Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Skriftserie

Konferanserapport

No. 7 - 2010

"Statistikk og sannsynlighet"

Nordisk konferanse i matematikkdidaktikk ved NTNU
23. og 24. november 2009

Bilde forside : Mike Naylor

Redigert av Merete Lysberg

Trykk: NTNU-trykk
ISSN: 1503-5336
ISBN: 978-82-997448-1-2

Forord

Novemberkonferansen 2009 ble nok et vellykket arrangement. Temaet var *Statistikk og sannsynlighetsregning*. Dette er et område som har vært litt ut og inn av pensum i norsk skole og kanskje litt vanskelig og ukjent for noen lærere.

Både evalueringene og inntrykket vi som arrangører sitter igjen med sier oss at Novemberkonferansen 2009 ble en suksess. Alt det praktiske fungerte utmerket og alle bidragsyterne gjorde en stor innsats. For første gang ble Matematikksenterets vertskap, NTNU, bedt om å åpne konferansen. Rektor Torbjørn Digernes gjorde dette med stor entusiasme. Det er nok ikke helt riktig å trekke fram enkelte av foredragsholderne, men det kan ikke stikkes under en stol at de to amerikanske professorene, J. Michael Shaughnessy og Mike Naylor hadde en enestående evne til gjøre temaene sine interessante. Dette gjelder selvfølgelig også de andre som bidro til det faglige. Jeg er stolt og glad for at vi klarte å samle så mange dyktige bidragsytere. Jeg har også lyst til å trekke fram de dyktige ressurspersonene Matematikksenteret har. Nok en gang viste de fram spennende undervisningsopplegg. En stor takk til alle sammen!

En slik konferanse blir ikke vellykket uten at logistikken fungerer. Dette gjelder alt fra rom med teknisk utstyr til servering av kaffe og lunsj. Jeg er imponert over hvor smidig dette gikk med så mange personer involvert. Dette skyldes ikke minst den dyktige og erfarne staben vi har på Matematikksenteret. For oss er dette en stor dugnad og jeg er både glad og imponert over den entusiasmen alle viser for å være med. Ingen sier nei til å ta et tak!

Selv om konferansen de siste årene har vært konsentrert om fagtema i skolen, vil vi for 2010 gjøre en endring. Vi velger å lage en konferanse med temaet *Meningsfylt Matematikk Motiverer*. Med dette åpner vi for flere faglige vinklinger og nivå i skolesystemet vårt. Vi vil fokusere på at undervisningen skal være meningsfull for den enkelte elev, uansett ståsted og planer for veien videre.

I denne konferanserapporten finner dere beskrivelser av de fleste av aktivitetene under konferansen. Jeg benytter anledningen til å takke alle bidragsyterne for en fantastisk jobb. Takk også til alle deltakerne som var ivrige og engasjerte under hele konferansen, og ga bidragsyterne en positiv opplevelse av å nå fram til publikum.

Velkommen tilbake til Novemberkonferansen 2010.

Jon Walstad
Leder, NSMO

Innholdsfortegnelse

Plenum 1, mandag kl 09.30 – 10.15

Bjørnar Alseth har studert matematikk og matematikkdidaktikk ved Universitetet i Oslo. Han har doktorgrad i barns læring av matematikk. Han har arbeidet lenge med allmennlærerutdanning og ledet arbeidet med matematikkplanen i Kunnskapsløftet. Han er medforfatter av læreverket Multi for barnetrinnet. Alseth er nå forsker ved Universitetet i Oslo, hvor han arbeider med nasjonale og internasjonale kartleggingsprøver.

Sannsynlighet, så viktig og så vanskelig!

Hensikten med dette foredraget er å vise gjennom en rekke eksempler hvor sentralt sannsynlighet er i vår hverdag. Ustanselig blir vi stilt overfor fenomener hvor sannsynlighet spiller en rolle. Det er imidlertid et paradoks at svært mange har dårlig forståelse for de sentrale begrepene innen sannsynlighet. Det gjelder både barn og voksne. Det er derfor høyst betimelig at skolen i økende grad prøver å forberede elevene på denne virkeligheten ved at sannsynlighet får økt oppmerksomhet i læreplaner, lærebøker og i matematikkundervisningen.

I avisene kan vi omtrent daglig lese om store katastrofer som *kan* inntreffe:

- Aftenposten meldte i 2001 at genteknologer har klart å klippe et gen fra en arktisk flyndre og sette dette inn i en potetplante. På den måten vil poteten bli mer frostherdig. Er dette en bra ting? På den ene siden er det åpenbart gunstig for potetproduksjonen at plantene tåler frost bedre. På den andre siden er vi usikre på konsekvensene av slike inngrep. Aftenposten skriver at et utvalg med eksperter var i hovedsak positive til genmodifisering, mens et annet med legfolk var skeptiske.
- En rapport fra Jernbaneverket i 2000 viser at de *kalkulerer* med én kritisk situasjon hvert år, i hovedsak fordi tog vil kjøre forbi stoppsignal mellom 10 og 70 ganger per år. Er dette alarmerende? Bør vi ut fra denne rapporten vurdere andre fremkomstmidler?
- Adresseavisen meldte i 2006 at Meråker Kjøtt vil bruke over 300 kg fårekjøtt som *kanskje* var smittet med den farlige E. coli bakterien. Bør vi forbrukere protestere mot dette? Kanskje ble vi straks bønnhørt, fordi Nationen skrev samme år at bøndene ikke får klippe sauene sine selv, nettopp for å beskytte forbrukerne mot bakterier i fårekjøttet. Og det var vel bra?
- Aftenposten skrev i november 2009 at drivhuseffekten *kunne føre til* en slik global oppvarming at det blir 4 grader varmere i 2100. Dette vil kunne føre til mindre mat nesten overalt, for lite vann til tre milliarder mennesker og høyere vannstand i havet som rammer millioner. Hvis dette stemmer, er det forferdelig.
- I samme måned skrev Aftenposten at det å ha en dårlig sjef *øker sannsynligheten* for å få hjerteinfarkt. Dette ble slått fast i en doktoravhandling fra Karolinska Institutet.

Det alle disse eksemplene har felles, er at vi blir stilt overfor en risiko. Det er en sjanse for at noe ille kan skje. I alle tilfellene er konsekvensene av hendelsene relativt store. Det er snakk om til dels fryktelige konsekvenser. Samtidig, og heldigvis, er sjansene for hendelsene små. For å forstå disse avisartiklene, må vi derfor kunne vurdere og forholde oss til små sannsynligheter. Om vi overvurderer sannsynlighetene, vil frykten for alle mulige konsekvenser bli overveldende. Samtidig kan vi ikke se fullstendig bort fra skremmende hendelser selv om risikoene er lave. Det vesentlige er å kunne vurdere utfallene og konsekvensene i forhold til sjansen for at de inntreffer.

Men det å forholde seg til tilfeldigheter er vanskelig. Det kan virke som om den menneskelige hjernen er innstilt på mønster, struktur, sammenhenger. Vi lager oss mønstre og sammenhenger nærmest uavhengig om noe slikt ligger under eller ikke. For eksempel var det mange som mente at jordkloden ville gå under 6. juni 2006 fordi dette er Dyrets tall i Johannes åpenbaring (666). Her var det heldigvis ikke noen sammenheng!

Det store dilemmaet er at en rekke fenomener opptrer tilfeldige i det små, men danner mønstre ved store tall og gjentatte hendelser. Vi kan illustrere dette ved å modellere regndråper som faller. Lag 10 punkter i et regneark ved å velge tilfeldige x- og y-koordinater for eksempel mellom 0 og 10. Lag et x-y-plot av punktene. Be regnearket rekalkulere punktene og lag en 8-10 slike diagrammer. De vil ha en betydelig variasjon. Her er noen eksempler, de tre til venstre:

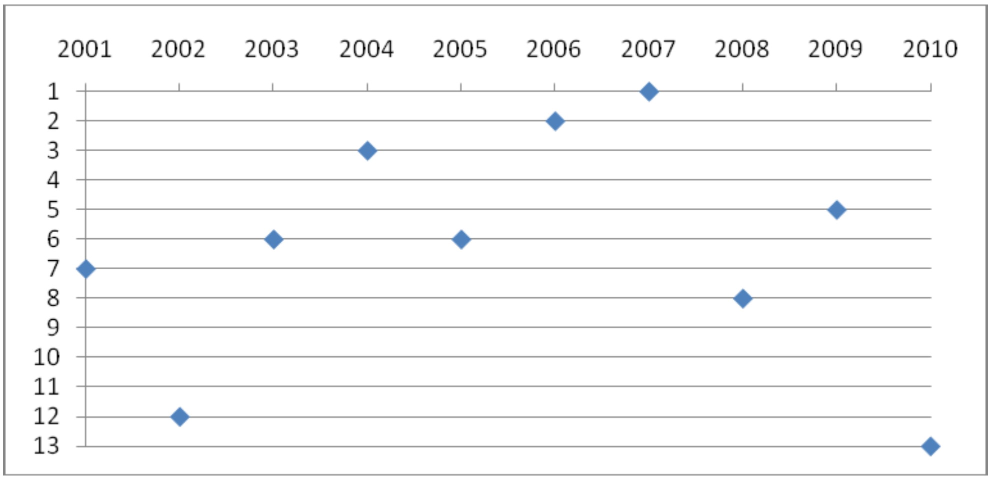
Gjør så det samme med 1000 punkter. Da vil en se at punktene fordeler seg forholdsvis jevnt utover flaten. Vårt problem i dagliglivet er at vi ofte står overfor fenomener hvor vi ikke får se bildet med 1000 punkter, men et bilde med kun noen få. Og de få punktene vil kunne opptre svært tilfeldig. Vi bør da erkjenne denne tilfeldigheten og ikke lete etter mønstre og sammenhenger som ikke er der.

Et sted hvor tilfeldigheter spiller en stor rolle er innen sport. Jevne fotballkamper kan avgjøres med et mål langt på overtid. Eller selv ujevne kamper kan avgjøres ved at det laget som spiller dårligst vinner ved at de slumper til med mål på sitt eneste angrep i løpet av hele kampen. Tilfeldigheter og flaks vil kunne avgjøre enkeltkamper. Men også flere seire eller tap på rad kan skyldes tilfeldigheter, ikke nødvendigvis at laget er blitt mye bedre eller dårligere.

Noen trenere mener at hvis laget har spilt dårlig, er det nødvendig å gi spillerne en real skyllebøtte, skjelle dem huden full. Eller gi dem straffetrening. Og de kan vise til eksempler på at dette har hjulpet: I neste kamp har de sannelig spilt bedre. Det går an å forstå dette annerledes. Lagets prestasjoner er ikke deterministiske. De er i en viss utstrekning tilfeldige, og derfor vil de variere: Noen kamper vil laget spille bedre enn de egentlig er, andre kamper vil de spille dårligere. Prestasjonene vil variere om en slags midtposisjon, som er lagets egentlige dyktighet. Det betyr at hvis laget spiller svært dårlig i en kamp, altså betydelig dårligere enn det de egentlig er, vil de med stor sannsynlighet spille bedre i neste kamp, altså nærmere midtposisjonen. Det er ikke sikkert, men det er mest sannsynlig. Sett på den måten, er det god grunn til å tro at laget vil spille bedre helt uavhengig av trenerens skyllebøtte. Det må også poengteres at det motsatte gjelder: Etter en svært god kamp er det mest sannsynlig at neste kamp blir dårligere.

Det er takknemlig å hente eksempler fra fotballen fordi den opptar så mange. Her er et til: Ved å erkjenne at tilfeldigheter spiller en stor rolle, kan flere trenere få bedre arbeidsforhold. Det hadde hjulpet for Mons Ivar Mjelde. Han var stjerne som spiller på Brann på 90-tallet, og i 2003 tar han over som trener for klubben. I 2007 vinner Brann serien, og de går videre til gruppespillet i UEFA-cupen. Mjelde blir "Årets trener" og får "Kniksen-prisen". Etter hva jeg har hørt, foreslår ordfører Herman Friele å sette opp en statue av Mjelde på Torgallmenningen. Mjelde får ny kontrakt med Brann fram til 2011. Året etter blir Brann nr 8 i serien, og nå er Mjelde en så dårlig trener at han får sparken. Når Brann vant i 2007, betød det at de hadde et godt lag og en god trener? Og var han blitt en så elendig trener året etter at han burde få sparken? Eller skyldtes begge deler tilfeldigheter?

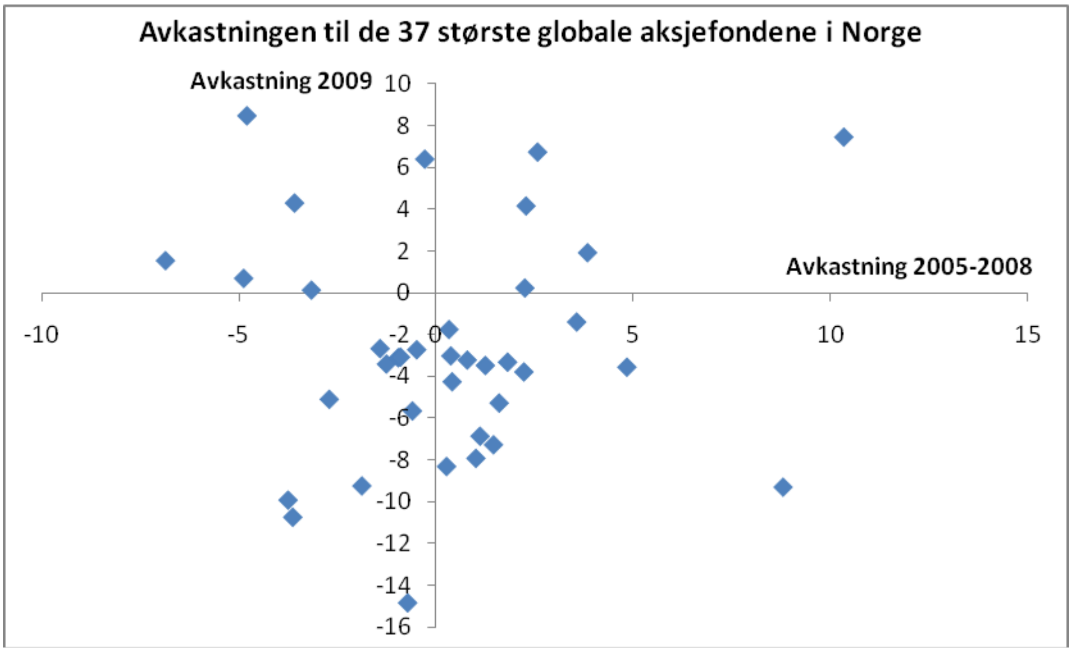
Det at mange fenomener i en viss grad er tilfeldige, betyr ikke at alt er et sjansespill. Som med regndråpene over kan se om tilfeldighetene kan reduseres, for eksempel ved å øke antallet. Det gjøres i fotball ved at det ikke er enkeltkamper som avgjør serien, men antall poeng etter at alle lagene har møtt hverandre to ganger. For å vurdere Mjeldes dyktighet, kan vi i tillegg se på hvordan Brann gjorde det over flere år. Her er plasseringene til Brann etter årtusenskiftet (2010 etter 11 kamper):



I disse årene har Brann en snittplassering på 6,3. I Mjeldes periode var snittet 5,0. Hvis vi sier dette er et uttrykk for Branns dyktighet disse årene, var det høyst rimelig å forvente at resultatene året etter at de vant ville bli dårligere. Og 8. plass er ikke mye under deres gjennomsnittelige prestasjoner denne perioden. Det beste hadde kanskje vært å la ham fortsette?

Også i mange andre sammenhenger har vi en tendens til å tillegge personer med suksess honnør for deres prestasjoner. Men det kan godt hende de kun har vært heldige. I næringslivet hadde Idar Vollvik en stor stjerne. Det skyldtes at han i 2001 kjøpte mobilselskapet Chess for 4 millioner og utviklet det formidabelt. Selskapet økte i verdi, og i 2005 solgte han det for 2,4 milliarder. På den tiden ble han ofte bedt om å forklare årsakene til sin og selskapets suksess. Men var det en sammenheng, eller hadde han kun hatt flaks? Her har vi kun ett punkt å se på. Sikkert er det i hvert fall at han ikke har vært like heldig med det han har foretatt seg innen næringslivet siden.

Et annet eksempel er måten vi vurderer aksjeforvaltere. Hvis vi bruker deres årslønn som mål, er dette blant våre beste hoder. Men hvilken lønn og anseelse fortjener de hvis alt de gjør er basert på flaks? Noen forvaltere av aksjefond liker å vise til historien når de markedsfører seg: Se så bra utvikling fondet vårt har hatt de siste 4 årene (eller de siste 10 årene – de velger naturligvis ut de årene hvor fondet har gjort det best)! Hvis de virkelig var bedre enn andre til å plukke aksjer, skulle det være en sammenheng mellom denne historien som de viser til og den framtidige utviklingen av fondet. Jeg har sett etter en slik sammenheng blant de 37 største globale aksjefondene i det norske markedet. Jeg tok utgangspunkt i 2008, slik at jeg da kunne se om det var noen sammenheng mellom historien (utviklingen fra 2005 til 2008) og den framtidige utviklingen (fra 2008 til 2009). Dette er illustrert nedenfor:



Hvis det var en sammenheng, skulle punktene ligget som en pølse på skrå fra nedre venstre hjørne til øvre høyre hjørne. Det ville vært tilfellet hvis det var sånn at de som gjorde det bra i tidsrommet 2005-2008 også gjorde det bra i 2009, mens de som gjorde det dårlig i 2005-2008 også gjorde det dårlig i 2009. Men som diagrammet viser, det er praktisk talt ingen sammenheng. Se for eksempel på de tre punktene lengst til venstre. Dette er de tre fondene som gjorde det dårligst i perioden 2005-2008. I 2009 var alle blant de beste, blant de som oppnådde positiv avkastning. Se også på de to punktene lengst til høyre, altså de som gjorde det best i perioden 2005-2008. Det ene var blant de beste også i 2009 med ca 7 % avkastning, mens det andre var blant de dårligste, med ca -9 % avkastning. For forbrukerne betyr dette at det er ingen vits i å se på historien for å velge fond. Det er ingen forvaltere som en kan forvente vil gjøre det bedre enn de andre. Det er tilfeldigheter som avgjør fondets utvikling. Konklusjonen er at det er ingen grunn til å betale for denne tjenesten. I stedet bør vi velge såkalte indeksfond hvor de årlige forvaltningsgebyrene er betydelig lavere og kursutviklingen like god.

Det er altså en lang rekke daglige situasjoner hvor vi blir stilt overfor sannsynlighet. Vi mennesker har en hang til mønstre og sammenhenger. Vi finner årsaker og lager deterministiske modeller også der det ikke passer. I slike tilfeller trekker vi feilaktige konklusjoner. Vi bør i stedet anerkjenne på hvilken måte og i hvilken utstrekning tilfeldigheter innvirker. Det vil gjøre oss i stand til å vurdere det vi står overfor på et mer reelt grunnlag. Jeg synes derfor det er fint at Novemberkonferansen 2009 omhandler sannsynlighet. Dere vil i løpet av konferansen møte alle de ulike aspektene av dette emnet, se på en lang rekke eksempler og få mange tips til hvordan en kan arbeide med dette i undervisningen. En liten oppfordring til slutt: Det å innse at tilfeldighet spiller en viktig rolle betyr ikke at en skal sette seg tilbake å la skjebne råde. Tvert i mot ligger det bak dette en oppfordring til å stå ekstra på. Husk at hvert kast med terningen øker sjansen til gevinst. I 1995 fullførte den da ukjente forfatteren J. K. Rowling manuskriptet til den første boken om Harry Potter. Hun sendte manuskriptet til det ene forlaget etter det andre, men ingen syntes det var noe interessant. Først det trettende forlaget ville gi ut boken. De tolv første overså bokens kvaliteter, og det er forbløffende hvordan Rowling selv ikke ga opp, men beholdt på sin tro på manuskriptet og prosjektet. Det er vanskelig å forestille seg en fotballtrener som fortsatt har tillit etter 12 strake tap.

Plenum 2, mandag kl 10.45 – 11.30

Mike Shaughnessy has worked for over thirty years at Oregon State University and at Portland State University (USA) as a Professor of Mathematics and Statistics Education. Dr. Shaughnessy has taught a wide range of mathematics and statistics content courses for pre-service and in-service teachers, elementary through secondary levels, and worked on many projects involved in the continued professional development of mathematics teachers. He has published many articles and books in his career, principally in his two favorite areas, the teaching and learning of probability and statistics, and, the teaching and learning of geometry. He was recently elected President of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), and is currently serving a year as President Elect, prior to his two-year term as President.

Student Reasoning and Sense Making in Statistics: The Case of Sampling

Introduction
Statistics is increasingly recognized as a critical area for students' success in dealing with the requirements of citizenship, employment, and continuing education. In addition, statistics is one of the most important areas of the mathematical sciences for helping students make sense of the information all around them. Statistical reasoning is inherently different from mathematical reasoning, and effective development of it requires distinct experiences. In particular, statistical reasoning centers on making sense of and reasoning about variation in data. Teachers can begin to encourage students to reason about the variation in data at an early age by asking them to become "data detectives." "Data detectives" look for patterns in the data, make predictions from data, and suggest contextual stories that might underlie the variability in the data. Questions such as "What do you notice?, "What do you wonder about?", and "What would you predict?" can help to catalyze our students data-detective skills, encouraging them to make comparisons, considering trends, and make conclusions based on data.

The Case of Sampling
Students often do not have many opportunities to work with samples, or sampling distributions in their school mathematics. While they may be asked to predict 'one' outcome in a probability experiment, they are rarely asked to think about what might happen over and over if an experiment is repeated many times, as in when repeated samples are drawn. Samples are important because if they are appropriately drawn (e.g., randomly) they should mirror the entire population. Similarly, if we already know a proportion of outcomes within the whole population, we expect a sample to provide accurate information about the entire population.

For example, if we know that Obama received about 54 % of the U.S vote for President, we expect that in a sample of 100 voters, about 54 of them would have voted for Obama (Sample mirrors population). On the other hand, if we drew a random sample of 100 people in an opinion poll on health care and 62 of them favored health care reform, we would infer that somewhere around 62% of the entire population favors health care reform (Population mirrors sample). For students to reason in this way between samples and populations, they need to be strong proportional reasoners.

How, in fact, do students actually reason from, and to, sampling distributions and samples? How do they think when given repeated sampling tasks? Here is some indication on how students reason about sampling from the various ways middle school and secondary students reasoned during the repeated sampling task below.

Repeated Sampling. Suppose that you have a very big container with *1000* candies in it, 650 are red, and 350 are yellow. The candies are all mixed up in the container. Students scoop out 100 candies at a time, count the number of reds, and then replace and remix the candies. Fifty students each pulled out 100 candies, wrote down the number of reds they obtained, and then put them back and mixed them all up again for the next person.

