematik samt information om deras kunskap i undervisnings- och betygssättningssyfte.

Resultatet att fördelningen av uppgifter över de olika matematiska resonemangstyperna är liknande över olika kurser underlättar för elever (och även lärare när det gäller Nationella prov) att tolka vilken typ av matematisk kunskap som är viktig. Det ger möjligheter att fokusera sitt lärande på denna typ av kunskap. En sådan samstämmighet mellan kurser verkar också ligga i linje med kursplanerna och betygskriterierna. Att fördelningen av olika resonemangstyper är liknande på de olika programmen ligger också i linje med det svenska kursutformade systemet där elever från olika program läser samma kurser.

Den tyngdpunkt som läggs i de lärargjorda proven på uppgifter som kräver PR för sin lösning kan dock vara i lägsta laget. Föreställningar om vad som är viktig matematisk kunskap påverkar både elevernas föreställning om vad ämnet är och vilken typ av resonemang som de ska lära sig. Om de flesta provuppgifterna går att lösa med ytliga AR-resonemang så utgör proven troligen inte något större incitament för att lära sig andra lösningsstrategier.

Andelen uppgifter som kan lösas med AR-resonemang har också stor relevans för tolkningen av elevernas kunnande. Om de flesta uppgifter är möjliga att lösa med matematiskt ytliga resonemang kan elever få en stor andel av den maximala poängen på provet med hjälp av endast denna kompetens. Även om denna kompetens är viktig så finns det då risk att vi tror att de uppfyller även andra mer förståelseinriktade mål i kursplanen och betygskriterierna än vad de egentligen gör. Detta är av vikt både för elevernas och för vår egen tolkning av vad våra elever verkligen lärt sig. Detta är också speciellt viktigt för betygssättningen i ett mål- och kunskapsrelaterat betygssystem som det svenska där olika kunskapskvaliteter är beskrivna för de olika betygsstegen.

De nationella proven innehåller en betydligt större andel ’PR-uppgifter’ än de lärargjorda proven. Detta skulle eventuellt kunna bidra till att de lärargjorda proven med tiden förändras ur denna aspekt eftersom de nationella proven anses ha en viktig funktion för implementering av styrdokument och likvärdighet i betygssättning. *Om* det är så att de nationella proven inte förändrats på denna punkt under de senaste åren så verkar detta dock inte ha varit fallet. En av flera möjliga andledningar till detta skulle i så fall kunna vara att det i Sverige bara finns ett mindre antal tidigare prov offentliga eftersom de flesta är sekretessbelagda under en 10-års period.

Den stora skillnaden mellan andelen ‘PR-uppgifter’ i de nationella proven och de lärargjorda proven är ett viktigt och för oss något förvånande resultat av denna studie. Hur stor andel av uppgifterna i ett prov som bör vara av sådan art att relevanta matematiska egenskaper hos de ingående komponenterna behöver beaktas för att kunna lösa uppgifterna finns det förstås inget rätt svar på. Men att de nationella proven och de lärargjorda proven, som båda bör spegla kunskapssynen i styrdokumenten, ser så väldigt olika ut på denna fundamentala punkt kan vara problematiskt på flera sätt. Ett av dessa potentiella problem är elevernas möjligheter att uppnå önskvärda betyg. Undervisningen bör på bästa sätt hjälpa elever att uppnå de mål och kunskaper som beskrivs i styrdokumenten och eleverna ska bedömas mot dessa mål. De nationella proven har som ett syfte att säkerställa likvärdigheten i bedömning över landet och lärare ska därför ta hänsyn till elevernas resultat på dessa prov vid betygssättning. Om de nationella proven bedömer en annan typ av kunskap än de som undervisningen har fokuserat på (t ex via de lärargjorda prov som givits under kursens gång) så har eleverna inte fått de bästa möjligheterna att uppnå t ex ett önskat betyg.

Möjliga orsaker

Ett provs kvalitet är beroende av hur väl det uppnår sitt syfte, och den typ av kunskap som krävs för att lösa uppgifterna i ett prov är oftast av avgörande betydelse för om syftet med provet uppnås. Det är därför väsentligt att samla information om vad som påverkar provkonstruktörernas val av uppgifter, och orsakerna till att så olika fokus läggs på de nationella proven och de lärargjorda proven när det gäller matematiska resonemang. I de följande diskuteras några möjliga orsaker till skillnaderna.

Provkonstruktörernas föreställningar

Alla har vi föreställningar om det vi gör och dessa föreställningar påverkar oss. När det gäller konstruktion av prov i matematik kan exempelvis kursplaner tolkas olika och olika föreställningar om vad matematik är kan finnas. En sådan föreställning kan vara att matematik i huvudsak handlar om att kunna behärska ett antal tekniker. En annan föreställning kan vara att detta bara är en del av matematik och att ämnet innehåller betydligt fler viktiga aspekter än så. Någon kan också mena att ett prov bör innehålla många uppgifter liknande de i boken i syfte att säkerställa att eleverna kan dra nytta av att arbeta med uppgifterna i boken. En annan kan i sin tur mena att en större andel uppgifter bör se annorlunda ut för att säkerställa att ett högt resultat på ett prov beror på att eleverna har förstått de grundläggande idéerna bakom den inblandade matematiken. Frågan om vad man tycker att matematik är och hur prov utformas för att ge eleverna chans att visa denna matematik kan påverka provkonstruktörernas val av innehållet i prov. Skillnader i dessa föreställningar kan vara en orsak till att de lärargjorda proven och de nationella proven ser olika ut.

Det svenska systemet bygger på att skolor ska kunna göra olika tolkningar av styrdokumenten men om detta är en orsak till sådana skillnader mellan lärare ute på skolorna och de som arbetar med de nationella proven kan man fråga sig om det är rimligt. En mer konkret diskussion om sådana här frågor mellan Skolverk och lärare kan vara ett sätt att minska de skillnader som beskrivs i denna studie.

Svårighetsgrad på uppgiftskonstruktion, tidsåtgång för uppgiftskonstruktion och tillgången till redan befintliga 'PR-uppgifter'

Erfarenhetsmässigt är det svårare och tar längre tid att göra uppgifter som inte är för svåra men ändå kräver PR-resonemang än att göra uppgifter som eleverna kan lösa genom memorering och algoritmiska resonemang. Eftersom lärarna i Sverige (och gissningsvis inte bara där) är tungt belastade så är det svårt att hinna få ordentligt med tid till provkonstruktion, vilket försvårar konstruktionen av 'PR-uppgifter'. Alternativet till att själva konstruera denna typ av uppgifter är att istället (eller som komplement) hämta dem från annat befintligt material som t ex andra läroböcker och tidigare gjorda prov. Men om det är så att även dessa källor innehåller en liten andel av enklare 'PR-uppgifter' så är det inte heller en lättframkomlig väg. Konstruktörer av nationella prov har betydligt mer tid för konstruktionen av sina prov. I arbetet med de proven arbetar dessutom många lärare som tillsammans kan bidra med och utveckla uppgifter vilket betydligt ökar möjligheten att konstruera prov med denna typ av uppgifter. Detta är en annan möjlig orsak till att de nationella proven innehåller 'PR-uppgifter' i större omfattning. Flera tillgängliga icke-sekretessbelagda prov och sådana uppgifter i den nationella provbanken skulle kunna minska konsekvenserna av skillnader i resurser för provkonstruktion.

Svårighetsgrad och tidsåtgång för uppgiftsanalys
En annan bidragande orsak kan vara svårigheten och tidsåtgången att analysera vilken kompetens som egentligen krävs av en uppgift. Även här är det en stor skillnad i tid och resurser mellan lärarna som gör sina egna prov och de som arbetar med de nationella proven. Det betyder att en del lärare kanske inte är helt medveten om vilken typ av kompetens man testar med sina prov och den i denna studie synliggjorda skillnaden mellan lärargjorda prov och nationella prov. Konsekvenser av sådana skillnader kan eventuellt minskas av ett ytterligare förbättrat utbyte mellan forskare och lärare.

Provtidens längd
De flesta lärargjorda proven görs under befintlig lektionstid som är betydligt kortare än den tid som avsätts för de nationella proven. Tillsammans med en önskan att inkludera uppgifter på många ämnesmoment i proven skulle detta kunna innebära att det bedöms som viktigt att ett större antal kortare uppgifter inkluderas i proven. Om föreställningen är att det tar relativt långt tid för eleverna att göra 'PR-uppgifter' skulle detta kunna leda till att man drar sig för att inkludera en större andel 'PR-uppgifter'.

Press från skolledning och andra att elever får godkända betyg
Det finns på många skolor en stark press på lärare, från t ex politiker och skolledning, att elever minst ska uppnå betyget Godkänd. Även om de flesta lärare är starka finns det många exempel där man resonerat så att man av denna anledning i alla fall inte krånglar till det i onödan i de uppgifter de 'svagare' eleverna (vilket kan vara många) ska lösa. Detta skulle innebära att 'PR' uppgifter inte används i den utsträckning man egentligen som lärare skulle vilja.

Avslutning
Vilka av ovanstående eller andra orsaker som är avgörande för den skillnad i inriktning mellan de lärargjorda proven och de nationella proven som uppvisas i studien vet vi inte. Men om vi vill att eleverna ska lära sig att använda de inre relevanta matematiska egenskaperna hos komponenter i problem de möter behöver vi anordna en lärandemiljö som är produktiv för detta ändamål. Proven är en del i denna lärandemiljö. Hur stor andel 'PR-uppgifter' som lämpligen bör inkluderas i prov i en sådan lärandemiljö finns det inget exakt svar på. Men om eleverna ska uppfatta matematiken som annat än att komma ihåg regler, och få ett incitament för att fokusera på förståelse så krävs troligen en högre andel än 10-20 %. För att underlätta både vår tolkning av elevernas kunskaper och deras möjligheter till ett lärande som ligger i linje med vad de testas på är det också mycket som talar för att de prov som lärare och konstruktörer av nationella prov utvecklar bör ha en högre samstämmighet vad gäller den typ av matematiska resonemang som krävs för att klara proven.

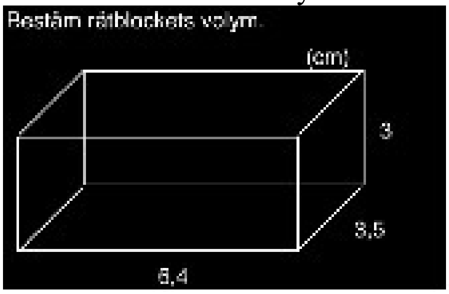
Förändringar underlättas av en tydlig bild av det nuvarande tillståndet såväl som av en tydlig beskrivning av den önskvärda förändringen. Den analys av prov som beskrivits här avser att bidra till en sådan beskrivning av det nuvarande läget. Om sedan en förändring bedöms som önskvärd behöver vi också svar på frågorna om vilka de avgörande orsakerna till det befintliga läget är (i detta fall angående provens innehåll vad gäller matematiska resonemang). En förändring underlättas kraftigt av undanröjande av hinder för förändringen och skapandet av bra möjligheter att nå det eftertraktade målet. Studier av dessa orsaker är därför en naturlig fortsättning på denna provanalys.

Konstruktion *av PR-uppgifter*
Att göra lätta standarduppgifter är lätt. Att göra svåra uppgifter är inte heller så svårt även om det tar lite längre tid. Att göra PR-uppgifter som ändå inte är så förfärligt svåra är ytterligare lite svårare och tar oftast än längre tid. Som avslutning kommer här ett par exempel på hur man, utan att uppgifterna blir väldigt svåra, kan ändra på rutinuppgifter så att

standardalgoritmer inte kan appliceras direkt utan att matematiska egenskaper hos ingående komponenter måste beaktas.

Uppgift 7 (Möjlig att lösa med ett familjärt algoritmiskt resonemang)

Bestäm rätblockets volym.



Uppgift 8 (Modifierad variant av uppgift 7. Hämtad från Nationellt prov i Kurs A höstterminen 1995)

Du ska bygga ett akvarium av glas på ca. 160 liter.
Föreslå lämpliga mått.
Beskriv hur du kom fram till dessa mått och rita en skiss
av akvariet med måtten angivna.

Uppgift 9 (Möjlig att lösa med ett familjärt algoritmiskt resonemang)

En likbent triangel har toppvinkeln 70º. Hur stora är de båda basvinklarna.

Uppgift 10 (Modifierad variant av uppgift 9. Hämtad från Nationellt prov i Kurs A höstterminen 1995)

Undersök hur likbenta trianglar som har en vinkel 70º kan se ut.
Bestäm de övriga vinklarna i de trianglar du hittar.

Referenser

Lithner, J. (2003a). *A framework for analysing qualities of mathematical reasoning: Version 2*. (Research reports, No 3, in mathematics education). Umeå, Sverige: Umeå universitet, Matematiska institutionen.

Lithner, J. (2003b). Students' mathematical reasoning in textbook exercise solving. *Educational studies in mathematics, 52*.

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *Journal of mathematical behavior, 23*, 405-427.

Rita Juul Petersen
er underviser, vejleder og konsulent inden for den almene voksenundervisning og ansat ved Give Uddannelsescenter, Danmark. Har deltaget i nationale og internationale udviklingsprojekter primært med fokus på undervisning af voksne med svage boglige forudsætninger. Deltog f.eks. i udviklingen af Forberedende Voksenundervisning i Matematik.
Sidder nu i Undervisningsministeriets opgavekommission.
E-mail: rjp@kmk.dk

Fleksible prøver i Forberedende Voksenundervisning i Matematik

Forberedende Voksenundervisning i læsning og matematik blev etableret i Danmark i 2001. En af målsætningerne med uddannelsen var at tilbyde en matematikundervisning så tæt på den voksnes hverdag som muligt. Det betyder at undervisningen kan udbydes og tilrettelægges på forskellige institutioner og steder: i fagforeninger, på virksomheder, på et bredt udsnit af uddannelsesinstitutioner mv. Det betyder også at undervisningen kan rekvireres og gennemføres på alle tidspunkter af dagen og året. - Det traditionelle centrale prøvesystem med faste prøveterminer matcher ikke intentionerne i FVU. Prøverne skal så at sige kunne rekvireres 'on demand' i direkte forlængelse af undervisningen. I workshoppen vil jeg beskrive hvordan vi I Danmark har løst denne opgave og demonstrere de værktøjer vi har brugt for at etablere et prøvesystem der er fleksibelt og samtidig lever op til de faglige normer for faget.

***Ingvill Merete Stedøy** er faglig leder ved Matematikksenteret og prosjektleder for Nasjonale prøver i matematikk. Hun har undervisningserfaring fra videregående skole, erfaring med forsøks og utviklingsarbeid i grunnskolen (alle nivå) og læreplanutvikling. Hun har skrevet lærebøker både for videregående skole og småskolens 3. og 4. trinn. Hennes arbeid ved matematikksenteret omfatter blant annet administrasjon, forsknings- og utviklingsarbeid, kursvirksomhet, ledelse av matteklubber for barn og unge, og veiledning av studenter. Hun har ansvar for veiledning av hovedfagsstudenter og doktorgradsstudenter som er knyttet til matematikksenteret.*

***Guri A. Nortvedt** er ansatt ved Matematikksenteret som forsker knyttet til nasjonale prøver i matematikk. Hun er cand. scient i realfagsdidaktikk og har tidligere arbeidet med KIM-prosjektet (utvikling av diagnostisk materiell i matematikk), Jenter og Matematikk i videregående opplæring og evaluering av matematikkrommet på Hovinhøgda skole. Guri A. Nortvedt har mange års undervisningserfaring fra grunnskolen og er nettverksleder i matematikksatsningen i Oslo kommune.*

Ingvill Merete Stedøy og Guri A. Nortvedt
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Nasjonale prøver i matematikk i Norge - Oppdrag, løsninger og konsekvenser

Innledning

Etter forslag fra det regjeringsoppnevnte Søgnen-utvalget, som skulle komme med anbefalinger for å heve kvaliteten på grunnopplæringen i norsk skole, ble det vedtatt i Stortinget at Norge skal ha nasjonale prøver i matematikk, lesing, skriving og engelsk på fire ulike alderstrinn i grunn- og videregående skole. Prøvene skulle først og fremst måle om elevene har oppnådd tilstrekkelige grunnleggende ferdigheter og kompetanse innenfor de ulike områdene. Matematikksenteret fikk i oppdrag å lede utviklingen av nasjonale prøver i matematikk for elever på 4., 7. og 10. trinn i grunnskolen og 1. år i videregående skole. I utgangspunktet ønsket Utdannings- og forskningsdepartementet (UFD), som var oppdragsgivere den første perioden, at prøvene skulle være nettbaserte for alle trinn.

Matematikksenteret tok jobben og prosjektledelsen for utvikling av prøvene, og søkte samarbeid med Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling (ILS) ved Universitetet i Oslo (UiO) og Telemarksforskning Notodden. Senere har Intermedia kommet inn for å lede utviklingen av nettbaserte prøver.

Tolkning og løsning av oppdraget

Oppdraget med å utvikle nasjonale prøver, er svært omfattende. Formålene med prøvene er mange og til dels uforenelige. Nedenfor gjengis hva som er sagt i oppdragsbrevet fra UFD.

Formålet med prøvene skal være

- *å gi informasjon til beslutningstakere på ulike nivå om tilstanden i utdanningssektoren og dermed gi grunnlag for iverksetting av nødvendige tiltak for sektoren*
- *å gi informasjon til brukere av utdanning om kvaliteten i opplæringen på det enkelte lærested og dermed blant annet gi bedre grunnlag for å gjøre valg og stille krav om forbedringer*

- *å gi informasjon til skoleeier, skoleledere og lærere som grunnlag for forbedrings- og utviklingsarbeid på det enkelte lærested*
- *å gi informasjon til den enkelte elev/ elevens foresatte som grunnlag for elevens læring og utvikling*
- *å kunne registrere utviklingen over tid, både på systemnivå og individnivå*

I utgangspunktet ville faggruppen dele matematikkprøvene inn i tre hovedområder, der det ville være bruk for forskjellige typer prøver. De tre hovedområdene er

a. Begrepsforståelse
b. Ferdigheter
c. Kompetanser, herunder holdninger til matematikk og læringsstrategier.

For at prøvene ikke skulle bli for store og omfattende, ville vi legge opp til at bare deler av hovedområdene i matematikkplanen skulle prøves ved hver enkelt prøve. Ett eller to hovedområde skal være fokusert, men for å sikre sammenlikning over tid og ulike alderstrinn, vil enkeltoppgaver fra de andre hovedtemaene være med. Vi har videre laget en presisering av læreplanene i det vi kaller etappemål, slik ar elever, foresatte og lærere kan se hva som forlanges at elevene skal kunne på de ulike nivåene i opplæringa.

Det er nesten umulig å oppfylle alle ønsker om hva prøvene skal kunne brukes til. Faggruppene har måttet foreta valg og prioriteringer. Da har hovedfokus blitt lagt på elevnivå og klassenivå, og på pedagogisk bruk av prøveresultatene i etterkant. På nasjonalt nivå vil det være mest riktig å plukke et ut et representativt utvalg av besvarelser og analysere dem grundig. Slik vil en også kunne sammenlikne landsnivået over tid.

Det har vært et ønske at prøvene ikke skal gi elevene en enkelt poengsum eller en enkel karakter. Elevene skal få en *kompetanseprofil* som skal gi innblikk i elevenes sterke og svake sider. Det utvikles et vurderingssystem som skal kunne måle elevenes utvikling over tid.

Vurdering av kompetanse

I utformingen av kompetansebegrepet ble det danske KOM-projektet brukt. Der deles matematikkompetanse inn i åtte ulike delkompetanser, som hver griper over i hverandre. Disse er:

a. representasjonskompetanse
b. symbol- og formalismekompetanse
c. kommunikasjonskompetanse
d. hjelpemiddelskompetanse
e. resonnementskompetanse
f. modelleringskompetanse
g. problembehandlingskompetanse
h. tankegangskompetanse

I arbeidet med utvikling av prøvene har vi møtt på ulike hindringer som har ført til at omfanget på prøvene har måttet reduseres. Det er i skrivende stund bestemt at på hvert klassetrinn skal det kun være en enkelt prøve, og den skal enten være skriftlig eller nettbasert, og av høyst to timers varighet. For å kunne måle elevenes nivå innenfor de ulike kompetansene, har vi derfor vært nødt til å slå sammen flere kompetanser til et kompetanse*område*. Hvilke kompetanser som skal høre sammen har blitt nøye prøvd ut og vurdert i forhold til hvilke kompetanser som oftest opptrer sammen når elevene skal løse ulike typer oppgaver. Denne vurderingen er gjort ut fra oppgavene som er prøvd ut og pilotert til de nasjonale prøvene.

Det er laget fire kompetanseområder som elevene skal vurderes etter. Tre av dem måles på de nasjonale prøvene:

- RSF: Representasjonskompetanse og kompetanse i symbolbruk og formalisme.
- RTK: Resonnement-, tankegang- og kommunikasjonskompetanse.
- APM: Anvendelse, problembehandlings- og modelleringskompetanse.

Den fjerde kompetansen, hjelpemiddelkompetansen vil ikke bli vurdert i de skriftlige delene av nasjonale prøver. I hvilken grad elevene har høy kompetanse i bruk av hjelpemidler, må læreren vurdere på andre måter.

Selv om en oppgave i hovedsak måler kompetansenivået for en av kompetansene i et område, vil det være umulig å isolere kompetansene helt fra hverandre. Flere kompetanser virker sammen i de aller fleste tilfeller. Når en oppgave er plassert innenfor ett enkelt kompetanseområde, betyr det at det er dette kompetanseområdet som har hovedfokus når eleven skal besvare oppgaven, og poengene gis innenfor dette ene kompetanseområdet.

En prøve tar form

Med utgangspunkt i etappemålene som er utarbeidet fra gjeldende læreplaner, har matematikkgruppen laget oppgaver som er prøvd ut med elever og lærere i ulike skoleklasser. En prøveutvikler har vært til stede for å observere elevene mens de arbeider med oppgavene og for å diskutere oppgavenes utforming og innhold med elever og lærere. Målet med disse første utprøvingene har vært å finne gode oppgaver som måler elevenes kompetanser i matematikk i henhold til etappemålene. Det har også vært et mål at elevene skal oppfatte enkeltoppgaver som relevante og interessante. Ved behov er oppgaver skrevet om og prøvd ut på nytt.

På grunnlag av erfaringene fra disse første utprøvingene er det satt sammen en pilot-prøve som er gjennomført med ca 500 elever. Hele skoleklasser er trukket ut til piloteringen. Skolene har gjennomført piloteringen av prøven på samme måte som en reell prøve ville ha vært avholdt. Lærerne har hatt anledning til å se igjennom besvarelsene før prøvene er sendt i retur til forskergruppen. Forskergruppen har utarbeidet en kodebok for prøven, og kodet alle elevbesvarelser for resultatene er lagt i en database. Disse er siden brukt til item analyser for å se på hvordan ulike grupper av elever skårer, og til å se på hvordan ulike elevsvar fordeler seg (både korrekte svar og feilsvar). Disse beregningene er også brukt til å følge elever utover i prøven og for å koble elevsvar på ulike oppgaver.