Of the 50 students, how many do you think would get:

0 to10 reds?________
11 to 20 reds?________
21 to 30 reds?________
31 to 40 reds?________
41 to 50 reds?________
51 to 60 reds?________
61 to 70 reds?________
71 to 80 reds?________
81 to 90 reds?________
91 to 100 reds?________

Why do you think this? Explain your reasoning.

While there are a variety of responses that students give to this task, many of them actually fall into particular *types* of reasoning patterns. Also, in many of the responses, there is a clear tension between variability in outcomes, and, what should be 'expected.' For example, some students say "we really should get almost exactly 65 red candies every time, because there are 65% red." These students grudgingly admit that in real life, there will be variation from 65, but, according to them, there really shouldn't be. This type of student response focuses on centers. Other students will say, "I don't know, it could be absolutely anything. Anything is possible, anywhere from 0 reds up to all reds." When pressed these students might admit that 0 to 10, or 91 to 100, are not as likely as the other intervals, but they then may distribute equally likely amounts throughout the remaining spaces for the number of red candies.

These students are focusing entirely on the range of possible outcomes (variation) without any attention to the population center of the candy mixture (the 65% red mix). There are other students who placed most of the 50 samples in the high end, with almost all their 50 handfuls having 60 or more reds in them. When asked why, these students say, “Because there are more reds in the mix.” These students are reasoning based on absolute frequencies, rather than relative frequencies. They claim that 61 to 70 reds, 71 to 80 reds, and 81 – 90 reds are all just as likely to occur, just because there are ‘more reds.’ There are also some students who simultaneously attend to a variety of aspects of a collection of repeated samples— including centers, possible spread, and likely shape of the distribution of samples. These students are capable of integrating multiple aspects of sampling distributions into their statistical reasoning.

As we observed these common *types* of student reasoning about samples suggests. A possible trajectory of how student thinking about repeated sampling might develop arose, from “Additive” to “Single Aspect” to “Proportional” to “Distributional” thinking:

Additive-Students focus only on frequencies, absolute counts

Single aspect-Students have a primary focus on just one aspect of a distribution, **center, spread,** or **shape**

Proportional-Students make *explicit* connections between sample proportions and population proportions

Distributional-Students exhibit *explicit* attention to at least two of these aspects of distributions: **centers**, **spreads**, or **shapes**

Conclusion

Listening to student mathematical reasoning and sense making is a valuable resource for mathematics educators for many reasons. First, student’ mathematical reasoning can provide roadmaps, or at least starting points, for designing instruction because it informs us about their likely conceptual learning trajectories. Second, student reasoning is a rich source of research data for building theoretical models of student thinking which can be built on and further refined over time. Third, student reasoning is an invaluable resource for further curriculum and task development. For us, the case of students’ reasoning about repeated samples has proven to be a valuable resource in all three of these arenas.

Parallellsesjon 1, mandag kl 13.00 – 14.30

Mike Naylor er gjesteprofessor ved Matematikksenteret. Han har vært matematikklærer i 15 år på alle trinn fra barnehage til universitet. De siste 10 årene har han vært professor i matematikk-didaktikk ved Western Washington University i USA. Han har nylig flyttet til Norge. Naylor har skrevet flere bøker og artikler om matematikkdidaktikk. Han har også skrevet barnebøker om matematikk, bøker om kunst og matematikk, og matematisk musikk.

Parallell A1: Trinn 3-9

Cat and Mouse

The study of probability should begin with games and experiments. A good beginning activity is one in which they cannot easily predict the outcome. This provides incentive for students to play many times, keep track of results, and develop fundamental ideas about probability. A key idea to develop early is the idea that while outcomes vary, probabilities reflect what "usually" happens and can be found by experimenting with a large number of trials.

Be careful not to choose an activity for which pupils can easily determine what the outcome should be. Asking students to flip coins or roll a single die to predict probabilities are not good beginning activities, as students can easily build the wrong idea that it only necessary to count possible outcomes in order to determine probabilities. This can lead to bad reasoning such as "Today I might get hit by a car or I might not. Since there are two things that can happen, I have a 50-50 chance of getting hit by a car."

The following game is an excellent introductory activity. This is adapted from the "Cat and Mouse" game originally appearing in an article by Brian Lannen in the *Australian Mathematics Teacher*. It was reprinted in *Teaching Math in the Middle School*, vol. 4 Number 7 (April 1999).

CAT AND MOUSE

Goal: Introduce pupils to concepts of probability:
fairness, experimental data collection, distributions, law of large numbers

Preparation: Each pupil gets a
- copy of the board
- one 6-sided die
- a coin or some small counter
- scrap paper

- pencil
- sticky note

1. **Demonstrate** how the game works:

Place the counter on the mouse and roll the die. If the result is even, move your counter in the direction of the E arrow, and if the result is odd, move your counter in the direction of the O arrow. If you reach the cheese, you win! But if you reach the cat, you lose.

2. Let your students **play** for about 2 minutes.

3. Stop them. Ask them to think about and **write down** their thoughts about: “Is the game fair?” Allow one or two minutes for them to record their ideas.

4. **Collect** student responses, **read** a few of them anonymously, and **discuss** the ideas. You’ll find all kinds of ideas!

5. **Ask** “How can we find out?” Someone will probably suggest keeping track of wins and losses – have your students do this. Ask them to each play 10 times and record their wins and losses on a tally chart.

6. **Build a graph** of the results. Draw a big graph on the board with the horizontal axis labeled *“Number of wins (out of 10)”*. Number this axis from 0 to 10. Students should come to the board and put their sticky notes in the appropriate column.

7. Discuss the distribution. Where are most of the results? Are there any extreme results? What if you played it for longer? Someone will probably suggest putting all of the results together – a great idea!

8. Ask students to add up the wins – are they equal to about half the number of games? This is a demonstration of the law of large numbers: with a large number of trials, the proportions of the experimental results get closer and closer to the true probabilities.

9. Review the big ideas:

BIG IDEAS:

- A fair game is one in which you have equal chances of winning.
- It can be tricky determining if a game is fair.
- If a situation is too difficult to analyze theoretically, we can collect experimental data instead.
- Results can vary widely with a small sample size – we get more reliable results with many tests.

Extensions: In higher grade levels, this game can be revisited when students have more analysis tools. It can be analyzed with a tree diagram, an area model, or a flow diagram.

CAT AND MOUSE

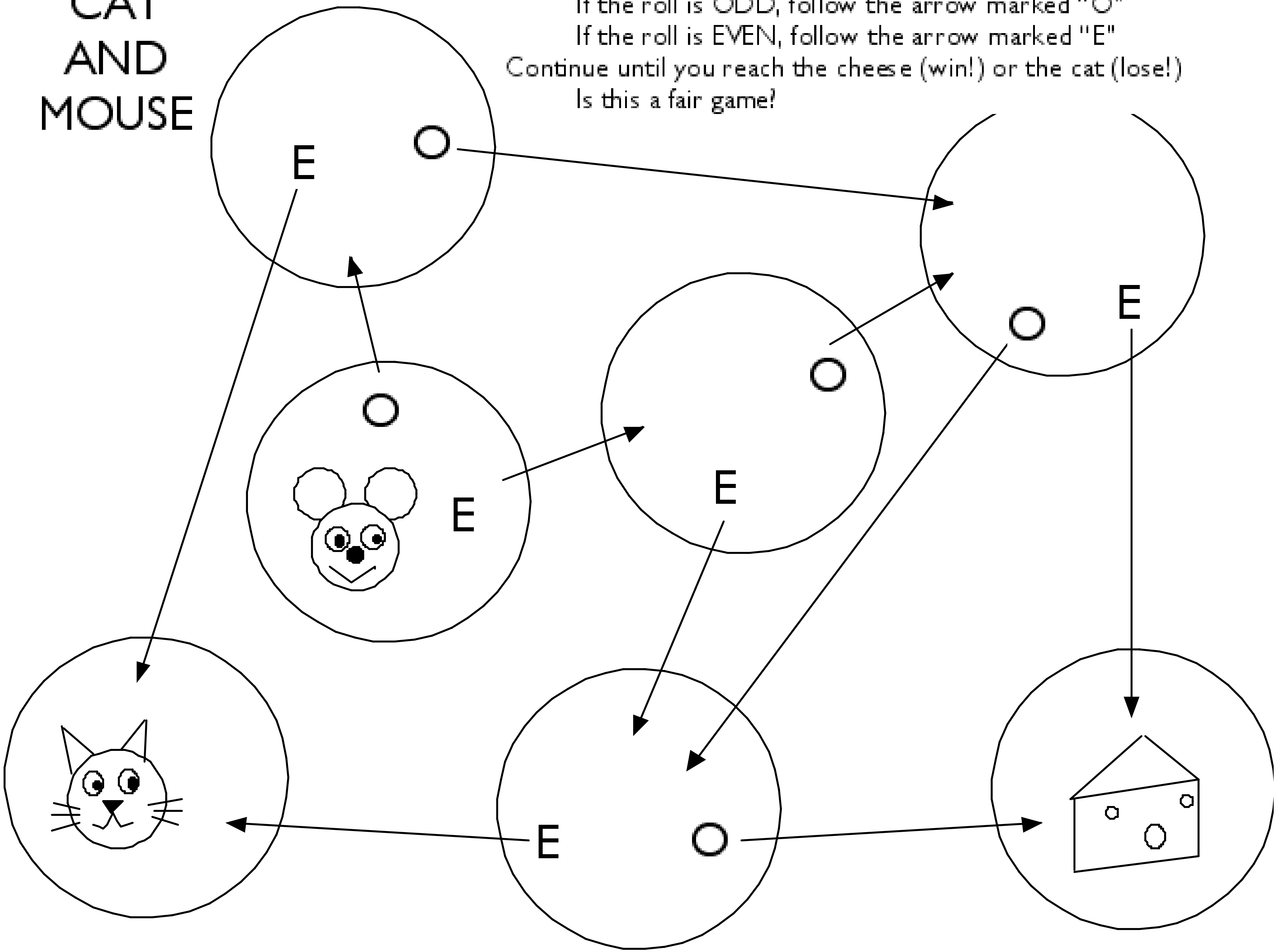
Place Marker on the Mouse. Roll a 6-sided die.

If the roll is ODD, follow the arrow marked "O"

If the roll is EVEN, follow the arrow marked "E"

Continue until you reach the cheese (win!) or the cat (lose!)

Is this a fair game?



Bjørnar Alseth har studert matematikk og matematikkdidaktikk ved Universitetet i Oslo. Han har doktorgrad i barns læring av matematikk. Han har arbeidet lenge med allmennlærerutdanning og ledet arbeidet med matematikkplanen i Kunnskapsløftet. Han er medforfatter av læreverket Multi for barnetrinnet. Alseth er nå forsker ved Universitetet i Oslo, hvor han arbeider med nasjonale og internasjonale kartleggingsprøver.

Parallell A2 Trinn 1-7

Aktiviteter for et godt grunnlag i sannsynlighet

Verkstedet presenterer en rekke aktiviteter som fokuserer på sannsynlighet. Aktivitetene og etterfølgende diskusjoner vil gi elevene erfaringer som øker deres intuisjon i forhold til sannsynlighetsbetraktninger og som legger et grunnlag for de mer formelle sidene ved sannsynlighetsberegninger.

Svein H. Torkildsen, Matematikksenteret.
36 års erfaring fra matematikkundervisning på alle trinn i grunnskolen, mest på ungdomstrinnet. Var med og stiftet LAMIS i 1997, fungerte som leder 1998–2000 og som organisasjonssekretær i perioden mars 2006–desember 2009 i 50 % stilling og ved NSMO i 50 %. Er nå ansatt 100 % ved NSMO med etterutdanning som hovedoppgave.

Parallell A3 Mellom/U-trinn

Sannsynlighet – en gave til skolematematikken

I en logg etter at en niendeklasse hadde arbeidet med sannsynlighet skulle elevene skrive noen ord om hva de syntes var best med dette emnet. En av elevene svarte "nå forstår jeg brøk mye bedre"! Grunnen var nok at elevene hadde fått arbeide mye praktisk med dette temaet. I denne parallellsesjonen skal vi se på hvordan vi med enkle midler kan introdusere sentrale ideer i sannsynlighet i en vanlig gruppe, og hvordan noen av aktivitetene kan utvides slik at spesielt interesserte elever også får utfordringer. Arbeidet med sannsynlighet vil ganske naturlig også knyttes til kombinatorikk og enkel statistikk.

Terningkast er en yndet aktivitet når elevene skal lære sannsynlighet, og det bør den fortsatt være. Men arbeid med en enkel terning og tilsvarende aktiviteter blir fort trivielt. Det kan ende opp i en oversiktlig opptelling av antall mulige og antall gunstige, og da er det enkelt å sette opp en sannsynlighet uttrykt som brøk.

Med enkle grep kan vi utvide aktivitetene slik at vi også trekker inn andre sider ved matematikken og på den måten får arbeidet med flere hovedområder samtidig. En vanlig aktivitet går ut på å la elevene kaste to terninger og så se på summen. Elevene har først fordelt tallene mellom seg. Den som har tallet som er lik summen av terningene får et poeng. Elevene observerer at noen summer forekommer hyppigere enn andre, og det kan lede til en systematisk jakt på antall muligheter for å få hver av summene 1-12. Elever som raskt får oversikt kan få andre typer terninger å studere: for eksempel terninger med verdier 0-9. Hvilken sum vil da forekomme hyppigst? Hva om vi bruker to forskjellige terningen, en med seks og en med ti sideflater? Men vi trenger ikke begrense oss til addisjon.

Gangebingo
Aktiviteten går ut på å kaste to terninger. Vi skal kaste to terninger og multiplisere verdiene. Elevene tegner et 3 x 3 rutenett og setter tall i dem. De kan skrive samme tall mange ganger. Når vi har kastet terningene, kan elevene krysse ut ei rute hvis tallet i ruta er lik produktet av verdiene. Det gjelder først å få tre på rad – vannrett, loddrett eller diagonalt. Deretter går vi for fullt brett. Elevene får oppgaven servert omtrent slik uten nærmere forklaring, og uten lang tid for å vurdere mulighetene. En liten premie eller to gjør seg alltid! [1]

De fleste ser straks at 36 er det største tallet som kan stå i rutene. Noen velger tilfeldige tall mellom 1 og 36. Andre ser at primtallene over fem ikke er lure å ta med. Men tall som 14, 21, 28, 32 og 35 kan godt dukke opp i noen ruteark, for de finner vi jo i gangetabellene. Når elevene har spilt gangebingo et par ganger og ut fra erfaringene de har samlet fått anledning til å forbedre bingoarkene sine, er tiden inne til å se grundigere på utfallsrommet.

Utfallsrommet finner vi i den lille multiplikasjonstabellen.

X	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

(Figur 1.jpg)

De umulige tallene finner vi ikke i tabellen: 7, 11, 13, 14, 17, 19, 21, 22, 23, 26-29 og 31-35. Vi ser straks at det er noen tall som forekommer flere enn andre. De beste tallene er 6 og 12 som forekommer fire ganger hver. 4 forekommer tre ganger og kvadrattallene 1, 9, 26 og 36 en gang hver. De andre tallene forekommer to ganger hver.

I tillegg til å sette opp sannsynlighet for hvert utfall, kan vi gjennom aktiviteten få

- øving i multiplikasjon
- undersøkt og utnyttet mønster og system i tabellen
- vurdert forholdet mellom størrelser – for eksempel fire ganger så stor sjanse for 12 som for 1
- sett på likeverdige brøker og sammenliknet verdien på brøker.

Sentrale begrep

Ved oppstart på et nytt tema er det om å gjøre først å fange elevenes oppmerksomhet og deretter få satt fokus på sentrale begrep. Her dreier det seg om begrepene utfallsrom (eller mulige utfall) og gunstige utfall. Sannsynligheten er forholdet mellom dem.

Odde- og partallspill

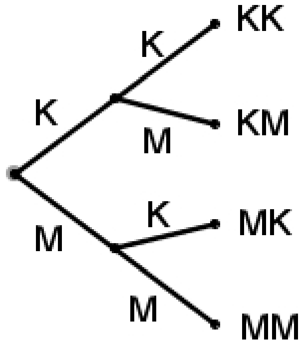
Et urettferdig, men motiverende kortspill der to elever spiller mot hverandre. Elevene har fire kort med etterfølgende verdier, f eks 1-4. eller 6-9. Før spillet begynner bestemmer de hvem skal ha oddetallsum og hvem som skal ha partallsum. Den ene stokker kortene og den andre trekker to av kortene slik at hver av spillerne har to kort på hånden. Spilleren som trakk kort skal summere dem. Er summen et partall, blir det poeng til den spilleren som valgte partall. Er summen et oddetall, går poenget til spilleren som valgte oddetall. Etter 25 omganger telles poengene opp. [2] og [3]

Opplegget kan utvides i mange retninger. Blir det mer rettferdig om vi tar med flere kort og fortsatt trekker ut to kort? Hvordan blir det om kortverdiene ikke trenger være i rekkefølge. Kan det da bli rettferdig? Hvordan kan det da bli rettferdig?

Denne aktiviteten egner seg svært godt som en introduksjon til sannsynlighet. Elevene vil raskt oppdage at spillet er urettferdig. Rettferdighet betyr da like muligheter for alle. Og det er nettopp et sentralt punkt i sannsynlighetsregning å finne utfallsrommet eller alle mulighetene. De finner elevene ved systematisk arbeid: 1 + 2, 1 + 3, 1 + 4. 2 + 3, 2 + 4, 3 + 4. Av de seks mulige summene gir fire oddetall og to gir partall. De gunstige utfallene er altså ikke likt fordelt mellom oddetall og partall. Vi har fått satt de to sentral begrepene mulige og gunstige utfall på dagsorden.

Men det er ikke alltid en selvfølge hva utfallsrommet blir. Når vi kaster to mynter vil mange anta at utfallsrommet blir: 2 mynt, 2 kron og 1 mynt-1 kron. Det skulle da bli en tredel sannsynlighet for hvert av disse tre utfallene. Empiri viser fort at det er dobbelt så stor sjanse for 1 mynt-1 kron. Hvordan får vi en logisk forklaring på det fenomenet? En mulighet er å først kaste en mynt, notere resultatet og så kaste en mynt og føye til resultatet for denne andre mynten. Vi får da fire mulige utfall: MM MK KM KK. Samme effekt kan vi få ved kaste myntene på hver sitt farget papir, for eksempel et rødt og et grønt. Utfallsrommet kan settes opp i en tabell og i et valgtre.

	K	M
K	KK	KM
M	MK	MM



(Figur 2.jpg)

Fokus på brøk
Brøkbegrepet står sentralt i arbeidet med sannsynlighet, og elevene kan få mange og praktiske erfaringer med brøk hvis vi utnytter potensialet i oppgavene. Overslag og kvalitative vurderinger uten eksakte beregninger er en viktig kompetanse i dagens samfunn, og det får vi rik anledning til å arbeide med når temaet er sannsynlighet.

Baller i boksen
Vi har en boks med seks baller. Elevene får opplyst at det er seks baller i boksen og att det ikke er samme farge på ballene.
Utfordringen blir å finne ut hvor mange baller det er av hver farge.

Elevene sitter i grupper, 2-4 per gruppe.

Vi rister boksen trekker ut en ball, registrerer fargen og legger den tilbake i boksen.
Vi gjentar 10 ganger. Da kan gruppene få gjette på antall baller av hver farge –
men hver gruppe får bare ett forsøk! Gruppene som gjetter etter 10 trekk har brukt opp sin sjanse.

Vi fortsetter til vi har 20 observasjoner.
Noen som nå vil benytte sin mulighet til å gjette?

Slik fortsetter vi med 10 og 10 uttrekk til alle har gjettet. Av tidshensyn kan vi velge å stoppe etter 30 trekk. [4]

Det gis poeng til gruppene:
Gjetter du riktig?

3 p etter 10 trekk
2 p etter 20 trekk
1 p etter 30 trekk

Gjetter du feil?

-3 p etter 10 trekk
-2 p etter 20 trekk
-1 p etter 30 trekk

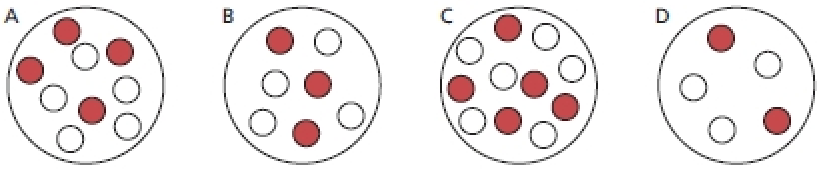
Men for å få poeng må gruppene gi en rimelig matematisk begrunnelse for sitt forslag.

Vi kan etter 30 uttrekk for eksempel sitte med denne oversikten:

	Gul	Blå	Rød
10 trekk	1	5	4
20 trekk	3	6	11
30 trekk	5	9	16

Tabellen gir grunnlag for mange vurderinger. Erfaringen viser at mange vil gjette 1 gul, 2 blå og 3 røde etter 20 trekk. Allerede etter 10 trekk får en mistanke om at det er færrest gule, og da må det være bare 1 gul. Da er det 5 baller igjen, og etter tallene å dømme skal det da være like mange blå og røde. Men det går ikke, og siden det ikke er noen klar forskjell vi de fleste ønske å vente på informasjonene for de 10 neste trekken. Men noen sjanser og sier 3 blå og 3 røde. De angrer nok etter 10 nye trekk!

Tre elever diskuterte denne oppgaven fra læreboka [5]:
I hvilken boks er det størst sannsynlighet for å få et rødt drops når vi tar et drops uten å se i boksen?



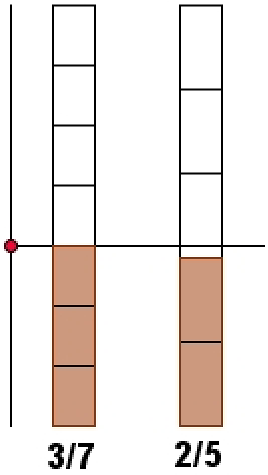
(figur 3.jpg)

E1: Samme sjanse i alle, for det er en mer hvit i hver.
E2: Det må være i D, der er det 2/3 … nei 2/5 sjans for å få rød, men jeg er litt i tvil.
E3: Det er flest rød i C.
E1: Det er flest hvite der også.
L: Hvordan er sjansen i hver av boksene?
Elevene samarbeider og skriver: 4/9 – 3/7 – 5/11 – 2/5
L: Kan dere sammenlikne disse brøkene?

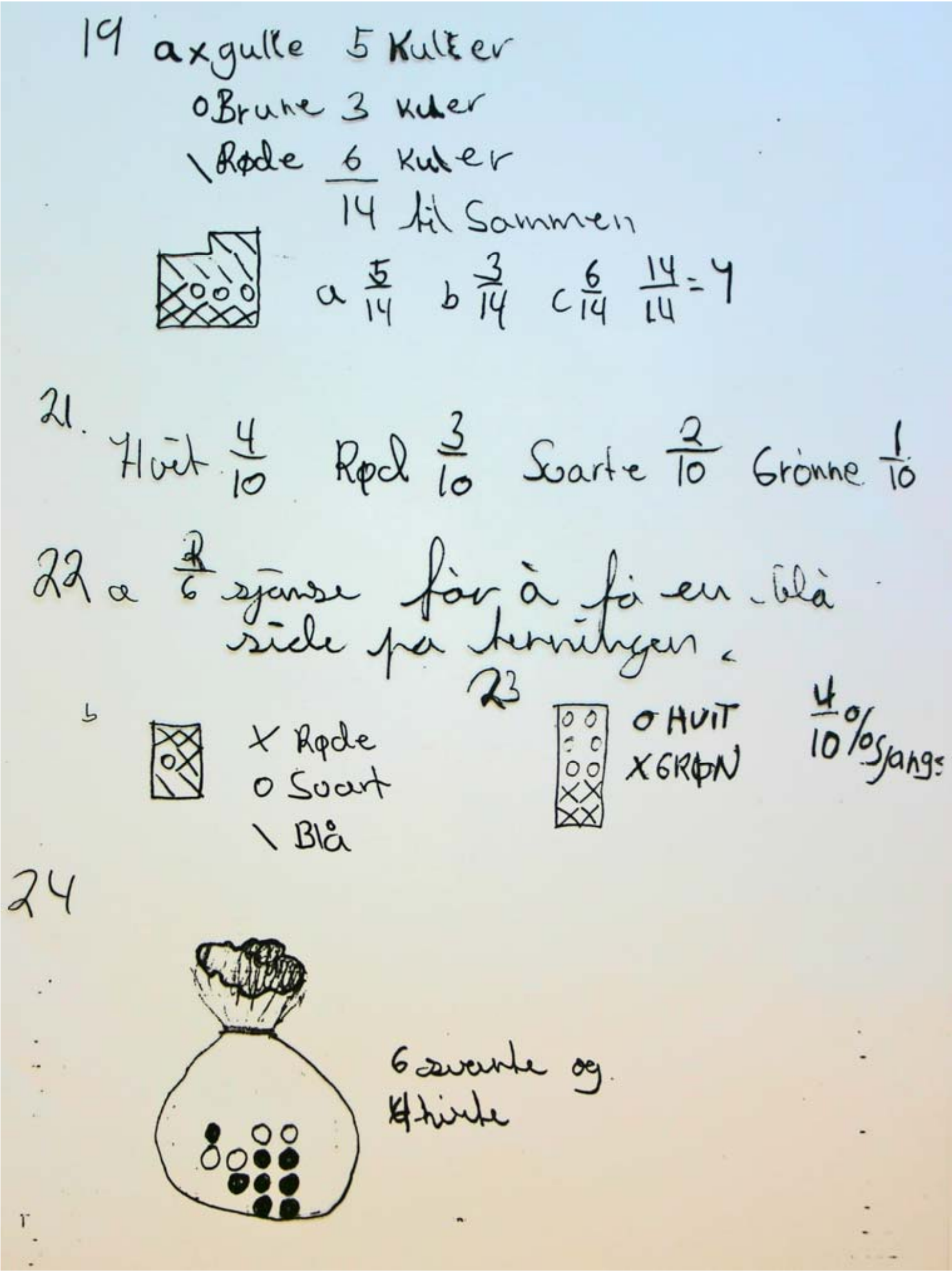
For disse elevene ble omgjøring til desimaltall ved hjelp av lommeregner løsningen – i første omgang: 0,44444… – 0,42857… – 0,454545… – 0,4

Men deretter oppstod spørsmålet om vi kunne sette det uten å bruke lommeregner. Fellesnevneren her er rimelig stor, 3465, så det ligger ikke umiddelbart til rette for å lete etter likeverdige brøker med samme nevner. Hva om tenker oss et par andre bokser der det er drops etter samme system som E1 startet med: en mer hvit. Det minste vi kan ha er 1 rød og to hvite, og sjansen blir 1/3. Har vi mange drops i boksen, for eksempel 50 og 51, blir sjansen 50/101. Elevene ser raskt at boksen med mange i gir en brøk med større verdi enn 1/3, for i praksis er jo halvdelen røde.

GeoGebra gir oss i tillegg muligheten for å lage en modell elevene kan bruke til å utforske denne spesielle typen brøker.
(Figur 4.jpg)



En av elevene arbeidet tungt med matematikk, men oppgavene om kuler fikk hun et godt grep på. Hun laget tegninger og så ut til å ha kontroll på brøkene.



(Figur 5.jpg)

Men en detalj fanger min oppmerksomhet: svaret på oppgave 23 der det står 4/10 % sjanse. Følgende samtale mellom lærer og elev følger da:

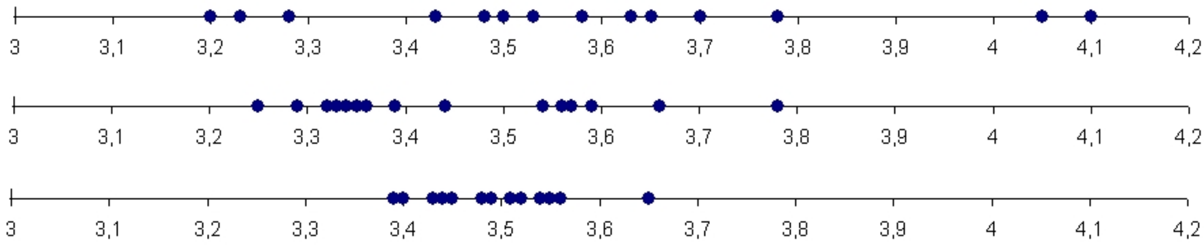
L: Hvor stor er sjansen?
E: Det er fire tidels prosent. ….liten pause … Nei – det skal ikke stå prosent. Det er fire tidel.
L: Hvor mange prosent?
E: Førti.
L: Hvordan fant du ut det?
L får mistanke om at hun ikke ser sammenhengen brøk-prosent. Hun har sannsynligvis foretatt en kvalitativ gjetting. Siden det drøyer med svaret kommer et nytt spørsmål:
L: Hvis det bare hadde vært ni kuler i alt, hadde det da vært førti prosent?
E: Da hadde det vært ca tretti prosent.
L: Hvor mange prosent er hver kule?
E: Ti prosent.
L: Hvorfor det?
E: For alt er hundre prosent, og da er det ti prosent på hver.
L: Hvis det var ni kuler, hvor mange prosent vil det da vært på hver kule?
E: Litt mindre enn ti prosent.
L: Hvorfor det?
E: For ni er litt mindre enn ti.
L: Hvis det var to kuler da?
E: Da ville det vært 50 prosent på hver.
L: Men to er mye mindre enn ti, og prosenten blir mye større! Hvordan må det da bli med ni kuler?
E: Det må bli litt mer.
L: Hvorfor?
E: Det er ikke så mange som skal dele, og da blir det mer på hver.

Vi lot det være med det. Eleven var utfordret nok på selve brøkbegrepet, og hun hadde vist at hun kunne resonnere og begrunne nå hun ble utfordret. Hun var utvilsomt brakt et stykke videre i sin forståelse av brøk.

Store talls lov
Sannsynlighetsteori resulterte på 1700-tallet i De store talls lov, som sier oss at, dersom vi kaster mynt og kron mange, mange ganger, så vil vi få femti prosent mynt og femti prosent kron. [6]

Regnearket er et verdifullt verktøy når en vil hva resultatet blir ved mange eksperimenter. Formelen **=heltall(tilfeldig()*6)+1** gir en tilfeldig verdi 1-6. Kopierer vi formelen, kan vi få flere tusen kast med et enkelt tastetrykk samtidig som vi får beregnet gjennomsnittsverdien.

Elevene blir utstyrt med tre tallinjer med markeringer for hver tidel i området 3-4,2. På hver av tallinjene skal de markere gjennomsnittet etter hhv 40, 200 og 1000 kast. Etter å ha gjentatt 14 ganger ble resultatet ved en anledning slik:



(Figur 6.jpg)

Vi ser at resultatene blir mer og mer samlet omkring det teoretiske gjennomsnittet – 3,5 – jo flere kast vi foretar. Men vi kan også registrere at vi kan få 3,65 som resultat, og mange av resultatene etter 40 og 200 kast ligger nærmere 3,5 enn det! Det kan lede oss til et interessant spørmål: Hvor stor er sannsynligheten for at det usannsynlige skjer?

Sannsynligheten for det spesielle
Abelprisen 2007 er tildelt indisk-amerikanske Srinivasa S.R. Varadhan ved Courant-instituttet i New York, for hans bidrag til sannsynlighetsteori «og særlig for å ha skapt en helhetlig teori for store avvik». [7]

Det spesielle opptrer oftere enn en skulle tro! La oss si at vi kaster en terning 100 ganger, og for hvert kast registrerer vi om vi får et partall eller et oddetall. Om elever fikk det i hjemmeoppgave, var det nok noen som ville sløyfe terningen og bare skrive ei lang rad med P-er og O-er. Om nå elevene ikke kjenner lovmessigheten for det spesielle, vil de neppe skrive mange P-er eller O-er etter hverandre. Da kunne det kanskje se ut som om de hadde fusket! Sjansen for å få fem på rad av samme slag er jo $1 \times 0{,}5^4 = 0{,}0625$, litt over 6 %.

Men det forholder seg altså stikk motsatt! Vi kan lage et regneark som gir oss resultatene raskt.

Antall kast: 50		Lengste streng	
Max antall PAR på rad:	3	5	Odde
Max antall ODDE på rad:	5		
Antall kast: 100			
Max antall PAR på rad:	6	6	Par
Max antall ODDE på rad:	5		

(Figur 7.jpg)

Ved å taste F9 får vi et nytt resultat. 100 serier ga denne frekvenstabellen:

Lengste streng	50 kast	100 kast
1		
2		
3	2	
4	8	
5	28	9
6	32	35
7	16	29
8	8	14
9	4	9
10	1	2
11		2
Antall serier	100	100

Vi ser at i 90 av de 100 seriene på 50 kast var det 5 eller flere par eller odde på rad. I seriene på 100 kast var det 6 eller flere i 91 av seriene. Selv med 50 kast fikk vi ett tilfelle 10 på rad av samme slag. Men det forekom aldri 4 eller færre i serien på 100 kast. Med bakgrunn i dataene kan vi kanskje si at om elevene ikke hadde minst seks like på rad, så er sannsynligheten for at de har fusket 91 %.

En teoretisk beregning sannsynligheten for hver av utfallene ligger nok godt utenfor det en kan forvente av elever på ungdomstrinnet. Men i blant det kan da være godt å få noe å undres over og så det bli med det. Men mange elever på ungdomstrinnet kan nok finne en rimelig forklaring på et av problemene som ga støtet til utviklingen av sannsynlighetsregningen.

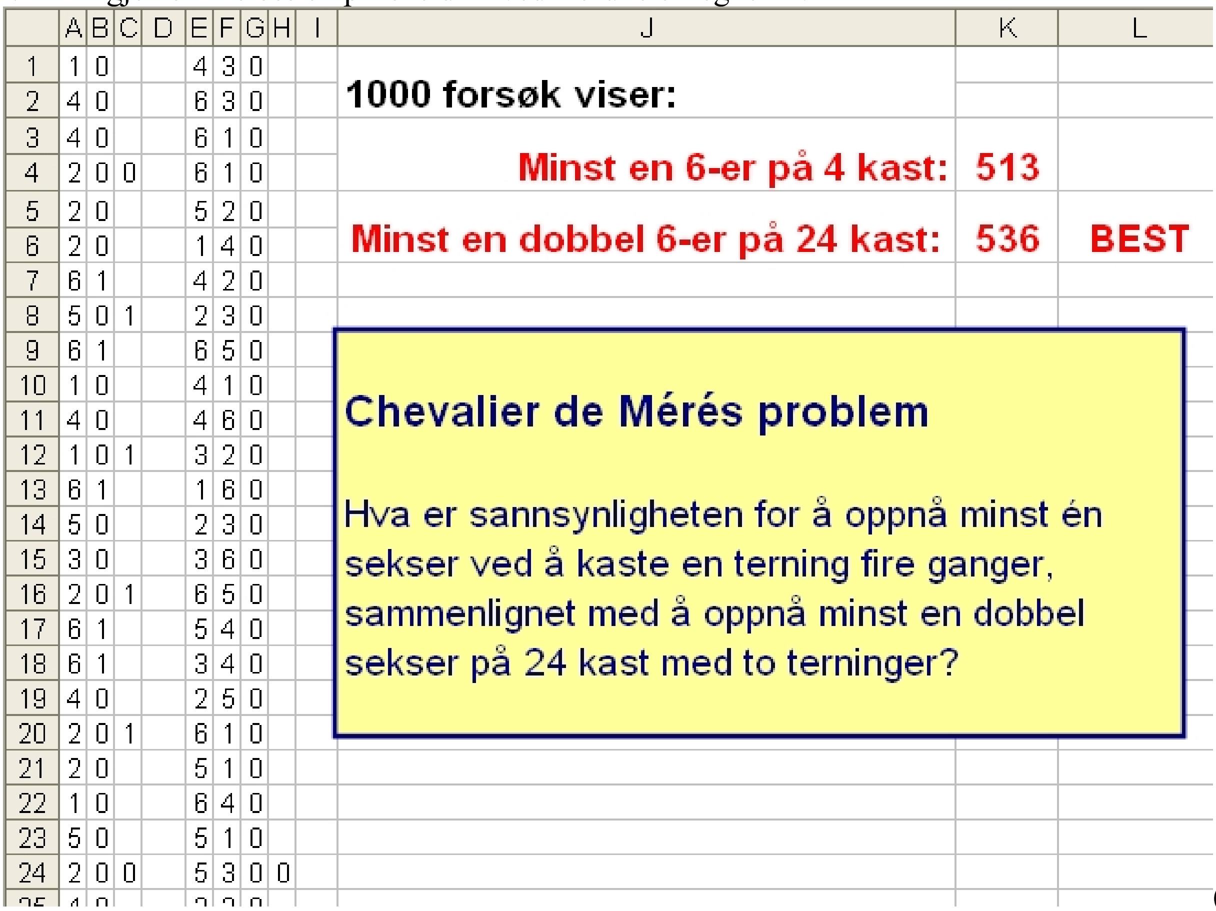
Ei nøtt for Pascal og Fermat

Mange mener at teorien om sannsynlighet utviklet seg og tok form som en følge av brevvekslinger mellom de berømte matematikerne Blaise Pascal (1623-1662) og Pierre de Fermat (1601-1665). Årsaken til denne brevvekslingen skriver seg fra en episode der den franske adelsmannen Chevalier de Méré oppsøkte Pascal med følgende problem:

> *Hva er sannsynligheten for å oppnå minst én sekser ved å kaste en terning fire ganger, sammenlignet med å oppnå minst en dobbel sekser i 24 kast med to terninger.*

Chevalier de Méré hadde erfart at de to sannsynlighetene var forskjellige, men mente at de rent matematisk skulle være like. [8]

Vi kan igjen skaffe oss empiriske data ved å bruke et regneark.



(Figur 8.jpg)

Vi ser at en sekser på fire kast forekommer oftere enn dobbel sekser med to terninger på 24 kast. Begge vil forekomme omtrent 500 ganger på 1000 forsøk. Da en serie på 1000 kast ble gjennomført 50 ganger, viste det seg at en sekser på fire kast forekom hyppigere enn en dobbel sekser på 24 kast hele 42 ganger. En teoretisk beregning av sannsynligheten blir

for en sekser på fire kast: $1 – (5/6)^4 = 0,518$

for en dobbel sekser på 42 kast: $1 – (35/36)^{24} = 0,491$

Referanser

[1] Skolenes matematikkdag, idehefte 2007, LAMIS
[2] AKTIVITETER OG UNDERVISNINGSOPPLEGG, Novemberkonferansen 2009
[3] www.skoleipraksis.no, Matematikk 8.-10. «Et rettferdig spill?»
[4] Torkildsen/Maugesten, Sirkel 9B, lærerveiledning, Aschehoug 2007
[5] Torkildsen/Maugesten, Sirkel 9B, grunnbok, Aschehoug 2007
[6] http://www.forskning.no/artikler/2007/mars/1174571613.57
[7] http://www.abelprisen.no/no/prisvinnere/2007/
[8] http://www.matema10k.dk

Knut Ole Lysø er førsteamanuensis ved lærerutdanningen ved Høgskolen i Sør-Trøndelag. Han har grunnskoleerfaring, og har arbeidet i lærerutdanningen siden 1981. Lysø har skrevet tre lærebøker innen sannsynlighetsregning og statistikk til bruk i lærerutdanningen.

Parallell A4 Alle

Tanker om innføringen av sannsynlighetsbegrepet

Strukturen på parallellsesjonen:
- Refleksjon omkring innføring av temaet i lærerutdanningen
- Forforståelse – intuitiv kunnskap
- Nyttiggjøring av denne kunnskapen?
- Gjennomføring av opplegg
- Didaktisk refleksjon – tilpasset opplæring

Refleksjon omkring innføring av temaet i lærerutdanningen
Temaet sannsynlighetsregning er relativt nytt i grunnskolesammenheng. Det ble innført som emne i grunnskolen, vesentlig på ungdomstrinnet, gjennom Mønsterplanen av 1987 (M87). Selv har jeg grunnskoleerfaring fra den tiden Mønsterplanen av 1974 var gjeldende. I 1982 fullførte jeg hovedfaget i statistikk. I løpet av mitt virke som lærerutdanner i matematikk var det spesielt etter innføringen av M87 sannsynlighetsbegrepet og sannsynlighetsregning ble et sentralt tema i lærerutdanningen. Et sentralt spørsmål for meg ble etter hvert: *Hvordan jobbe med et emne jeg ikke hadde undervist i grunnskolen, men som jeg hadde hovedfag i?*

Dette gav opphav til en lang tankevirksomhet; med "løsning" som egentlig tar utgangspunkt i en hendelse som fant sted enda lengre tilbake i tid: Et innlegg i *Ordet fritt* i Adresseavisen 28/1-1970 skrevet av en 19-årig gymnasiast som aldri hadde hatt verken statistikk eller sannsynlighetsregning i sine matematikktimer i skolen (vedlegg 1).

Innlegget viser ikke noe avansert tenkning og utøvelse av sannsynlighetsbegrepet, men begrepet anvendes og settes i sammenheng med en konkret situasjon. Dette viser at vi er i stand til å etablere matematisk kunnskap ut over det som skjer i skolestua. Når det gjelder sannsynlighetsbegrepet, skyldes dette trolig at det er nær sammenheng mellom det vitenskapelige begrepet og bruken i dagligtale. *Sannsynlighetsregning som emne skiller seg ut i forhold til mange andre matematiske emner. I denne omgang tenker vi på selve begrepet sannsynlighet, dets adjektiv sannsynlig og bruken av disse ordene i det norske språk. Begrepet finnes i mange former, f.eks. sjanse, risiko, mulig og sikkert. I tillegg har vi i språket adjektiver som gir nyanser av de samme uttrykkene, som f.eks. i en sammenheng som "Det er liten sjanse for at dette skal skje". Språkfolk kaller disse uttrykkene og alle former og bruken av ordene sannsynlig og sannsynlighet som dempere i språket* (Lysø 2005, s. 110). Dette viser at barna har en forforståelse eller intuitiv kunnskap i emnet. *I oppveksten hører barna slike ord og uttrykk i sosiale kontekster, og etter hvert er de i stand til selv å gjøre seg bruk av dem, som en naturlig utvidelse av ordforrådet. I det øyeblikk de møter dette begrepet i skolen, vil de fleste knytte noe nært og kjent med begrepet slik at problemstillingen(e) i oppgaven(e) oppfattes som konkrete. Begrepsuttrykk og* *begrepsinnhold trenger ikke noe oversettelsesledd, det er snakk om at dette fungerer som språk av første orden (Høines 2001). Dette er et eksempel på at barn opplever begrepsstimulering av matematiske begreper også utenfor skolens rammer. Når elevene første gang møter en problemstilling i sannsynlighetsregning i skolens regi, har følgelig de fleste en umiddelbar oppfatning av hva problemet dreier seg om. Begrepet har blitt en del av deres hverdagsforestillinger. En kan da snakke om at elevene har intuitive løsningsstrategier på disse oppgavene. Dette kan en prøve på å utnytte på en konstruktiv måte i undervisningen* (Lysø 2005, s. 110).

På slutten av 80-tallet og langt inn på 90-tallet hadde våre studenter ingen bakgrunn i sannsynlighetsregning fra skoleverket. Et forsøk på å utnytte potensialet som ligger i den intuitive forståelsen av emnet, resulterte i utarbeiding av et sett av egenaktiviteter (vedlegg 2). Når studentene skulle ha undervisning i temaet sannsynlighetsregning, ble dette emnet introdusert gjennom disse egenaktivitetene uten noen annen form for innledning til emnet.

Didaktisk refleksjon – tilpasset opplæring

Hva er så mine erfaringer av et slikt opplegg? En kort oppsummering:

- Studentene setter i gang å regne selv om de ikke har hatt undervisning i emnet fra tidligere skolegang. Det er ikke mange emner i matematikk en kan gjøre dette.
- Det utvikler seg til diskusjoner studenter imellom og initiativ fra studentene til faglig kommunikasjon med lærer.
- Studentene bruker de ulike definisjonene av sannsynlighet (sannsynlighetsmodeller) intuitivt.
- Diskusjon/drøfting av teoretisk modell kontra empirisk modell faller lett (oppgave 3).
- En fremmer studentaktiv læring og unngår tavleundervisning.
- En får kjennskap til hva som kreves i grunnskolen (oppgave 7, 8 og 9, som er oppgaver gitt til eksamen og normerte prøver).
- En får fremmet diskusjon om avhengighet og uavhengighet (oppgave 4).
- Erfaring med at sannsynlighetsregning kan dreie seg om noe annet enn spill.
- Tidlig erfaring med bruk av stokastiske (tilfeldige) variable.
- Diagnostisk undervisningsmetodikk/studie av feiltyper.
- Fokus på individuelle og ulike løsningsstrategier (studentenes tenkemåte i fokus).
- Fokus på språklige formuleringer. Er det presist norsk språk i oppgaveformuleringene?
- Får avdekket et stort kunnskapssprang mellom enkle forsøk (oppgave 1-5) og sammensatte forsøk (oppgave 6-13).
- Egenaktivitetene virker engasjerende.

Overordnet disse kulepunktene er min erfaring at opplegget fremmer tilpasset opplæring. Opplegget tar utgangspunkt i

- elevenes individuelle erfaringer, forkunnskaper og kompetanse

Slik arbeidet skrider fram

- gir dette støtte til studentenes læring og
- tilrettelegger et inkluderende fellesskap (Stålsett 2009).