Den endelige prøven er laget med utgangspunkt i erfaringene fra pilotprøven. Nødvendige endringer og videre utprøvinger er foretatt før prøven ble ferdigstilt. For forsøks-året 2004 betyr det at det ble laget prøver for 4. og 10. trinn. Evalueringene som er gjort etter at prøvene var avholdt, viser at både lærere, rektorer og forskere mener at prøven har god validitet - den måler sentrale læreplanmål (Norsk Gallup, 2004 og Lie med flere, 2004). Det viste seg imidlertid at profilene ikke kunne publiseres, da disse ikke målte elevenes kompetanse pålitelig nok, slik kompetansebegrepet var utarbeidet i rammeverket. Dette skyldes i hovedsak tre forhold:

- Det var for få oppgaver innenfor enkelte kompetanseområder som for eksempel modellering og anvendelse til at kompetansen ble målt bredt nok.
- Når flere kompetanser skulle måles med samme oppgave, viste det seg at når elevens svar innenfor en kompetanse lå på ett bestemt nivå, lå svaret ofte på samme nivå innenfor de andre kompetansene også – samvariasjonen mellom kompetansene ble for stor til at man med høy sikkerhet kunne si at elevens kompetanse innenfor et område var høyere eller lavere enn innenfor et annet
- For hver enkelt deloppgave ble elevenes svar plassert inn på et kompetansenivå fra 0 til 5, der 0 betyr at oppgaven var ubesvart. I psykometrisk sammenheng skal da elever som får svarene sine plassert på nivå 5 i gjennomsnitt være bedre enn elever som får sitt svar plassert på nivå 4. Dette gjelder de fleste oppgavene på prøvene for 2004, men det er

vanskelig å få dette til for alle oppgavetyper, og Lie m fl. (2004) anbefaler et annet kodesystem for senere prøver.

Ekspertvurderere, lærerkurs og vurdering av nasjonale prøver
I premissene for nasjonale prøver ligger det at alle lærere som gjennomfører prøver med egne elever, skal på kurs om vurdering og etterbruk av prøvene. For å sikre at man kunne holde kurs for alle landets lærere på 4. og 10. trinn, har faggruppene på oppdrag fra Læringssenteret (nå Utdanningsdirektoratet) skolert 58 kursholdere per trinn (eksternvurderere). Disse har så igjen holdt kurs for alle andre lærere. Eksternvurdererene har også kontrollvurdert elevbesvarelser for å gi skoler og lærere tilbakemelding om eget vurderingsarbeid.

I 2004 handlet kursene nesten bare om innføring i kompetansesystemet og vurderingen av prøvene. Hensikten med kursene har til dels vært å sikre at lærere får høyere vurderingskompetanse og dels å sikre at man opparbeider en felles forståelse for vurderingen av nasjonale prøver slik at vurderingen blir mest mulig lik for alle elever. Gruppen som gjennomførte utvalgsundersøkelsene av nasjonale prøver 2004, hadde også i oppdrag å undersøke samsvar mellom lærere som vurderte samme besvarelser. Dette ble gjennomført ved å sammenligne lærers og eksternvurderers resultater for 10. trinn. Lie m. fl. (2004) vurderer ikke uoverensstemmelsene mellom de to gruppene som spesielt store, men hevder at eventuelle forskjeller kan skyldes et for finmasket vurderingsnett. I 2005 er kursene videreutviklet til også å handle om pedagogisk bruk av prøvene. Dette aspektet ved lærerkursene vil være enda mer fremtredende i 2006 da prøvene for 10 trinn og VG1 blir rettet elektronisk.

Dilemmaer i prøveutviklingen
I mandatet for prosjektet ligger det bestilling på prøver som skal gi tilbakemeldinger på mange nivåer. Dette kan være vanskelig å forene i en prøve. Eksempel 1 illustrerer dette godt:

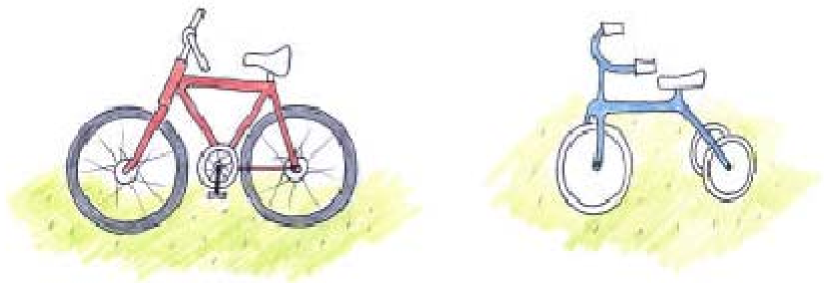
Sett ring rundt det største tallet:			
0,19	0,701	0,81	0,5

Eksempel 1, oppgave NP 4. trinn 2004

I piloteringen av oppgaven oppdaget vi at kun 13 % av elevene satt ring rundt korrekt svaralternativ. Det vanligst feilsvaret var 0,701 – det tallet med flest desimaler. At elevene velger dette tallet kan for eksempel skyldes hvordan mange uttaler tallet når de leser det "null komme sjuhundreogen". Dette kan medføre at elevene på en måte oppfatter tallet som to tall atskilt med et komma imellom. Hva man også kunne se i pilotundersøkelsen, var at i enkelte klasser fikk mange elever til oppgaven, i noen klasser fikk ingen elever den til og i en "vanlig" klasse fikk noen få elever til oppgaven. Dette kan tyde på at enkelte lærere enten arbeider mer med desimaltall, eller lykkes spesielt godt. I utvalgsundersøkelsen fant Lie m fl (2004) at 16 % av elevene valgte korrekt svaralternativ. Oppgaven diskriminerte imidlertid dårlig, det vil si at det er dårlig sammenheng mellom hvor dyktige elevene er i matematikk og i hvilken grad de lykkes med å løse akkurat denne oppgaven. Dette kan kanskje tyde på at oppgaven i større grad måler sider ved *undervisningen* enn elevenes egentlige kompetanse. Samtidig har elevene som har klart å løse oppgaven høyere gjennomsnittelig skåre enn elevene som ikke lykkes med oppgaven, og den lave diskrimineringen kan også kanskje skyldes at det å vurdere størrelse på desimaltall er for "vanskelig" for 4. trinn selv om desimaltall er blant læreplanmålene. Prøven kan ikke brukes til å avgjøre hvilke at de to forklaringene som er mest korrekt, om det da er en av dem, men resultatene fra utvalgsundersøkelsen forteller at man må drøfte hva dette kan bety med hensyn til den matematikkundervisningen som gjøres i Norge. Samtidig brukes oppgaven til å lage elevens profil, og dersom den måler noe annet enn hvor dyktige elevene er, er det uheldig for dem.

Hensyn i valg av oppgave og prøveformat

Det ble tidlig bestemt at den skriftlige prøven skal være 90 henholdsvis 120 minutter for elever på 4. og 10. trinn. Prøven for 10. trinn og grunnkurset i videregående skole skiller seg fra eksamensprøver og andre prøver elevene har, ved at elevene ikke får bruke elevbok[1] og heller ikke formelsamling. Disse elevene får også en delprøve der de ikke får bruke kalkulator, noe som også skiller den nasjonale prøven fra andre prøver elevene har. Grunnen til at elevene på nasjonale prøver får bruke færre hjelpemidler enn ved andre prøver, ligger i utformingen av kompetansene som måles på prøven, og at vi ønsker å teste en del grunnleggende regneferdigheter. Det ligger også i det å ha kompetanse i matematikk at elevene skal kunne en del grunnleggende fakta- og formelkunnskaper, for eksempel formler for areal og omkrets av velkjente geometriske figurer.
Det er stor variasjon i oppgaveformater og med hensyn til hvordan elevene skal avgi svar på en oppgave. Elevene møter som oppgavetyper alt fra flervalgsoppgaver, enkle oppstilte oppgaver til åpne oppgaver der de må vurdere svar, eller der det er flere korrekte svar og flere måter å løse oppgaven på. En slik oppgave er oppgaven om sykler og sykkelhjul som ble gitt til elever på 4. trinn:



Martin har en sykkelbutikk.
Han selger trehjulssykler og tohjulssykler.
Syklene i butikken har til sammen 19 sykkelhjul.
Hvor mange tohjulssykler og hvor mange trehjulssykler kan Martin ha?
Det er mer enn en løsning.

Eksempel 2, oppgave NP 4. trinn 2004

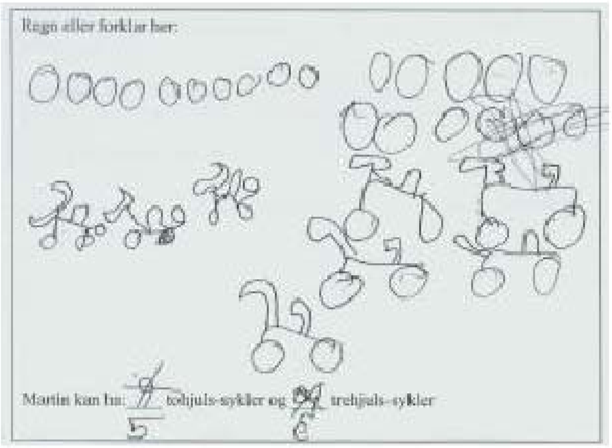
I denne oppgaven er det tre ulike korrekte svar, og mange ulike måter å komme fram til dem på. Noen elever tegner hjul. Andre elever bruker symboler for hjul og tegner og grupperer hjul på ulike måter. Noen bruker tallsymboler og regner. Fra samtaler med elever og lærere om denne oppgaven vet vi at dette er en spennende og rik oppgave, men at mange synes den er vanskelig. Rikdommen i mulige angrepsmåter gjør også at dette er en spennende oppgave å gå tilbake til etter at prøven er avholdt og bruke i oppgavesamarbeid eller gruppediskusjoner. Dersom man også har konkretiseringsmidler tilgjengelige blir oppgaven tilgjengelig for alle elever.

[1] Elevbok . "elevens bok", er en bok elevene selv er ansvarlige for å lage, der de kan skrive regler, forklaringer, former og eksempler. Boken er et hjelpemiddel til avgangsprøven i grunnskolen.

Omtrent to tredeler av elevkullet har klart å finne minst en løsning på oppgaven. Vi ønsket at elevene skal komme frem til så mange løsninger som mulig, derfor hintet til elevene om at det finnes flere løsninger. Dette var ikke innarbeidet i oppgaven ved første utprøving. Da var også oppgaven gitt et svarformat som kunne tyde på at det bare var en korrekt løsning. Det fremgikk tydelig av elevsvarene at elevene fant dette begrensende. Flere elever har markert på svararket at de har funnet mer enn en løsning. I elevtekst 1 har eleven tegnet symboler for sykkelhjulene og gruppert disse slik at hver gruppe representerer en sykkeltype. Tegningen viser den ene løsningen (3 trehjulssykler og 5 tohjulssykler). Den andre løsningen er ikke vist.

Elevtekst 1

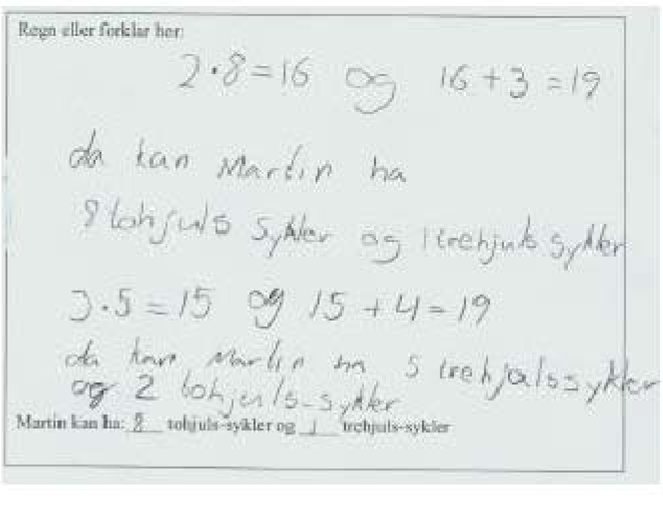
Eleven som har gjort løsningen vist i elevtekst 1, må ha funnet en måte til å holde hjulene "i tankene" for å arbeide frem den andre løsningen.



Elevtekst 2

Ikke alle elevene arbeider med streker som representanter for hjul. Noen elever arbeider også så konkret med sykler og hjul at de tegner sykler for å løse oppgaven. Eleven som har laget løsningen i elevtekst 2, startet ut med å tegne sykler. Etter en stund rakk han opp hånden og spurte om han bare kunne tegne hjul i stedet – det gikk mye raskere. Denne eleven har vist *en* løsning.

Man kan også se av svararket at eleven en stund kanskje har strevd med å gå fra hjul tilbake til hvor mange sykler det blir. Dette hadde kanskje vært annerledes med det nye svarformatet.



Elevtekst 3

Det siste eksempelet som er vist, viser besvarelsen til en jente. Hun arbeider med tallmaterialet i stedet for å bruke hjul eller symboler for hjul. I tillegg til å vise at hun kan arbeide systematisk med tallmaterialet, kan vi også se at hun er dyktig til å presentere arbeidet sitt. Tekst og beregninger utfyller hverandre.

De tre eksemplene på elevtekster er alle henter fra uprøvinger og pilotering av prøven for 2004. De viser typiske elevsvar, og illustrerer godt ulike angrepsmåter som alle gir minst en løsning på oppgaven. Noen metoder er nok raskere og mer effektive enn andre, men oppgaven gir elevene mulighet til å arbeide på sin måte. Dette er et viktig prinsipp i utformingen av de åpne oppgavene. Siden blir det elevens og lærerens oppgave å se på hvordan eleven kan videreutvikle sine strategier.

Konsekvenser av valg i utviklingen og funn i evalueringene

Prosjektet med utvikling av nasjonale prøver er en dynamisk prosess der vi underveis må ta hensyn til faglige krav og ønsker, hvordan prøvene blir mottatt av elever, lærere, foresatte og politikere, hva slags økonomi som ligger i prosjektet, arbeid med vurderingssystemet, muliggjøring av etterbruk av prøvene og så videre.

Fra vi startet arbeidet med prøvene har vi måttet redusere planene fra å skulle utvikle tre delprøver (skriftlig, praktisk/muntlig og nettbasert) for hvert trinn til bare en delprøve. For gjennomføring av prøvene i 2006 er det bestemt at det bare skal være én obligatorisk delprøve. Den må enten være skriftlig eller nettbasert. I tillegg har det blitt bestemt at prøvene for 10. trinn og grunnkurs videregående skole (som fra og med høsten 2006 skal hete Vg1) skal være om høsten, like etter at skoleåret har startet. Det siste er for at lærere og elever skal kunne legge opp en undervisnings- og læringsplan som gjør det mulig å styrke de sidene av kompetansene de enkelte elevene er svakest i.

Faggruppene har besluttet å la prøvene på de to øverste klassetrinnene være nettbaserte i år 2006. Dette letter arbeidet med retting for lærerne, slik at fokus kan bli på en analyse av resultatene og pedagogisk bruk av prøvene. For 4. og 7. trinn blir den skriftlige prøven obligatorisk, men alle skoler gis mulighet til å delta på en frivillig nettbasert prøve som kan supplere den skriftlige prøven og gi et enda bedre bilde på elevens kompetanser.

Pedagogisk bruk av prøvene

Prøveresultatene gir en *indikasjon* på enkeltelevers matematikkompetanse. Læreren må selv finne ut mer om hvordan elevenes kompetanser i matematikk virkelig er. Hvis elevene for eksempel har en lav verdi på APM (Anvendelser, problemløsing og modellering), *hvilken* av disse kompetansene ser det ut til kan være problemet? Alle? En av dem? Dette må læreren finne ut mer om ved blant annet:

-å se nøyere på elevenes besvarelse

-å observere elevene i arbeid med ulike aktiviteter/ problemstillinger/oppgaver

-å snakke med elevene om hvordan de tenker og hva de gjør.

Klasseprofilene kan hjelpe læreren til å registrere hva som har fungert bra og mindre bra i hennes/hans undervisning. Hvis klassen for eksempel er dårlig på problembehandling, kan det være grunn til å tenke over hvordan slike oppgaver vanligvis blir løst i klassen. Da bør det finnes en handlingsberedskap for hva som kan gjøres for å heve nettopp den kompetansen.

Matematikksenterets rolle i pedagogisk arbeid med prøvene

Matematikksenteret skal lage materiell som skolene og lærerne kan bruke for å heve kvaliteten på undervisningen og elevenes læringsutbytte. Når det gjelder å undervise med fokus på spesielle kompetanser, er det like mye *arbeidsmåtene* som det er selve opplegget som avgjør hvilke kompetanser som blir utfordret og utviklet. Vi har arbeidet med dette i forbindelse med ulike kompetansehevingsprosjekter i Trondheim og andre kommuner. Dette vil bli videreutviklet, og modeller for spredning og implementering vil bli utprøvd og brukt også i forbindelse med innføring av nye læreplaner og Kompetansereformen i 2005 og framover.

Referanser

Lie m fl (2004) *Nasjonale prøver på prøve.* Rapport for UFD
(http://odin.dep.no/ufd/norsk/aktuelt/pressesenter/pressem/045071-990389/dok-bn.html)

Niss m.fl. (2002): *Kompetencer og matematiklæring.* Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18 - 2002, Danmark. (I pdf-format på http://pub.uvm.dk/2002/kom/hel.pdf.)

Norsk gallup: *Rektorers og læreres erfaringer med nasjonale prøver i 2004*
(http://odin.dep.no/ufd/norsk/aktuelt/pressesenter/pressem/045071-990389/dok-bn.html)

Norsk gallup: *Ekspertvurderernes erfaringer med nasjonale prøver 2004*
http://odin.dep.no/ufd/norsk/aktuelt/pressesenter/pressem/045071-990389/dok-bn.html

Carl Winsløw
er professor i naturvidenskabernes fagdidaktik ved Center for Naturfagenes Didaktik på Københavns Universitet. Hans forskning falder indenfor matematikkens didaktik, specielt mhp. det tertiære niveau, og han er involveret i en række udviklingsprojekter som tager sigte på at modernisere undervisningen i de naturvidenskabelige fag på universitetet. Hjemmeside: www.naturdidak.ku.dk/winslow

Temaopgaver: et nyt format for fremme og evaluering af selvstændig matematikudøvelse

En ny ramme om studier og eksamen i teoretisk matematik

Carl Winsløw
Center for Naturfagenes Didaktik
Københavns Universitet
winslow@cnd.ku.dk

Niels Grønbæk
Matematisk Afdeling
Københavns Universitet
gronbaek@math.ku.dk

Tre grundspørgsmål.

Den didaktiske kontrakt i matematikundervisningen (Brosseau, 1997, kap. 5) drejer sig om de normer som regulerer samspillet mellem lærere og elever/ studerende. De er for det meste implicitte, så der er ikke tale om en kontrakt i sædvanlig – eksplicit – forstand. Her er et simpelt eksempel på hvad en didaktisk kontrakt kan indeholde på universitetsniveau; den er naturligvis konstrueret til illustrationsbrug.

> *En didaktisk kontrakt.* Forelæseren NN forpligter sig til at gennemgå pensum så overskueligt og gennemskueligt som muligt, og til at signalere, hvilke dele som er meget vigtige – og hvilke der ikke er så vigtige – ved eksamen. De studerende forpligter sig til at møde op til forelæsningen, gøre hvad de kan for at følge med, om nødvendigt tage notater, og læse stoffet bagefter i det omfang det er nødvendigt for at løse de opgaver der stilles undervejs og ved eksamen.

Det er ikke tilfældigt, at eksamen indgår både i retningslinierne for forelæserens og de studerendes arbejde i forbindelse med undervisningssituationerne. Det vil i mindre grad være tilfældet i grundskolen, hvor eksamen ofte ligger flere år fremme i tiden, og – i det mindste i en nordisk sammenhæng – ikke spiller nogen stor rolle i elevernes bevidsthed. Både den eksterne og den interne motivation er her mere lokal. Universitetsstuderende er mere erfarne ”spillere” på uddannelsesscenen, og de er målrettede i retning af at opnå kvalifikationer – både reelle og formelle – i et fag, de selv har valgt. Eksamen spiller her en meget central rolle. Og for universitetsunderviseren spiller resultaterne ved eksamen en betydelig rolle i institutionens reelle bedømmelse af den gennemførte undervisning.

I mange udviklingsopgaver vedr. matematikundervisning på universitetsniveau er det derfor naturligt at interessere sig for *eksamen* – både indhold og form – på et tidligt tidspunkt. Specielt hvis man vil indføre nye arbejdsformer eller nye faglige opgaver, vil det være afgørende for om det lykkes, at de nye elementer i undervisningen ”spiller sammen” med hvad og hvordan der evalueres.

Det kan naturligvis være svært at overskue for alle parter – og især de studerende – om dette er tilfældet. Det kan nødvendiggøre at visse dele af den didaktiske kontrakt gøres mere eksplicit. Specielt skal der sættes (forståelige) ord på de krav der stilles til de studerende, og det skal forklares hvordan en ændret undervisningspraksis kan støtte dem i arbejdet med at opfylde kravene. Hvis eksamen forandres, skal det naturligvis være konsistent med de omtalte krav – og opfattes som sådan af de studerende. Man kan omvendt ikke indføre store forandringer i eksamen uden også at tænke kravspecifikationer og undervisningsformer igennem igen. Hvis man fx afskaffer den skriftlige eksamen i et kursus, må man normalt finde andre veje til at motivere arbejdet med skriftlige opgaver (hvis det ønskes fastholdt). Eksamen og evaluering hænger i praksis uløseligt sammen med undervisningen – i det mindste på universitetsniveauet.

Enhver udviklingsopgave vedr. universitær matematikundervisning kan derfor passende tage udgangspunkt i flg. spørgsmål:

1. Hvordan beskrives hvad de studerende skal lære? [curriculum]
2. Hvordan gør vi det muligt for dem? [arbejdsformer, arbejdsopgaver]
3. Hvordan evaluerer vi resultatet? [eksamensformer, eksamensopgaver]

Alle tre spørgsmål kan betragtes i "nutid" og i "fremtid". Altså:

- mht. aktuel praksis i den sammenhæng (fx kursus eller uddannelse) vi interesserer os for,
- mht. den praksis som ønskes (på basis af en analyse af de problemer der måtte være med den aktuelle praksis).

Den omtalte analyse skal naturligvis være grundig og eksplicit, og det er vigtigt at den muliggør en efterfølgende vurdering af, om den ændrede praksis førte til de ønskede mål.

Klassisk er fremgangsmåden (på universiteterne) ca. sådan:

- Læseplanen foreskriver en række *emner* i stikordsform;
- stikordene koblet med den faglige erfaring/tradition vil være tilstrækkeligt til at afgøre fx hvilke lærebøger, der er relevante;
- derefter kan en mere præcis afgrænsning af indholdet gives simpelthen som 'opgivelser' af hvilke sider, der læses;
- de studerende arbejder med opgaver og øvelser, der svarer til hvad der dukker op ved eksamen (normalt er disse "ret simple");
- lærerne beskæftiger sig i undervisningen med emnerne og har kun indirekte kontakt med de studerendes arbejde ("black box").

Det har bl.a. flg. konsekvenser i forhold til de tre spørgsmål:

Ad 1): beskrivelsen af det der skal læres er "objektiv" (ultimativt angivelse af en bestemt samling af matematisk tekst), men det vigtigste – og evaluerbare – er implicit: hvad skal de studerende *kunne* – med den viden, der er knyttet til det fastlagte læsestof.

Ad 2): de studerendes læring er i vidt omfang en privatsag. Vi præsenterer emner, begreber og teknikker – og stiller opgaver, som de studerende skal løse på egen hånd (dels som forberedelse til øvelser, dels ved eksamen).

Ad 3): resultatet evalueres normalt på to måder:

- mundtlig eksamen, hvor de studerende "gentager" præsentationen af teoretisk stof;

- skriftlig eksamen, hvor de studerende testes i brug af øvede teknikker.

Der er fin sammenhæng mellem de sidstnævnte evalueringsformer og de gængse undervisningsformer (hhv. forelæsninger og øvelser). Et hovedproblem er, at det ofte først er i evalueringen vi ser hvis det går galt, og at vi ofte har meget begrænset viden om årsagerne til evt. problemer.

I denne artikel vil vi skitsere et muligt ”svar” på de nævnte tre spørgsmål, som tager sigte på at udbedre nogle af de nævnte problemer med de klassiske formater for undervisning i teoretisk matematik. Det er udviklet indenfor rammerne af et 2. års-kursus i reel analyse – kaldet Mat. 2AN - ved Københavns Universitet. Vi kalder vores svar for ”temaopgaver”, som altså både omfatter en ide om kravspecifikation, arbejdsform og evaluering af studerendes arbejde med teoretisk matematik. En meget mere detaljeret beskrivelse af formatets forudsætninger, funktion og resultater – og af det tilknyttede forskningsprojekt – findes i (Grønbæk og Winsløw, 2004a, 2004b).

Artiklen behandler temaopgaveformatet i en universitetssammenhæng. Det skal dog bemærkes, at det – stort set uændret – udgør den ene af to mulige prøveformer i matematik (højniveau) ved den danske studentereksamen (2005-reformen). Formatet kan i øvrigt tænkes tilpasset andre faglige og institutionelle sammenhænge.

1. Beskrivelse af hvad de studerende skal kunne

Temaopgaver er konstrueret ud fra en *specifikation af kompetencemål* for hele kurset. Kompetencebegrebet bruges som bekendt på mange måder – også i matematiksammenhæng – og vi fandt det tidligt nødvendigt at præcisere vores egen brug for og af et sådant begrebssæt. Vi skal her nøjes med nogle korte definitioner (se Grønbæk og Winsløw, 2004a, 2004c for uddybning), som gerne skulle give et indtryk af, at kompetencebeskrivelse er noget yderst konkret og relevant for en matematikunderviser – ikke en teoretisk eksercits for uddannelsesplanlæggere.

Grundbegrebet er naturligvis *matematisk kompetence* : det potentiale for *handling* som er knyttet til et individs matematiske *viden* – både for personlig handling, herunder tænkning og for fælles handling, herunder kommunikation med andre. Matematisk kompetence er knyttet både til det subjektive (individet med sine kundskaber om matematik) og det objektive (”officiel” matematisk viden, repræsenteret i tekster).

Man kan teoretisk betragte to hovedtyper af matematiske kompetencer:

- *generelle faglige kompetencer*, som i princippet er uafhængig af et specifikt indhold, fx det at kunne fremstille et matematisk bevis præcist og gennemskueligt for en given målgruppe.
- *specifikke faglige kompetencer*, som er knyttet til et bestemt indhold, fx det at være i stand til at producere en begrundet afgørelse af, om en foreliggende reel funktion er kontinuert.

Det er klart, at generelle kompetencer er *abstraktioner* af specifikke kompetencer. Deres genstandsområde er især det globale ”deklarative” niveau. De kan ikke bruges direkte, hverken i planlægning eller evaluering.

En *kompetencebeskrivelse* er altså slet og ret en beskrivelse af, hvad de studerende skal kunne gøre med deres viden, i form af:

- *generelle kompetencemål* (for uddannelsen som helhed og for et kursus) i forhold til en beskrivelse af indhold (kernefaglighed); dette retter sig især ”udadtil”, som deklaration af uddannelsen;
- *specifikke kompetencemål* (for kursus) som svarer til de generelle kompetencemål, og kursets indholdsbeskrivelse; dette retter sig især ”indadtil”, som redskab til planlægning og gennemførelse af undervisningen, og som redskab til kommunikation om kursets mål med de studerende.

Et eksempel på en sådan kompetencebeskrivelse (for et kursus) findes på http://www.math.ku.dk/ma/kurser/mat2an/Mat2ANstudvers.pdf (4 sider). Det er vores erfaring, at en kompetencebeskrivelse for et helt kursus især er et værktøj for underviserne (selvom det naturligvis skal være tilgængeligt for de studerende). Den bliver i højere grad af betydning for de studerende når den bruges til eksplicit at angive lokale kompetencemål i kurset (fx mål med en øvelsesgang, en temaopgave, en forelæsning etc.)

2. Temaopgaver som arbejdsform

En temaopgave har til formål at *styrke og integrere specifikke kompetencer* som – på et mere elementært og individuelt niveau – dyrkes ved klassiske øvelsesopgaver (som stadig er en del af kurset). Konkret består den af en række spørgsmål, som knytter an til et forholdsvist afgrænset indholdsområde i kurset, men som ikke direkte er behandlet i den øvrige stofgennemgang i kurset. Spørgsmålene varierer fra ret lukkede spørgsmål a la ’Redegør for begreberne som indgår i …’ til forholdsvist åbne spørgsmål: ’Hvad er din formodning om sammenhængen mellem …? Begrund din formodning …? Kan du skærpe det til en verificering?’ Hver temaopgave indledes med dels en angivelse af hvilke *specifikke og generelle* temaopgaven især sigter mod at udvikle, dels en angivelse af *kernespørgsmål*, som udvælges bl.a. så de i sig selv danner en sammenhæng. Det tilstræbes at nogle af spørgsmålene kan besvares på flere niveauer, således at de studerende får mulighed for at *demonstrere de nævnte kompetencer* - også selvom de ikke beherskes med høj grad af sofistikation. Endvidere tilstræbes det at svarene på nogle af spørgsmålene kan *opgraderes* i løbet af kurset. Fx kan en rent beskrivende besvarelse i starten af kurset senere understøttes af en model, eller en konkret egenskab kan senere erkendes som et eksempel på et generelt fænomen.

For et semesterkursus på 10 ECTS points har vi vurderet at 6 temaopgaver kan give en passende dækning af kursets indhold, men dette er naturligvis afhængigt af fagspecifikke forhold. Temaopgavernes indplacering i kurset er i øvrigt:

- Alle 6 temaopgaver offentliggøres ved kursusstart.
- Arbejdet med temaopgaver foregår i grupper på 2-4 studerende.
- Temaopgaverne er identiske med de spørgsmål, som kan trækkes ved mdtl. eksamen.
- Hver studerende kan til mundtlig eksamen fravælge 1 af de 6 opgaver.

Ved at gøre temaopgaverne til eksaminationsgrundlaget for den mundtlige eksamen har vi sagt så tydeligt som muligt at temaopgaverne er essentielle for den faglige tilegnelse. Det er altså ikke en aktivitet man kan fravælge mod at lære sig stoffet på anden vis.

En temaopgavebesvarelse kan beskrives som en udvidet eksamensdisposition. Den danner grundlag for eksaminationen, både for eksaminand og eksaminator. Den må ikke fylde mere end 5 A4-sider. Der er altså ikke tale om en egentlig rapport.

Temaopgaver tematiserer kurset på flere ledder, først og fremmest naturligvis indholdsmæssigt. Men temaopgaver må ikke blive blot en kapitelinddeling af kurset. For at give et indtryk af variationsmuligheder i tematiseringen af et kursus m.h.t. andre aspekter anføres her nogle typer:

- *Udforskning af teori:* Temaopgaven angiver en teoretisk ramme og nogle sammenhænge mellem faglige objekter, evt. indførelse af et begreb som kan afledes umiddelbart ud fra kurset. Begrebet udforskes. Nogle fremsatte hypoteser skal afprøves. Kendte resultater fortolkes i lyset af det nye begreb.
- *Strukturering:* Forståelsen af et stofområde kan kræve ombrydning og udpakning af logisk struktur. Temaopgaven fokuserer på stofområder fra kurset, hvor dette er særlig åbenbart.
- *Objektegenskaber:* Temaopgaven omhandler et konkret, relativt kompliceret fagligt objekt, som illustrerer nogle fundamentale aspekter af kurset.
- *Anvendelser:* Temaopgaven omhandler et konkret resultat som har rige anvendelser i forskellige sammenhænge, som kan være både fag-interne og fag-eksterne, både teoretiske og praktiske.
- *Perspektiv:* Temaopgaven omhandler et resultat eller en konstruktion, som rækker afgørende ud over kurset, fx ved at motivere (behovet for) ny teori, eller ved at sætte kendte resultater ind i en overordnet ramme.
- *Afklaring (fx af teoristof):* Temaopgaven omhandler et kursusområde, hvis behandling, fx i lærebog, kræver en uddybning eller er kritisabel.

Det er vores erfaring at blandingsformer vil være forvirrende. (Hvad handlede den temaopgave egentlig om?). I det hele taget er det vigtigt at temaopgaver fremstår fokuserede. Eksempler fra kurset Matematik 2AN på temaopgaver af ovennævnte typer kan ses på web-adressen http://www.math.ku.dk/kurser/mat2an/Temaopgaver03/.

Det er væsentligt at være opmærksom på, at første gang formatet anvendes, er der tale om en fundamentalt ny arbejdsform for *både* studerende og lærere. Det drejer sig om hvordan man arbejder med teoretisk matematik – og om kontrakten for dette arbejde. Ved en klassisk forelæsning er det (jf. indledningen):

- LÆRERENS opgave er at give en klar præsentation af stoffet ved forelæsninger. Lærerens arbejde drejer sig om *stoffet.*
- De STUDERENDES opgave at forstå præsentationen og evt. spørge.

I forbindelse med temaopgaver er det derimod:

- LÆRERENS opgave at omtænke stoffets "svar" til meningsfulde, udfordrende og overkommelige spørgsmål. Lærerens arbejde drejer sig om (at tilrettelægge rammer for) *de studerendes arbejde*.
- De STUDERENDE skal konstruere og præsentere egne svar (specielt beviser).

Kort sagt: der sker en kontrolleret inversion af den didaktiske kontrakt. I temaopgaver er det læreren der spørger, og de studerende der svarer. Vel at mærke om sager, hvor det – ved en forelæsning – kunne have forholdt sig omvendt (bortset fra at læreren vil "svare" uanset om han bliver spurgt!).

Klassiske arbejdsformer kan godt kombineres med temaopgaver. Der er fortsat forelæsninger og øvelser i Matematik 2AN, selvom deres fokus er ændret, bl.a. mod at relatere kernestoffet til temaopgaverne.

Enhver forelæser ved at det er umuligt at komme detaljeret ind på alle centrale dele af det faglige stof. Alligevel synes en væg-til-væg dækning ofte at være idealet, med deraf følgende hæsblæsende tempo. Med temaopgaver får forelæserens opgave større vægt på at perspektivere, pege på centrale områder og tilknytning til temaopgaver, give anvisninger etc. Eksempelvis kan det være en god ide at bruge en del tid på at gennemgå et afsnit som i sig selv er af underordnet betydning for kursets indhold, men som er eksemplarisk for fagets argumentationsmåde.

Øvelsesundervisningen ændres på i hvert fald to måder. Den vigtigste er at arbejdet med og feedback på temaopgaverne indgår. Dette indebærer øgede krav til studenterinstruktorernes kvalifikationer, både fagligt og pædagogisk. Endvidere, i og med at de studerendes arbejde med mere overordnede aspekter af faget er henlagt til temaopgaverne, vil det løbende arbejde på øvelsesholdene i større grad dreje sig om træning af specifikke kompetencer.

3. Temaopgaver som evalueringsform

Temaopgaverne er som nævnt lig med spørgsmålene i en 30 minutters mundtlig individuel eksamen. Ved eksaminationens start meddeler den studerende hvilken temaopgave der fravælges, hvorpå der trækkes lod blandt de resterende 5. Formålet med fravalgsmuligheden er, udover at mindske den enkeltes arbejdsbyrde, at give lejlighed til at den studerende får en vis medindflydelse på eget eksaminationsgrundlag. En studerende siger fx (i e-mail-rundspørge efter eksamen):

> (Jeg fravalgte opgaven om fikspunkter fordi) *jeg syntes ikke jeg ville stå til eksamen og regne specifikt og ellers "rode med ulighedstegn" for at vise det med konstanten. Jeg kan bedre lide at gennemgå mere teoretisk og syntes derfor ikke der var kød nok på fixpunkter.*

Også ved eksamen giver formatet nye roller til både studerende og lærere:

- De STUDERENDE præsenterer deres eget arbejde (klassisk: andres).
- LÆRER/EKSAMINATOR tæller ”hvad der er med” (klassisk: hvad der mangler).

Ligesom i forbindelse med undervisningen er det vigtigt at være opmærksom på disse ændrede roller – og fordi de er ”nye” er en mere eksplicit kontrakt ønskelig.

Ligesom alle andre eksamensformer fungerer temaopgaver naturligvis også som en ydre motivationsfaktor. Det er dog vores indtryk, at når først arbejdet er kommet i gang – motiveret af at opgaverne er den mundtlige eksamens genstand – så præger den interne motivation i meget høj grad de studerendes virksomhed. Mange udsagn (e-mails, studienævnsevalueringer, fokusgruppeinterviews m.m.) fra studerende vidner om oplevelser af dybdelæring og generelt engagement i kursusforløbet:

> … Men arbejdsprocessen med temaopgaverne har været meget lærerig. Jeg har lært noget om at definere en problemstilling, om at løse den, og om at formulere sig præcist. Alt i alt synes jeg, at kursets opbygning med temaopgaver var vellykket, og at det hårde arbejde gav gevinst i sidste ende.
>
> ***(Studerende i e-mail efter kursets afslutning.)***

Hele formen peger i retning af at hjælpe den studerende til at studere, samtidig med at vægten lægges på at registrere, hvad den studerende kan, i stedet for at notere, hvad hun/han ikke kan. (...) Man taler i disse år meget om at gøre elever til studerende. Jeg tror, at de "de 6 opgaver" i høj grad har bidraget dertil.
(E-mail fra en censor på Mat. 2AN efter eksamen jan. 2003)

De 'stærke' studerende har haft større lejlighed til at vise deres dygtighed *uden* at det er gået ud over svagere studerende. Fx er der adskillige 3.gangs studerende som i temaopgaveformatet har fundet midlet til at komme igennem kurset, oven i købet med gode karakter.

Det har som nævnt ikke været den primære hensigt at hæve beståelsesprocenten. Nedenstående skema viser imidlertid at gennemførelsen i hvert fald er på højde med tidligere forløbs, og endda er forøget efter at formatet har overstået det første års 'børnesygdomme':

Eksamen år: TO=Temaopgaver	2001 (uden TO)	2003 (med TO)	2004 (med TO)
(1) Antal tilmeldte studerende	215	173	179
(2) Antal som påbegyndte eksamen	156	114	144
(3) Antal som bestod eksamen	114	82	111
(4) Beståelsesprocent [100· (3)/(2)]	73%	72%	77%
(5) % af tilm. som bestod [100· (3)/(1)]	53%	47%	62%
Karaktergennemsnit for eksamensdeltagere	7.4	8.5	8.7

Vi er overbeviste om at kvaliteten af det lærte samtidigt er højnet. År 2000 var sidste gang den sidste forfatter havde kurset med traditionelt forløb. År 2002 var første år med temaopgaver (eksamen i januar 2003). Det er præget af at en del studerende har 'dumpet sig selv', men at de studerende som fuldførte klarede sig godt (karaktergennemsnit). Ifølge de studerendes tilbagemeldinger skyldes denne 'selvdumpning' først og fremmest at omfanget af temaopgaverne var overvældende og en vis usikkerhed grundet utilstrækkelig feedback. Disse forhold har vi rådet bod på i 2003 (eksamen 2004). Begge år bekræftes det højere faglige niveau hos eksamensdeltagerne af udsagn fra de eksterne censorer (se fx ovenfor).

4. Et par advarsler til slut…

Den største faldgrube ved temaopgaveformatet er nok at overvurdere de studerendes muligheder for at klare opgaverne – at stille *for* store krav. Som et par studerende udtrykker det (spørgeskema, første år med temaopgaver):

... God ide med mundtlig fremlæggelse af forberedt opgave. Mindsker nervøsitet, styrker udbytte. Men opgaverne er <u>ALT</u> for krævende i forhold til at kurset skal tage 15-20 timer pr uge.

... Det er en god ide at vi hele semesteret arbejder med vores eksamensstof, men de [temaopgaverne] *kræver meget tid og er meget svære, da vi helst skal finde andre bøger for at løse dem.*

Man skal derfor være meget opmærksom på om formålet med temaopgaverne kan tilgodeses med mindre heftige krav end man måske umiddelbart forestiller sig. Kunsten er at ramme et niveau hvor kravene er opfyldelige og giver maksimalt udbytte for de studerende. Stiller man for store krav, fører det til stress, overfladisk arbejde hos især svagere studerende, og frafald.

Et af hovedformålene med temaopgaveformatet er at tilskynde de studerende til at arbejde løbende gennem semesteret. Dette kan opleves som en øgning af arbejdsbyrden. Et andet hovedformål, at eksaminationen omhandler de studerendes egne frembringelser, kan opleves som manglende standarder for 'korrekte præstationer'. Begge forhold er potentielt stressende og kan give anledning til frustrationer. Det er derfor afgørende at temaopgavernes fordeling gennem semesteret er overvejet særdeles nøje, specielt at arbejdsbyrden er nogenlunde jævnt fordelt.

Endvidere er *beskrivelser af krav* – både i den enkelte opgave og generelt i eksamensvejledningen – kritiske for formatets succes. Specielt skal man i opgaveformuleringen være påpasselig med at "åbne opgaver" ikke forveksles med "uklart formulerede opgaver" (som selvfølgelig skal undgås).

Udtryk for frustrationer vil dog uvægerligt forekomme. Læreren må tage sådanne alvorligt. Dette indebærer at man er villig til at indgå i løbende dialog, at lytte til kritik og, hvis det er nødvendigt, at foretage ændringer. Et eksempel: vi erkendte første år at omfanget af temaopgaverne var for stort og gav i konsekvens heraf de studerende mulighed for at fravælge en opgave. Denne fravalgsmulighed valgte vi året efter at bibeholde, da den er i god overensstemmelse med temaopgavekonceptets intensioner om selvstændighed i eksamensgrundlaget. Det kan for resten også i sig selv være værdifuldt at være i dialog med de studerende omkring arbejdsformerne: i bedste fald øger det både den oplevede og reelle faglige ansvarlighed hos de studerende.

Litteratur.

Brousseau, G. (1997) *Theory of didactical situations in mathematics.* Dordrecht: Kluwer.

Grønbæk, N. og Winsløw, C. (2004a) *Developing and assessing specific competencies in a first course on real analysis*. Research in Coll. Math. Ed. (under udgivelse)

Grønbæk, N. og Winsløw, C. (2004b) *Thematic projects: a format to further and assess advanced student work in undergraduate mathematics.* Manuskript, u. referering.

Grønbæk, N. og Winsløw, C. (2004c) *Kompetencebeskrivelse i universitetets virkelighed.* Didaktips nr. 1, 2004. København: Center for Naturfagenes Didaktik.

Peter Nyström
är doktor i pedagogik och arbetar vid Umeå universitet, Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar. Han leder en arbetsgrupp som utvecklar nationella prov i matematik för den svenska gymnasieskolan och provbanker i fysik, kemi och biologi. Peter har tidigare arbetat som gymnasielärare, men har ägnat de senaste tio åren åt nationella prov samt forskning och undervisning om bland annat kvalitetskriterier för bedömningar i skolan

Hur bra är våra prov i matematik, egentligen?

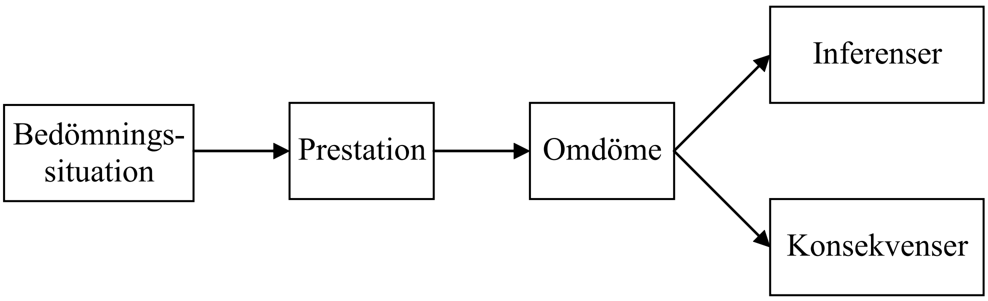
Peter Nyström, Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar, Umeå universitet

Inledning

Bedömning av elevers kunskaper och kompetenser är en viktig del av lärarens arbete eftersom alla de beslut som fattas i skolan, t.ex. om när det är lämpligt att gå vidare i stoffet och ge eleverna nya utmaningar, rimligen bör baseras på goda grunder. Bedömning av elevers kunskaper och kompetenser är också en svår del av lärarens arbete eftersom det vi vill veta ofta är mycket svårfångat. Ofta måste bedömningarna dessutom göras snabbt och i komplexa situationer i klassrummet. För vissa är det självklart att bedömningar i matematik ska ske med matematikprov av traditionell typ, och bedömning i matematik ses som relativt oproblematiskt. För andra är det självklart att traditionella matematikprov är något ont som måste ersättas med mer progressiva former för bedömning, och det betraktas inte heller som särskilt problematiskt. Det finns anledning att lyfta fram de värderingar och dolda föreställningar som styr hur lärare agerar i klassrummet och även hur de genomför bedömningar. Det är viktigt att synliggöra de föreställningar som är centrala för utformningen av prov och andra bedömningssituationer av hög kvalitet (Nyström, 2004). Endast då kan vi beskriva kvaliteten hos bedömningar i skolan och argumentera för hur bedömningar kan utformas för olika syften.