Videre erfaringer

De fem oppgavene 1-5 i vedlegg 2 er tilstrekkelig til å få belyst de sannsynlighetsmodellene som er relevante i grunnskolesammenheng. Mine erfaringer tilsier at studentene i stor grad har disse inne. Sagt på en annen måte, så har de aller fleste studentene korrekte svar på disse oppgavene. Det kan imidlertid være vanskelig å få studentene til å kommunisere de nødvendige betingelser for at en bestemt sannsynlighet skal være riktig. Eksempelvis er det vanlig å begrunne at sannsynligheten for en sekser ved kast med en terning er lik 1/6 fordi terningen har 6 sider (flater). Når jeg etterspør ytterligere begrunnelse, er det gjerne tyst. Da viser jeg dem en kritteske eller en svamp, og spør om det er 1/6 sjanse for hver av disse flatene også skal inntreffe. At studentene ”glemmer” å nevne at flatene skal være like store, kan like gjerne skyldes at dette synes opplagt for terningens tilfelle ("alle vet jo det"), og at det derfor er unødvendig å nevne dette.

Når det gjelder arbeidet med å finne sannsynligheter i forsøk som går over to trinn (oppgave 6-13), er erfaringene at dette kan by på uforholdsmessig store problemer. Mange studenter ser ut til å benytte samme løsningsstrategi som gjelder ett trinn (eller ett element) til også å gjelde forsøk som går over to trinn. De fleste erfarer at et slikt resonnement ikke strekker til. I undervisningen tar jeg utgangspunkt i studentenes forslag til løsninger, noe som viser seg å forsterke studentenes engasjement i undervisningen. Disse aspektene er mer utdypet i dokumentet *Strengths and Limitations of Informal Conceptions in Introductory Probability Courses for Future Lower Secondary Teachers* (Lysø 2008).

Undervisningen videre

Vi har i denne parallellsesjonen tatt utgangspunkt i undervisning for studenter som ikke har hatt undervisning i sannsynlighetsbegrepet fra tidligere skolegang. I den senere tid har vi fått studenter i lærerutdanningen som har hatt undervisning i dette emnet fra skoleverket. Jeg har likevel beholdt dette undervisningsopplegget, ikke minst fordi det synes både å være en fornuftig måte å "vekke tilbake tidligere stoff" (repetisjon) og introdusere lærestoffet på i lærerutdanningen. Mine tidligste erfaringer med dette undervisningsopplegget tilsier at opplegget kan tilrettelegges for passende alderstrinn i grunn- og videregående skole.

Et mulig steg i retning av å nærme seg problematikken knyttet til to trinns forsøk er å invitere elevene (og studenter) til det den danske fagdidaktikeren Ole Skovsmose kaller et *undersøkelseslandskap*. Skovsmose (1998) lanserer dette som et alternativ til oppgaveparadigmet. *Det karakteristiske ved undersøgelseslandskaperne er imidlertid, at der ikke er formuleret opgaver, men at landskabet, måske initieret af lærerens utfordrende spørgsmål, inviterer eleverne til at gennemføre en udforskning*. Læreren kan i en gitt situasjon stille elevene spørsmål som "Hva nå hvis …?" Sentralt i begrepet undersøkelseslandskap er at lærerens spørsmål erstattes av elevenes spørsmål "Hva nå hvis …?"; altså at det blir ikke noe undersøkelseslandskap før elevene tar tak i lærerens invitasjon og gjør spørsmålet til sitt eget. Videre kan en tenke seg at læreren senere i prosessen stiller spørsmål som "Hvorfor det?". Kanskje følges dette opp av elevenes spørsmål "Ja, hvorfor det?". Resultatet av en slik kommunikasjon mellom lærer og elever blir da at elevene blir invitert til å stille egne hypoteser, eksperimentere, utforske og gjøre erfaringer.

Avsluttende kommentar

Som undervisere i enten skoleverket eller i høyere utdanningsinstitusjoner er det nødvendig å skape variasjon i undervisningen. Ulikt lærestoff kan gi opphav til ulike tilnærmingsmåter. Mitt hovedanliggende i denne parallellsesjonen har vært å vise hvordan innføringen av sannsynlighetsbegrepet kan introduseres på en "alternativ måte", og begrunne hvorfor jeg har tro på at dette kan være fruktbart.

Referanser

Høines, M. J. (2001). *Begynneropplæringen. Fagdidaktikk for barnetrinnets matematikkundervisning*, Caspar forlag.

Lysø, K.O. (2005). *Sannsynlighetsregning – en fagdidaktisk innføring*, Caspar forlag.

Lysø, K.O. (2008), *Strengths and Limitations of Informal Conceptions in Introductory Probability Courses for Future Lower Secondary Teachers* http://www.ethikkommission-kaernten.at/ICME11/p11_ICME11_TSG13_Lysoe_mb_knut_EE.pdf

Skovsmose, O. (1998). *Undersøkelseslandskaper*. i: *Matematikk for alle*. Rapport fra Lamis sommerkurs, Trondheim aug. 1998. Bergen: Caspar forlag.

Stålsett, U. (2009). "Hvordan fremme en tilpasset opplæring?", i: Stålsett, U, Storhaug, M. & Sandal, R. (red.), *Veiledning i tilpasset opplæring, arbeidsmåter – fra oppskrift til refleksjon* s. 24, Bergen, Fagbokforlaget.

Tendenstrekningen i Norsk Tipping

Leste i avisen 24/1 et innlegg angående Norsk Tipping A/S godkjente forslag til tendens-trekning.

Innsenderen viser at han ikke vet hva denne tendenstrekningen går ut på. Til hver kamp på tippekupongen har man nemlig en grunnfordeling på 4 tippetegn av hvert slag, altså 4 enere, 4 kryss og 4 toere. Til dette legger man forhåndstipset fra 20 norske aviser, slik at det i det hele er 32 tippetegn for denne tippekampen.

La oss si at de 20 avistipsene er hentet fra har tippet en kamp på kupongen, slik at tegnfordelingen for vedkommende kamp blir 20—0—0 (1—x—2). Da blir disse 20 enerne lagt sammen med de øvrige 4 enerne, 4 kryssene og 4 toerne. På denne måten får man 24 enere, 4 kryss og 4 toere å velge mellom i trekningen av denne kampen. Som det framgår av eksemplet, har «eksperttipperne» kommet fram til en storfavoritt (20—0—0). Skulle denne tippekampen bli avlyst, er det derfor, når tendenstrekningen blir satt i kraft, størst sjanser for at det trukne tegn blir en ener. Likevel er det ikke avgjort

ener. Likevel er det ikke avgjort at det trukne tippetegn blir ener. Med i trekningen er også de 4 kryssene og 4 toerne. På denne måten har man en 8/32 (25 pst.) sjanse for at det trukne tegn ikke vil bli en ener.

Avisinnlegg i "Ordet fritt", Adresseavisen, 28/1-1970

EGENAKTIVITET 1: INNLEDENDE VURDERING OG BEREGNING AV SANNSYNLIGHETER.

Prøv å finne fram til de sannsynligheter det her spørres etter; begrunn kort løsningene (tankemønster) og levere inn gruppens løsningsforslag (gjerne flere løsningsforslag hvis gruppa har).

1. Ved kast med en terning; hva er sannsynligheten for å få en sekser?
2. En meteoritt er på vei mot jorda. Hva vil du si er sannsynligheten for at den treffer Norge? Hva er sannsynligheten for at den treffer havoverflaten?
3. En kvinne venter ett barn. Hva er sannsynligheten for at det blir en jente?
4. En trebarnsfamilie hvor alle barna er jenter, venter sitt fjerde barn. Jentene synes det ville "være kjekt" å få en gutt. Hva er sannsynligheten for at det blir en gutt?
5. Hva er sannsynligheten for å trekke en spar fra en godt blandet kortstokk?
6. Du deltar i to lotterier A og B. Sannsynligheten for å vinne i lotteri A er 0,05 (5%), og sannsynligheten for å vinne i lotteri B er 0,10 (10%). Hva er din samlede sannsynlighet for å vinne?
7. En familie planlegger å få to barn. Vi regner med at det er like stor sannsynlighet for å få en gutt som å få en jente. Hvor stor er sannsynligheten for at familien får to jenter?
8. To jenter og tre gutter er på tur sammen. De blir enige om at to av dem skal ta seg av oppvasken. Dette blir avgjort ved loddtrekning. Hva er sannsynligheten for at det blir to gutter som skal vaske opp?
9. Johanne har tre røde, to grønne og en blå blyant i pennalet sitt. Hun ber Kari ta ut to blyanter uten å se på fargene. Johanne mener at sannsynligheten for at begge blyantene er røde, vil være 1/5, mens Kari mener sannsynligheten vil være 1/3. Har noen av dem rett?
10. I en urne er det 10 like kuler; 2 er røde, 3 er hvite og 5 er sorte. Du trekker en kule tilfeldig. Hva er sannsynligheten for å trekke en hvit kule?
11. I en urne er det 10 like kuler; 2 er røde, 3 er hvite og 5 er sorte. Du trekker to kuler tilfeldig. Hva er sannsynligheten for å trekke to hvite kuler?
12. Anta at de to lagene som møter hverandre i ishockeyens sluttspill (lag A og lag B) er like gode. Regelen sier at laget som først vinner tre kamper av fem mulige har vunnet sluttspillet. Hva er sannsynligheten for at lag A vinner sluttspillet i løpet av de tre første kampene? Hva er sannsynligheten for at sluttspillet er avgjort etter tre kamper?
13. Hva er sannsynligheten for at sluttspillet avgjøres i løpet av de fire første kampene? Hva er sannsynligheten for at sluttspillet må gå over fem kamper?

Lars Burman är lektor i matematikens och datateknikens didaktik vid Pedagogiska fakulteten, Åbo Akademi i Vasa. Han arbetar med utbildning av ämneslärare i matematiska ämnen samt utbildning av klasslärare, medverkar i läromedelsprojekt för gymnasiet och forskar kring utvärdering och problemlösning i matematikundervisningen. lburman@abo.fi

Parallell A5 VGS

Statistik och sannolikhetslära i undervisning och utvärdering

Jag kommer i huvudsak att presentera exempel och erfarenheter från ett försök inom kurser i statistik och sannolikhetslära i matematikundervisningen i Vasa, Finland. Inom försöket har problemuppgifter och projektarbete varit i fokus och speciellt intresse har också fästs vid utvärderingen, dvs. bedömningen av elevernas prestationer.

Jag inleder med att kort presentera ramarna för matematikundervisningen i gymnasiet i Finland, eftersom mycket i uppläggningen av försöket är en följd av gällande ramar för undervisningen.

Gymnasiematematiken i Finland

I Finland är gymnasiet en teoretisk skola med stark betoning på språk, medan linjer med yrkesinriktning utgör en egen skolform. Grovt taget kan man säga att hälften av en årskull går till gymnasiet, men de lokala variationerna i det avseendet kan vara rätt stora.

I gymnasiet finns det möjlighet att välja mellan lång och kort kurs i matematik. Den långa kursen innehåller 10 obligatoriska kurser men det är möjligt att välja tilläggskurser, som kan vara antingen preparerande och repeterande eller fördjupande till sin karaktär. Den korta kursen innehåller 6 obligatoriska kurser och också här är det möjligt att välja tilläggskurser.

I timmar räknat (och om en timme är 45 minuter) kan man tänka sig att en elev på lång kurs under gymnasietiden ofta har 350 - 450 timmar matematik medan en elev på kort kurs har 200 - 300 timmar matematik. Inom dessa timmar ryms det på lång kurs mindre än 10 % statistik och sannolikhetslära, men på kort kurs där det finns både en obligatorisk och en valfri kurs, kan statistiken och sannolikhetsläran utgöra 15 – 30 %, vilket är anmärkningsvärt mycket.

En kurs för lång matematik består inledningsvis av tabeller och diagram, samt lägesmått och spridningsmått. Sedan följer kombinatorik och beräkning av sannolikheter med de vanliga räknereglerna och slutligen, och som en betydande del, fördelningsteori jämte karakteristikor.

Den obligatoriska kursen för kort matematik innehåller tre relativt lika stora delar: sannolikhetsberäkning (med addition och multiplikation), kombinatorik (i form av produktprincipen och antal delmängder samt fortsättning till binomialsannolikheter) och statistik (frekvenser, spridningsmått, normalfördelningen och samvariation).

Den frivilliga kursen för kort matematik innehåller likaså tre delar: behandling av statistiskt material, sannolikhetsfördelningar och statistisk slutledning (med konfidensintervall och medelvärdestest).

Det är rätt vanligt att eleverna uppfattar kurser i statistik och sannolikhetslära som annorlunda jämfört med kurser i andra delområden av matematiken. Provfrågorna kan också upplevas annorlunda och t.ex. inom sannolikhetsläran kan provuppgifterna lätt ge antingen noll eller full poäng. Därför kan kursvitsorden för enskilda elever i statistik och sannolikhetslära avvika från deras normala vitsordsnivå oftare än i andra kurser.

En liten jämförelse mellan Finland och Norge

Utan att beakta hur mycket statistik och sannolikhetslära som kommer in före gymnasiet i Finland och före den vidaregående skolan i Norge, förefaller det som om man i Norge skulle betona sannolikhetsläran något mer än i Finland medan Finland betonar statistiken och fördelningarna mera. Naturligtvis har de båda länderna också mycket gemensamt, bl.a. binomialsannolikheternas centrala roll. Det är intressant att läroplaner och läromedel i Norge berättar mera om matematiska modeller, regression och prognos och också om den historiska bakgrunden till sannolikhetsläran samt den typ av tänkande som kommer till användning i denna del av matematiken.

Den kanske största skillnaden mellan länderna är dock oberoende av vilket delområde av matematiken som är i fokus, nämligen studentexamen i Finland. Studentexamen inverkar kraftigt på gymnasieundervisningen i Finland, så att den typ av uppgifter som ingår i studentexamensprovet också tenderar att uppfattas som särskilt viktiga i undervisningen, både av lärare och elever. Omvänt så tenderar den metodik som är förknippad med uppgifter som inte passar in i studentexamensmönstret att bli mera sällan använd i Finland, t.ex. att elever gör egna statistiska undersökningar i form av projekt.

Ett utvecklingsprojekt i Vasa ...

Utvecklingsprojektet utfördes inom olika kurser i matematik, både kurser i lång matematik och kort matematik, och under flera års tid. Allt utfördes vid Vasa övningsskola, den skola vid vilken den största delen av lärarstuderandes praktik är förlagd inom den finlanssvenska lärarutbildningen, men lärarstuderande var inte direkt involverade. Projektet hette EMU eller Effektiv MatematikUndervisning och tanken var att till projektet också kunde knytas forskning, den typ av forskning där läraren forskar i sin egen undervisning.

Under projektets gång prövades olika åtgärder och försöket mynnade ut i en design av undervisningen som föreföll vara mest effektiv och hållbar. Det visade sig då att en effektiv undervisning kunde bygga på fyra grundpelare, nämligen

1. utökat engagemang hos eleverna, som tar större ansvar för sin egen inlärning
2. analys av stoffet och de grundläggande metoder som kurserna innehåller
3. utvecklade arbetsmetoder, främst med problemlösning och projektarbete
4. mera mångsidig utvärdering och så att utvärderingen stödjer inlärningen

Under försökets gång utkristalliserades två huvudidéer, minitest och projektarbete, som båda byggde på ett utökat inslag av problemlösning, där problemlösning skall uppfattas i en vid bemärkelse. I det följande beskrivs dessa två huvudidéer kortfattat men exempel från kurserna i statistik och sannolikhetslära lyfts fram och ges mera utrymme.

A Minitest

Ett minitest kan enklast beskrivas som ett prov med två (eller tre) uppgifter, som genomförs under en del av en vanlig lektion. Provet innehåller en (eller två) basuppgift(er), som också liknar övningsuppgifter och kunde tänkas utgöra en uppgift i slutprovet. Men provet innehåller också en uppgift som kan beskrivas som litet mera krävande, som har formen av ett problem och/eller som är utformad så att svaret förväntas vara en metodbeskrivning.

För att litet mera noggrant kunna utvärdera kvaliteten hos uppgifterna i den exempelsamling som snart presenteras, fogar jag in en förteckning över dels olika användningsmöjligheter för uppgifter och dels olika kvalitetsaspekter hos rika uppgifter, se Burman (2009).

En uppgift i matematiken kan användas

a) för introduktion av nytt stoff (inkl. nya begrepp)
b) som övningsuppgift (inkl. repetition)
c) för utvärdering
d) för arbete i grupper
e) som en öppen uppgift .

Kvalitetsaspekterna är grupperade i fem grupper, beroende på i vilket avseende de är särskilt lämpliga. En rik uppgift

Introduktion	a) kan användas för att introducera nya tankar och strategier
	b) har potential att fungera som en utmaning för eleverna
Förståelse	c) har potential att fungera som en nyckeluppgift när det gäller att förstå och lära sig matematik
	d) uppmuntrar till att bygga nya kognitiva scheman
Relationer	e) kan lösas på flera sätt
	f) har kopplingar till olika delområden av matematiken
Relevans	g) är autentisk och relevant för sin kontext
	h) initierar och inspirerar till diskussion i klassrummet
Affektion	i) innehåller möjligheter till överraskningar och nöje

Så följer fem exempel på problem som är hämtade från utvecklingsprojektet i Vasa. Uppgifterna kan ibland ha använt på både lång och kort kurs, ibland bara på den ena kursen.

Exempel 1 *Medelvärdet av sju olika stora positiva hela tal är 23 och medianen är 20. Hur stort kan det största av de sju talen vara om man önskar att det skall få så stort värde som möjligt?*

Exempel 2 *Ett lag i "Fångarna på fortet" måste för att befria en lagmedlem fördela tio vita och tio svarta kulor i två askar. Sedan väljer fångvaktaren på måfå ut en av askarna och drar en kula ur den asken. Om kulan är vit blir fången fri, annars inte. Hur skall laget fördela kulorna så att sannolikheten att befria lagmedlemmen skall bli så stor som möjligt? Hur stor är denna sannolikhet?*

Exempel 3 *Talen m och n väljs på måfå ur mängden {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Bestäm sannolikheten att ekvationen* $x^2 + mx + n^2 = 0$ *har åtminstone en reell lösning. (m och n kan vara samma tal också!)*

Exempel 4 *En dator får slumpmässigt välja ut ett tal i intervallet 1 - 2000. Bestäm sannolikheten att talet är delbart med 2 eller 5.*

Exempel 5 *Fröken Jeanne d'Art kastar en pil och träffar en vanlig piltavla som är numrerad från 1 till 10. Vi är intresserade av med vilken sannolikhet hon får a) minst 5 b) exakt 5. Rita två bilder som hjälper oss att uppfatta problemen rätt och beskriv med ord hur man skall göra för att beräkna sannolikheterna.*

Jag kommenterar uppgifterna i förhållande till de nämnda användningsmöjligheterna och kvalitetsaspekterna (utan att för den skull presentera lösningar).

Den första uppgiften har använts både på lång och kort kurs och den har en potential att fungera som nyckeluppgift när det gäller att repetera och/eller utvärdera kunskaper om lägesmått i statistiken. Uppgiften innehåller element av problemlösning och kan vara en liten utmaning för många elever. Uppgiften testar begreppskunskap och förmågan till systematisk användning av den information som finns tillgänglig och uppgiften kan också med fördel användas i grupp.

Den andra uppgiften har också använts både på lång och kort kurs, men det är många elever på kort kurs som har gett upp utan att ha kommit nära det slutliga svaret. Uppgiften är rätt krävande i fråga om kunskaper i sannolikhetsläran men enskilda elever kan ändå föreslå lösningar och komma på goda idéer fastän de inte kan avgöra om deras förslag är "tillräckligt bra". Problemet är öppet i den bemärkelsen att eleverna kan ha det rätta (bästa) svaret utan att veta om det finns ett bättre svar. Uppgiften är utmanande och autentisk genom att den när den först användes anknöt till ett TV-program som var mycket aktuellt för eleverna. Därför inspirerade uppgiften åtminstone då till diskussion och t.ex. insikten att man kan fördela kulorna så att det är olika många i de båda askarna gav en tydlig aha-upplevelse åt många elever. Som det framgår av resonemanget ovan så ger uppgiften ett mervärde när eleverna löser den i grupper.

Den tredje uppgiften hör klart till lång kurs och den innehåller element från flera olika delområden av matematiken och är rätt utmanande för att inte säga krävande. Den är mycket lämplig för att användas i grupper och det är till och med så att lösningen förutsätter att man går igenom en rätt lång procedur med prövning av tänkbara lösningar (100 möjligheter), som görs betydligt snabbare om eleverna kan pröva en del talpar var. Innan prövningen vidtar finns det dock också skäl att tillsammans diskutera hur man skall lösa problemet och när man i samma uppgift behöver både villkoret på diskriminanten och en prövning av de (åtminstone i teorin) 100 möjligheterna inbjuder uppgiften till att bygga nya kognitiva scheman.

Den fjärde uppgiften är också en uppgift för lång kurs som kan användas såväl för övning som i prov. Uppgiftens stora fördel är att den kopplar ihop två skilda delområden av matematiken, dvs. talteori (delbarhet) och sannolikhetslära. Kontexten kan också ge upphov till någon reflexion, eftersom val av slumptal förekommer i flera sammanhang. Dessutom kan uppgiften lösas på olika sätt, antingen så att man bygger lösningen på det klassiska sannolikhetsbegreppet och beräknar den efterfrågade sannolikheten direkt eller så att man beräknar den med hjälp av sannolikheten för en union av två händelser och använder regeln.

Den femte uppgiften kan användas både på lång kurs och på kort kurs och den är mycket lämplig att använda som första uppgift när man introducerar geometrisk sannolikhet. Uppgiften kan användas för lösning i grupper eller så att läraren diskuterar sig fram tillsammans med klassen. Uppgiften är öppen och man kan precisera förutsättningarna och därmed hur lösningarna skulle kunna se ut. Med denna uppgift kan man som sagt introducera ett nytt sätt att beräkna sannolikheter och således få eleverna att tänka i nya banor. Uppgiften kopplar ihop sannolikhetslära och geometri, vilket sannolikt också sker senare i kursen. Om uppgiften används i grupper eller i hela klasser uppstår säkert diskussion och förhoppningsvis stannar inte de affektiva poängerna bara vid den billiga poängen som är förknippad med frökens efternamn.