Vad är bedömning?

I figur 1 visas en modell för bedömningsprocessen. Som alla modeller så är den kraftigt förenklad i förhållande till hur bedömning går till i praktiken, men den kan visa på några viktiga utgångspunkter för värdering av kvalitet i bedömningar.



Figur 1 Modell för bedömningsprocessen.

Bedömningsprocessen utgår alltid från en bedömningssituation, dvs. en uppgift att arbeta med och ett sammanhang där arbetet sker. En bedömningssituation kan se ut på många olika sätt, men oavsett hur den ser ut kommer den att öppna möjligheter men även sätta gränser för de kompetenser och kvaliteter som eleven kan visa. Det som sedan bedöms är kvaliteten hos

såväl slutresultat av ett arbete som hur arbetet fortskrider under tiden det pågår. Det är endast det som uttrycks som kan bedömas och en värdering av denna prestation i förhållande till bedömningssituationen leder fram till ett omdöme. Omdömet speglar kvaliteter i elevers arbete och kan bokföras kvantitativt, i form av poäng, eller kvalitativt, i form av skriftliga omdömen.
Nedanstående matematikuppgift, hämtad från ett svenskt nationellt kursprov i matematik från våren 1997, får illustrera en bedömningssituation.

Vilket tal är störst, 0,3333 eller $\frac{1}{3}$? Motivera ditt svar.

Uppgiften betraktades som en enkel och vanlig problemställning som skulle peka på om eleverna har insikter i begrepp som ingår i kursen, dvs. uppgiften kunde kopplas till de betygskriterier som gällde för betyget Godkänd på kursen. Bland eleverna som deltog i provet hade den grupp elever som precis klarade poänggränsen för Godkänd en lösningsproportion på endast 6 %. Den grupp elever som precis klarade poänggränsen för Väl godkänd hade en lösningsproportion på 45 %. Med andra ord visade sig uppgiften vara ganska svår. Detta faktum ändrar dock inte bedömningen att detta är en uppgift som i första hand kan kopplas till betyget Godkänd.
En elev lämnade in följande lösning som inte uppfyllde bedömningsanvisningarnas krav och därför bedömdes med 0 poäng.

0,3333 och $\frac{1}{3}$ *är lika stora, om man slår in 1/3 på miniräknaren får man 0,3333… . Men detta beror även på vad 1/3 är 1/3 av. Ex: om det är av en klocktimma är 1/3 0,2, om det är av något större, blir tredjedelen större.* $\frac{1}{3}$ *kan variera men ej 0,3333.*

Den poäng eleven fick på uppgiften säger något om kvaliteten i elevens lösning, men här finns mycket mer information om elevens kunskapskvaliteter än vad bedömningsanvisningarna kunde fånga. Den här eleven visar prov på en bristfällig taluppfattning genom att påstå att bråktalens storlek kan variera, men inte decimaltalens. Denna information skulle kunna ligga till grund för att arbeta vidare med elevens taluppfattning.
En annan elev svarade så här:

Under förutsättning att 0,3333 är ett exakt tal är $\frac{1}{3}$ *större, differensen är* $\frac{1}{30000}$. *Om man däremot ser 0,3333 som ett tal med fyra värdesiffror, kan det vara både mindre och större än* $\frac{1}{3}$. *Då gäller:* $0{,}33325 \le 0{,}3333 \le 0{,}33335$

Till skillnad från den förra eleven visas här prov på en mycket god begreppsuppfattning. Eleven redovisar en lösning som inte någon av de provutvecklare (inklusive artikelförfattaren) och lärare som medverkade i utvecklingen av provet hade föreställt sig.
Av de två exemplen ovan kan vi dra två lärdomar. För det första var detta en bedömningssituation som uppenbarligen öppnade för en stor rikedom när det gäller information om elevers begreppsuppfattning. För det andra visar exemplet på att uppgifter som är avsedda att pröva grundläggande förståelse ibland kan inbjuda elever att visa prov på djup insikt. Trots att man ofta kan förutse vad elever kommer att göra bör man låta sig överraskas av elevers kreativitet och förmåga att visa sina kunskaper även där man minst av allt väntar sig det.

Som framgår av figur 1 stannar dock inte bedömningsprocessen vid ett omdöme om prestationen på just de uppgifter som givits, utan det görs tolkningar och generaliseringar på grundval av prestationen. En form av generaliseringar är inferenser, dvs. slutsatser om elevens kompetenser som går utanför det som observerats.

Bedömning av elevernas arbete med uppgiften i exemplet ovan stannar t.ex. inte vid en slutsats om vad eleverna kunde göra på precis denna uppgift, just då. Vi drar mer generella slutsatser om elevernas kompetenser trots att vi endast sett vad dessa elever kan göra i en enda bedömningssituation. För lärare är situationen oftast bättre eftersom de mer generella slutsatserna oftast grundar sig på många observationer, men generaliseringar görs även här eftersom vi inte kan se eleven i alla tänkbara situationer. Inferenser görs utifrån alla bedömningssituationer, och problemen med sådana generaliseringar bör inte underskattas.

Konsekvenser av bedömningar är en annan typ av generaliseringar och handlar till exempel om den påverkan som bedömningssituationer och omdömen kan ha för självbild och syn på ämnet hos den som blir bedömd. Ett exempel på konsekvenser är att bedömningssituationen ger en bild av matematikämnet som elever bär med sig och som formar deras föreställningar om matematik. Beroende på hur omdömen utformas och återkopplas till eleverna så kan de också få olika konsekvenser för elevernas självbild och deras upplevelse av sin egen kompetens och möjlighet att lära matematik.

För att kunna uttala sig om kvaliteten i en bedömning måste man se på hela bedömningsprocessen, och jag menar att det måste ske utifrån överväganden och ställningstaganden inom fyra områden: en teori om bedömningars kvalitet, bedömningens syfte, läroplanens mål samt kunskapssynen.

En teori om bedömningars kvalitet
Att värdera kvaliteten hos en bedömning är innebörden hos begreppet validering. Validering kan beskrivas som en värdering av hur empiriska belägg och teoretiska överväganden stöder det lämpliga och riktiga i slutsatser och konsekvenser som bygger på en bedömning. (Fritt efter Messick, 1989) Teoretiska överväganden handlar om att ta sig tid att reflektera över hur en bedömningssituation utformats och kanske tillsammans med kollegor försöka undvika misstag och även försöka förstå de resultat som en bedömning visat. Med empiriska belägg avses nödvändigheten att inte bara reflektera över vad som kan hända utan faktiskt försöka ta reda på vad som händer och hur olika delar av bedömningsprocessen fungerar. Det kan t.ex. innebära att man ställer vissa uppföljande frågor till elever för att ta reda på om det resultat som ett skriftligt prov har visat verkar stämma överens med elevens reella kunskaper.
Kvalitet innebär dels att ha belägg för att de slutsatser som dras om elevers kunnande utifrån en bedömning (inferenserna) är trovärdiga och riktiga. Det handlar bland annat om den så kallade reliabiliteten, dvs. hur stabil en prestation är. Skulle slutsatserna vara annorlunda om samma elev sattes i en liknande bedömningssituation i morgon, eller om hon fick en något annorlunda uppgift att arbeta med? Men kvalitet innebär också att konsekvenserna är de önskvärda. Om bedömningssituationer inte känns meningsfulla eller om de ger en bild av ämnet som svårt eller tråkigt så kan det få oönskade konsekvenser för elevernas fortsatta studie- och yrkesval.
Utifrån detta är det angeläget att ställa frågor som kan besvaras med teoretiska överväganden men också empiriska belägg. Det är angeläget att dessa frågor ställs i olika riktningar för att få en allsidig och täckande värdering av bedömningars kvalitet. Några exempel på sådana frågor är: Mäter bedömningen mot viktiga mål i läro- och kursplaner? Tillåter provet att eleverna visar sina kunskaper och färdigheter utan att språket i provuppgifterna ställer till irrelevanta svårigheter? Hur påverkar bedömningen elevernas syn på ämnet och deras föreställningar om sina möjligheter att klara av ämnet? Tycker eleverna att provets uppgifter är realistiska och värda att arbeta med? Är den informationen om eleverna som provet ger värt den kostnad och tid det tar?

Syfte
Bedömningar i skolan kan ha många olika syften. En värdering av kvaliteten hos en bedömning måste ta hänsyn till syftet, och om man har flera syften med samma bedömning så

bör varje syfte värderas för sig. Det primära och ofta dominerande syftet med bedömningar är *insamling av information.* Informationen som samlas in ligger till grund för olika beslut och omdömen, t ex betyg eller elevens behov av repetition eller utvärdering av hur undervisningen fungerat. Ett annat syfte med, eller åtminstone följd av, bedömningar handlar om *konkretisering av mål och kriterier*. Varje bedömningssituation ger signaler om vad som är viktigt, och eleverna anpassar sitt lärande därefter. Om bedömningssituationerna verkligen speglar det som läraren anser vara viktigt kommer denna funktion att verka i positiv riktning, i annat fall kommer bedömningen att inverka kontraproduktivt på lärandet. Eftersom bedömningar i skolan bör ses som en integrerad del av skolans arbete så kan *lärande* betraktas som det yttersta syftet med bedömningarna. I de allra flesta bedömningssituationer finns ett mer eller mindre uttalat syfte att eleverna ska lära sig något av aktiviteten. Om bedömningssituationerna är utformade på sätt som gynnar detta syfte blir den tid som läggs ner på bedömning mer effektiv. Elevexemplen ovan visar också på hur bedömningar i skolan kan vara viktiga för lärares lärande. Genom att ägna sig åt en mer djupgående analys av vad elever faktiskt skrivit och gjort i bedömningssituationer så kan lärare få en djupare förståelse för vad eleverna förstår och inte förstår.

Mål

Galileo Galilei lär har haft som sitt valspråk att ”mäta det som är mätbart och försöka göra mätbart det som ännu inte är det”. Det finns alltid en risk att vi stannar vid det mätbara och när det gäller bedömning i skolan i huvudsak bedömer det som lätt går att bedöma (om det nu finns något sådant i skolan). Vi måste fundera över målen med skolans arbete och kunna argumentera för att vi kan bedöma de mål som anses viktiga. Bedömningar bör rimligtvis handla om angelägna mål för skolan och undervisningen och därför måste vi reflektera över dem för att kunna utforma och värdera bedömningar i skolan. Om vi inte har en något så när klar bild av vad skolan vill åstadkomma, så är det svårt att säga om de bedömningar som görs speglar målen.

Svenska kursplaner innehåller mål att sträva mot, som anger riktningar för undervisning och lärande. Ett sådant mål i gymnasieskolans matematik är att skolan i sin undervisning ska sträva efter att eleven utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer. Hur kan vi göra bedömningssituationer som visar i vilken grad skolan lyckas med detta, eller åtminstone göra bedömningssituationer som ger en bild av matematiken som är samstämmig med detta?

Vidare innehåller de svenska kursplanerna så kallade mål att uppnå. Det är mer innehållsinriktade mål. Ett exempel från en kurs i gymnasieskolan är att eleven ska kunna lösa linjära olikheter med grafiska och algebraiska metoder. Vad kan det betyda mer konkret? Här är några förslag på uppgifter som skulle kunna användas för att se om elever uppfyllt målet:

1. Lös olikheten $2x+3<9$
2. Lös olikheten $4x+3<2x+9$

Uppgift 1 och 2 är mycket direkta frågor som är helt samstämmiga med hur målet är formulerat. Eftersom uppgift 1 är nästan den enklaste tänkbara varianten kan den möjligen spegla vad alla elever som når målet ska klara, medan uppgift 2 kan motsvara en något högre kvalitet. I uppgift 3 har samma uppgift preciserats så att eleverna ska visa att de kan använda en av de metoder som målet talar om.

3. Lös olikheten $4x+3<2x+9$ med algebraisk metod.

Uppgift 4 kräver en typ av förståelse för svaret på frågan som målet i sig inte tar upp, men som kan styrkas av andra delar i kursplan och betygskriterier.

4. Lös olikheten $4x+3<2x+9$ och markera svaret på en tallinje.

Slutligen visar uppgift 5 på en frågeställning som tycks ligga ganska långt från det som målet beskriver.

5. Elin ska åka buss mellan Skellefteå och Umeå 10 dagar under en månad. Ska hon köpa månadskort eller enstaka biljetter om månadskortet kostar 1350 kr och enstaka biljetter 118 kr/st?

Samtidigt är det kanske så att det viktigaste skälet att ta upp olikheter i skolan är att eleverna ska träna sig i att tänka i olikheter, och kunna formulera problem som olikheter. De ska naturligtvis också kunna lösa olikheterna, men metoderna kommer troligtvis att falla i glömska ganska snart efter kursen. I kommentarer till den läroplan och de kursplaner och betygskriterier som kom 1994 i Sverige skriver författarna följande:

> *Man läser inte ämnen så mycket för att lära sig särskilda fakta och begrepp utan för att lära sig uppfatta saker och använda begrepp på särskilda sätt. Genom de olika ämnena erövrar man de särskilda sätt att erfara och förhålla sig till världen som utvecklats inom de kunskapstraditioner som enskilda ämnen eller ämnesgrupper representerar.* (Skolverket, 1996, sid. 6)

Även i matematik kan man fundera över balansen mellan å ena sidan specifika fakta, begrepp och metoder och å andra sidan mer övergripande mål som ämnet matematik ger möjligheter att nå. Detta för oss över till den sista pusselbiten för vår kvalitetsbetraktelse, nämligen kunskapssyn.

Kunskapssyn

Kunskap kan betraktas både ur ett allmänt och ett ämnesspecifikt perspektiv, och i båda fallen har uppfattningar om kunskap och lärande förändrats över tid. Ur det allmänna perspektivet uppfattas vanligtvis lärandet idag som en aktiv process som kännetecknas av mentala konstruktioner och begripliggörande, i kontrast till tidigare mekanistiska synsätt, och utveckling och lärande betraktas primärt som sociala processer (Shepard, 2000). Specifikt för matematik har vi under de senaste 20 åren sett en förändring som bland annat inneburit en ökad betoning av elevers aktiva deltagande i att konstruera och tillämpa matematiska idéer (se t.ex. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 1989). Det är inte självklart att kunskapssynen är densamma i olika ämnen. Analyser av kursplaner har visat på skillnader i kunskapssyn mellan olika ämnen (Linde, 2003) och det är därför viktigt att specifikt reflektera över vad det betyder att kunna matematik.

En annan aspekt av kunskapssynen är vad som menas med bättre och sämre. I det svenska betygssystemet så finns kriterier för olika betygssteg som ska spegla olika kvaliteter i elevernas kunnande (Skolverket, 1996). Det skulle kunna tolkas som att olika kvaliteter är jämbördiga, men eftersom de olika betygen ges olika värden i alla sammanhang så bildar betygen en hierarki. Bedömningar är genomsyrade av föreställningar om bättre och sämre. För att kunna utforma bra bedömningar i matematik behöver vi fundera på vad vi menar med att någon är ”bra” i matematik, till skillnad från ”mindre bra”.

En tredje aspekt av kunskapssyn är om och i så fall hur det går att få reda på en del om elevers kunskap och kompetens. Vi ska här inte gå in närmare på olika former för bedömning, det har gjorts på många andra håll, se till exempel Nyström & Palm (2001b; 2001a). Ofta präglas diskussioner om hur bedömning kan ske av en kategorisering i ”traditionella” och ”innovativa” bedömningsformer. Användningen av sådana värdeladdade beskrivningar riskerar att dölja viktiga kvalitetsaspekter när det gäller bedömningar. Det finns goda skäl att undvika uppdelningar och etiketteringar av det slaget och istället försöka hitta en grund för värdering av förtjänster och brister hos olika bedömningsformer.

Avslutning

För att kunna svara på frågan om hur bra våra prov i matematik är, eller mer generellt hur vi ska utforma bedömningssituationer i matematik som håller hög kvalitet, så måste vi problematisera bedömningsprocessen och inse att den är komplex. Vi måste också synliggöra de föreställningar om bedömning, lärandemål och kunskap som ligger till grund för hur vi utformar dessa bedömningssituationer. För att säga att ett prov eller någon annan bedömningssituation är bra krävs en allsidig belysning som tar hänsyn till hela bedömningsprocessen och beaktar såväl inferenser som konsekvenser.

Referenser

Linde, G. (2003). *Kunskap och betyg*. Lund: Studentlitteratur.

Messick, S. (1989). Validity. I R. L. Linn (Ed.), *Educational Measurement* (Vol. 3, sid. 13-103). New York: American Council on Education.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston: NCTM.

Nyström, P. (2004). *Rätt mätt på prov. Om validering av bedömningar i skolan* (avhandling för doktorsexamen, Umeå universitet).

Nyström, P., & Palm, T. (2001a). Muntlig kommunikation och självvärdering. *Nämnaren, 28*(2), 36-40.

Nyström, P., & Palm, T. (2001b). Är det något fel med vanliga matteprov? *Nämnaren, 28*(1), 41-47.

Shepard, L. A. (2000). The role of assessment in a learning culture. Presidential Address presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, April 26, 2000.

Skolverket. (1996). *Grundskola för bildning: Kommentarer till läroplan, kursplaner och betygskriterier*. Stockholm: Skolverket.

Lisser Rye Ejersbo
er ph.d. studerende på Learning Lab Denmark. LLD er et laboratorium for forskning i læring, tilknyttet Danmarks Pædagogiske Universitet. Hendes forskningsprojekt tager udgangspunkt i, hvordan brugen af åbne opgaver, både i forbindelse med den mundtlige prøve og dagligdagen, kan implementeres gennem efteruddannelse af matematiklærere.
lisser@lld.dk

Hvordan fungerer den danske mundtlige prøve i matematik?

Den danske Folkeskolelov fra 1993 indførte en mundtlig prøve efter 9. klasse. Prøven er en gruppeprøve af to timers varighed med flere små grupper til prøve samtidig. Det overordnede formål med prøven er at styrke den kommunikative side af matematikfaget. Den har nu fungeret i en årrække og artiklen beskriver, diskuterer og analyserer, hvordan den opleves og fungerer set fra forskellige synsvinkler: Undervisningsministeriet, lærerne og eleverne. Sidst gives et eksempel på, hvordan designet forsøges udviklet.

I Danmark afholder vi først landsdækkende prøver efter 9. klasse, hvor eleverne er ca. 16 år. Indtil da er det op til den enkelte lærer – efter de regler kommunen udstikker - løbende at evaluere elevernes standpunkter. Afgangsprøven efter 9. klasse består for matematiks vedkommende af en skriftlig og en mundtlig del. Den skriftlige del indeholder en times færdighedsregning uden hjælpemidler og et tre timers problemsæt, hvor lommeregner, formelsamling og egne notater må anvendes. Denne prøve er ens for alle. Den udformes og distribueres af ministeriet, men evalueres af egen lærer samt en ekstern beskikket censor. Den mundtlige prøve er en gruppeprøve af 1½ - 2 timers varighed. Den tager udgangspunkt i lokalt fremstillede opgaver til lejligheden.

Som en konsekvens af den ny folkeskolelov i 1993 fik vi i Danmark et nyt faghæfte for matematik og en ny mundtlige prøveform i 1995. Konceptet for prøven blev frivilligt afprøvet i årene 1995 og 1996 før den endelig blev vedtaget i 1997. Prøven har siden været obligatorisk på alle skoler med afgangsprøver.

Den mundtlige prøve kan iagttages på forskellige måder og fra forskellige synsvinkler. Der er tiden før prøven, hvor ministeriet udstikker reglerne, lærerne tolker og eleverne øver sig. Der er selve prøveforløbet og endelig evalueringen efter prøven. For hver periode er der forskellige synsvinkler. På de følgende sider vil jeg beskrive hvordan prøven er tænkt, realiseret og oplevet efter nedenstående model. Min analyse og diskussion drejer sig overvejende om selve designets flertydighed, mens mine eksempler spænder over før, under og efter prøven:

Den mundtlige prøve	Før (1)	Under (2)	Efter (3)
Undervisningsministeriet	(1.1)	(2.1)	(3.1)
Lærere + censorer	(1.2)	(2.2)	(3.2)
Elever	(1.3)	(2.3)	(3.3)

Hvilke forestillinger havde det udvalg, der valgte netop denne prøveform? Formanden for udvalgsarbejdet, Hans Nygård Jensen, skriver om intensionerne for den mundtlige prøve: ”Det er værd at fremhæve, at indførelsen af den nye mundtlige prøve i matematik efter 9. og 10. klasse er i god overensstemmelse med bestræbelserne på at styrke den sproglige side af faget. Det kan vel ikke udelukkes, at denne prøve kan have hensigtsmæssig afsmittende virkning på fagets daglige undervisning." (side 9, 1996)

Vi ved, at prøvekrav har en afsmittende virkning på den daglige arbejdsform. Denne virkning bruges af udvalget med fuldt overlæg. Prøven kan derfor opfattes som en måde at lægge pres på hverdagens undervisning. Lærerne føler nødvendigheden stærkere, men det gør det ikke nødvendigvis nemmere for dem at leve op til kravene.

Undervisningsministeriets retningslinjerne for prøven (1.1): Bekendtgørelsen nr. 639 af den 21. juli 1995, beskriver hvorfor og hvordan prøven tænkes afholdt (Faghæfte for Matematik, 1995, s.71):

> "Prøven kan foregå individuelt eller i grupper bestående af 2-3 elever. Prøven tilrettelægges, så ca. 6 elever, der arbejder samtidigt, gennemfører prøven i løbet af 2 timer. Karakterfastsættelsen finder sted inden for samme tidsrum. Eleverne bedømmes individuelt. Der gives én karakter.
> Prøven taget udgangspunkt i et oplæg, der bygger på en praktisk problemstilling. Oplægget skal give eleverne mulighed for gennem undersøgelser, systematiseringer og ræsonnementer at benytte arbejdsmetoder og vise indsigt og færdigheder, der vedrører matematik og dets anvendelse. I arbejdet skal eleverne kunne veksle mellem praksis og teori. Ved prøven må eleverne anvende alle de hjælpemidler, som har været benyttet i den daglige undervisning. (…) Mens eleverne arbejder taler lærer og censor med grupperne og den enkelte elev. Der afsluttes med en uddybende samtale om såvel de praktiske elementer som de teoretiske overvejelser, som oplægget har givet anledning til."