B Projektarbete

Den typ av projektarbete som kunde genomföras inom en starkt begränsad tidsram och utan att man för den skulle behövde utelämna något egentligt stoff i den kurs som pågick, var ett modelleringsprojekt med följande fem stadier:

1. Idealisering
2. Matematisering
3. Arbete inom den matematiska modellen
4. Tolkning
5. Validering

Stora fördelar med ett projektarbete är att det kan motivera eleverna, när eleverna själva får välja och föreslå rubrik från sina intresseområden och från det ”verkliga livet”. Projektet ger också möjlighet att lösa problem som inte går att lösa på några minuter (vilket bl.a. gäller studentexamensuppgifter). Det ger också träning i hela modelleringsprocessen, när det vanliga med uppgifterna i matematiken i gymnasiet är att man enbart sysslar med arbete inom den matematiska modellen. Projektarbetet ger slutligen övning i att lösa problem i grupp, vilket ju kan anses höra till samhällets förväntningar och därför också borde bli litet vanligare i matematikämnet.

Exempel på projektrubriker

Vem ser på TV?	*Tillförlitlighet i Formel 1*
Vem far med bussen?	*Nivåbyten i matematik*
Vem går mot rött ljus?	*Går rökande i arv?*
Vem köper chips?	
Hur ofta äter man?	*När blir det mål i ishockey?*
Har pojkar större skor?	*När på året är gymnasister födda?*

Rubrikerna till vänster har förekommit i projekt där lösningen har sökts med hjälp av beskrivande statistik (ofta i kort kurs i matematik). Uppe till höger finns projekt som har utförts med hjälp av statistisk analys (lång kurs i matematik). Projekt kan också förekomma i andra kurser än kurser med statistik, t.ex. kurser som innehåller linjära och exponentiella modeller eller i vissa fall också differentialkalkyl. De två exemplen nere till höger hör till det sistnämnda slaget men det måste samtidigt erkännas att genomförandet av just de projekten krävde större förmåga av läraren än vanligt när det gällde att anpassa arbetet med det som var intressant för eleverna till det som kursen handlade om.

Dessa projektarbeten har genomförts utan att mera än 60 - 90 minuter av den totala lektionstiden i kursen har använts under förberedelserna och genomförandet. Om tid funnits har eleverna dessutom beretts möjlighet att kort presentera sina arbeten för varandra efteråt. Det är helt klart att kurser i statistik och sannolikhetslära är de kurser som bäst har lämpat sig för denna typ av projekt. Det har dessutom just i dessa kurser varit möjligt att hitta uppgifter av olika svårighetsgrad när eleverna fått möjlighet att jobba med allt från beskrivningar till analyser av de data som samlats in.

Som exempel på den mest krävande formen av analys som någon klass hunnit med, kan ännu ges den klass där tre elevgrupper inom ramen för en statistikkurs i lång matematik klarade av att studera in sig på var sitt extra delområde:
- anpassning av en regressionslinje med minstakvadratmetoden (för en utveckling i tiden)
- undersökning om två stickprov är tagna från samma (normal)fördelning med *t*-test
- undersökning av samband i korstabell (fyrfältstabell) med χ^2-metoden .

Det ger naturligtvis litet extra arbete åt läraren, åtminstone första gången, när man hjälper eleverna till kunskap utöver den egentliga kursen, men just denna grupp lyckades tillägna sig vad som behövdes med endast ett A4-papper var med ny information. Egentligen var det omvänt så att läraren som hade lovat att det inte skulle krävas mera extra arbete dvs. ny information utöver det som ingick i deras kurs än vad läraren kunde få att rymmas på en A4!

Respons från elever

Elevernas respons på minitesten har varit övervägande positiv och detta gäller helt oberoende av vilka delområden av matematiken som varit aktuella. Eleverna upplevde att de tvingats följa med i kursen på ett bättre sätt och att det stärkte självförtroendet om man klarade ett minitest bra. Många omdömen röjde också en fokusering på utvärdering och kursvitsord: ”det är bra att framgång i minitest kan höja kursvitsordet”, ”det blir lättare att klara kursprovet när vi har minitest”, ”det är bra att få en försmak av kommande provuppgifter” och ”bra tillfälle att få öva inför kursprovet”.

Elevernas feedback på projekten har likaså varit positiv även om en del tyckte att projekten kunde vara utmanande och svåra och ledde till stress (mot slutet av perioderna, om mycket som kunnat göras tidigare då är ogjort). Omdömen som ”roligt”, ”intressant”, ”lärorikt” och ”nyttigt” var vanliga men ”omväxlande”, ”annorlunda” och ”fick lov att ta ansvar” förekom också. Det som utvärderades upplevdes som viktigt av eleverna och en del av de positiva omdömena kan igen skrivas på kontot att eleverna noterade att modelleringsprojekten kunde ha en positiv effekt på deras vitsord.

Inom ramen för EMU-projektet vägdes projektarbetet in som 1-2 provuppgifter i kursprovet, medan minitesten beaktades på ett sätt som uppfyllde devisen ”det som man under kursens gång i ett tidigt skede visat sig behärska skall beaktas när hela kursen utvärderas”. Elevernas prestationer under kursens gång kunde alltså ge ”poäng” som garanterade ett godkänt vitsord i hela kursen, vilket gjorde att en del elever kunde komma till det egentliga kursprovet och veta att de redan var godkända i kursen, men de hade möjlighet att höja sitt vitsord till ”en högre nivå”. Det fanns ändå respons från eleverna som tydde på att den indirekta effekten var större än den direkta effekten, dvs. eleverna kunde uppnå högre vitsord mera som en följd av att minitesten tvingade dem att jobba mera med kursen under kursens gång än som en följd av att poängen i minitesten kunde ha en höjande effekt på vitsorden.

Sammanfattning

Inom de ramar som jag genomförde EMU-projektet, kunde jag inte göra stora förändringar i undervisningen utan jag försökte ta ”små steg i rätt riktning”. Målet var ändå att effektivera undervisningen genom att få utvärderingen att stödja inlärningen och på så sätt skulle elevernas prestationer förbättras. Underlaget för utvärdering av eleverna breddades med hjälp av mera element av problemlösning och väsentlig var också en strävan efter mera ”higher-order thinking”. Det kom ytterligare belägg för den gamla sanningen att eleverna uppfattar det som utvärderas som det viktiga i kursen och det kändes meningsfullt att kunna införliva problemlösning och projektarbete med det som eleverna upplevde som viktigt. Som redan sagts visade det sig att kurser i sannolikhetslära och statistik var mycket lämpliga kurser att förse med ett större inslag av problemlösning och att koppla projektarbete till.

En av de viktigaste inspirationskällorna för EMU som utvecklingsprojekt var arbetet inom NCTM i USA och verket ”Principles and Standards” som utkom år 2000. De två citaten ur detta verk ger en uppfattning om vad som också kunde vara vårt mål med undervisningen i statistik (och sannolikhetslära).

> *”Students should leave secondary school with the ability to judge the validity of arguments that are based on data, such as those that appear in the press.”*

> *”The idea that individual events are not predictable but that a pattern of outcomes can be predicted is an important concept that serves as a foundation for the study of inferential statistics.”*

Referenser

Burman, L. (2009). On the classification of tasks in mathematics instruction. In Burman, L. (Ed.) *Problem Solving in Mathematics Education*, Proceedings of the ProMath conference August 28-31, 2008 in Vaasa. Rapport från Pedagogiska fakulteten, nr 27/2009, s. 53-59. Vasa: Åbo Akademi, Pedagogiska fakulteten.

NCTM, (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. The National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.

Parallellsesjon 2, mandag kl 15.00 – 16.30

Mike Shaughnessy has worked for over thirty years at Oregon State University and at Portland State University (USA) as a Professor of Mathematics and Statistics Education. Dr. Shaughnessy has taught a wide range of mathematics and statistics content courses for pre-service and in-service teachers, elementary through secondary levels, and worked on many projects involved in the continued professional development of mathematics teachers. He has published many articles and books in his career, principally in his two favorite areas, the teaching and learning of probability and statistics, and, the teaching and learning of geometry. He was recently elected President of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), and is currently serving a year as President Elect, prior to his two-year term as President.

Parallell B1 — M og U-trinn (Alle)

Focus on Student Reasoning and Sense Making in Statistics: A data Analysis exploration.

This workshop will be a data analysis investigation based on one of the episodes of student reasoning from the new NCTM book *Focus on Secondary Mathematics: Reasoning and Sense Making in Statistics.* Participants will be given a data set, and asked to put on their 'data detective hats' as they share graphical representations of the data, and then make predictions from the data. The investigations in this new NCTM book series are specifically designed to elicit and encourage students to share, and build on, one another's reasoning. Although the workshop primarily is aimed for students and teachers from middle and secondary levels, the presenter has used this material with teachers at all levels, elementary – secondary, in mixed level settings. All are welcome.

Tor Andersen er lektor med hovedfag i fysikk. Han har undervist i videregående skole i mange år. Siden 2004 har han vært ansatt ved Matematikksenteret. Tor Andersen har holdt en rekke kurs om bruk av digitale verktøy i matematikk.

Parallell B2: VGS

Bruk av digitale verktøy til å øke motivasjon og forståelse i statistikk og sannsynlighetsregning.

Vi gikk rett på sak og brukte klimaforsker Jan-Gunnar Winther sitt langtidsvarsel som oppvarming:

OL-været i 2014: Minus 3 grader og 94 cm snø i Tromsø

Klimaforsker Jan-Gunnar Winther har laget tidenes langtidsvarsel og lover 94 centimeter snø og minus tre grader under OL i Tromsø i 2014.

Nøkkelord i diskusjonen var anslag og usikkerhet. Før eksempler på simuleringsverktøy repeterte vi følgende:

Hva er sannsynlighet?

Sannsynlighet er relativ frekvens når antall forsøk går mot uendelig.

$$\text{relativ frekvens} = \frac{\text{frekvensen av en verdi}}{\text{total antall observasjoner}}$$

Utfall (hendelse) *A* forekommer *m*(*A*) ganger i et eksperiment som vi utfører *M* ganger.

$$r(A) = \frac{m(A)}{M} \qquad \boxed{P(A) = \lim_{M\to\infty} r(A) = \lim_{M\to\infty} \frac{m(A)}{M}}$$

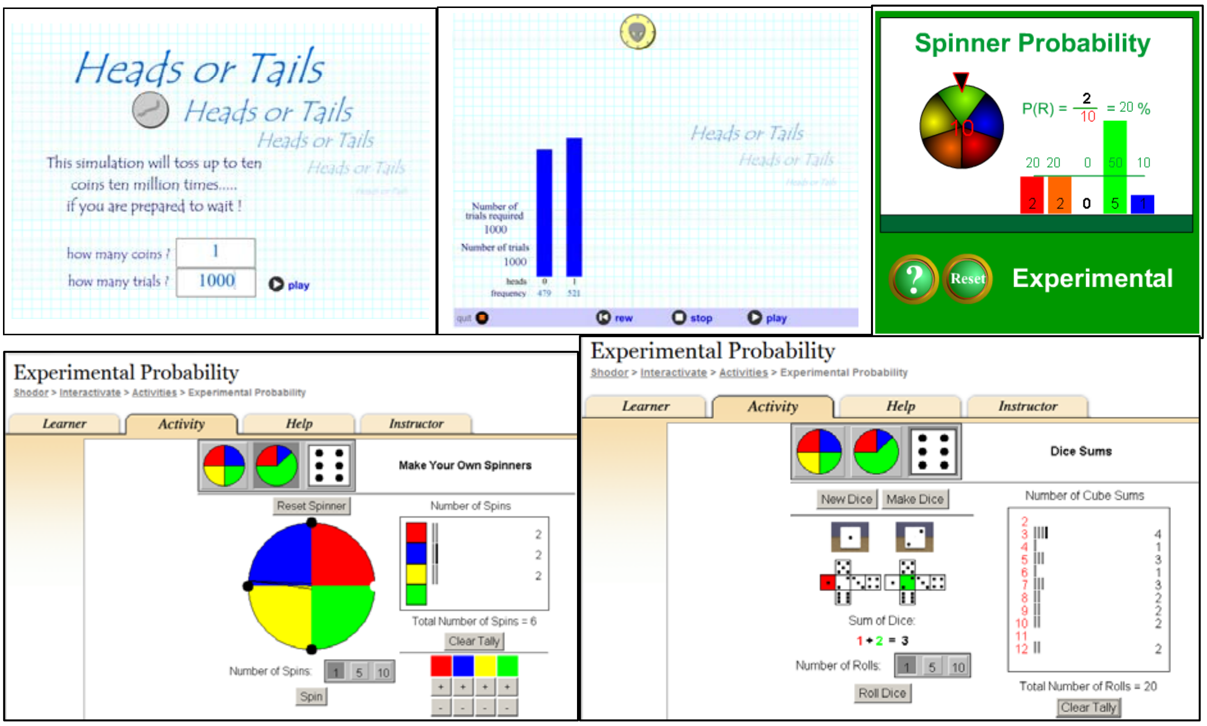
Etterfulgt av diskusjon der følgende avisoppslag var utgangspunkt:

Dagbladet:

Overskrift etter at folk i Norge hadde spilt LOTTO i noen uker:

Utrolige 2 slo til igjen!

Eksempler på simuleringsverktøy:



Med påfølgende diskusjon om egnethet og verdi i undervisningen i videregående skole.

Simulering med Excel. Demo og øving.

Kast med to terninger.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						8
3					8	
4				8		
5			8			
6		8				

Utfallsrommet er mengden av alle mulige utfall.

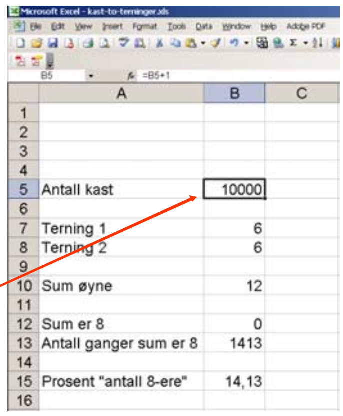
I en uniform sannsynlighets-modell er alle utfall like sannsynlig.

$$P(A) = \frac{n(A)}{N} = \frac{\text{gunstige}}{\text{mulige}}$$

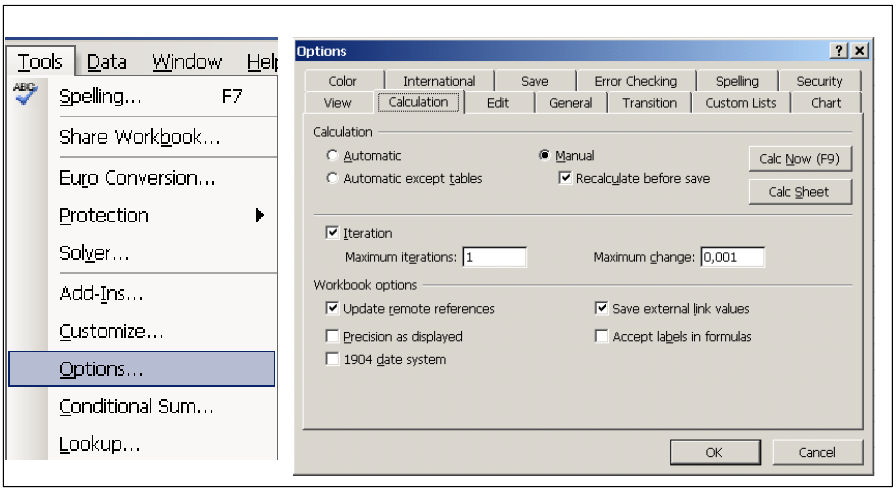
$$\frac{5}{36} = 0.1388888889$$

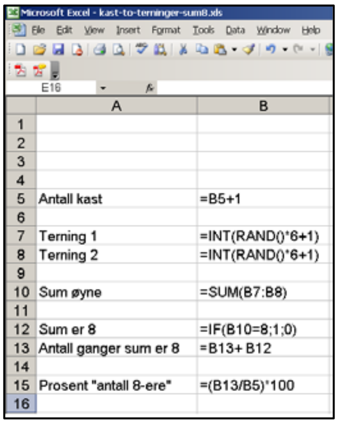
10 000 KAST MED 2 TERNINGER

Hvor stor er sannsynligheten for at summen av øyne på de to terningene er 8?



Sannsynlighet er relativ frekvens når antall forsøk går mot uendelig.



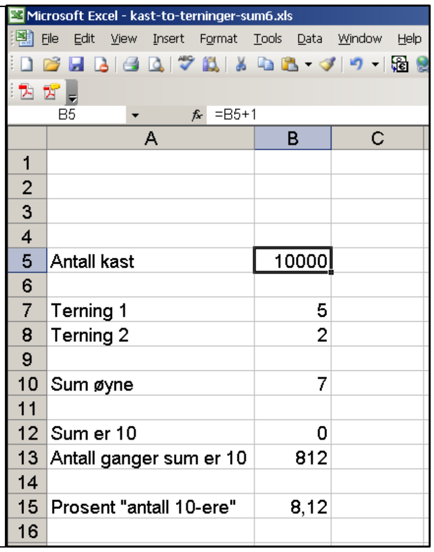


Oppgave

Endre programmet slik at det "regner ut" sannsynligheten for at summen av øyne er 10.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						10
5					10	
6				10		

$$\frac{3}{36} = 0.08333333333$$



Ny avisoverskrift som utgangspunkt for avgjørende spørsmål: (Kilde: Professor Bent Natvig – UiO)

Fikk 1,3 mill. etter feildiagnose

Aftenposten.no Nyheter Helse

En øyelege som ikke oppdaget en kreftsvulst bak øyet hos en pasient, er i Oslo tingrett dømt til å betale pasienten en erstatning på 1,3 millioner kroner.

Hvor syk bør legen tro du er for å få deg innlagt på sykehus?
Hvordan tenker allmennmedisineren?
Anvendelse av Bayesiansk beslutningsteori.

Fylkeslege Petter Øgar: "I en skjønnsutøvelse vil flere vurderinger inngå".

- Hva er relevante faktorer og forhold å ta hensyn til ved en beslutning som skal treffes eller vurdering som skal gjøres?
- Hvilken helsefaglig kunnskap finnes om disse faktorer og forhold, og hvilken vitenskapelig kvalitet er det på denne faglige dokumentasjonen?
- Hvor sannsynlig er det at ulike faktorer og forhold skal inntreffe?
- Hvilken verdi skal tillegges de ulike forhold?
- En samlet bearbeiding og integrering av disse delvurderingene.
- Hvem er kompetent til å foreta disse vurderingene?

S = { pasienten er alvorlig syk } $P(S) = 0{,}02$

L = { pasienten er litt syk } $P(L) = 0{,}10$

N = { pasienten er helt frisk } $P(N) = 0{,}88$

+ = { testen gir positivt utslag }

- = { testen gir negativt utslag }

Oppdatering av sannsynlighet ved ny informasjon:

P(positiv test | alvorlig syk) = $P(+ \mid S) = 0{,}90$

P(positiv test | litt syk) = $P(+ \mid L) = 0{,}60$

P(positiv test | helt frisk) = $P(+ \mid N) = 0{,}10$

Men her vet vi hvordan det står til med pasienten.

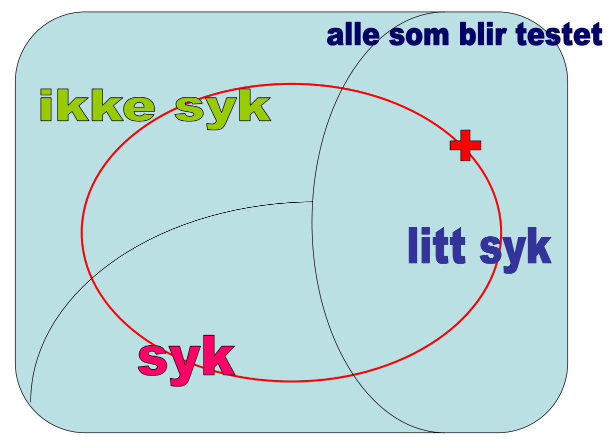
Men hva er avgjørende for allmennmedisineren?

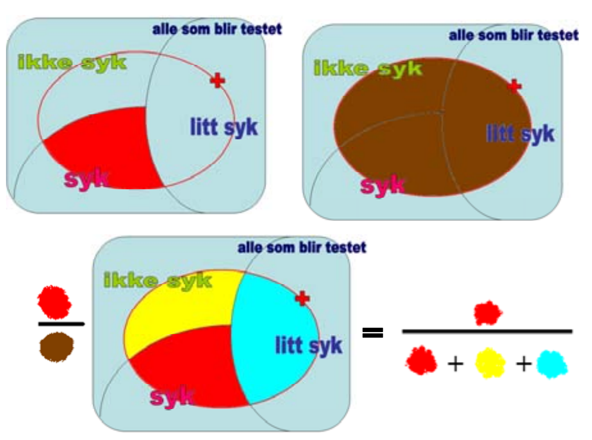
P(alvorlig syk | positiv test) = $P(S \mid +)$

Bayes teorem
(pensum i videregående skole)

$$P(\text{alvorlig syk} \mid \text{positiv test}) = P(S \mid +) = \frac{P(+ \mid S)\,P(S)}{P(+ \mid S)\,P(S) + P(+ \mid L)\,P(L) + P(+ \mid N)\,P(N)}$$

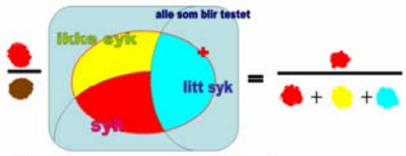
Fargerik visualisering av formelen ved hjelp av digitalt verktøy:





$$\frac{n(S\cap +)}{n(+)}=\frac{n(S\cap +)}{n(S\cap +)+n(N\cap +)+n(L\cap +)}$$

$$\frac{P(S\cap +)}{P(+)}=\frac{P(S\cap +)}{P(S\cap +)+P(N\cap +)+P(L\cap +)}$$



$$\frac{n(S\cap +)}{n(+)}=\frac{n(S\cap +)}{n(S\cap +)+n(N\cap +)+n(L\cap +)}$$

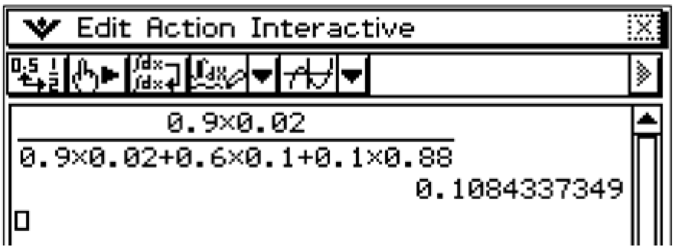
$$\frac{P(S\cap +)}{P(+)}=\frac{P(S\cap +)}{P(S\cap +)+P(N\cap +)+P(L\cap +)}$$

$$P(S|+)=\frac{P(+|S)\cdot P(S)}{P(+|S)\cdot P(S)+P(+|N)\cdot P(N)+P(+|L)\cdot P(L)}$$

Resultater:

$$P(\text{alvorlig syk} \mid \text{positiv test}) = P(S \mid +) = \frac{P(+ \mid S)\, P(S)}{P(+ \mid S)\, P(S) + P(+ \mid L)\, P(L) + P(+ \mid N)\, P(N)}$$

P(S) = 0,02	P(positiv test | alvorlig syk) = P(+ | S) = 0,90
P(L) = 0,10	P(positiv test | litt syk) = P(+ | L) = 0,60
P(N) = 0,88	P(positiv test | helt frisk) = P(+ | N) = 0,10



Sannsynligheten for at du er alvorlig syk når testen har positivt utslag, er omtrent 11 %.

Enn om vi har to tester?

S = { pasienten er alvorlig syk }

L = { pasienten er litt syk }

N = { pasienten er helt frisk }

+A = { første test gir positivt utslag }

+B = { andre test gir positivt utslag }

P(alvorlig syk | to positive tester)?

Tilsvarende beregninger med bruk av Bayes teorem gir 0,27.

En anvendelse av Bayesiansk beslutningsteori.

To alternative beslutninger:

A = {pasienten hospitaliseres omgående}

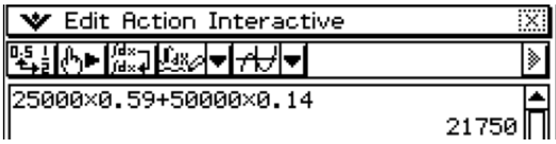
B = {se det hele an inntil videre}

Samfunnsøkonomisk" tap".

Tabell over tapt nytte.

		Pasientens tilstand		
		Alvorlig syk	Litt syk	Helt frisk
Beslutning	A	0	25 000	50 000
	B	100 000	25 000	0

P(litt syk | to positive tester) = 0,59
P(helt frisk | to positive tester) = 0,14



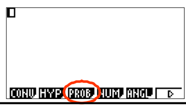
Risikoen ved å velge alternativ A, dvs. omgående hospitalisering: kr 21 750

Risikoen ved å velge alternativ B, dvs. vente og se an: kr 41 750

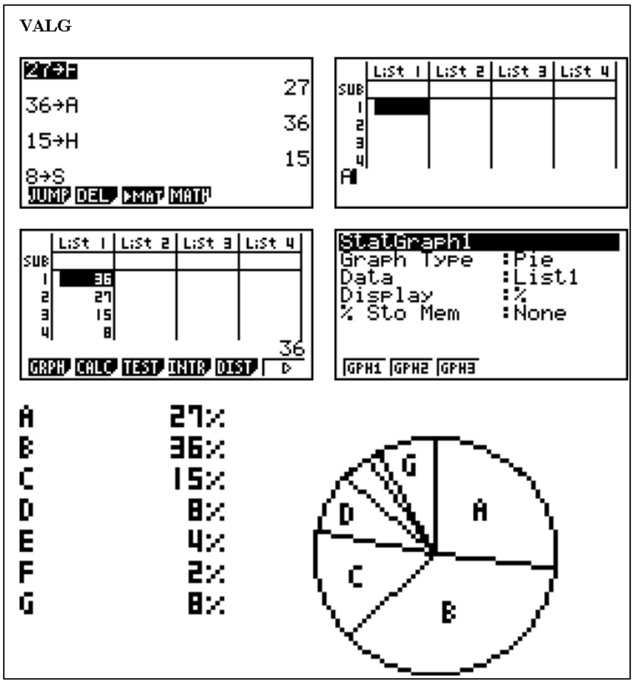
Konklusjon:

Risikoen ved hospitalisering er desidert minst.

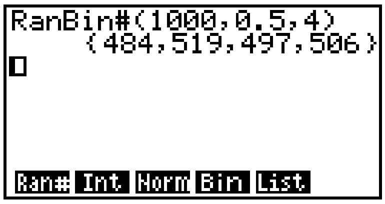
Simulering:
100 soldater
Gjennomsnittshøyde 178 cm
Standardavvik 8 cm



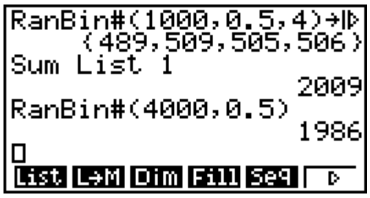
Flere simuleringer på digitalt verktøy. Demo og øvinger.



1000 kast med mynt
4 omganger
Forventet antall kron/mynt i hver omgang



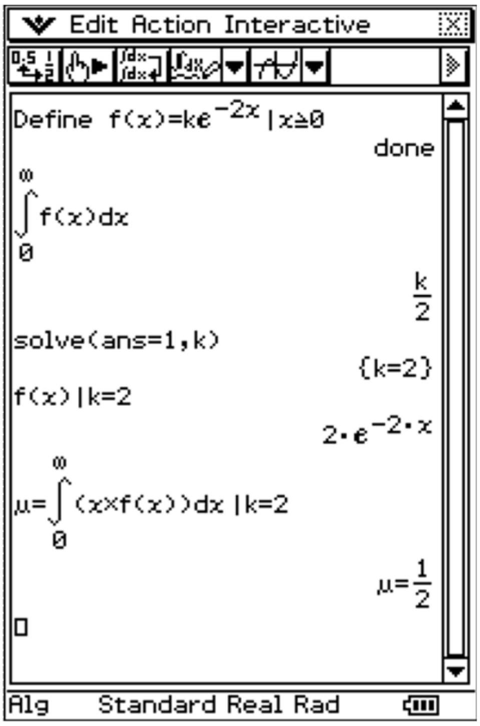
Undersøkelse

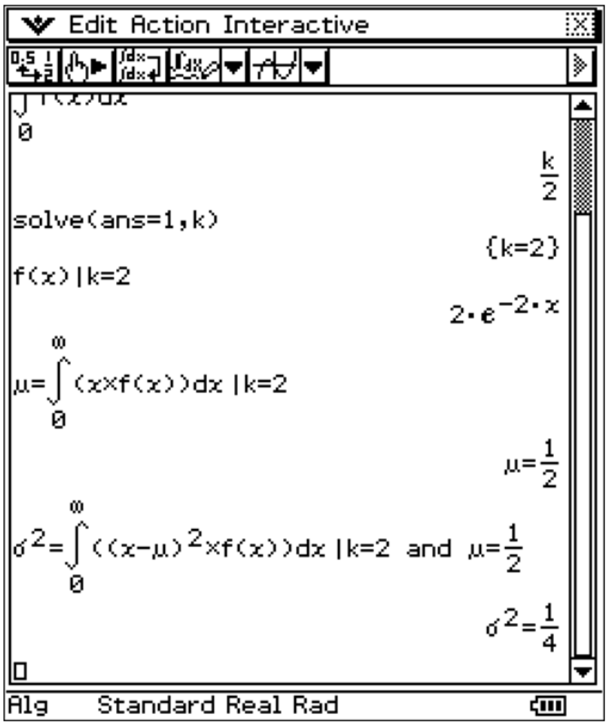


Hvorfor er **Sum List 1** og siste **Ans** relativt like?

Eksempel på regnekraften til et digitalt verktøy:

En kontinuerlig random sannsynlighetsfordeling er gitt ved $f(x) = k \cdot e^{-2x}$, $x \geq 0$
Finn k, tegn fordelingen, regn ut gjennomsnitt, varians og standardavvik.

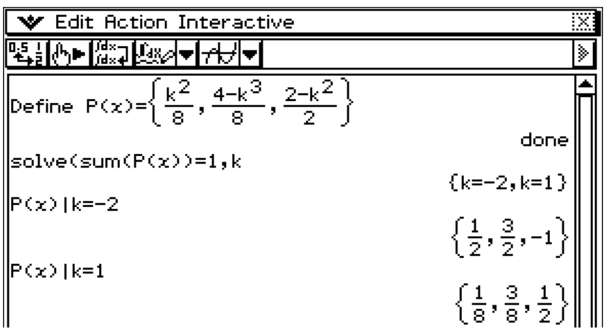




Diskret sannsynlighetsfordeling

x	0	1	2
$P(x)$	$\frac{k^2}{8}$	$\frac{4-k^3}{8}$	$\frac{2-k^2}{2}$

Finn verdien til k og verdiene til $P(x)$ i hvert tilfelle.



Parallellsesjonen ble avsluttet med øvingsoppgaver der forslag til løsninger var vedlagt.

May R. Settemsdal har vært ansatt på Matematikksenteret siden 2005. I stillingen som utviklingsmedarbeider arbeider hun med ulike forsknings- og utviklingsprosjekter. May har blant annet deltatt i utarbeiding av veiledninger til de nye læreplanene, pilotprosjektet Familiematematikk med utvikling av Mattepakker, Matematikksett for barnehagene og Matteklubb på nett. Hun tar imot elever, lærere, besteforeldre, foreldre, barn og unge på matterommet, og holder ulike kurs over hele landet.

Gerd Åsta Bones er ansatt som prosjektleder FoU ved Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen. Hun er ansvarlig for flere utviklingsprosjekter i forbindelse med ny læreplan for grunnskolen og rammeplan for barnehagen, matematikkrom, jenter og Matematikk, utematematikk og tilrettelegging og utvikling av aktiviteter på Kristiansten Festning.

Parallell B3: BH og småtrinn

Statistikk for de minste
"Lete - finne, sortere - notere, tegne - regne"

Hva innebærer statistikk for de minste? Hvordan vil vi at små barn skal møte statistikk? Hva mener vi med lete, finne, sortere, notere, tegne og regne i statistikk? Før vi går videre inn på dette og konkretiserer hva vi mener, er det noen grunnleggende tanker om statistikk som er nødvendig å ha med seg.
Statistikk står nevnt spesifikt med kompetansemål både i Kunnskapsløftet og i Rammeplan for barnehagen.

Kunnskapsløftet, kompetansemål 2.trinn:

- samle, sortere, notere og illustrere enkle data med tellestreker, tabeller og søylediagram

Kunnskapsløftet, kompetansemål 4.trinn:

- samle, sortere, notere og illustrere enkle data med tellestreker, tabeller og søylediagram og kommentere illustrasjonene

Antall, rom og form

- styrke barnas nysgjerrighet, matematikkglede og lyst til å utforske matematiske sammenhenger
- tilby materiell som gir barna erfaringer med klassifisering, ordning, sortering og sammenligning

Målet med statistikk er å presentere og gjøre beregninger på et datamateriale slik at det kan gi god og sann informasjon, og være grunnlag for vurderinger og beslutninger, både privat og i offentlige sammenhenger. Videre handler det om å vurdere og se kritisk på konklusjoner og framstilling av data, sentralt i statistikk. *Med statistikk kan vi bevise alt, også det motsatte!*

Lete-finne

Undersøkelser med elevmedvirkning

Lærebøker i matematikk for de yngste elevene fremstiller ofte statistikk på en slik måte at vi mener målet med statistikk **ikke** er ivaretatt. Det kan være at elevene skal systematisere ulike objekter på et bilde og lage tellestreker, søylediagram eller lignende. Å rydde opp i et oppkonstruert bilde, kan med rette virke meningsløst for elevene. Tellestreker for tellestrekenes skyld likedan. Statistikk bør kunne tilrettelegges annerledes og bør innebære mye mer enn dette.

Elevene skal oppleve at statistikk er nyttig, interessant og meningsfylt. Når elevene har registrert og systematisert data, så er det for å finne svar på noe de undrer seg over eller har lyst til å finne ut av. Resultatene som fremkommer, bør skape engasjement og vekke interesse.

Hvem liker grønne og hvem liker røde seigmenn? Hvor mange søsken har vi? Hva er mest vanlig? Uvanlig? Hvilke utfall fins i vår klasse? Hva er forskjellen mellom flest og færrest? Hvis læreren mener elevene kommer for sent til timene etter friminuttene, kan klassen registrere hvor ofte og hvor mye de kommer for sent, for så å bruke resultatene til å vurdere omfanget og hva slags konsekvens dette bør få.

For all matematikklæring gjelder at elevene blir mer motivert og engasjert, dersom de får være mer deltakende. Hva vil elevene undersøke? Hvorfor? Hva skal de bruke resultatene til? Fins det et aktuelt tema som elevene mener noe om? Hvordan forberede for diskusjon og legge opp til en meningsmåling som er åpen, nøytral og uten at det stilles ledende spørsmål? For meningsmålinger handler det om å stille gode spørsmål som ikke er ledende! Svaralternativer som ja eller nei utvides med for eksempel uenig, delvis enig.

Planleggingsfasen

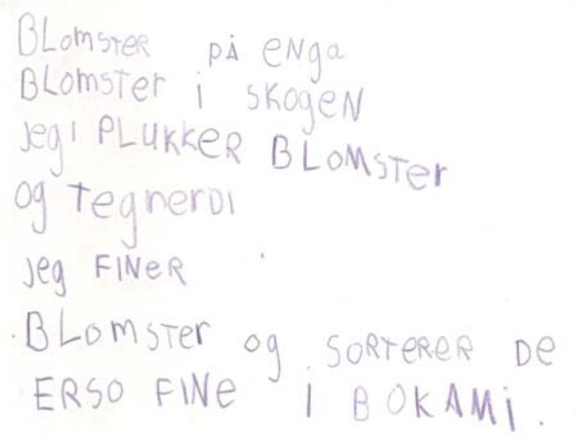
- Hva vil vi undersøke?
- Samle ideer med utgangspunkt i elevenes interesser
- Befaring på stedet/arenaen for å finne ut hva vi skal lete etter, eks i trafikken eller på internett
- Bestemme hva som skal undersøkes og hva vi vil med det
- Bestemme hvordan det skal skje
- Bestemme hvordan resultater skal presenteres
- Bestemme varighet for innsamling av data
- Bestemme organisering og delegering – hva slags utstyr trengs? Hvem gjør hva og hvordan? Alle elevene på gruppa bør ha relevante arbeidsoppgaver.

Sortere – notere

Med elevenes egne uttrykksmåter

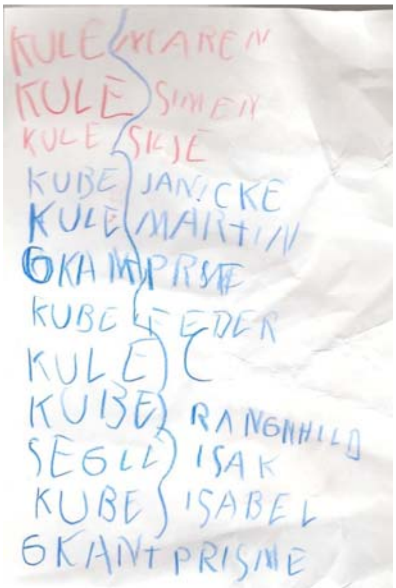
I stedet for å sortere ”på papiret”, kan elevene sortere i virkeligheten. Konkreter og halvkonkreter som elevene finner og vil sortere, systematisere og registrere. Eller vi tilrettelegger for sortering med tilgjengelig materiale med potensial for flere mulige måter å sortere på. I oppstarten er det fint å oppfordre elevene til å sortere et materiale etter kriterier de velger selv. Her kan vi få mange alternative måter å sortere på, som handler om mye mer enn form, farge og størrelse. Det kan være blader med hull og uten hull, skjell med og uten perler i. Det kan være fisk som sorteres ut fra mål og vekt, blomster som er pene, steiner som er tunge. Varierende værforhold over en periode sortert etter fastlagte kriterier, antall skiturer nedover og bortover med tilbakelagte kilometer, nesten alt kan sorteres og på svært mange ulike måter. Elevene kan dra ut på oppdagelsesferd med digitalkamera og bruke egne bilder til videre utforsking for å nevne noe.

Hvor mange av hver farge? Hvor mange ulike blomster -sorter? Er det flest korte eller lange blomster?


BLomSTER på eNga
BLomSTer i SKogeN
Jeg i PLUKKER BLOMSTer
og tegnerDI
jeg FINeR
BLomSTer og SORTERER De
ERSO FINe i BOKAMi.

Statistikk kan dokumenteres på ulike måter. Nedenfor vil vi liste opp noen ulike måter å skriftliggjøre statistikk på.

Tellestreker



Kan elevene være med på å bestemme hvordan de vil notere? Tellestreker er noe elevene skal kunne bruke til å notere med. Før de blir oppfordret til å lage tellestreker, er det fint om elevene finner sin egen måte å registrere og notere på. Vi må ikke alltid vise dem hvordan de skal gjøre det først.
Når elever får i oppgave å notere resultater/funn, er det ikke sikkert de velger tellestreker til å begynne med. Se bildet til høyre. I dette eksemplet fikk elvene selv bestemme hvordan de skulle skriftliggjøre og notere resultatene. Da elevene skulle oppsummere og sammenfatte sine resultater, oppdaget de selv at det var en uoversiktlig måte å gjøre det på. Dermed ble det naturlig å diskutere om det fantes andre og enklere måter å gjøre det på, som for eksempel med tellestreker.

Skjema

Kan elevene lage sitt eget skjema som passer til oppgaven? Sammenlign forslagene elevene kommer med. La deretter elevene få prøve skjemaet sitt. Diskuter i etterkant hvordan det fungerte. Når elevene får prøve seg frem, vil de etter hvert kunne lage skjem som passer til ulike formål og trenger ikke få et som er ferdig laget av den voksne eller isom fins i læreboka.

Tabell

Kan eleven utforme tabeller og selv erfare hva som fungerer/ ikke fungerer?
Tør vi ta sjansen på at noe skal mislykkes? Erfaringer med noe som ikke fungerer, kan være en nyttig erfaring?

Diagram

Kan elevene selv bestemme hva slags diagram som viser resultatene best?
Sammenlign ulike fremstillinger, diskutere hvilken som gir god og sann informasjon.

Tegne – regne

Bearbeide slik at statistikken gir elevene innsikt, mål og mening

Statistikk egner seg ypperlig til situasjoner hvor elevene kan uttrykke seg muntlig, gjøre seg opp en mening, stillespørsmål, argumentere og forklare en tankegang ved hjelp av matematikk.

Elevene bearbeider data når de arbeider med tallene for lettere å se hva tallene forteller.

Statistikk er mye mer enn en ren teknisk øvelse. Statistikk kan brukes til å utvikle en god tallforståelse og tallbegrep. Vi kan forberede for mange viktige begreper i statistikk allerede mens barna er små.

- sorterer tall etter størrelse
- setter tallene opp i tabeller
- tegner diagrammer
- regner ut typetall, gjennomsnitt og mye mer

Eksempel:
- Hva er den *høyeste* temperaturen vi målte?
- Hva er den *laveste* temperaturen vi målte?
- Hvor stor er forskjellen på de to blomstene?

Et eksempel som viser skriftliggjøring på elevenes premisser, uten oppskrift.

Tolke

En viktig del av statistikken er å kunne tolke resultatene en har funnet. Vi tolker data når vi prøver å finne ut hva tallene/illustrasjonene/ diagrammene/ tabellene forteller oss. Elevene må få uttrykke muntlig og skriftlig hva fremstillingene forteller og øve på å trekke konklusjoner.
- Hvordan vurderer du resultatene?
- Hva slags beslutninger må vi ta?

Hva får vi ut av å arbeide med statistikk med de minste barna?

Ulike typer statistikk gir oss et godt utgangspunkt for å jobbe med tallbegrepet og god tallforståelse. Noen eksempler vi kan ramse opp:
- Tall-linje
- Overslag - med både addisjon og subtraksjon
- Sju biler fra 10, hvor mange er igjen? Se på forskjellen
- Telle med sprang
- Teller det som er igjen
- Telle opp eller telle ned? Fint når elever oppdager sammenhenger
- Finne tallet
- Halvparten/ dobbelte
- Sammenligne
- Likt/ulikt

Skal elevene fatte interesse for og oppleve statstikk som noe annet enn en ren teknisk øvelse, må vi bruke statistikken til å lage spennende undersøkelser hvor elevene gjør funn som de kan påvirke eller som påvirker dem. Vi er avhengig av overordnete mål som at statistikken gir oss nyttig informasjon som grunnlag for konklusjoner og tiltak.

Per Nilsson, Växjö universitet, Sverige.
Per arbetar som biträdande lektor Matematiska och systemtekniska institutionen vid Växjö universitet i Sverige. Han vill öka kunskapen om lärande och undervisning i sannolikhet och är i det sammanhanget speciellt intresserad av hur elever varierar och koordinerar mellan olika sätt att resonera om slump och sannolikhet. I senare studier har Per börjat intressera sig för grupparbete om sannolikhet och då speciellt hur elevers olika sätt att tolka aspekter av sannolikhet öppnar upp för eller begrränsar möjligheter för lärande inom ramen för elevernas sätt att kommunicera om en lösning på en uppgift.

Kjærand Iversen, Høgskolen i Nord-Trøndelag.

Parallell B4

U-trinn

Sannolikhet och alternativa undervisningsformer

Inledning

Temat för presentationen var lärande och undervisning i sannolikhet. Presentationen var uppdelad i två delteman. Per inledde med att diskuterade lärande och undervisning i sannolikhet utifrån det tärningsspel han använt i sina studier. Kjærands presentation fokuserade relationen mellan multiplikativt tänkande och elevers sätt att resonera om sannolikhet. Kjærand kopplade detta sedan till *Flexitree*, som är ett datorprogram där elever ges möjlighet att resonera om sannolikhetsutfall, genererade av trädstrukturer. Några klassiska resultat med relevans för de båda inriktningarna utgjorde bakgrund och utgångspunkt för diskussionerna.

Pedagogiska utgångspunkter

Lärande i sannolikhet ska bygga på elevernas egna idéer. Men, forskning har visat åtskilliga prov på att det inte är alltid så att elevers ”personliga” föreställningar om sannolikhet överensstämmer med de ”formella” begrepp, som skolan syftar till att lära dem. Det är förstås ganska enkelt att generera olika typer av missuppfattningar genom att låta personer svara på frågor, eller agera i situationer, där deras kunnande är otillräckligt för att förstå och hantera frågorna och situationerna i fråga. Vår ansats har varit en annan. Utifrån tesen att matematikundervisning ska bygga på elevernas egna idéer blir det väsentligt med information om elevers matematik. Vårt intresse har därför varit att undersöka vad elever förmår göra under gynnsamma förhållanden. Att förstå hur elever resonerar om matematiska principer före och under undervisning underlättar kommunikationen mellan lärare och elever. Information om elevers förmågor hjälper lärare att inleda diskussioner och utforma situationer som avser att leda till att utveckla elevernas förståelse (Nilsson, 2009).

Summaspelet och elevers förståelse av utfallsrum (gynnsamma fall) och frekvenser

Summan av två tärningar kan vi beskriva med utfallsrummet *S*={2,3,….11,12}. Men frågan är: vad är sannolikheten för respektive summa?

Lecoutre (1992) visar vad som kommit att kalls *Equiprobability bias*. Genom att tillämpa ett sådant resonemang menar man att alla summor är lika sannolika då det bara är en fråga om chans (slump). En annan förklaring till varför många individer anser att alla summor är lika sannolika är att de bara ser till de elva summorna som finns, dvs. de värderar inte att olika summor kan bildas på olika antal sätt.