Undervisningsministeriet udgav i 1998 en bekendtgørelse og vejledning for prøverne i matematik og udgiver desuden årligt et evalueringshæfte om samme års prøver. En praktisk problemstilling defineres således:

> " En praktisk problemstilling kan være en situation fra dagligdagen, meningsmålinger, en skiferie o. lign. Det kan også være noget konkret, som eleverne direkte kan have i hænderne fx kuber, eller noget, de selv fremstiller undervejs, fx en model. Et prøveoplæg er et middel, der skal give eleverne mulighed for at vise, hvordan de arbejder med en afgrænset problemstilling. (…) Det gode oplæg er karakteriseret ved, at eleverne kan arbejde med det på flere niveauer. (…) En måde at opnå dette på er at udforme oplæggene åbne.
> Et prøveoplæg kan være åbent på flere måder. Fx:
> - i den indledende præsentation
> - i valg af arbejdsmetoden
> - i valg af forskellige fremgangsmåder
> - produktet kan være mere eller mindre fastlagt på forhånd"
>
> (vejledning, s.26-27)

I evalueringshæftet fra 2001 (s. 12) præciseres det yderligere:

> "Oplægget skal gøre det tydeligt for eleven hvad der skal arbejdes med. Vi kan tale om en matematisk problemstilling eller et fokuspunkt i opgaven."

I evalueringshæftet fra 2002 (s. 12) gentages denne præcisering, men efterfølges nu af:

> " Der er her tale om en vanskelig balanceakt. På den ene side at få tydeliggjort, at det handler om matematik, og på den anden side at åbne problemstillingen, så eleven har et reelt valg."

At det er en vanskelig balanceakt kan de matematiklærere, der kæmper med at fremstille opgaverne, skrive under på.
I begge evalueringshæfter skrives, (2001, s. 13) (2002, s.12):

> ”Mange lærere fremstiller deres egne prøveoplæg (…). Det er en gennemgående tendens, at netop disse oplæg fungerer fint til prøven.”

Denne indirekte opfordring til selv at fremstille opgaver følges af mange lærere.

Lærernes fortolkning og reaktioner (1.2): På den lukkede Internet konference ”Skolekom.dk”, som alle danske lærere har adgang til, kan man deltage i diskussioner om forskellige emner. På en underkonference for matematiklærere diskuteres, hvordan man fortolker kravene til den mundtlige prøve, og hvordan de praktiske problemstillinger kan produceres. Følgende kommentarer er brudstykker af forskellige læreres diskussion fra denne konference:

- Jeg mener, man bør lave sine oplæg selv - med den inspiration, man så kan hente andre steder
- I de tilfælde, jeg har 'grebet i andres bunker', har jeg nogle gange oplevet ikke at kunne finde ud af, hvad den, der har lavet oplægget mon har tænkt - og det var ikke så særlig rart
- Personligt finder jeg det i modstrid med hele intentionen, at prøveoplæggene skulle være en naturlig forlængelse af den daglige undervisning. Selv har jeg endda svært ved at genanvende mine egne oplæg
- Jeg skal nu ud som censor og sidder med meget flotte og glimrende prøveoplæg, men ingen af dem indeholder en praktisk problemstilling. De er alle skåret over samme læst: "Du/I skal nu behandle emnet "Søde sager" ud fra en matematisk synsvinkel”.

Disse indlæg er typiske. Der er i de sidste 10 år udgivet en del hæfter og bøger med inspiration og forslag til de mundtlige prøveoplæg, men mange lærere mener alligevel, at man bør lave sine oplæg selv – selvom det viser sig vanskeligt at opfylde kravene. En grøft man kan falde i er, at oplæggene kan blive uforståelige for udenforstående. Det betyder, at eleverne i bedste fald har vænnet sig til nogle indforståede formuleringer, som kun rækker til den lokale matematikundervisnings ritualer og i værste fald, at oplæggene også er uforståelige for eleverne. Det tredje indlæg er interessant i den forstand at fortolkningen af ’en forlængelse af den daglige undervisning’ kan vise sig flertydig. Og endelig er der opfattelsen af, hvordan den matematiske synsvinkel kommer ind. Hvem skal formulere den og hvordan skal det gøres?

Der skal være tilstrækkeligt med forskellige oplæg, så også den sidste gruppe har fire valg. Men ikke alene formuleringen af et antal praktiske problemstillinger volder problemer, også selve arbejdet med dagligdags situationer omsat til matematik kræver nogle arbejdsmønstre, som hverken lærere eller elever er helt fortrolige med.

En matematiklærer på en af mine kurser om prøveforberedende matematik skrev således i sin logbog om, hvordan hun øvede prøven med sine elever:

> ”Hele klassen (en 9. klasse) er i gang med selvvalgte emner og problemstillinger, der skal lægge op til et prøveforberedende forløb. En gruppe bestående af to elever har store problemer. De har meget svært ved at snakke sammen om spørgsmålene/matematikken, og de virker opgivende. De har lavet nogle meget abstrakte spørgsmål om fester og bliver enige om, at dele sig op. Den ene undersøger Internettet for at finde nogle brugbare oplysninger, mens den anden snakker med mig, læreren, om, hvordan deres spørgsmål kan konkretiseres, så matematikken kunne være til hjælp i besvarelsen. Samtalen forløber nogenlunde sådan:
>
> L: Hvad skal du arbejde med?
> E: Det ved jeg ikke.
> L: Kig på spørgsmålene – er der et eller flere du kan konkretisere?

E: Ved jeg ikke.
Hun virker tilbagelænet og opgivende. Jeg foreslår, at hun tager fat i at "sammenligne øl og spiritus".
L: Hvad kunne du f.eks. sammenligne på?
E: Ved jeg ikke.
L: Hvad med at tage 3 forskellige øl og sammenligne dem? De er jo lette at sammenligne.
E: Okay, hvis du synes.
L: Hvilke øl skulle det så være?
E: Hvad mener du?
L: Ja, f.eks. Carlsberg, Carls Special og en julebryg.
E: Jeg drikker kun grøn Carlsberg.
L: Okay, så tager vi den med. Hvilke andre skal med?
Efter en lang snak fandt vi frem til tre forskellige øl.
L: Hvordan kan du så sammenligne dem?
E: På promille.

L: Ja, og hvad mere?

E: Ved jeg ikke.

Jeg foreslog etiketter, pris, emballage m.m. Hun skrev det ned, jeg foreslog, men kom ikke rigtig selv med ideer. Det virkede, som om hun enten var uinteresseret, eller at hun så det som min opgave at stille spørgsmålene."

Denne lærerlogbog vidner om, hvor svært det kan være for både lærere og elever overhovedet at få fremstillet en praktisk problemstilling, der har noget med matematik at gøre. Hvem skal formulere problemstillingen? Eleverne eller læreren? Hvor meget skal læreren overtage, hvis eleverne ikke selv føler ejerskab til opgaven eller ikke er i stand til det eller den valgte situation ikke lægger op til nogle relevante spørgsmål af matematisk observans? Hvad stiller læreren op med elever, som ikke tager nogen initiativer? At komme med 'gode råd' i stedet for at stille 'gode spørgsmål' er en ikke ualmindelig læreradfærd. Men eleven opnår sjældent ejerskab til opgaven på den måde.

Elevernes kommentarer (1.3): Danmarks Evalueringsinstitut (EVA) gennemførte en undersøgelse af de afsluttende prøver i folkeskolen i 2002. Fra denne undersøgelse er der også elevkommentarer til forberedelserne af den mundtlige prøve (side 71):

"En del elever synes at den mundtlige matematik fylder meget lidt i undervisningen. Flere elever nævner desuden at den mundtlige matematik ikke i særlig høj grad er elevaktiverende:

"Vi bliver sat til at fremlægge en gang imellem, men som regel er det læreren" og "Det er dårligt at læreren bare snakker. Vi bliver sat til for lidt. Jeg ville gerne øve mig mere på at fremlægge og forklare matematikudtryk"."

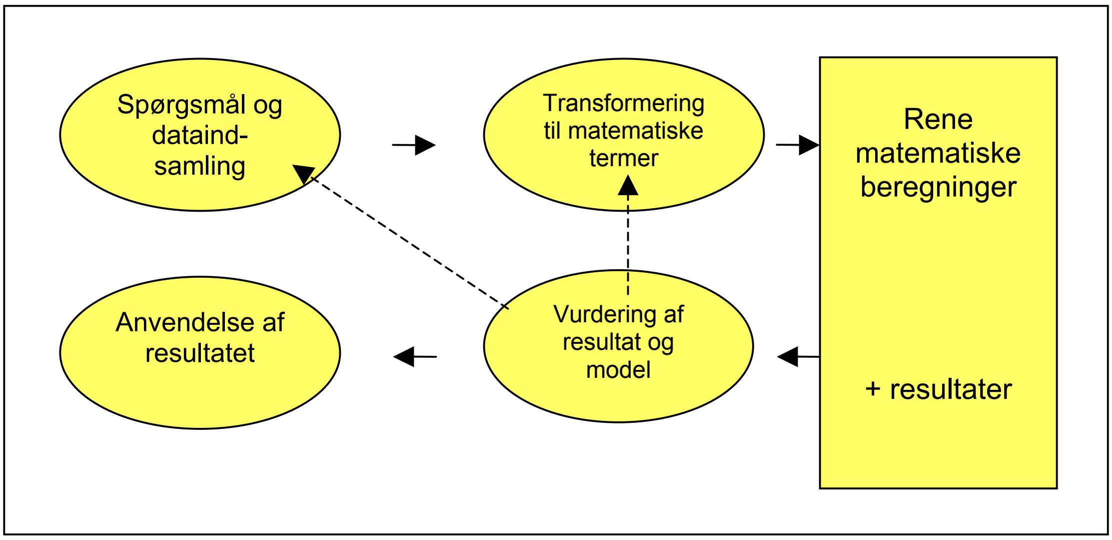
Der er tilsyneladende ikke overensstemmelse mellem elevernes behov og lyst til at lære, hvad de finder nødvendigt, og lærerens fornemmelse for at det er det, der sker.

Analyse (1)
Hvorfor opleves det så svært for lærerne at opfylde ministeriets krav og elevernes forventninger?

En praktisk problemstilling er en situation fra dagligdagen med en klar afgrænsning og et tydeligt matematisk fokuspunkt, der helst skal være af åben karakter. Lyder det nemt? Anvender vi Chevallards (2002) didaktiske niveauer i analysen bliver det måske tydeligere, om der er nogle oplagte grunde til besværlighederne.
Niveauerne er organiseret fra generalitet til specificering. De sidste fem ud af otte, ser således ud:

1. Disciplin - Emne (matematik)
2. Område indenfor emnet (geometri)
3. Delområde (plangeometri)
4. Tema indenfor delområdet (Pythagoras)
5. Selve subjektet/opgaven (find hypotenusen)

Jo mere generelt noget er beskrevet jo flere fortolkningsmuligheder er der. At problemstillingen skal være praktisk siger kun noget om, at den ikke skal være teoretisk, men ikke om formen for praksis. Det mest brugte tema er "Unge flytter hjemmefra" men problemstillingen er afgørende. Evalueringshæftet 2001 bringer et eksempel på netop dette tema med problemstillingen: "Vis noget matematik" (s. 15). Længere ned på samme side skrives: " Hvis sætningen "Vis noget matematik" i stedet omskrives til en problemstilling, vil det i mange tilfælde være en fordel for eleverne og for bedømmerne." Men der gives ikke nogen anvisninger på, hvordan en åben praktisk problemstilling med et matematisk fokuspunkt rent faktisk kunne se ud i dette tilfælde. Det er svært at finde balancen mellem ren og anvendt matematik. En af metoderne til at skabe en sådan balance er bevidst anvendelse af matematisk modellering. Inspireret af diverse arbejder med matematisk modellering (Blomhøj og Jensen (2002) Christiansen, Nielsen og Skovsmose (1997) og Michelsen (2001)) har jeg skitseret den matematisk modelleringsproces i følgende figur:



Figuren skal forstås således:
Spørgsmål og dataindsamling er at formulere og indsamle relevante rådata om et afgrænset problem fra omverden.
Transformering til matematiske termer vil sige at omsætte rådata til matematiske data og vælge hvilke beregninger, der vil være egnede til at finde et ønsket resultat.
Rene matematiske beregninger + resultater er selve de beregninger, som fører til diverse resultater og konklusioner.
Vurdering af resultat og model betyder at begge dele validitetstjekkes i forhold til de indsamlede data og teoretisk baseret viden.
Anvendelse af resultat eller eventuel anvendelse må undersøges.
Denne proces kan varieres i omfang og tid, afhængig af konteksten. I en prøvesituation, hvor tiden er begrænset til 1½-2 timer vil det være oplagt at anvende lettilgængelige data, dog på

en måde så der stadig er tale om et valg fra elevens side. Modelleringsprocessen skal selvfølgelig også bruges i en hverdag inden prøven, hvis læreren har tænkt sig at anvende den til prøven.

Formuleringen af selve problemstillingen er ledetråden gennem hele processen. Med inspiration fra projektarbejde vil jeg opfatte en problemstilling som et sæt af kategorier bestående af spørgsmål af forskellige karakter. Det drejer sig om:

Dataspørgsmål: De er undersøgende og beskrivende med mulighed for et præcist svar.
Forklaringsspørgsmål: Her søges sammenhængsforståelse, samt matematiske årsager eller begrundelser, som går et spadestik dybere.
Vurderingsspørgsmål: Validiteten af både proces, model og anvendelse undersøges.

Både elever og lærere skal kunne skelne mellem disse spørgsmålskategorier, fordi forskellige spørgsmål kalder på forskellige svar. En vending som ”Vis noget matematik” er ingen af delene. Eleverne kan sådan set gøre hvad som helst, bare det har noget med matematik at gøre.

Kombinationen af en åben problemstilling og et klart matematisk fokuspunkt giver nogle modsætninger. Hvis vi bruger Chevallards niveauer, kan vi spørge, hvornår et matematisk fokuspunkt er klart. Det er indlysende, at det er matematik det drejer sig om, men skal det præciseres om det fx er geometri eller hvilken geometri eller måske ligefrem temaet eller en konkret opgave? Ordet klart fokuspunkt giver ikke nærmere beskrivelse af niveauet. At eleven skal kunne veksle mellem teori og praksis plæderer for matematisk modellering, men hvordan ser det ud med de didaktiske niveauer? Er emnet ”Unge flytter hjemmefra” kan den praktiske problemstilling variere fra den meget åbne form, som ”Hvilke problemer indeholder den situation og hvilke løsninger kan findes?” Hertil kan der så være en historie og diverse anvendelige bilag. I dette tilfælde kommer eleverne gennem hele modellen og skal således selv vælge område indenfor matematikken. Vi befinder os på niveau 1 i Chevallards niveauer. Er den praktiske problemstilling specificeret yderligere til fx ”Hvad koster det at male alle væggene i det nye værelse?” er temaerne indenfor delområderne bestemt til at være plangeometri (areal) og økonomi (prisberegning) og vi befinder os nu snarere på niveau 4 og i transformering af data i modelleringsprocessen. Rådata er udvalgt og serveret. Disse spørgsmål er fra datakategorien. Undersøger vi spørgsmålet fra lærerdiskussion på Internetkonferencen Skolekom.dk "Du/I skal nu behandle emnet "Søde sager" ud fra en matematisk synsvinkel” kan vi placere det på niveau 1 og helt udenfor modelleringsmodellen, idet der endnu ikke er stillet nogen spørgsmål. Igen dukker spørgsmål op som, hvilken type spørgsmål skal stilles og hvem skal stille dem? Hvornår er en praktisk problemstilling acceptabel? Efter litteraturlisten har jeg vist et eksempel på en praktisk problemstilling fra det sidst udgivne forlagsmateriale om prøvespørgsmål, ”Matematik vi kan” (2004), udgivet af Danmarks Matematiklærerforeningen.

Ser vi igen på kommunikationen mellem læreren og den ’tilbagelænede’ elev er eleven dårligt nok på niveau 1, der drejer sig om matematik og læreren har tydeligvis problemer med at motivere eleven til at komme derhen.

Lærernes problemer og besværligheder kan skyldes mange faktorer, men jeg mener, at de mest centrale grunde er

- Ny situation med uvante krav
- Stærk tradition for at anvende lærebøger
- Usikkerhed overfor hvordan en praktisk problemstilling formuleresUvidenhed om hvordan de gode spørgsmål stilles undervejs**Under prøven** (2): Til den mundtlige

prøve har ministeriet et antal beskikkede censorer, som sendes rundt i landet for dels at virke som censorer og dels rapportere, hvad de oplever. Til samtlige mundtlige prøver er der en ekstern censor, hvoraf de fleste dog kommer fra naboskolen. Fra en beskikket censors rapport optræder denne elevkommunikation, som er bragt i evalueringshæftet, 2001 (s. 16):

”To elever har sat sig for at ville føre nogle beløb tilbage til før,
der blev lagt moms til.
Læreren advarer: Pas nu på, det er ikke så let som I tror
Eleverne: Vi kan da sagtens finde 25%. Man skal bare dividere med 100 og gange med 25.
Læreren: Og hvad finder man så?
Eleverne taster og svarer: 42,50
Læreren: Men stemmer det?
Eleverne: Stemmer?
Læreren: Ja, hvis I nu tog 100 kr. og lagde 25% til.
Eleverne: Jamen, vi har jo 170 kr.
Læreren: Ja, det er rigtigt; men vil 25% lagt til et tal, der kan give 170 kr. også give det samme tal, hvis man trækker 25% af 170 kr. fra?

Eleverne: Der er noget der, kunne vi ikke lige finde ud af det, og så kommer I tilbage?
Censor blander sig og spørger forsigtigt: Hvorfor kan vi ikke finde ud af det sammen?
Eleverne: OK, hvad synes I vi skal gøre?
Læreren forfølger nu sin tidligere ide og beder eleverne prøve at lægge 25% til et tal, de selv finder og derpå at trække 25% fra og se, om de kommer tilbage til det samme tal osv.
Eleverne vælger det aktuelle tal 170 kr. og får lagt 25% til.
Læreren: Nu har vi så 212,50 kr. Prøv at regne tilbage til de 170 kr.
Eleverne: Hvordan?
Læreren: Ja, prøv at trække 25% fra de 212,50 kr.
Eleverne: Var det ikke 170 kr., det skulle trækkes fra? Osv…”

Det er vældig nemt at trække på smilebåndet af denne kommunikation, men den vidner igen om, hvor svært det er at hjælpe andre, at forstå hvordan den anden tænker og omsætte denne fortolkning i nogle konstruktive spørgsmål i stedet for hele tiden at komme med gode råd.Det er også meget nemt at føle sig misforstået. Den næste lille dialog mellem en lærer og to elever viser det i al sin enkelthed:

Lærer:	Hvad er afstanden mellem to punkter?
Elev 1:	En ret linje
Elev 2:	Et linjestykke
Lærer:	Afstanden mellem to punkter er længden af linjestykket, som forbinder de to punkter.
Elev 2:	*Jamen det var jo nøjagtig, hvad jeg sagde.*

Hvor specifikke er de krav vi stiller til eleverne? Har de forstået forventningerne? Eller er formuleringerne for generelle og dermed flertydige? Er henholdsvis lærere og ministerium mon bevidste om denne flertydighed. Mener man selv at have udtrykt sig klart, har man ofte også en række mulige svar. Viser det sig nu, at man ikke udtrykte sig så klart, passer svar og forestillinger måske ikke helt sammen. Under de omstændigheder kan det være svært for eleven at finde et for læreren acceptabelt svar.

Efter prøven (3) foregår evalueringen af eleven - og læreren: Ministeriet har fastlagt, hvordan man skal give karakterer **(3.1)**. For en karakter i middelområdet stilles følgende krav (Prøverne i Matematik, vejledning og Bekendtgørelse, side 40):
"For at opnå en karakter i middelområdet skal eleven i rimelig grad
- have deltaget aktivt og vist initiativ i forbindelse med forståelse af problemstillingen i prøveoplægget,
- være fremkommet med forslag til fremgangsmåder og faglige metoder, som er relevante i forhold til prøveoplægget,
- have vist indsigt i det faglige område og anvendt begreber og arbejdsmetoder på en hensigtsmæssig måde overfor den givne problemstilling,
- kunne anvende begreber og arbejdsmetoder i en praktisk sammenhæng,
- have anvendt de hjælpemidler, som inddrages i behandlingen af prøveoplæg, herunder eventuelt computer,
- kunne fremlægge sine overvejelser fra arbejdet med prøveoplægget og fremlægge resultaterne af arbejdet hermed på en tilfredsstillende måde og begrundet sprogbrug."

Tolkningen af disse krav er som at købe elastik i metermål, igen er det op til læreren at vælge, hvad de enkelte ord dækker over. Men spørger man lærerne **(3.2)**, som EVA (2002) har gjort det i den førnævnte undersøgelse, evalueres prøven således (side 68):

> "Der er udbredt enighed blandt lærerne om at den mundtlige afgangsprøve i matematik er en positiv fornyelse. Argumentet er at netop denne prøveform hænger godt sammen med undervisningen fordi eleverne har mulighed for at tale med hinanden undervejs. Prøvesituationen ligner dermed en almindelig undervisningssituation. (…) Evalueringsgruppen finder det positivt at der på mange skoler er en udvikling i gang med hensyn til at integrere den mundtlige matematik i den daglige undervisning og lade eleverne samarbejde i matematikundervisningen. Evalueringsgruppen må samtidig konstatere at der er en del matematiklærere, der endnu ikke har indarbejdet disse elementer i deres undervisning."

Kravene opleves tilsyneladende ikke større end dagligdagen, men spørgsmålet er om dagligdagen lever op til kravene, som ønsket var hos formanden for fagudvalget. Og hvad siger eleverne, når det hele er overstået **(3.3)**. Disse bemærkninger er fra undervisningsministeriets årlige evalueringshæfter:
- Det er en behagelig prøveform, som i høj grad bygger på samtale, hvilket er godt. Læreren skal være opmærksom på ikke at hæmme eleverne ved hele tiden at spørge. Der skal være en naturlig balance mellem at eleven søger lærer og lærer søger elev. (1996, s. 31)
- Det var meget afslappende selv om vi var nervøse. Det var rart at I bare gik videre, hvis vi ikke var færdige. (1997, s. 31)
- Man kan hjælpe og støtte hinanden. (1997, s. 31)
- Man kommer til at kæmpe lidt om karaktererne. (1997, s.31)

Som det ses er udtalelserne fra de første år af prøvens levetid. Der har ikke siden været bragt elevudtalelser til torvs om indtryk og udtryk efter prøven, heller ikke i EVA's undersøgelser. Som det ses er det overvejende positive kommentarer fra eleverne. Det kunne umiddelbart se ud til at denne form, giver eleverne mulighed for en god oplevelse, selvom det er en prøvesituation.