Speiser & Walter (1998) har visat hur lärarstudenter drar sina slutsatser om de olika summornas chans på basis av ett utfallsrum med 21 olika sätt att bilda summorna på. Om vi väljer summan sju så bygger ett sådant resonemang på att det uppfattas en skillnad mellan 5+2 (5,2) och 4+3 (4,3), men inte mellan 5+2 (5,2) och 2+5 (2,5). Skillnaden mellan utfallen (5,2) och (2,5), och samtliga 36 utfall för summan av två träningar, kan lämpligen illustreras grafiskt.

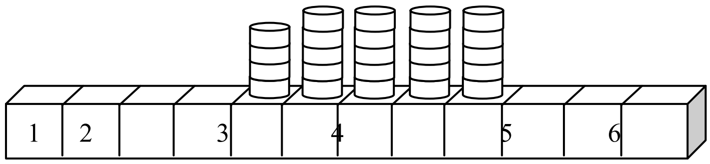
Pratt (2000) visar fyra (lokal) resurser som eleverna lär sig använda för att skapa mening om slump och sannolikhet inom ramen för summan av två tärningar i en IKT-miljö. Dessa beskrivs som:

- *Unpredictability*: Nästa utfall är inte förutsägbart,
- *Irregularity:* Inget tydligt mönster i en slumpserie,
- *Control*: Går inte att påverka ett slumpbeskaffat utfall fysiskt,
- *Fairness*: Ett fenomen uppfattas som ”fair”, om det uppfattas symmetriskt (Summorna har samma chans eftersom de enskilda tärningarna är numrerade ”fair”).

Summaspelet

Idén till summaspelet kommer från *The Mathematics Task Centre Project* i Australien.

I studierna har åtta elever (12-13 år) deltagit. Eleverna har varit uppdelade i fyra tvåmannalag. Spelet består av ett spelbord – numrerat från 1 till 12 – en mängd marker och två speciellt utformade tärningar.



Figur 1. Ett lags placering av marker i omgång 2 i andra studien (se nedan).

Spelet är baserat på summan av ögonen på två tärningar. I spelet tävlar två lag mot varandra. Deltagarna blir instruerade att fördela sina marker bland spelbordets 12 nummer. I spelet slår lagen tärningarna varannan gång. Om ett av lagen eller båda har marker på den summa som tärningarna visar får laget ta bort exakt en av markerna på den summan, oavsett vilket lag som slår. Det lag som först blir av med alla sina marker vinner.

Det har gjorts tre datainsamlingar med olika utformning av tärningarna varje gång. I en pilotstudie användes två helt vanliga tärningar. Det visades dock att ett spel med helt vanliga tärningar inte utmanade elevernas vardagsföreställningar i tillräcklig utsträckning. Dessutom, sannolikheten mellan två intilliggande summor med vanliga tärningar är väldigt lika. (P(6)= 5/36 medan P(7)= 6/36. Skillnaden blir endast 1/36), varför inte frekvenser gav eleverna tillräckligt tydlig feed-back till eleverna om deras satsningar varit goda eller ej. Av den anledningen valdes det att numrera om tärnigarna för nästa studie, i syfte att försöka skapa en mer ”obekant” situation för eleverna.

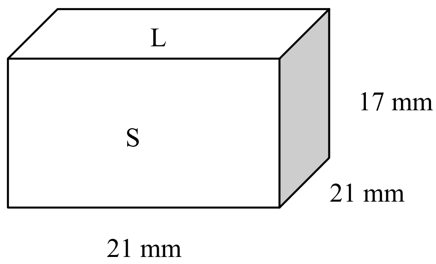
I efterföljande studie (Nilsson, 2007) spelades spelet fyra gånger med tärningsparen:

- Omgång 1 (Gula): T_1= {111 222} and T_2= {111 222}; S = {2, 3, 4}
- Omgång 2 (Röda): T_1= {222 444} and T_2= {333 555}; S = {5, 7, 9}
- Omgång 3 (Blåa):T_1= {1111 22} and T_2= {1111 22}; S = {2, 3, 4}
- Omgång 4 (Vita): T_1= {2222 44} and T_2= {3333 55}; S = {5, 7, 9}

Här inleder eleverna med att fokusera möjliga summor. De antar vad jag kallat för en e*xtremvärdesansats, där största och minsta möjliga summa identifieras och alla* summor mellan dessa anses möjliga! När eleverna ska lägga ut sina marker på dessa summor lägger de lika många marker på varje möjlig summa (se figur 1). I interaktionen med tredje och fjärde spelomgången börjar elever att reflektera över summornas olika antal sätt att bildas, varför de också börjar överge sin tidigare likformiga uppläggning av marker. Men, elevernas resonemang verkar fortfarande vara begränsade av att tärningarna är (fysikaliskt) symmetriska.

I den tredje studien (Nilsson, i tryck) utformades tärningar med asymmetrisk form (figur 2). Tärningarna var numrerade enligt,

- Omgång 1 (Gula): $T_1=\{2_S,2_S,2_L,4_L,4_L,4_L\}$ och $T_2=\{3_S,3_S,3_L,5_L,5_L,5_L\}$,
- Omgång 2 (Röda): $T_1=\{1_S,1_S,1_L,3_L,3_L,3_L\}$ och $T_2=\{2_S,2_S,2_L,4_L,4_L,4_L\}$,
- Omgång 3 (Blåa): $T_1=\{3_S,3_S,3_L,5_L,5_L,5_L\}$ och $T_2=\{4_S,4_S,4_L,6_L,6_L,6_L\}$,
- Omgång 4 (Vita): $T_1=\{2_S,2_S,2_L,5_L,5_L,5_L\}$ och $T_2=\{2_S,2_S,2_L,5_L,5_L,5_L\}$.



Figur 2. Formen på tärningarna i den tredje studien.

Syftet med de asymmetriska träningarna var att försöka utmana elever att ytterligare använda och koordinera information från olika sannolikhetskontext, såsom utfallsrummets sammansättning, fysikaliska/geometriska överväganden och frekvensinformation. I studien observeras fyra former av begreppslig variation och koordination mellan olika sannolikhetskontext:

- Ändrar tolkning av och fokus i situationen vilket leder till att eleverna ”ser” mer information.
- Sammansatt modell. Väger in information från såväl geometri, utfallsrum och frekvenser.
- Prövar en teoretisk modell mot frekvenser (stickprov, ’samples’).
- Begränsningar i perception: För flera elever blir frekvenser den *enda* modellen.

Flexitree, multiplikativt tenkning og elevers forståelse av produktloven i sannsynlighet

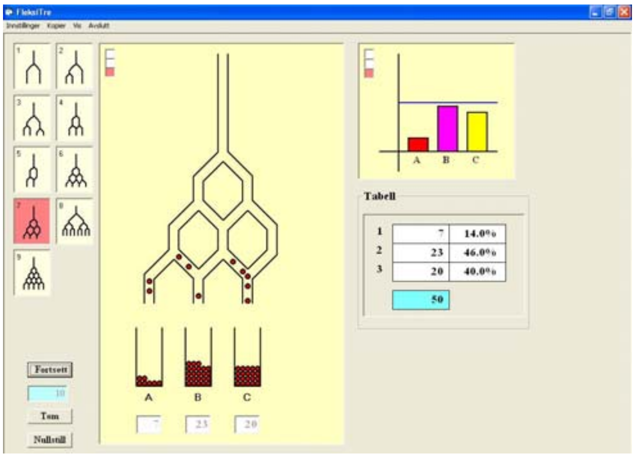
Et viktig mål for undervisningen i skolen er at elevene lærer seg å modellere situasjoner der multiplikasjon og divisjon inngår. Denne modelleringsprosessen knyttes til elevenes multiplikative tenkning. Spenningen mellom de formelle, enkle regnestykkene og elevenes tenkning i tilknytning til tekstoppgaven står sentralt her. Forskningen viser at elevene oppfatter, og tenker, svært ulikt i møte med ulike typer situasjoner. Ut fra ulike perspektiver har forskere laget ulike kategoriseringer av situasjonstyper, Greer sine 11 semantiske strukturer er et eksempel på en slik kategorisering (Greer, 1989).

Vi vil her ha fokus på elevenes tenkning i forhold til oppgaver som kan knyttes til Produktloven for sannsynlighet. Vi ser på et eksempel for å illustrere dette.

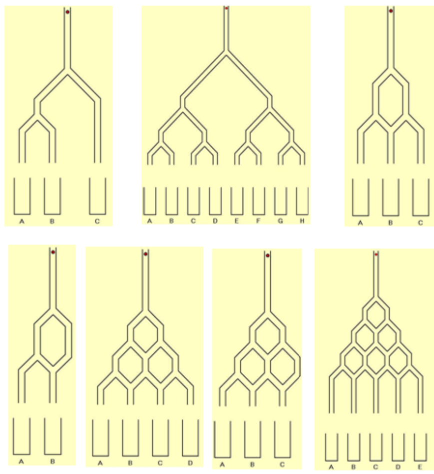
I tilknytning til tilfeldighetssituasjonen der vi kaster 2 mynter kan vi spørre om sjansen for at resultatet blir "to kron". For eksperten er dette en enkel oppgave der en kun multipliserer to tall: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Elevens problem er ikke å regne ut dette, men å forstå hvorfor en kan bruke multiplikasjon her. Hva er det i situasjonen som gjør at denne kan modelleres med et enkelt gangestykke? Ser en på lærebøker for grunnskolen vil disse ofte kun fortelle hva en skal gjøre, og ikke gjøre anstrengelser i å hjelpe elevene å forstå denne modelleringen. De forsøk som gjøres har også preg av å arbeide innenfor den matematiske verdenen, der en bruker formelle koblinger til f.eks. trediagram og kombinatorikk.

Hva lærer elevene etter en slik undervisning? En undersøkelse av Green (1983) viser et nedslående resultat. Nesten 3000 elever gjennomførte en skriftlig test med ulike oppgaver fra emnet sannsynlighet. En av oppgavene kan knyttes til Produktloven (Robot-oppgaven), og kun 7 % av elevene svarte riktig på denne. Av de eldste elevene (ungdomsskolen) hadde 13 % riktig svar på oppgaven. Green oppsummerte dette med: "Clearly little conceptual understanding has been achieved, and using tree diagram was just a mechanical device."

Hvordan kan vi hjelpe elevene å forstå den multiplikative sammenhengen som finnes i slike situasjoner? Noen vil foreslå at elevene arbeider med praksisnære situasjoner, gjerne med utgangspunkt i undersøkelser. Her vil også spill og arbeid med ulike tilfeldighetsgeneratorer (terninger, lykkehjul, mynter etc.) også kunne brukes.
I et forskningsprosjekt av Iversen ble det utviklet et digitalt hjelpemiddel kalt Flexitree. Dette var inspirert av fysisk utstyr utviklet av Fischbein i tidligere forskning (1982). I Flexitree kan en slippe en eller flere kuler fra toppen. Disse må gjennom en eller flere veiskiller før de ender opp i en av boksene nederst (se figur 1). Totalt er det 7 ulike systemer an kan arbeide med i Flexitree (se figur 2).



Figur 1a


Figur 1b

Forsøk og diskusjon parvis eller i klasse gir et grunnlag for å forstå denne multiplikative sammenhengen bedre. Elevenes tenkning kommer også bedre frem i en slik type læringsmiljø. I en analyse av Iversen og Nilsson ble to ulike elevstrategier identifisert, den ene kan knyttes til Produktloven i sannsynlighet, mens den andre er kvalitativ i sin natur (Iversen & Nilsson, 2007).

Noen elever brukte en strategi der de så på kulene som en masse som trillet nedover på vei mot en av boksene. På denne veien var det noen som "falt fra" (i et veiskille gikk de en annen vei). Denne lekkasjestrategien kan illustreres med følgende samtale (I er intervjuer, mens E er eleven):

E: Ja. Fordi at nå de går ... siden at sannsynligheten for å komme til A den er veldig liten fordi at det er en vei til A. Og da har vi ... på den veien så er det to veier som går ned sånn.

I: Mm.

E: Og da blir det ennå mindre sannsynlighet.

I: Ja.

E: Og da ... forsvinner det kuler liksom.

.

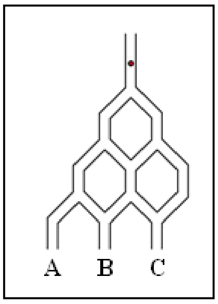
.

I: Det blir mindre og mindre på den veien der?

E: Ja, fordi at ... det er hull i veien på en måte.

I: Ja.

E: Og da går de kulene ... de detter utfor skrenten og så går de til B og C i stedet for.



En annen strategi som ble identifisert var divisjonsstrategien. Her Startet elevene med 1 (eller 100%) eller et antall kuler, og brukte divisjon nedover i systemet for å komme frem til et sjansetall. For eksempel kunne en elev starte med 100 % og uføre to divisjoner med 2 forbi 2 ulike veiskiller, og dermed ende opp med 25% som svar.

Referenser

Fischbein, E. *The intuitive source of probabilistic thinking in children* (Appendix II). The Netherlands: Reidel.

Green, D. R. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In D.R. Grey. P. Holmes, V. Barnett & G. M. Constable (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics,* (pp. 766-783). UK: Teaching Statistics Trust.

Iversen, K., & Nilsson, P. (2007). *Students' reasoning about one-object stochastic phenomena in an ICT-environment.* International Journal of Computers for Mathematical Learning, *12, 113-133.*

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 557-568.

Nilsson, P. (2007). Different ways in which students handle chance encounters in the explorative setting of a dice game. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 293-315.

Nilsson, P. (2009). Elever resonerar om sannolikhet. I G. Brandell, B. Grevholm, K. Wallby och H. Wallin (red.), *Matematikdidaktiska frågor – resultat från en forskarskola* (sid. 106-119). Göteborg.

Nilsson, P. (i tryck). Conceptual variation and coordination in probability reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*.

Pratt, D. (2000) Making sense of the total of two dice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 602-625.

Speiser, R., & Walter, C. (1998). Two dice, two sample spaces. In L. Pereira-Mendoza, L. Seu Kea, T. Wee Kee & W. K. Wong (Eds.), *Proceedings of the Fifth International Conference on the Teaching of Statistics*, Vol. 1 (sid. 1041-1047). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Per Sivertsen har siden 1986 vært tilknyttet lærerutdanningen ved Høgskolen i Bodø, både som høgskolelektor i matematikk og som studieleder. Har bakgrunn fra Universitetet i Tromsø og University of California, Berkeley (tallteori). *per.sivertsen@hibo.no*

Parallell B5

U-trinn, VGS og lærerutdanning

=TILFELDIG()
Bruk av regneark til å simulere tilfeldige hendelser

Sammendrag:

Å kunne bruke digitale verktøy er en grunnleggende ferdighet i alle fag. I matematikk handler det bl. a. om å bruke slike verktøy til spill, utforsking og visualisering. Eleven skal også kjenne til, bruke og vurdere digitale hjelpemiddel til simulering og modellering. Presentasjonen gir eksempler på bruk av regneark til simulering av tilfeldige hendelser, med og uten bruk av makroer..

1. Grunnleggende ferdighet: Å kunne bruke digitale verktøy
Læreplanverket for Kunnskapsløftet opererer med fem grunnleggende ferdigheter, som skal integreres i alle fag. Å kunne bruke digitale verktøy er en av disse ferdighetene. I læreplan i matematikk fellesfag er denne grunnleggende ferdigheten omtalt slik:
Å kunne bruke digitale verktøy i matematikk handlar om å bruke slike verktøy til spel, utforsking, visualisering og publisering. Det handlar òg om å kjenne til, bruke og vurdere digitale hjelpemiddel til problemløysing, simulering og modellering. I tillegg er det viktig å finne informasjon, analysere, behandle og presentere data med høvelege hjelpemiddel, og vere kritisk til kjelder, analysar og resultat.

Flere kompetansemål i matematikk fellesfag i Kunnskapsløftet handler om simulering og bruk av digitale hjelpemiddel, f. eks. under hovedområdet *Statistikk, sannsyn og kombinatorikk*.
Etter 10. trinn er ett av målene for opplæringen at eleven skal kunne ”*finne sannsyn gjennom eksperimentering, simulering og berekning i daglegdagse samanhengar og spel*”.
Etter Vg1P skal eleven kunne ”*lage døme og simuleringar av tilfeldige hendingar og gjere greie for omgrepet sannsyn*” og etter Vg1T ”*lage binomiske sannsynsmodellar ut frå praktiske døme, og berekne binomisk sannsyn ved hjelp av formlar og digitale hjelpemiddel*”

2. Bruk av regneark til å simulere tilfeldige hendler: nyttige formler og funksjoner

Formler og regnearkeksempler benyttet i presentasjonen er laget med regnearket Excel 2003.

Oversikt over noen nyttige formler, funksjoner og operasjoner:

Funksjon, formel	**Definisjon**
=TILFELDIG()	Returnerer et tilfeldig (randomisert) tall som er større enn eller lik 0 og mindre enn 1. Tallene blir hentet fra en liste med tilfeldige tall, og det gis et nytt tilfeldig tall hver gang regnearket blir regnet om.
=ANTALL(*område*)	Teller antall celler som inneholder tall (også datoer og tekst som kan konverteres til tall) i et område
=HVIS(*logisk_test;sann;usann*)	Returnerer én verdi hvis et vilkår du angir, returnerer SANN, og en annen verdi hvis det returnerer USANN.
=ANTALL.HVIS(*område;vilkår)*	Teller antall celler i et område som oppfyller gitte vilkår. Er nyttig ved oppsett av frekvenstabell for et tallmateriale.
=SLÅ.OPP(*søkeverdi; søkevektor; resultatvektor*)	*Søkeverdi* er en verdi som SLÅ.OPP søker etter i den første vektoren. Søkeverdi kan være et tall, tekst, en logisk verdi, eller et navn eller en referanse som refererer til en verdi. *Søkevektor* er et område som bare inneholder én rad eller én kolonne. Verdiene i søkevektor kan være tekst, tall eller logiske verdier, ordnet i stigende rekkefølge. *Resultatvektor* er et område som bare inneholder én rad eller én kolonne. Det må ha samme størrelse som området i argumentet søkevektor.

Eksempler på bruk av =TILFELDIG():
=HELTALL(6*TILFELDIG())+1 simulerer kast med en balansert terning
=AVRUND(TILFELDIG();0) simulerer kast med en balansert mynt

Funksjonsknappen F9 betyr ”Beregn nå” og fører til at alle formlene i regnearket beregnes på nytt. Måten regnearket beregnes på kan endres fra menyen Alternativer.

Absolutt celle- eller områdereferanse betyr at cellen eller området ”låses” ved kopiering av formler. Dette oppnås ved å bruke tegnet $ (eks.: A4 refererer alltid til celle A4, $A4 refererer til celler i kolonne A, men linjenummeret endres ved kopiering av formler). Det beste er å sette navn på cellen eller området og benytte navnet som argument i formlene.

3. Bruk av regneark til å simulere tilfeldige hendler: noen eksempler

A. Eksempel på tradisjonell bruk av regneark. Oppsett av frekvenstabell for et gitt (statisk) tallmateriale.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**Resultat fra 50 kast med 1 terning:**									
2										
3	1	2	1	2	1	3	4	6	1	3
4	5	2	4	1	2	1	2	2	3	2
5	6	1	1	1	3	3	3	6	1	5
6	1	4	4	5	3	2	3	2	1	1
7	1	1	2	3	6	4	5	3	3	4
8										
9	**Antall øyne**	**Frekvens**	**Rel. frev. (%)**							
10	1	15	30		Området A3:J7 er gitt navnet *resultat*					
11	2	10	20		Formel i celle B10: =ANTALL.HVIS(resultat;A10)					
12	3	11	22		Celle B16 har fått navnet N					
13	4	6	12		Formel i celle C10: =B10*100/N					
14	5	4	8							
15	6	4	8							
16	Sum:	50	100							

Regnearket kan gjøres ”dynamisk” ved å benytte formelen = HELTALL(6*TILFELDIG())+1 i celle A3 og deretter kopiere formelen til hele området A3:J7. Regnearket vil da simulere 50 kast med en terning og gi en frekvensfordeling for antall øyne. Frekvenstabellen kan benyttes til å framstille et passende diagram for fordelingen.

B. Uniforme sannsynlighetsmodeller

i) Kast med to terninger

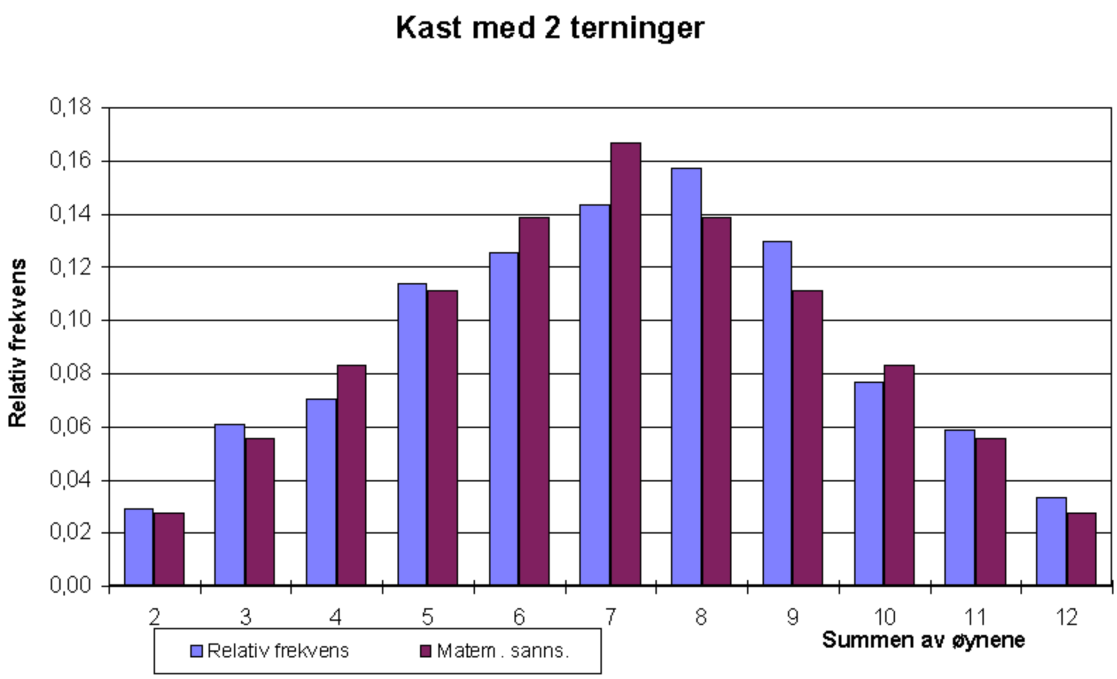
Kast med 2 terninger:

Summen av antall øyne

Omg. nr.	T1	T2	Sum
1	3	3	6
2	6	5	11
3	5	6	11
4	6	4	10
5	4	1	5
6	3	1	4
7	3	6	9
8	6	4	10
9	2	6	8
10	2	1	3
11	6	6	12
12	5	3	8
13	1	2	3
14	1	2	3
15	4	3	7
16	6	5	11
17	4	1	5
18	1	4	5

Sum	Frekvens	Relativ frekvens	Matem. sanns.	f*x
2	15	0,029	0,028	0,059
3	31	0,061	0,056	0,183
4	36	0,071	0,083	0,283
5	58	0,114	0,111	0,570
6	64	0,126	0,139	0,754
7	73	0,143	0,167	1,004
8	80	0,157	0,139	1,257
9	66	0,130	0,111	1,167
10	39	0,077	0,083	0,766
11	30	0,059	0,056	0,648
12	17	0,033	0,028	0,401
Sum:	**509**	**1,000**	**1,000**	**7,092**

	Forsøk	Modell
Gjennomsnitt:	7,0923	7,0000
Standardawik:	2,4626	2,4152



Regnearkeksempelet ovenfor simulerer 509 kast med to terninger. Relativ frekvens for de ulike summene et sammenliknet med sannsynlighetene basert på en uniform sannsynlighetsmodell. Eks.: P(sum = 2) = 1/36 osv.