Designudvikling

Designet for prøven er tænkt som en mulighed for en kommunikation om matematik mellem lærer og elev. Dette design forsøges hele tiden forbedret. På Statens Pædagogiske Forsøgscenter i Danmark arbejdes med en udvikling af prøveformen til en såkaldt

"Synopseprøve" (Ejersbo, (2003/04), Nielsen (2003/04)). En kort beskrivelse af den er følgende:

- Selve prøveafholdelsen har samme ramme i forhold til tid og gruppearbejde
- Elevgruppen har to uger til at forberede sig om et selvvalgt emne og udfærdige en rapport og et produkt
- Prøven tager udgangspunkt i dette arbejde
- Lærerens formulering af de praktiske problemstillinger bliver lavet netop til det pågældende arbejde

Disse forsøg viser at samtalen undervejs i prøven kommer op på et højere fagligt niveau. Eleverne har haft mulighed for at sætte sig ind i et fagligt stofområde, som støtter deres egne problemstillinger. Læreren og censor er forberedt på det matematiske fokuspunkt, samtidig med at eleverne har gennemarbejdet hele modelleringsprocessen inden prøven og kan således forholde sig til den under prøven.

Afsluttende bemærkninger

Min egen mening om den ministerielle prøve er, at den indeholder mange kvaliteter. Af disse vil jeg fremhæve, rammen på to timer, at det er en gruppeprøve, at der er mange hjælpemidler og mulighed for konkrete/praktiske udførelser, at det er en afslappet form og endelig at den overhovedet eksisterer. Som forbedringer vil jeg anbefale: Større fokus på støtte til forandringer i den daglige forberedelse, kravene til de praktiske problemstillinger præciseres og eksemplificeres således at der kommer større klarhed over, hvilke kompetencer der prøves og endelig en vilje til udvikling af prøven, evt. gennem synopseprøve. Prøver og test har som så meget andet, en tendens til at stivne i en præcedens. Derfor er det vigtigt at blive ved med at undersøge og afprøve systematisk, hvordan designet kan forbedres.

Litteraturliste:

Andreasen, M.; Enggaard, K. og Nielsen, G (2004): *Matematik vi kan. FSA/FS10 Mundtlige prøveoplæg*. Forlaget Matematik.

Blomhøj, M. og Jensen, T.H. (2002): *Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and education planning.* No.32, Roskilde: Centre for research in learning Mathematics.

Chevallard, Y. (2002): Thème 1 – Organiser l'etude. 3. Écologie et regulation, in *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des mathématique*, La pensée sauvage.

Christiansen, I.M; Nielsen, L. og Skovsmose, O. (1997): Ny mening til begrebet refleksion i matematikundervisningen, i Jacobsen, J.C. (red.): *Refleksive læreprocesser*. Forlaget Politisk Revy.

Danmarks evalueringsinstitut Eva (2002): *Folkeskolens afgangsprøver: Prøvernes betydning og sammenhæng med undervisningen*.

Jensen, Hans Nygård (1996): Fagets formål, læseplaner og evaluering. *Unge Pædagoger, 5*/1996.

Ejersbo, L.R. (2003/04): Klare udviklingsmuligheder for den mundtlige prøve, i *CRIT 03/04*, Statens Pædagogiske Forsøgscenter

Michelsen, C. (2001): *Begrebsdannelse ved domæneudvidelse. Elevers tilegnelse af funktionsbegrebet i et integreret undervisningsforløb mellem matematik og fysik.* DIG Syddansk Universitet.

Nielsen, F. (2003/04): Synopseprøven i matematik, i *CRIT 03/04*, Statens Pædagogiske Forsøgscenter.

Undervisningsministeriet (1998): *Prøverne i matematik. Bekendtgørelse og vejledning.* Undervisningsministeriets forlag.

Undervisningsministeriet (1998, 2000, 2001, 2002, 2003): Evalueringshæfterne: *Prøver Evaluering Undervisning Matematik Fysik/kemi*. Uddannelsesstyrelsens håndbogsserie, Grundskolen

Undervisningsministeriet (1995, 2001, 2003): *Faghæfte 12, Matematik*.
Uddannelsesstyrelsens håndbogsserie, Grundskolen. www.uvm.dk

Eksempel på en praktisk problemstilling fra hæftet: Matematik vi kan. FSA/FS10 Mundtlige prøveoplæg (S. 50 og 51)

Morgenmad
Morgenmaden bliver ofte kaldt dagens vigtigste måltid.
Undersøgelser i Danmark viser, at 88 % af alle skolebørn spiser morgenmad, dog kun 63 % af pigerne i de ældste klasser.
Undersøgelserne viser også, at morgenmaden indeholder for meget sukker og fedt.
Skolebestyrelsen overvejer, om eleverne skal kunne købe morgenmad i skolekantinen.

På skolen er lavet en undersøgelse af elevernes morgenmadsvaner.
Foretag sammenligninger mellem skolens undersøgelse og de ovennævnte undersøgelsers resultater.
Giv anbefalinger til skolebestyrelsen.

Opgaver:
Du skal undersøge, beskrive og vurdere nogle forhold, der har betydning for de skitserede problemer.

Du skal vælge at arbejde med et eller flere af følgende:

Brug oplysningerne i bilag 1 til at lave en statistisk beskrivelse af elevernes svar på spørgsmålet: „Spiser du for det meste morgenmad hver dag?“

Brug bilag 2 og 3 samt emballage fra morgenmadsprodukter.
Spiser eleverne på skolen for sødt og for fedt?

Brug bilag 3 og 4.
Giv forslag til et eller flere morgenmåltider, der kan serveres i kantinen. Begrund dit valg.

Statistik - Grafiske illustrationer - Procent - Grafer - Databehandling

Søndagsseminar den 14. november 2004
Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

Grunnleggende voksenundervisning i matematikk: Til glede og styrke?

Introduksjon
Av Tine Wedege

Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen
E-mail: tine.wedege@matematikksenteret.no

Hvordan organiserer vi grunnleggende voksenundervisning i matematikk, slik at den tiltrekker studerende som vil få glede av den, og samtidig styrker deres verdighet og identitetsfølelse? Sådan lød det innledende spørsmål som vi havde sat som dagsorden for seminaret denne søndag på matematikksenteret. Vi var ganske klar over at det finnes ingen enkle svar, men vi ville sammen belyse spørsmålet ut fra forskjellige synsvinkler.

Seminaret var organiseret af Torkel Haugan Hansen, Forskningsenheten Voksne i livslang læring, NTNU, Svein Kvalø, Vox, Nasjonalt senter for voksnes læring i arbeidslivet, Oslo, og undertegnede. Seminarets sprog var en skønsom blanding af dansk, engelsk og norsk. Hvilket også afspejles i denne introduktion.

I et perspektiv med livslang læring oppleves voksenutdannelse som et spenningsfelt mellom tvang og behov. Spesielt når det gjelder matematikk har mange voksne en forventning om at de skal "tilbake til skolebenken", og det betyr store utfordringer til matematikkundervisningen. I *matematikundervisning* for voksne er der altid et samspil og modspil mellem samfundets krav og individets behov. Grænsen mellem hvad der opleves som tvang, og hvad der opleves som behov er individuelt og samtidig socialt betinget. Konkret har jeg oplevet de to sidste punkter på behovssiden (At hjælpe mine børn og At styrke mit selvværd) i oversigten nedenfor som et gennemgående tema i fortællinger fra mange deltagere under den evaluering af Forberedende Voksenundervisnings som Danmarks Evalueringsinstitut iværksatte sidste år.

Matematiklæring opleves af voksne som

Tvang	**Behov**
- beholde mit job	- få et nyt job
- beholde mine dagpenge	- få en bedre løn
- adgang til videreuddannelse	- videreuddannelse
- aktive samfundsborgere	- deltage i samfundsdebatten
- - -	- - -
	- hjælpe mine børn
	- styrke mit selvværd

Med sit oplæg *Hvordan defineres kunnskaps- og læringsbehov?* Slog Jorun M. Stenøien (Forskningsenheten for Voksne i livslang læring, NTNU) tonen an i seminaret med en kritisk præsentation af begreber om livslang læring. Hun diskuterede spørgsmålet om voksnes behov for matematik med reference til et udfordrende eksempel fra hverdagslivet, nemlig restaureringsarbejderes praksis. Det skete blandt andet med udgangspunkt i hendes afhandling om medborgerlig aktivitet og deltagelse.

Jeff Evans (Middlesex University, London) argumenterede i oplægget *Motivation in adult mathematics?* for at motivation og modstand – som to sider af samme sag – skal opfattes som sociale fænomener, og ikke blot som individuelle fænomener. Gennem analyse af to tidligere studerendes fortællinger om deres motivation for at lære matematik diskuterer han gængse motivationsbegreber i voksenuddannelse og matematikundervisning samt vore muligheder for at videreudvikle begreberne.

Med baggrund i sit ph.d.-projekt diskuterede Lene Østergaard Johansen (Aalborg Universitet, Danmark) *Best Practice i matematikundervisning for voksne* som et almendidaktisk og som et fagdidaktisk spørgsmål. Best practice italesættes af politikeres, forskeres og matematiklæreres forskellige diskurser. Johansen har fundet eksempler i det internationale forskerforum "Adults Learning Mathematics". Hendes danske case er planlægningen af en ny voksenuddannelse kaldet Forberedende VoksenUndervisning (FVU) i matematik.

Jorun M. Stenøien
NTNU - Voksne i læring, NTNU, Trondheim, Norge
Dr.polit i sosiolog (2003) med avhandlingen *Den aktive medborger. Nye sosiale bevegelser som møteplasser for kunnskap og demokrati*. Har arbeidet med voksnes læring siden 1993, først ved Norsk voksenpedagogisk forskningsinstitutt (NVI) senere Vox forskningsavdeling. Er i dag forsker og forskningskoordinator ved enheten NTNU Voksne i læring. Er opptatt av deltakelse, kunnskap og læring som kulturelle fenomen og forsker på arenaer utenfor det formelle utdanningssystemet, slik som studieforbund, sosiale bevegelser og i arbeidslivet.

Hvordan defineres kunnskaps- og læringsbehov?

Av Jorun M. Stenøien

Forskningsenheten Voksne i livslang læring, NTNU
E-mail: jorun.stenoien@ntnu.no

Mitt utgangspunkt for å si noe om hvordan kunnskaps- og læringsbehov defineres, er blant annet hentet fra eget avhandlingsarbeid som handlet om kunnskaps- og læringsprosesser som del av en medborgerlig aktivitet (Stenøien 2003). Deltakelse i sosiale bevegelser (kvinnebevegelsen og miljøbevegelsen) forståes der som møteplasser og læringsmiljø for demokrati og kunnskap. Langt på veg kan man si at kunnskaps- og læringsbehov i disse sammenhenger var egendefinert av individet eller de ulike fellesskap.

Her vil jeg behandle spørsmålet om hvem som definerer kunnskaps- og læringsbehov, ved å gjøre rede for:
- begrepet livslang læring
- matematikkompetanse som kulturteknikk, og
- gi eksempler fra en studie av en håndverkspraksis

Ut fra dette vil jeg stille spørsmålet:
Hvordan kan behov for matematikk-kompetanse defineres i en konkret praksis?

Livslang læring

Livslang læring har som begrep eksistert i lang tid. I Norge ble livslang læring på alvor en strategi i en samlet kunnskapspolitikk på 1990 tallet (Tøsse 2005). Da ble det definert som en strategi for nasjonen i sammenheng med:
- økonomisk utvikling
- internasjonal konkurranse og globalisering

En slik tilnærming til livslang læring er åpenbart både instrumentell og nytteorientert, der definisjonen av behovet for livslang læring er knyttet til marked, konkurranse og produksjon. Dette er en annerledes tilnærming til Livslang læring en det som var utgangspunktet i 1970 da Unesco lanserte dette som et eget konsept for læring (Rubenson 1997, Cropley 1980).

’Lifelong education’ var definert ut fra et humanistisk perspektiv og ble lansert som et konsept med tre hovedprinsipper.

I. Livslang læring
Dette innebærer at læring foregår i alle livets faser, med andre ord læring begrenses ikke til oppvekst alene.

> In lifelong education people should continue a process of further learning and continuous self-education throughout their lives, (…) (Cropley 1980:189).

II. ’Life-wide learning’ eller livsvid læring
Læring skjer i mange sammenhenger. Læring foregår dermed ikke kun i det formelle utdanningssystemet eller i systematiske læringssituasjoner. Slik er begrepet knyttet til en tanke om at læring er liv. Det forutsetter en erkjennelse av at hvert enkelt individ kontinuerlig er involvert i et mangfold av læringsformer og –erfaringer.

III. Virkeliggjøring av de to første prinsippene
Dette er avhengig av karakteristikker ved individet. Integrasjonsprosesser mellom utdanning og liv, skjer gjennom kontinuerlige læringssituasjoner, eller ved at situasjoner hvor man virkelig lærer gjøres mulig.

I dette humanistisk funderte konseptet om livslang læring sto individet i fokus som den lærende, samtidig som det handler om læring for å forme og forandre.

> Inom en humanistisk tradition krävde företrädarna för livslångt lärande ett bättre samhälle och högre livskvalitet på ett sätt som skulle tillåta människor att initiera och styra förändringar. Ett slagord var att folk kunde utveckla sin egen individuella personlighet och ’make themselves’ snarare än ’being made’. Genom ökad självvärdering och självstyrt lärande förväntades människor arbeta for att uppnå centrala demokratiska och humanistiska mål och ett totalt självforverkligande, (Rubenson 1997:6).

Livslang læring har siden den gang blitt knyttet til andre formål og gått i retning av å bli tolket inn i mer økonomisk markedsorientert tenkning. Slik sett har livslang læring blitt del av en nytteorientert kunnskaps- og læringsstrategi.

Dersom vi så tenker behov for mattematikkunnskap, kan dette bli veldig forskjellig om vi begrunner behovet som en del av en livslang læring knyttet til en kunnskapsstrategi for nasjonen eller for individet. Er det nytte og økonomiske hensikter eller individets utvikling som menneske som er sentralt når kunnskaps- og læringsbehov defineres? Denne tautrekkingen rundt hvem eller hvordan behovet for kunnskap skal defineres kan relateres til Ove Korsgaards (1997) diskusjon om den stadig pågående kampen om lyset. Jeg vil gå videre med den humanistisk funderte tenkningen.

Kulturteknikker

Henning Salling Olesen (2004) har skrevet om Kulturteknikker og kollektiv erfaring. Alfabetiseing i det 21. århundrede. Kulturteknikker brukes som et fellesbegrep for ’literacy’ og andre basale kulturelle ferdigheter. Olesen ønsker å gi ’basic skills’ en ny ramme og framhever at kulturteknikker er grunnleggende for politisk og kulturell opplysning. Og det gis tre begrunnelser for å tenke nytt om dette:

- Mange, og en økende mengde mennesker kan ikke lese. Det er ikke fordi folk er blitt dårligere til å lese, men fordi samfunnets krav øker.

- Globalisering og behovet for flerspråklighet
- Nye medier og konkurrerende kulturteknikker dukker opp og påkaller økt utdanningsmessig oppmerksomhet

Disse forholdene frambringer nye kulturteknikker, og Olesen (2004) spør:
Har matematikk, computer-kunnskap og fremmedskpråk en like grunnleggende betydning for adgangen til viten og kultur som literacy?

Ved hjelp av begrepet kulturteknikker forsøker Olesen å bringe alfabetiseringsspørsmålet tilbake inn i en kulturell og historisk kontekst. Formålet er derigjennom å gjøre det mulig å få en mer fremadrettet diskusjon om hvilke kulturteknikker som er relevante og hva slags utfordringer som utdannelsene og voksenopplæring står overfor. Det spennende i denne tenkningen er denne ideen om *rekontekstualisering* av kulturteknikker. Han henter inspirasjon fra Paulo Freires frigjørende pedagogikk (Freire 1999) som sier at språket er et nødvendig redskap. Det gir adgang til kunnskap og fører til beherskelse. Men, samtidig finnes en risiko for å miste både de kulturelle erfaringer og identitet, gjennom å lære å lese og å skrive.

Ideen for voksenopplæringen er ifølge Olesen (2004) å bruke etterspørselen etter kulturteknikkene til en rekontekstualisering av både alfabetisering og innlæring av de nye kulturteknikker.

Fra kunnskap - til praksis

I tråd med en slik rekontekstualisering kan man så forsøke å definere behov for mattematikkunnskaper i en praktisk sammenheng. Det kan gjøres på flere måter. En måte kan være å forsøke å *se* eller gjøre en analyse utenfra, på hva som mangler av matematikk kunnskaper i en arbeidspraksis. En kan da kanskje avdekke problemer som handler om for eksempel feilkalkuleringer av ulike slag. Måten å tilbakeføre eller svare på dette vil kunne være å satse på en styrking av bestemte matematikkferdigheter gjennom ulike matematikkurs.

En slik framgangsmåte vil altså ta utgangspunkt i mangler ved en praksis. Dette behandles ved å tilføre den antatt manglende kunnskap til den enkelte. Dette er en relativt instrumentell tilnærming til kunnskaps- og læringsbehov.

Jeg ønsker å utfordre tanken og spør derfor hvordan man i de følgende sammenhenger skal definere kunnskaps- og lærings behov med hensyn til matematikk?

Røros-caset[1]
Eksemplene er hentet fra praksisen til restaureringshåndverkere som jobber med et omfattende istandsettingsprogram av nærmere 400 vernverdige uthus i Røros by. Disse har et stort behov for kunnskap og blir kontinuerlig utfordret på egne evner til å vurdere hvordan sette disse bygningene i stand. For dette arbeidet gjelder noen prinsipper som er annerledes enn det man finner i moderne bygningsarbeid. For eksempel heter det at:

> - Heritage destruction can be a result of unprofessional behaviour. If you are not sure, it is better to do nothing than something.
> - See the spirit of your task. Avoid meaningless action (Celebration of Craft (2004).

[1] Sitatene i eksemplene er hentet fra intervju gjort med restaureringshåndverkere på Røros i 2004.

Det er med andre ord ikke bare å skifte ut gamle stokker og planker med nye. Dette illustrerer tankegangen som gjelder for dette arbeidet. Her finnes ingen ferdige skisser og beregninger eller standarder. Disse håndverkerne er klar over behovet for kunnskap, men framhever betydningen av at behovet skal springe ut fra egen praksis. Det er ingen vits i å komme med ren teori her. Kunnskap det er bruk for her må være relatert og satt inn i egen praksis. Her vil jeg gi tre eksempler fra denne håndverkspraksisen:

1. Om å vurdere styrken i og holdbarheten av en bøyd bjelke
2. 3 cm hull? - hva hjelper det å vite eksakte mål
3. Forholdet mellom helhet og del, om å lære om fysiske krefter gjennom å bygge et helt hus

Eksempel 1
Møte mellom ingeniøren fra teknisk etat og håndverkeren. Spørsmålet var om en bøyd takbjelke skal eller må skiftes ut eller ikke.
Ingeniøren fra teknisk etat mener ja, at det er selvsagt.
Håndverkeren mener at, dersom bjelken har holdt i 100 år, fortsatt er i god stand og forholdene for øvrig tilsier den kan det holde i 30 år til, da skal den ikke skiftes.

Så kan man undre hva slags praktisk matematikkunnskap ligger i en slik vurdering?

Eksempel 2
Samspillet mellom den erfarne og den uerfarne håndverkeren. Læring som praksis:

- "…hun skal få prøve selv hele tiden og få lov til å gjøre feil. … så forsøker jeg å forklare saker og ting sånn at hun skal få sammenheng, for man kan jo si gjør sånn og sånn og ikke fortelle hvorfor…. "
- "for eksempel det med å hugge ut tapphull. Hvis man ikke vet hva som skal inn i dette tapphullet og hvis man ikke vet noe om denne sammenhengen så kan det bli veldig galt. Så blir det sikkert bra (tapphullet) … så hun får selv måle ut hva den der tappen skal være, altså kjenner hun selv at det blir riktig, i stedet for at jeg skal stå å hugge ut der hullet er 3 cm dypt." (Intervju)

Her synes det å være til liten hjelp om man kan måle eksakt størrelse og omfang.

Eksempel 3
Forholdet mellom enkeltheter og helheter

- "…men enkelte ganger så må man få lov til å boltre seg og få lære. Hvis man bare reparerer stokker hele tiden og ikke får bygd noe nytt så vil man en eller annen gang undre seg på hvordan det var gjort, og da klarer man ikke å få det til andre veien, forstår ikke hvorfor det er gjort sånn, tror jeg.
- …jeg er sikker på det, for elementer av husbygginga som enkelte av oss ikke forstår ordentlig når vi restaurerer, så skjønner vi ikke hva som skjer hvis man løfter her og løfter der…Vektoverføringer og sånt hvis man hadde fått bygd et hus av den typen i fra nytt, så hadde man forstått det, tror jeg." (Intervju)

Kunnskap og forståelse er relatert til kontekst og det å se sammenhenger og helheter. Dette tatt i betraktning: Hvordan skal man så definere og forstå kunnskaps- og læringsbehov som springer ut av slike kontekster?

Referanser

Celebration of Craft (2004). Brochure for the CoC project.

Cropley A.J. (1980). Lifelong learning and systems of Education: an overview. In: Cropley, A.J. (ed). *Towards a system of lifelong education*. Oxford: Pergamon Press.

Freire, P. (1999). *De undertryktes pedagogikk*. Oslo: Ad Notam Gyldendal (1.utg. 1970).

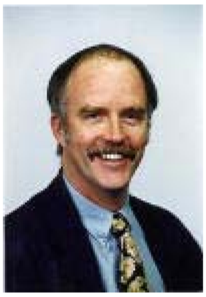
Korsgaard, O. (1997). *Kampen om lyset. Dansk voksenoplysning gennem 500 år.* København: Gyldendal.

Olesen. H.S. (2004). Kulturteknikker og kollektiv erfaring, Alfabetisering i det 21. århundrede. I: Stenøien, J.M. (red.) *Utfordringer for voksnes læring. Et nordisk perspektiv* (pp. 115-130). Vox, Trondheim og Mimer, Linköping.

Rubenson, K. (1997). Livslångt lärande; Ett förändeligt begrepp. I: Arvidson, L., Rubenson, K. og Stenøien, J.M. *Kunnskap og demokrati i bevegelse* (pp. 132-147). Trondheim NVI.

Stenøien, J.M. (2003). *Den aktive medborger. Nye sosiale bevegelser som møteplasser for kunnskap og demokrati.* Trondheim: Vox. ISBN 82-7724-060-0.

Tøsse, Sigvart (2005). *Folkeopplysning og vaksenopplæring. Idear og framvekst gjennom 200 år.* Didakta Norsk Forlag.



Jeff Evans
Mathematics & Statistics Group, Middlesex University, London, England
Reader in Adult Mathematics Learning, Middlesex University, London. His teaching has included basic mathematics and statistics to adult returners to higher education. His research interests include: emotion and motivation in learning and doing mathematics; the transfer / translation of school or college learning to outside settings; gender and other social differences; and multiple methodologies in educational research.

Motivation in Adult Mathematics?

By Jeff Evans

Middlesex University, London
E-mail: J.Evans@mdx.ac.uk

In the perspective of lifelong learning, education is experienced by adults as a field of tension between felt needs concerning what one wants to learn – or has to learn – and constraints in the form of administrative regulations and financial incentives (Illeris, 2003a). This set of conflicts is a background to adults' learning processes in late modern society. To understand it we must take into account the range of adults' motivations and resistance to learning mathematics. This paper aims to develop further ideas originally formulated in working with Tine Wedege (see Evans and Wedege, 2004).

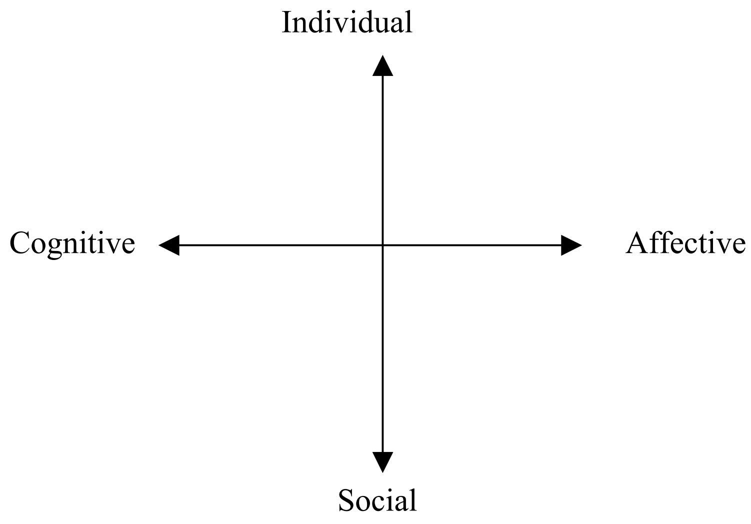
A framework for understanding adults' learning

In seeking to understand this area, I think it is important to begin with a framework formed by the intersections of dimensions that might be called "cognitive – affective" and "individual – social". I see this intersection as orthogonal, which thus produces a diamond shape as in Figure 1[2].

This figure suggests that the cognitive and the affective are in some sense different to each other (Evans, 2000, Ch.11), but that both have aspects that are individual and social. This still leaves much to be considered about the relationship between motivation and the affective area, usually thought to include beliefs, attitudes and emotions (McLeod, 1992; Evans, 2000).

[2] Illeris (2003b) presents a triangle with 'cognitive', 'affective' and 'social' at the three vertices. This gives an impression that 'cognitive' and 'affective' are basically 'individual', a conception that is widespread, but against which I argue here.

Figure 1. Framework for Understanding Adults' Learning



We might also analyse social influences into several levels:

- *Micro*: face-to-face interaction with "significant others", for example, an encouraging parent, or an inspirational teacher

- *Meso*: related to institutional affordances and constraints, for example, the attitudes of teachers as a group, or the facilities available, within a school

- *Macro*: related to broader socio-cultural influences, for example, national systems of assessment.

Motivation – Individual Aspects

Much relevant work on motivation has been done in the field of psychology, but not so much, to date, in mathematics education. This work is summarised by Markku Hannula (2004). He highlights some important distinctions made in psychological approaches to educational contexts:

- intrinsic (rewarding in itself) versus extrinsic motivation (offering an outside reward),
- learning (or mastery) goals; performance (self-enhancing) goals; and ego-defensive (avoidance) goals

For an overview of terminology on motivation, see Murphy and Alexander (2000).

Hannula himself characterises motivation as the potential to direct behaviour through mechanisms of emotion control. He considers motivation as a different way of viewing the world to affect: "[it] cannot be directly observed. It is observable only as it manifests itself in affect and cognition" (Hannula, 2004:9). He links his approach with others emphasising *self-regulation* (see e.g. Malmivuori, 2003), through the use of metacognition, the choice of goals and strategies, and emotional control systems. Here the choice of *goals* is crucial: although Hannula points to the possibility of deriving these from *needs*, his approach involves roughly equating motivations to goals, based on the mastery – performance – defense triplet outlined above. Hannula illustrates this approach in his analysis of semi-structured interviews with older secondary students: one of his findings is that mastery and performance goals are not exclusive, as has previously been argued.

In schools, performance goals often tend to have a self-enhancing or competitive edge to them. With adults, depending on the regime of regulations, incentives, and occasionally compulsion, performance may come to have other meanings, as with, for example, the regulations surrounding the new adult basic skills curriculum in the UK (Coben, 2003b). Adults can formulate mastery or learning goals as well as school pupils and students, but the constraints on them (e.g. time, work, family responsibilities) may mean the resources available to pursue these are relatively limited. Similarly, ego-defensive motivations on the part of an adult can be expected to be at least as strong as those for younger students. These considerations require us to emphasise the social dimension, as well as the individual.

Motivation – Social Aspects

The micro aspects of motivation are illustrated in the accounts given by students and illustrated below. In mathematics education a few researchers have emphasized the meso aspects. Heather Mendick draws on ideas of practices, meanings and students' "identity work" to see how teachers, themselves subject to various social and societal pressures, address the students' perennial question "Why are we doing this?" This is related to motivation, as "subject choices are a public disclosure of identity" (Mendick, 2002:330). She studies the talk and classroom "motivational practices" of one teacher who continually invokes the "AS level", the national 17/18 year old examination; "an external authority replaces internal sense-making" (p.333). And an exam-oriented performance motivation replaces learning motivation. This process is also exemplified by Jo Boaler's (1997) idea of a "quest for understanding" of which she found evidence in the less traditional of her two secondary schools; in the more traditional school, an exam-oriented performance motivation was predominant.

If we consider the meaning of motivation in a cultural context, we see that the boundary between these three levels of sociality (micro, meso and macro) is not clear, nor is it impermeable. Thus the two types of motivation found in Boaler's secondary schools are dependent on more broadly based discourses of assessment and motivation.

Motivation is one of the values of the middle classes historically imposed upon pupils and students in its various transformations, through such discourses. Motivation is also, as shown above, heavily dependent on the types and forms of evaluation, dominant in school systems, through which students' identities are formed and reformed. Thus, motivation cannot be studied independently of the historical transformations of the discourses of success and failure, nor of the tactics and strategies of middle class families and individuals to reproduce and safeguard their superior class position within schooling, lifelong education, and society generally, especially in a society less and less secure, and characterised by economic and cultural crises.

Currently dominant discourses on motivation use psychological, sociological and other resources, to cover over the conflicts inherent in recent European and national policies such as those concerning lifelong learning. In social class and market/commodity terms, it is especially likely that this discourse obscures the conflicts that adult learners in particular are experiencing within educational institutions that function within an overall culture of *performativity* (evaluation according to performance indicators), *accountability*, and discourses of *individualisation* in identity formation (e.g. Arnot, 2002). Much further empirical research and detailed analysis of this area is needed.

Resistance

Here I introduce resistance, mainly so that it can be used in analysing the students' accounts described below; for more detailed discussion, see Evans and Wedege (2004) and Wedege (2004).

Rather than seeing resistance as opposite to motivation, we might see it as a reaction to the exercise of power. We might see it as an apparently individual response to an authoritarian parent or an oppressive teacher. Or it might be a form of defense that is (at least partially) unconscious, leading us to an interest in psychoanalytic insights (Illeris, 2003b; Evans, 2000).

However, even such an individual response depends on social interaction, and should therefore be considered as micro-social. A particularly interesting example for teachers is the reaction of a student to the fact that the teacher reminds him / her of an authority figure from earlier in life – often a parent – which is called *transference* (for examples of this, see Evans, 2000, Ch.10).

Nor is resistance only passive. It might be manifested in an active (meso-social) response on the part of a number of students to the learning arrangements in a classroom – for example, to the lack of time for problem-solving, or perceived inadequacies of the teacher's explanations. Further examples are given below.

At the macro-social level, resistance can be seen in the ideology of social groups resisting various pressures of social reproduction, as described by Stieg Mellin-Olsen (1987). His message for teachers is hopeful: we should accept and take account of resistance, and attempt to turn it to constructive ends.

Empirical material: Accounts of Students' Motivation

In order to illustrate and develop the ideas on motivation and resistance, I present written material produced by students. The context is that these students were entrants to a Social Science degree, at a London Polytechnic. This degree emphasised the possibilities for access: it aimed to give able young people who had been failures at some stage, in particular with mathematics, a second chance. Many were mature students, i.e. away from formal education for some years, and many had had difficulty with the Mathematics examination ('O' level at the time) at age 16.

In teaching these students, our assumption was that they were reasonably competent with basic arithmetic, but not with algebra. Many rose to the challenge of studying mathematics yet again, and most of these were successful.

Here I analyse the students' written responses to part of a formatively assessed worksheet (i.e. not for credit), in Week 5 or 6 of the Methods & Models module in Year 1. The worksheet included both essay and technical questions. Here I consider selected responses to an essay question as follows:

Question 5: *"What experiences etc. have been most important in forming your views and feelings about numbers?"*

Anne's Story

"From being very young, I always had the attitude 'I like numbers, I enjoy working with mathematical problems'. My parents taught me to read and to do the basic mathematical functions: adding, subtracting, multiplying, dividing. They encouraged me to 'play' with numbers, have fun with them; i.e. I added up using apples and sweets, and was rewarded when I gave the correct answer. This continued as I became more involved with numbers by entering 'school' in which 'maths' was a basic part of education. I found I learnt easily and I learnt quickly, which meant I still had an attitude of enjoyment. ... This continued through to secondary school where children entered a system of streaming, I found myself in the top sets for English and Maths, and I had lots of friends in these groups. We had fun, 'a good laugh', my teacher for the next three years loved jokes, especially mathematical jokes in the form of problems for you to solve. I still found numbers easy to work with, I was rewarded, I achieved and of course [was] motivated to continue achieving. At twelve years old I took a weekend holiday job in a café by the seaside. This meant adding in your head ... no problems in this area. ...

However ...I now hate [mathematics and numbers], hate the thought of a Maths lesson, or a numerical lesson to solve. Why? School had a large part to play in this change of view. The fourth year, and the start of the 'O' level course brought a change of teacher, a change of course material, and a change of pressure. I hate my teacher .... He didn't make maths fun anymore, ...; he himself was a bad teacher, ... if you had a problem with an area in maths, he couldn't understand why. He tended to belittle you in front of your classmates, ... Pressure played an important part, you had to be able to solve the problems in order to gain that precious piece of paper, the 'O' level; without it, you had problems in pursuing your career. My level of attainment fell .... I still viewed 'maths' as a dreaded word, due to a system, a teacher and a shared 'norm': everyone hates maths.

But this is changing again as I'm continuing to use numbers in my education, but there isn't the pressure to achieve, and the lessons are fun again...."

Here we find the role of both intrinsic ("I like numbers") and extrinsic ("I was rewarded when I gave the right answer") motivation. We have examples of the social nature of motivation: "We had fun, a good laugh." We have the expression of negative affect: "I now hate […] the thought of a Maths lesson…." – because of 'a change of teacher, a change of course material, a change of pressure. ' The teacher's motivational practices were lacking: "If you had a problem […] in maths, he couldn't understand why. He tended to belittle you in front of your classmates …." We are told that there was a (macro-social or meso-social) norm: "everyone hates maths"! At the end we glimpse Anne's opportunity for re-emergence, when she notes that "as I'm continuing to use numbers in my education, […] the lessons are fun again …."

Peter's Story

"From my limited experience with maths, i.e. up to the level of 16 (O level), I have found it unapproachable, unnecessary and pretty well intolerable. ... failed 'O' level maths twice, and ended up with only a CSE grade 2. Therefore, when I joined the Social Science course, the last subject I wanted to find was maths on the curriculum. Yet I am attempting to view the subject in a new light, and, for the first time in eighteen years, am actually almost enjoying it.

Going back to my experiences of maths, I can vividly remember spending night after night trying to get to grips with the general principles of maths, at the age of eleven or twelve. I can recall throwing my exercise book against the wall, and going to sleep in tears, after spending several hours on one specific exercise. Yet, in the end, I managed *to grasp the general principles of elementary maths, for the simple reason that I could see the reason for my perseverance, as it was essential to gain the basics.*

Yet, when I moved schools at the age of thirteen, I found the teachers' attitude and the types of maths very different to everything that I had experienced before. The general ideas of maths seemed to be discarded, and many new abstract topics were developed. The new topics, such as matrices, geometry and trigonometry totally bemused me, as I could see absolutely no practical use for [them]. Thus, it led me to concentrate on other, what I considered, far more useful subjects.
The only mathematical problems I ended up being good at were those which involved money; thus, if a question was based on percentage profit or a related subject, I could work it out with great speed and with limited ... problems."

Peter's first anecdote related relates to the time when he was 11 or 12 years old: he tells of a commitment to learning (or mastery) goals. However, things change at age 13, and we have a fairly strong expression of Peter's beliefs about mathematics as "unapproachable, unnecessary and pretty well intolerable". It may be reasonable to see these as related to the emotions of frustration that he expresses in the next paragraph. He then goes on to relate familiar themes of "unsettling change" and "needless abstraction". However, he is motivated to work on problems that relate to money, and he performs well on these.

Methodological Reflections

Before we attempt to draw any more general conclusions, we should reflect on the methods used and how they may affect the conclusions drawn. Thus we should ask ourselves:

- How do the conditions of production of the text (here the answer to a worksheet problem) affect what is produced? That is, are there any reactive effects? For example, what does the student *need to say* in this specific context? What can the student *not say*?

- What identities (or positions[3]) do these students occupy / take up, besides that of student of mathematics?

Concerning the first question, we should remember that the accounts submitted in response to Question 5 were part of a worksheet that was formatively assessed (i.e. not for credit). But, still, the students needed to produce an account that would be evaluated as acceptable (at least): one might surmise that they may have felt the need to present themselves as having survived school mathematics, and as potentially likely to do better at the Polytechnic. They probably should *not* say that they have always hated – or felt bored by – mathematics, and still do so! Concerning the second question, Anne describes herself as a daughter, a pupil, and an employee, whereas Peter presents himself mostly as a student, though the story of him at eleven or twelve actually describes himself as powerfully resisting frustration and failure.

---

[3] I find it helpful to think of social practices, and positions within them, as allowing subjects access to power, knowledge, and even feelings. Sometimes subjects can position themselves - Peter positions himself as powerful in the telling of his first anecdote - but most frequently a subject is positioned by the social practice(s) they are involved in; for example, a learner attending a school or college is subject to certain rules and sanctions, and has specific (and limited) opportunities for self-expression and for learning. Thus, Anne is put in a class with a teacher she has not chosen, to study a changed curriculum at the beginning of year 4. For further discussion of these ideas, see Evans (2000).

Conclusions

In these two accounts, selected from a larger set, we can see a number of themes.
1. We can see the inter-weaving of emotion and motivation, in particular the description of enjoyment as a basis for motivation to do mathematics.
2. We see reports of emotion and motivation at all levels of the social (see above); for example, the strong effects of supportive parents and teachers.
3. At the macro-social level, we see the importance of student norms ("Everyone hate maths") and of culturally valued qualifications, such as the "O level" mathematics. These can lead to much pressure being put on students, with various responses emerging from them, including resistance.
4. In general, there is little explicit mention of resistance in these accounts. However, this may be due to *reactive effects*: it is hardly something that a student can mention to their new teacher just into a new term of study. And of course it is possible that the student would not be conscious of such feelings, even if they were experiencing them.

Acknowledgements
Much of this work has benefited from collaboration with Tine Wedege, in the context of the research project *Adults learning mathematics in school and everyday: social and affective conditions of their learning processes* (http://mmf.ruc.dk/~tiw) partly funded by the Danish Research Council for Humanities. I also thank Anna Tsatsaroni for many helpful discussions.

References
Arnot, M. (2002). *Reproducing Gender? Essays on educational theory and feminist politics.* London: Routledge/Falmer.

Coben, D. (2003). *Adult Numeracy: A review of research and related literature*. London: National Research and Development Centre for Adult Literacy and Numeracy.

Evans, J. (2000). *Adults' Mathematical Thinking and Emotions: A Study of Numerate Practices.* London: RoutledgeFalmer.

Evans, J. (2002). Developing research conceptions of emotion among adult learners of mathematics. *Literacy & Numeracy Studies, 11*(2), 79-94.

Evans J. and Wedege T. (2004). Motivation and resistance to learning mathematics in a lifelong perspective; published by TSG6: Adult and Lifelong Mathematics, ICME-10, Copenhagen, 4-11 July. Online at http://www.icme-10.dk.

Hannula, M. (2004). Regulating Motivation in Mathematics; paper for TSG24 (Students' motivation and attitudes towards mathematics and its study) at ICME10, 4-11 July. Online at http://www.icme-10.dk.

Illeris, K. (2003a). Adult education as experienced by the learners. *International Journal of Lifelong Education, 22*(1), 13-23.

Illeris, K. (2003b). Towards a contemporary and comprehensive theory of learning. *International Journal of Lifelong Education, 22*(4), 396-406.

Malmivuori, M.-L. (2003). Self-System Processes and Affect in Learning Mathematics; in Evans, J., Healy, P., Kaye, D., Seabright, V. and Tomlin, A. (Eds.), *Proceedings of the 9th Conference of Adults Learning Mathematics – a Research Forum (ALM-9)* (pp.116-123). London: King's College London and ALM.

McLeod, D. B. (1992). Research on Affect in Mathematics Education: A Reconceptualisation. In Grouws, D.A. (Ed), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575-596). New York: Macmillan Publishing Company.

Mellin-Olsen, S. (1987). *The Politics of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Mendick, H. (2002). Why are we doing this? A case study of motivational practices in mathematics classes; in Cockburn, A.D. and Nardi, E. (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-26)* (vol. 3, pp.329-336). Norwich: School of Education and Professional Development, University of East Anglia.

Murphy P. K. and Alexander P. A. (2000). A Motivated Exploration of Motivation Terminology. *Contemporary Educational Psychology, 25*, 3-53.

Wedege, T. (2004). Adults' resistance to learn in school versus adults' competences in work: the case of mathematics; paper presented at the conference *Workplace Learning - From the Learners' Perspective*, Learning Lab Denmark, Copenhagen, 25-27 November 2004.

Lene Østergaard Johansen
Institutt for læring, Aalborg Universitet, Danmark
Studielektor i matematikk ved Adgangskurs til ingeniøruddannelserne ved Aalborg Universitet. Doktorgradsstudent ved Institut for læring, Aalborg Universitet med prosjektet "Hvorfor skal voksne uden grundlæggende færdigheder i matematik tilbydes undervisning i matematik? En diskursanalytisk tilgang til begrundelsesproblemet. Hennes forskningsinteresser er: Voksne og matematikkundervisning, IT og matematikkundervisning og Matematikkvanskeligheter.

Best Practice i matematikundervisning for voksne

Af Lene Østergaard Johansen

Adgangskursus, Aalborg Universitet, Danmark
E-mail: lj@ak.aau.dk

I langt de fleste vestlige lande er voksenundervisning en aktivitet i fremgang. Mange argumenter anvendes, for at få de voksne til at uddanne, videreuddanne og efteruddanne sig. Ord som ”livslang læring” og ”kompetenceudvikling” anvendes som slagord både på den politiske scene og på uddannelsesplanlæggernes scene. I Danmark har voksenuddannelsessektoren i mange år fået lov til at blomstre frit. Der har været politisk fokus på erhvervsuddannelser, korte faglige kurser til at overvinde flaskehals problemer i erhvervslivet, og der har efter en dansk undersøgelse af den voksne befolknings læsefærdigheder (Elbro, Møller og Nielsen, 1991) været politisk fokus på læsekurser for voksne. I maj 2000 vedtog den danske regering en reform af hele voksenuddannelsessystemet. Målet var at forenkle og samle de mange tilbud indenfor voksen efter- og videreuddannelse til et overskueligt sammenhængende system, der kunne være en parallel til børn og unges uddannelsessystem. En del af denne reform var introduktionen af en helt ny uddannelse for voksne: Forberedende Voksenundervisning (FVU). FVU består af to fag: FVU-læsning, der erstatter de tidligere læsekurser for voksne og FVU-matematik, der er et nyt fag for voksne. Fra politisk side var der ved introduktionen af FVU et ønske om at den nye uddannelse skulle være noget helt særligt, og at den skulle være tilrettelagt på en sådan måde, at den imødekommer de voksnes ønsker, interesser og behov.

I min forskning har jeg haft mulighed for at følge udviklingen af FVU-matematik og udviklingen og gennemførelsen af en ny lærerefteruddannelse for matematiklærere, der ønskede at undervise i FVU-matematik. Læreplanen for FVU-matematik bryder på flere områder, det jeg vil kalde traditionel didaktisk tænkning, og inddrager i princippet lærernes metodefrihed. Det rejser spørgsmålet hvad er god undervisning i matematik for voksne? Svaret på ”Best Practice” i matematikundervisning for voksne kan findes forskellige steder. I denne artikel vil jeg belyse spørgsmålet om ”Best Practice” ud fra henholdsvis en almendidaktisk synsvinkel og en fagdidaktisk synsvinkel.

”Best Practice” som et almendidaktisk spørgsmål

Den almendidaktiske synsvinkel giver os mulighed for enten at vende os til den generelle almendidaktiske litteratur eller til den voksenpædagogiske litteratur. Da spørgsmålet handler om voksne, vil det være oplagt at søge svaret i den litteratur der specifikt retter sig mod voksenundervisning. Her er det vanskeligt at undgå at støde på begrebet ”andragogik” introduceret og defineret af Malcolm Knowles (1970). ”Andragogik” en særlig pædagogik, der er rettet mod undervisning af voksne.

> Knowles skelner mellem en social og en psykologisk definition af, hvad det vil sige at være voksen. Socialt set er en person voksen, når vedkommende træder ind i de sociale roller, der i en given samfundskultur er defineret som voksne roller. Det kan være roller som f.eks. det at være forældre, partner, arbejder eller ansvarlig borger. Den psykologiske definition går mere på individets selvopfattelse. Når individet anser sig selv for i det store hele at være ansvarlig for sit eget liv, kan vedkommende opfattes som værende voksen. Disse definitioner må ifølge Knowles tages i betragtning, når voksne ønsker at uddanne sig. Et voksent menneske er i sin hverdag vant til at træffe selvstændige beslutninger og tage ansvar for sine handlinger og sit liv. Derfor må der i undervisningen skabes rum til, at den lærende er med til at styre forløbet, og at vedkommende tager ansvaret for sin egen læring. (Korsgaard, 1999: 143-144)

Knowles skelner mellem undervisning af børn og voksne. Han antager, at når en person vokser og modnes ændres selvopfattelsen fra at være et afhængigt menneske til at være et selvstyrende menneske. Igennem modenheden opbygges en række erfaringer, som kan blive en kilde for læring. Når en person modnes bliver læringsberedskabet i højere grad rettet mod udviklingsopgaver og den voksnes sociale rolle. Samtidig ændres tidsperspektivet fra at det lærte skal anvendes senere til et ønske om umiddelbar anvendelse. Dette medfører at læringsorienteringen bliver mindre fagcentreret og i højere grad problemorienteret (Loeng, 1999: 16).

I bogen ”Understanding Adult Education and Training” (Foley, 2000) præsenterer Lee og Wickert en undersøgelse, hvor de har spurgt en række voksenundervisere ”What principles underpin your practice as an ABE-teacher[4]?”(Lee and Wickert, 2000: 144). De skriver, at lærerne og tutorerne ikke henviser til noget teoretisk fundament, men at der er rimelig overensstemmelse mellem lærernes svar, og at de handler om følgende:

1. Student-centered and student-directed learning;
2. curriculum based on students needs;
3. concern with students as a whole person;
4. use student experience as a resource for teaching;
5. negotiate learning with student ;
6. relevant and purposeful learning activities;
7. learning which develop student independence;
8. reflection;
9. student as active participant;
10. open access and flexible provision;
11. small-group learning. (Lee and Wickert, 2000:144)

Lee og Wickert skelner ikke imellem hvilke fag lærerne underviser i men ser på voksenundervisernes ”Best Practice” over en bred kam. I deres analyse af lærernes diskurs

[4] ABE står for Adult Basic Education

fremhæver Lee og Wickert, at lærerne konstruerer deres egen position som en passiv position – det er den studerende der er i fokus.

Sammenligner man Korsgaards beskrivelse af andragogik med Lee og Wickerts undersøgelse af voksenunderviseres diskurs om god voksenundervisning, er der god overensstemmelse. Ifølge Korsgaard skal de voksne have mulighed for at være medstyrende på forløbet og tage ansvar for egen læring, hvilket passer med Lee og Wickerts punkt 1: at undervisningen (læringen) skal være centreret om de studerende og punkt 2: at læreplanen skal være baseret på de studerendes behov, punkt 5: at der skal forhandles i undervisningen og punkt 9: at de studerende skal være aktive deltagere og ikke passive modtagere i undervisningen. Lee og Wickert fremhæver at der skal inddrages relevante og meningsfulde aktiviteter i undervisningen, og at deltagernes erfaringer skal inddrages. Det stemmer fint overens med Loengs beskrivelse at de voksnes anvendelses perspektiv er kort. De voksne skal føle, at de kan bruge det, de lærer, til noget umiddelbart.

Ifølge Korsgaard (1999) ligger Knowles tanker om andragogik i forlængelse af den humanistiske tradition, der ser pædagogikkens hovedopgave som det at hjælpe individet til at udvikle og udnytte sit potentiale fuldt ud. Korsgaard tilføjer, at det er den humanistiske psykologi, der i særlig grad har præget andragogikken/voksen-pædagogikken. Og at andragogikken/voksen-pædagogikken derfor ikke beskæftiger sig med voksnes indlæring af færdigheder og kundskaber men udelukkende koncentrer sig om de voksnes personlighedsudvikling. Dette rejser spørgsmålet, om det er muligt at tale om metoder uden at inddrage det faglige indhold, der skal undervises i, hvis voksenundervisningen altså drejer sig om andet (og mere) end personlighedsudvikling. Ud fra det synspunkt at det faglige indhold har betydning for valget af metode, forlader vi det almendidaktiske område og vender os mod fagdidaktikken, som i dette tilfælde er matematikdidaktik.

”Best Practice” som et fagdidaktisk spørgsmål

Vælger vi i stedet at betragte spørgsmålet om ”Best Practice” som et fagdidaktisk spørgsmål, så er der to muligheder for at finde svar på spørgsmålet. For det første kan man vende sig til den meget omfattende almene matematikdidaktiske litteratur. I denne litteratur gives der retningslinier for, hvad der er god matematikundervisning, og heri kan man blandt andet læse om, hvordan man kan undervise i de mange forskellige områder indenfor matematikken. Da det nu er helt grundlæggende matematik, jeg i denne artikel taler om, er man som voksenunderviser henvist til at skulle læse om begynderoplæring. En anden mulighed er, at læse om de mange forskellige metodiske tilgange, man som lærer kan anvende i matematikundervisningen, herunder projektarbejde, temaarbejde og undersøgelseslandskaber (se fx Botten, 1999; Skovsmose, 1994; Skovsmose, 1999). Men disse forslag handler om undervisning af børn og tager ikke hensyn til de voksnes erfaringer og behov for her og nu anvendelse.

En anden mulighed er at vende sig mod det internationale forskerforum ”Adults Learning Mathematics[5]” (ALM), der hvert år de sidste 11 år har afholdt en konference om voksne og matematik, og som har udgivet en rapport efter hver konference. Det, man skal tage stilling til, er, om det er muligt at tale om god matematikundervisning generelt uafhængigt af undervisningens formål og sammenhæng. Er der f.eks. forskel på at undervise voksne og børn i grundlæggende matematik. Jeg mener ikke, at man umiddelbart kan overføre, det der er god matematikundervisning for børn til et voksenuddannelseskursus. Man er nødt til at tage højde

[5] Se eventuelt mere om ALM på www.alm-online.org

for, at det er voksne man underviser, og at de fleste af kursisterne allerede en gang tidligere har modtaget undervisning i matematik.

ALM blev stiftet I 1994. Deltagerne i ALM er med til at fastsætte diskursen for, hvad der er god undervisning for voksne når indholdet er matematik. Interessefeltet indenfor ALM er bredt, og deltagerne i netværket beskæftiger sig ikke kun med ”Basic education”, men også med erhvervsuddannelser og med voksne der påbegynder universitetsstudier. En stor gruppe interesserer sig dog for undervisning i ”numeracy” eller numeralitet, som Lindenskov og Wedege (1998) har introduceret i dansk kontekst. Dette forskningsområde deler sig igen i to grupper: en lille gruppe der beskæftiger sig med undervisning af voksne, der ikke før har gået i skole, og en gruppe der beskæftiger sig med voksne der tidligere har modtaget undervisning i matematik i f.eks. folkeskolen og i forbindelse med anden uddannelse.

Det er muligt at skelne mellem mindst tre forskellige former for matematikundervisning, der hver i sær har vidt forskelligt sigte:

- Matematikundervisning som en del af en sammenhængende uddannelse f.eks. en erhvervsuddannelse (som værktøj i uddannelsen eller erhvervet)
- Matematikundervisning som forberedelse til uddannelse/videre studie (som adgangsbillet til yderligere uddannelse)
- Matematikundervisning som ’medborgerundervisning’ eller ’almendannelse’ (som forberedelse til livet)

Det synes oplagt at sigtet med undervisningen har betydning for hvad der opfattes som ”Best Practice”? Her vil jeg ikke beskæftige mig med, hvad det er for ”en matematik” voksne skal lære, men udelukkende om ”god voksenundervisning i matematik” med fokus på grundlæggende matematik.

En gennemlæsning af artiklerne i ALM’s konferencerapporter viser at følgende ord og begreber er det, jeg kalder ”plus-ord” i den matematikdidaktiske debat:

- Trygt læringsmiljø
- Gruppearbejde
- Aktiviteter
- Problemløsning
- Refleksion
- Hovedregning (Mental Math)
- Selvstyret læring (Independent learning)

Et trygt læringsmiljø

At skabe et trygt læringsmiljø er særligt vigtigt i voksenundervisning og matematik, fordi mange voksne kommer til undervisningen med matematik-angst[6]:

> Regrettably, the adult developmental math student is frequently “math-anxious” and afraid of appearing foolish. A caring, compassionate atmosphere must be established from the outset. (Safford, 1994: 42)

At skabe tryghed er en forudsætning for, at de voksne kan komme i gang med at lære noget. En af måderne til at skabe et trygt læringsmiljø er ifølge Safford (1994) at lade deltagerne arbejde sammen i små eller større grupper.

[6] For en nærmere beskrivelse af begrebet matematik-angst (mathematics anxiety) se f.eks. Evans (2000)

Gruppearbejde
Safford fremhæver, at fordelen ved at arbejde i grupper er at problemløsningen styrkes i grupper, men samtidig gør hun opmærksom på, at voksne ikke skal tvinges i grupper eller til at arbejde sammen med nogle de ikke ønsker at arbejde sammen med.

> Substantial time and effort was put into established an open, friendly environment. […] Students were strongly encouraged, though not required, to work in small groups. […] While we felt that problem-solving is enhanced by groups,[…] This is one area where andragogy differs from pedagogy. The privacy of adult student was respected, and no one was forced to join a group if they chose to work independently. (Safford, 1994: 42)

Da et af gruppearbejdets formål er at skabe et trygt miljø, er det vigtigt ikke at etablere utryghed ved at sætte voksne sammen med nogle de ikke trives sammen med.

I ALM opfattes matematik som en social-konstruktion, der udvikles imellem mennesker. Med udgangspunkt i denne antagelse får gruppearbejde også betydning for de voksnes læreproces. Det bliver betydningsfuldt at tale om matematikken, at sætte ord på matematikholdige problemstillinger. Det bliver ligeledes betydningsfuldt, at give den enkelte mulighed for at synliggøre, hvordan han/hun regner, og hvilke metode de han/hun har udviklet til løsning af hverdagsproblemstillinger. En af måderne til at overvinde angsten er netop, at blive klar over egne ressourcer.

Samtidig bliver problemstillinger ofte mere spændende og udfordrende, hvis man er flere om at formulere det, og billedet af en "traditionel matematikundervisning" brydes, når gruppearbejdet erstatter billedet af "en elev – en opgave – et rigtigt svar".

Aktiviteter
Hvordan skal gruppearbejdet indholdsudfyldes? Et af de områder, som der bliver fremhævet i ALM, og som Wedege og Lindenskov i dansk sammenhæng har indført i den nye læreplan for FVU-matematik, er inddragelse af aktiviteter i undervisningen. Som i den almene voksenpædagogik er inddragelse af relevante og meningsfulde aktiviteter i undervisningen en væsentlig faktor.

> We can draw on the range of activities that the typical adult is involved in, but this range will vary greatly across the group in a typical basic education or college pre-calculus course. (Evans, 1999: 77)

Baggrunden for at inddrage aktiviteter i undervisningen skal findes i den opfattelse, der generelt er i ALM, at voksne er kompetente, og at de allerede er i besiddelse af numeralitet, de er bare ikke klar over det (se f.eks. Johansen, 2005). Ifølge Safford er voksne er en rig ressource i undervisningen. De bruger en række forskellige problemløsningsstrategier, men føler ofte, at deres egen måde ikke er den rigtige måde at løse det matematiske problem på.

> Adult learners are a rich resource for learning. They not only found examples of mathematics in life, but demonstrated successful strategies for solving problems, even when they felt that theirs was not the "right" way to solve them. By sharing multiple strategies, contrasting the approaches, and recognizing similarities between them, student gained confidence in their ability to do mathematics. (Safford, 1994: 42)

Aktiviteterne inddrages i undervisningen både for at matematikundervisningen skal være meningsfuld for deltagerne og for at synliggøre matematikken i dagliglivet. De voksne skal kunne se, at matematikken kan bruges til noget i deres dagligliv, og de matematikholdige kompetencer de voksne er i besiddelse af skal synliggøres gennem undervisningen. En af måderne at bryde matematik-angsten på er at gøre de voksne klar over, at de allerede kan noget matematik, og at den hverdagsmatematik, de kan, er god nok.

Ideen om at bygge al undervisning op omkring aktiviteter fra de voksnes dagligdag og arbejdsliv er fascinerende, og dette er en af grundstenene i den nye læreplan for FVU-matematik (Lindenskov og Wedege, 2001). I bekendtgørelsen for FVU-matematik står der, at undervisningen foregår i et dynamisk samspil mellem aktiviteter, data og medier samt matematiske operationer og begreber. Men der er dog nogle der stiller spørgsmålstegn ved om det er muligt at bygge en hel læreplan op omkring hverdagsaktiviteter.

> The idea that we can improve mathematics education by directly importing everyday activities to the classroom may be a tempting one, especially in the case of adult education. But recent classroom studies lead to questions on whether one can build an entire mathematics curriculum around everyday activities and shows that, once transposed to the classroom setting an everyday problem is no more the same. (Schliemann, 1999: 28)

Schliemann spørger, om det er muligt at bygge en hel læreplan op på hverdagsaktiviteter, og samtidig stiller hun spørgsmålstegn ved, hvad der sker med hverdagsaktiviteter, når de hentes ind i en formel undervisningssituation. Det er en specifik problemstilling, som det nye fag FVU-matematik måske på sigt vil kunne være med til at give svar på. Hvad sker der med hverdagsaktiviteter og deres læringspotentiale, når de inddrages i formel undervisning?

Det hollandske projekt
Et hollandsk udviklingsprojekt har udviklet sin helt egen model for god voksenundervisning (Laat, Duin, Haacke, Leek og Eindhoven, 1999). Projektet er på dansk blevet døbt PUR-projektet (Lindenskov og Sonberg, 1999). Modellen har et hovedprincip, som de kalder ”Plan – do – Review” eller ”Planlæg – udfør – reflekter”. Princippet skinner igennem alle aktiviteter. Modellen består af fire elementer. Den første halve time tages der udgangspunkt i en hverdagsaktivitet for at synliggøre matematikken i de voksnes hverdag. Det næste kvarter arbejdes der med hovedregning og synliggørelse af, hvordan deltagerne regner i hovedet. Derefter arbejder deltagerne individuelt eller i mindre grupper med det emne, de selv har valgt og sat mål op for. Hver tredje uge har en mindre gruppe af deltagerne møde med en tutor (seks deltager af gangen) ved dette møde, skal deltagerne hver især reflektere og sætte ord på hvad de har lært de sidste tre uger og hvilke mål de sætter op for sig selv de næste tre uger.

Det hollandske projekt inddrager elementer i undervisningen som også bliver anbefalet af andre forskere i ALM. For det første lægges der vægt på hovedregning. Baggrunden for dette er, sådant som jeg tolker det, at hovedregning er en vigtig kompetence i et almindeligt voksenliv. Når vi køber ind, har vi brug fora t kunne lave overslag i hovedet. For det andet inddrager udviklingsprojektet hverdagsaktiviteter i undervisningen. For det tredje inddrager projektet bevidst refleksion.

Ønsket om refleksion er begrundet i, at undervisningen i matematik bygger på et konstruktivistisk grundsyn. De lærende skal selv konstruere deres matematikviden.

> The driving education theory incorporated in the course was Constructivisme. […] the guiding principles of constructivism hold that knowledge must be actively constructed by the learners and that coming to know is a process of organizing and adapting to the world as experienced by the learner (Kilpatrick). (Safford, 1994: 41)

Undervejs i forløbet, skal der skabes rum for, at deltagerne kan reflektere over egen læreproces, og opstille mål – hvad vil jeg gerne lære

- Hvad er det vi skal lære gennem denne aktivitet
- Hvad har vi lært af denne aktivitet
- Hvilken matematik har vi brugt?
- Har vi brugt Commonsense?
- Har jeg nået mit mål
- Er jeg tilfreds med mig selv
- Ønsker jeg at lære mere? Hvad?
- Hvad mangler jeg stadig?

Når den voksne har reflekteret over egen læreproces, egne ønsker og egne mål, så stiller det krav om et fleksibelt læringsmiljø, hvor det er muligt for den enkelte at arbejde med egne mål og egen læreproces.

Det danske udviklingsprojekt: FVU-matematik

Udviklingen af det nye matematikfag for voksne FVU-matematik, har givet mig mulighed for at iagttage to forskellige diskurser om ”Best Practice” i matematikundervisning for voksne: en politisk diskurs og en forsker/uddannelsesplanlægger diskurs. Som nævnt i indledningen var der et politisk ønske om at FVU-matematik skulle være noget særligt.

Ifølge de danske politikere er ”Best Practice” i matematikundervisning for voksne at flytte ud af de traditionelle klasselokaler: ”fra skolebænken til drejebænken”, sagde den daværende undervisningsminister Margrethe Vestager. Ud over dette er god undervisning karakteriseret af, at deltagernes interesser og behov skal i centrum, samtidig med at der er opstillet klare mål og delmål. Politikerne vægter at deltagernes progression løbende evalueres, og at undervisningen afsluttes med en centralt stillet prøve. Undervisningen skal være fleksibel i tilrettelæggelse, den skal kunne foregå som enkeltundervisning, holdundervisning eller undervisning i mindre grupper (Johansen, 2005).

Ifølge forskerne/uddannelsesplanlæggerne er ”Best Practice” i matematikundervisning for voksne centreret om en række aktiviteter fra deltagernes hverdagsliv (Johansen, 2005). I undervisningen skal der være et dynamisk samspil mellem de inddragne aktiviteter, de data og medier, der indgår i aktiviteterne, samt de matematiske operationer og begreber, som skal bruges til at bearbejde de fremkomne data. For uddannelsesplanlæggerne er det vigtigt, at deltagernes matematikholdige kompetencer synliggøres i undervisningen, og at den skjulte matematik i de voksnes hverdagsliv synliggøres gennem de valgte aktiviteter. Undervisningen skal ligeledes opleves og gøres relevant for deltagerne idet de voksnes forgrund[7] og baggrund sættes i centrum.

Afsluttende bemærkninger

Jeg har i denne artikel med udgangspunkt i den almene voksenpædagogik og den særlige matematikdidaktik, der omhandler voksne og matematiklæring fremhævet væsentlige træk ved ”Best Practice” i matematikundervisning for voksne. I min gennemgang er det blevet tydeligt, at der er områder, der er fælles for den almene voksenpædagogik og den særlige matematikdidaktik for voksne, og der er et væsentligt område, som adskiller sig fra såvel den almene voksenpædagogik og den almene matematikdidaktik.

[7] Inspiration til begrebet ”deltagernes forgrund” er hentet hos Ole Skovsmose (se f.eks. Skovsmose, 2002)

Det, den særlige matematikdidaktik for voksne og den almene voksenpædagogik er enige om, er, at undervisningen skal tilrettelægges så der tages hensyn til, at deltagerne er voksne med erfaringer fra hverdagslivet. Der er også enighed om, at undervisningen skal være meningsfuld og relevant for de voksne, og at undervisningen skal tilrettelægges så de voksne får indflydelse på undervisningen.

Men der er et område, som den almene voksenpædagogik ikke tager højde for. Det er de voksnes matematik-angst. Det at tilrettelægge undervisning på en sådan måde, at den imødekommer voksne med angst for faget, er noget helt særligt, når man taler om "Best Practice" indenfor voksenundervisning i matematik.

I denne artikel har jeg fremhævet inddragelse af hverdagsaktiviteter som noget helt centralt. Denne ide har været omdrejningspunkt i udviklingen og designet af den nye bekendtgørelse for FVU-matematik. Kun forskning vil kunne vise, om netop denne måde er en hensigtsmæssig måde at møde de voksne med matematik-angst på. Og kun forskning vil kunne vise, om der sker noget med hverdagsaktiviteter, og hvad der sker med aktiviteterne, når de bliver inddraget i formel undervisning.

Referencer

Botten, G. (1999): *Meningsfylt matematikk – nærhet og engasjment I læringen*. Straume: Caspar Forlag.

Elbro, C.; Møller S. og Nielsen, E.M. (1991): *Danskernes læsefærdigheder. En undersøgelse af 18 – 67-åriges læsning af dagligdags tekster.* Svendborg: Undervisningsministeriet.

Evans, J. (1999): Adults maths and Everyday life: Building Bridges, Facilitating 'Transfer'. In van Groenestijn, M. og Coben, D. (red.): *Mathematics as part of Lifelong Learning. Proceedings of the fifth international conference of 'Adults Learning Maths – a Research Forum' held at Utrecht, The Netherlands. ALM-5. 1-2-3 July 1998.* London: Goldsmiths College.

Evans, J. (2000): *Adults' Mathematical Thinking and Emotions. A Study of Numarate Practices.* London: Routhledge, Falmer.

Johansen, L. Ø. (2005): *"Hvorfor skal voksne tilbydes undervisning i matematik?" – en diskursanalytisk tilgang til begrundelsesproblemet.* Aalborg: Institut for Læring.

Knowles, M. (1970): *The modern practice of adult education: Andragogy versus pedagogy.* New York.

Korsgaard, O. (1999): *Kundskabskapløbet. Uddannelse I videnssamfundet.* Haslev: Gyldendal.

Van Laat, M.; van Duin, S.; Haacke, F.; Beckkers, R. Og van Leek, N. (1999): "The practice of Independent Learning in Adult Basic education. In van Groenestijn, M. og Coben, D. (red.): *Mathematics as part of Lifelong Learning. Proceedings of the fifth international conference of 'Adults Learning Maths – a Research Forum' held at Utrecht, The Netherlands. ALM-5. 1-2-3 July 1998.* London: Goldsmiths College.

Lee, A. Og Wickert, R. (2000): “Reading the discourses of adult basic education teaching.” I Foley, G. (red.): *Understanding Adult education and Training*. Singapore: Allen and Unwin.

Lindenskov, L. og Sonberg, B. (1999): *PUR i voksenundervisning i matematik. Planlæg – Udfør – Reflektér. Et hollandsk udviklingsprojekt.* Roskilde: Center for forskning i matematiklæring, Skrift nr. 9.

Lindenskov, L. og Wedege, T. (1998): *Tre rapporter fra FAGMAT - et projekt om tal og Faglig regning i arbejdsmarkedsuddannelserne*. Roskilde: Roskilde Universitetscenter, IMFUFA, Tekst nr. 349.

Lindenskov, L. og Wedege, T. (2001): *Numeracy as an Analytical Tool in Mathematics Education and Research.* Roskilde: Center for Forskning i matematiklæring, Skrift nr. 31.

Loeng, S. (1999): ”Finnes det en voksenpedagogikk?” I Jensen, C. N.(red.): *Om voksenundervisning – grundlag for pædagogiske og didaktiske reflektsioner.* Værløse: Billesø & Baltzer.

Safford, K. (1994): “Introduction to Algebra for Adult Students”. In Coben, D. (red.): *Adults Learning maths – A Research Forum. ALM – 1. Proceedings of the Inaugural Conference of Adults learning maths – A Research Forum. 22-24 July 1994 at Fircroft College Birmingham UK.* London: ALM.

Schliemann, A. (1999): “Everyday Mathematics and Adult Mathematics Education. In van Groenestijn, M. og Coben, D. (red.): *Mathematics as part of Lifelong Learning. Proceedings of the fifth international conference of ‘Adults Learning Maths – a Research Forum’ held at Utrecht, The Netherlands. ALM-5. 1-2-3 July 1998.* London: Goldsmiths College.

Skovsmose, O. (1994): *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Skovsmose, O. (1999): *Undersøgelseslandskaber.* Roskilde: Centre for research in learning Mathematics, Publication no. 5.

Skovsmose, O. (2002): *Students' Foreground and the Politics of learning Obstracles.* Roskilde: Centre for research in learning Mathematics, Publication no. 35.