På tilsvarende måte kan regnearket benyttes til å kaste en eller flere mynter, ved å benytte formelen =AVRUND(TILFELDIG();0). Formelen vil gi 0 eller 1 med like stor sannsynlighet. 0 kan defineres som ”kron” og 1 som ”mynt.”.

ii) Simulering av binomisk forsøk: Kast med fem terninger. Antall 6-ere telles opp

Simulering av binomisk forsøk: Kast med 5 terninger
Fordeling av antall 6-ere

Omg. nr.	T1	T2	T3	T4	T5	6-ere
1	4	5	1	1	6	1
2	3	3	4	5	3	0
3	3	1	2	6	6	2
4	1	5	5	1	4	0
5	5	2	6	6	5	2
6	6	2	5	1	3	1
7	1	6	3	5	2	1
8	1	5	2	3	1	0
9	3	6	6	6	3	3
10	5	6	2	2	3	1
11	6	5	1	3	6	2
12	2	2	2	5	4	0
13	5	3	5	2	4	0
14	1	5	4	3	6	1
15	5	3	4	2	5	0
16	2	6	6	2	3	2
17	3	4	4	5	3	0

Formel i celle G7: =ANTALL.HVIS(B7:F7;6)

6-ere	Frekvens	Rel. frekv.	f*x
0	209	0,411	0,000
1	204	0,401	0,401
2	77	0,151	0,303
3	16	0,031	0,094
4	3	0,006	0,024
5	0	0,000	0,000
Sum:	**509**	**1,000**	**0,821**

Gjennomsnitt: **0,8212**
Stand.avvik: **0,8418**

C. Ikke-uniforme sannsynlighetsmodeller: Kast med ”falsk” mynt
I regnearket nedenfor er sannsynligheten for ”mynt” lagt inn i celle D3. Cellen er gitt navnet *p*. Dette navnet er benyttet i formlene i kolonne C.

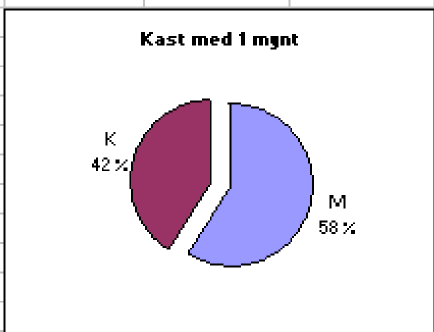
Falsk mynt ?

Sannsynlighet for mynt (p) **0,6** Celle D3 er gitt navnet p

Kast nr.	Verdi	Resultat
1	0,31589	M
2	0,71215	K
3	0,12005	M
4	0,94201	K
5	0,62034	K
6	0,05235	M
7	0,3436	M
8	0,55997	M
9	0,40768	M
10	0,10732	M
11	0,93175	K
12	0,77723	K
13	0,86402	K
14	0,91177	K
15	0,73061	K
16	0,15337	M
17	0,74964	K
18	0,21684	M
19	0,89921	K
20	0,27606	M
21	0,42327	M

Formel i celle B6: =TILFELDIG()
Formel i celle C6: =HVIS(B6<=p;"M";"K")

Resultat	Frekvens	Rel. frekv.
M	35	0,583
K	25	0,417
Sum	60	1,000



D. Binomisk forsøk. Frø med variabel spireprosent

I regnearket nedenfor er spireprosenten til en spesiell type frø lagt inn i celle B3. Denne verdien kan endres av brukeren. Regnearket simulerer det å så tre frø med den aktuelle spireprosenten. I kolonnene B, C og D (fra rad 7) betyr verdien 0 at frøet ikke spirer, 1 betyr at det spirer. I forsøk nr 1 (rad 7) spirer frø nr 1, mens de to andre frøene ikke spirer.

Binomisk forsøk

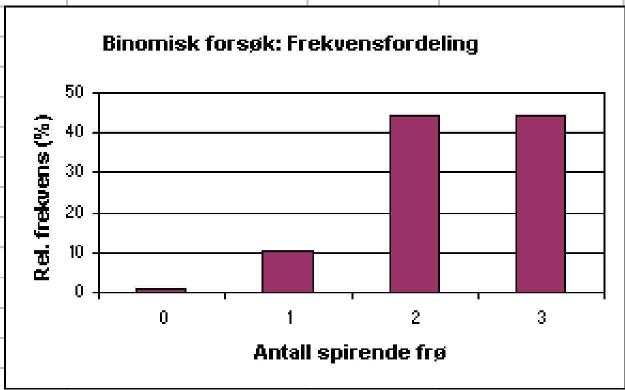
Spireprosent **0,8** Celle B3 er gitt navnet p

Formler i cellene B7-D7: =HVIS(TILFELDIG() <=p;1;0)
Formelen er kopiert nedover i kolonnene B, C og D

Forsøk nr.	Frø nr 1	2	3	Sum
1	1	0	0	1
2	1	1	1	3
3	1	0	1	2
4	1	1	1	3
5	0	1	1	2
6	1	1	1	3
7	0	1	1	2
8	1	1	1	3
9	1	1	1	3
10	1	1	0	2
11	0	1	1	2
12	1	1	0	2
13	1	1	1	3
14	0	1	1	2
15	0	1	1	2
16	1	1	1	3
17	0	1	1	2
18	1	1	1	3
19	0	1	1	2
20	1	1	1	3
21	0	1	0	1
22	1	1	1	3
23	0	1	0	1
24	1	1	1	3

Antall frø som spirer	Frekvens	Rel.frekv. (%)
0	1	0,7
1	14	10,2
2	61	44,5
3	61	44,5
Sum	137	100,0

Gjennomsnitt 2,33



E. "Geometriske" sannsynlighetsforsøk (Monte Carlo-metoden).

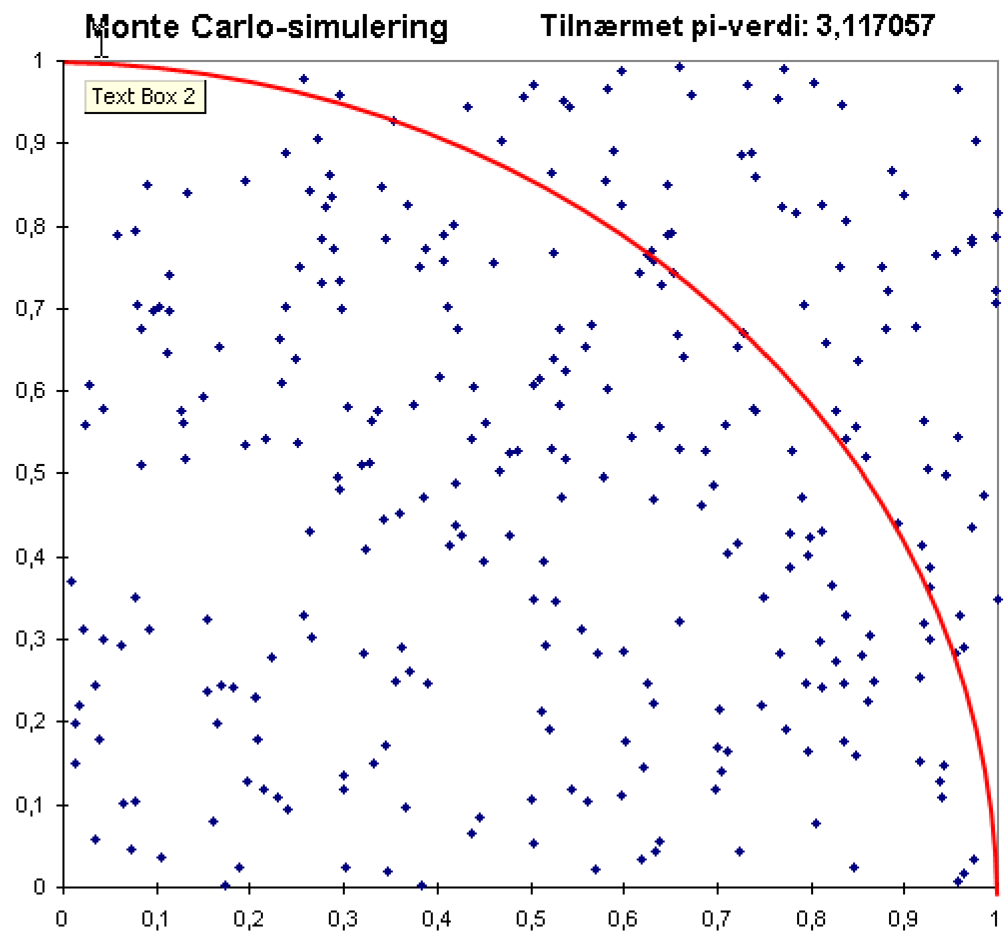
i) Beregning av pi ved å skyte på blink. Eksempel på egendefinert funksjon (makro)

SIMULERING AV MONTE CARLO-METODEN

Statistisk metode for å finne en tilnærmet verdi for tallet pi (3,14...). Regnearket "skyter blink" på et kvadrat som måler 1x1 enheter. Antall treff innenfor kvart-sirkelen med radius 1 enhet telles opp. Andelen treff gir en tilnærmet verdi for pi/4.

n	x	y	x^2+y^2	Poeng
1	0,84994	0,63586	1,12672	0
2	0,38523	0,47196	0,37115	1
3	0,92138	0,31965	0,95112	1
4	0,93761	0,12781	0,89544	1
5	0,81506	0,65756	1,09671	0
6	0,62917	0,77102	0,99033	1
7	0,30176	0,02423	0,09165	1

Antall treff:	233
Antall forsøk:	299
Andel treff:	0,779264
Tilnærmet pi-verdi:	**3,117057**



x- og y-koordinatene til et tilfeldig punkt i enhetskvadratet er gitt ved formelen =TILFELDIG(). Regnearket beregner summen $x^2 + y^2$. Det tilsvarer kvadratet av avstanden fra origo til punkt (x, y). Dersom $x^2 + y^2 < 1$ ligger punktet innenfor kvartsirkelen og vi registrerer et treff.
Forsøket kan også simuleres med en makro, i dette tilfellet en egendefinert funksjon.

EGENDEFINERT FUNKSJON

Vi definerer en funksjon *NumPi(antall)* som beregner andelen treff innenfor kvartsirkelen i Monte Carlo-eksperimentet beskrevet foran. Formel brukt i celle B10: =NumPi(A10).

Antall forsøk:	Tilnærmet verdi for pi
1401	3,120628123
1402	3,218259629
1403	3,130434783
1404	3,236467236
1405	3,063345196
1406	3,149359886
1407	3,118692253
1408	3,221590909
1409	3,051809794
1410	3,106382979
Gj.snitt:	**3,141697079**

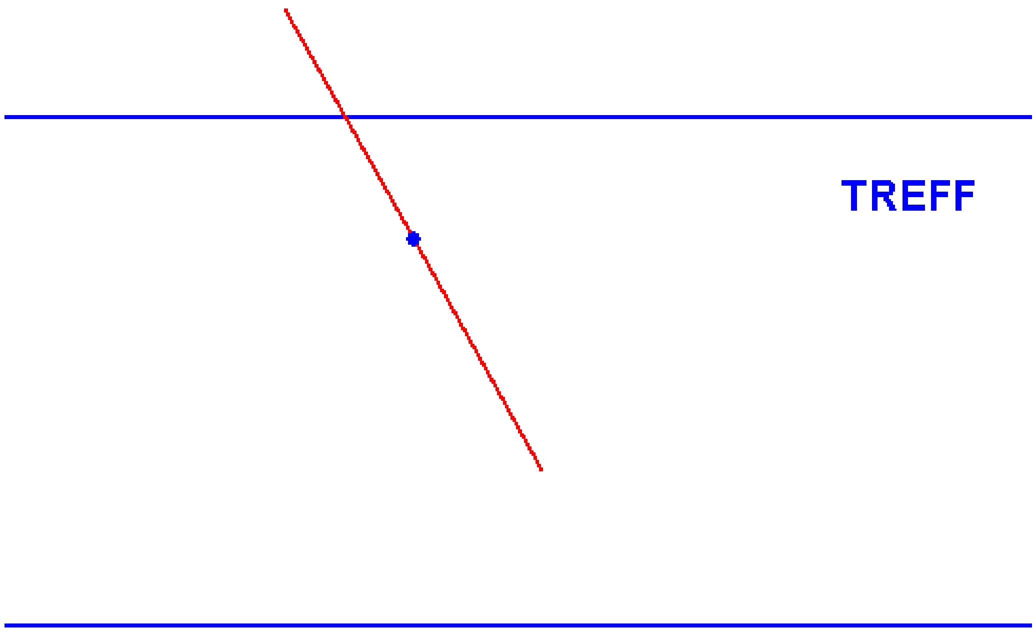
Egendefinert funksjon (Visual basic):

```
Function NumPi(Count)
   Dim teller As Integer
   Dim n As Integer
   Dim x: Dim y
   teller = 0
   Randomize
   For n = 1 To Count
      x = Rnd()
      y = Rnd()
      If x ^ 2 + y ^ 2 <= 1 Then teller = teller + 1
   Next
   NumPi = 4 * teller / Count
End Function
```

ii) Kast med nål av lengde to på et ark med parallelle linjer i avstand to

I regnearket nedenfor velges y-koordinaten til sentrum av nålen tilfeldig (mellom -1 og 1). x-koordinaten settes til 0. En tilfeldig vinkel mellom 0 og π radianer velges i celle B9. I rad 16 og 18 beregnes koordinatene til endepunktene til en nål med lengde to og sentrum og vinkel med x-aksen definert ovenfor. Minste og største y-verdi beregnes. Celle C16 og D16 er kalt y_min og y_max. Cellene A11 – C13 benyttes for å tegne to parallelle linjer med en avstand på to enheter.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Simulering av kast med nål av lengde 2 på et ark med linjer i avstand 2**						
2							
3							
4							
5		x	y				
6	Sentrum	0	0,516707		Formel i celle C6: =2*TILFELDIG()-1		
7							
8		Radianer	Grader				
9	Vinkel	1,99989327	114,585444		Formel i celle B9: =PI()*TILFELDIG()		
10					Formel i celle C9: =B9*180/PI()		
11	-2	-1	1				
12	0	-1	1				
13	2	-1	1		Formler:		
14					A16: =-COS(B9)		
15	x	y	y_min	y_max	A18: =COS(B9)		
16	0,41604978	-0,3926348	-0,39263484	1,4260488	B16: =C6-SIN(B9)		
17	0	0,516707			B18: =C6+SIN(B9)		
18	-0,4160498	1,42604884			C16: =MIN(B16:B18)		
19					D16: =STØRST(B16:B18)		
20	**TREFF**	Formel i celle A20: =HVIS(ELLER(y_min<=-1;y_max>=1);"TREFF";"BOM")					
21							

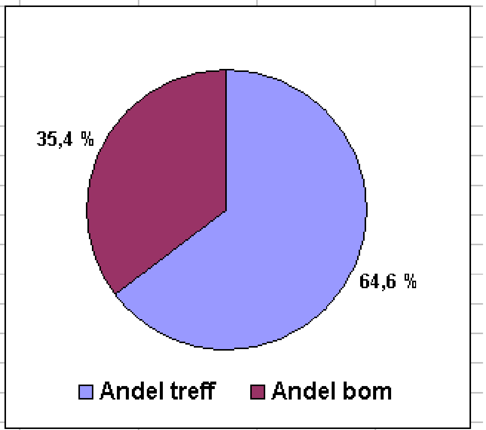


Regnearket nedenfor simulerer mange forsøk med kast med nål av lengde to på et ark med parallelle linjer i avstand to. Med geometriske argumenter kan vises at sannsynligheten for treff er $2/\pi$. Dermed gir forsøket en tilnærmet verdi for π.

Simulering av kast med nål av lengde 2 på et ark med linjer i avstand 2

Antall forsøk	2072	2/pi =	0,63662
Antall treff	1338		
Andel treff	0,6458	Tilnærmet pi-verdi	3,09716
Andel bom	0,3542		

Nr.	Sentrum	Vinkel	Min	Max	Treff ?
1	0,51846	0,252662	-0,449795	1,486706	JA
2	0,92806	1,161748	0,530324	1,325797	JA
3	-0,27656	-1,542767	-0,304583	-0,248531	NEI
4	-0,63897	1,109181	-1,084361	-0,193571	JA
5	0,87744	-1,085471	0,410945	1,343937	JA
6	-0,92602	1,24013	-1,250696	-0,60135	JA
7	0,08714	1,149281	-0,322001	0,496287	NEI
8	-0,39134	1,061417	-0,878974	0,096298	NEI
9	0,21245	0,566818	-0,631159	1,056068	JA
10	-0,39639	1,196582	-0,761928	-0,030845	NEI
11	0,31435	0,358881	-0,621944	1,250637	JA
12	-0,65805	-1,384532	-0,843235	-0,472856	NEI
13	-0,00641	-1,06561	-0,49038	0,477561	NEI
14	0,46808	-0,433389	-0,439463	1,375632	JA
15	0,45517	-1,533912	0,418292	0,492044	NEI
16	-0,51363	-0,499718	-1,391348	0,364087	JA



Plenum 3, tirsdag kl 11.15 – 12.00

Eva Skovlund arbeider som seniorrådgiver ved Statens Legemiddelverk og er professor II ved Farmasøytisk institutt, Universitetet i Oslo. Hun er utdannet cand. pharm. og har en dr.grad i medisinsk statistikk. Hun har erfaring både fra Matematisk institutt og Medisinsk fakultet ved UiO og har 20 års erfaring med undervisning og veiledning i anvendt statistikk, spesielt innenfor klinisk kreftforskning. Nå er hun Norges representant i CHMP, den vitenskapelige komiteen som vurderer effekt og sikkerhet av legemidler i EU/EØS.

Statistisk metode i medisinsk forskning

Alle nye legemidler gjennomgår en grundig evaluering før de eventuelt får tillatelse til å bli markedsført. Når man skal dokumentere effekt av et nytt legemiddel, er det helt nødvendig å gjennomføre kontrollerte kliniske forsøk. Sammenlikning med annen aktiv behehandling (eller placebo) må til for å gi et riktig bilde av behandlingseffekt. Antall pasienter som inkluderes i et forsøk, må være tilstrekkelig stort til at man kan trekke holdbare konklusjoner med hensyn til størrelsen av en eventuell effekt. I en klinisk utprøvning inkluderer man et utvalg av pasienter, og på grunnlag av dette forsøker man å trekke slutninger om en populasjon. For at disse slutningene skal være gyldige, må utvalget av pasienter være representativt for den populasjonen som i fremtiden vil få den aktuelle behandlingen.

Randomisering

Den beste dokumentasjonen av et legemiddels effekt får man ved å gjennomføre randomiserte forsøk. Hensikten med å randomisere pasienter mellom forskjellige behandlinger er å sikre en rettferdig sammenlikning av behandlingene. Metoden brukes for å oppnå tilfeldig fordeling av pasienter til behandlingsgruppene slik at ukjente faktorer som kan tenkes å påvirke forløpet av sykdommen, blir tilfeldig fordelt i gruppene.

Blinding

Blinding er nødvendig for å sikre at registrering og fortolkning ikke påvirkes av subjektive antakelser om effekt av behandling. Vanligvis pakkes medikamenter ferdig etter en forhåndsgenerert randomiseringsliste. Pakninger og innhold ser identiske ut, og det eneste som skiller dem fra hverandre, er et pasientnummer. En slik studie kalles dobbeltblind fordi verken lege eller pasient vet hvilken behandling pasienten får. På den måten unngår man at pasientens eller behandlende leges subjektive oppfatninger om behandlingseffekt påvirker pasientens respons på legemidlet.

Signifikanstest

For å sammenlikne effekten av forskjellige behandlinger benytter man ofte en signifikanstest. Effekt kan måles enten som et gjennomsnitt i en gruppe pasienter eller som andelen pasienter som responderer på behandling, og man benytter statistiske tester til en formell sammenligning av effektmålet i de to gruppene. Med den aktuelle testen beregnes en testobservator, og denne omdannes til en *p*-verdi. Spørsmålet vi implisitt stiller er: Hva er sannsynligheten for å observere den forskjellen vi faktisk ser, eller en enda større forskjell, dersom de to behandlingene i virkeligheten har lik effekt? Hvis den såkalte *p*-verdien blir lav, er det uttrykk for at det er lite sannsynlig at den observerte forskjellen i effekt av behandlinger skyldes tilfeldighet. Tradisjonelt regnes en forskjell mellom to behandlinger som statistisk signifikant når $p < 0.05$, dvs. når det er mindre enn 5% sannsynlighet for at den forskjellen som er observert (eller en enda større forskjell), skyldes tilfeldighet. Når man finner en statistisk signifikant effekt i et forsøk, betyr det altså at det er sannsynliggjort at det er en reell effekt. Men samtidig er en høy *p*-verdi ikke dokumentasjon av at to behandlinger har lik effekt. Det er for øvrig fornuftig ikke å se seg blind på den «magiske» 5%-grensen for statistisk signifikans, men rapportere beregnede *p*-verdier og sette dem i en større sammenheng for å vurdere effekten av et nytt behandlingsregime.

Effektestimater

For å bedømme effekt av en behandling er det ikke nok bare å angi en *p*-verdi. Behandlingseffektens størrelse må også estimeres. I tillegg angis et 95% konfidensintervall som er et uttrykk for usikkerheten i estimatet av behandlingseffekt. Jo smalere konfidensintervallet er, desto mer presist er effekten estimert. Store forsøk vil gi presise estimater, mens små forsøk resulterer i vide konfidensintervaller og stor usikkerhet med hensyn til sann effekt av behandling.

Ekvivalens

For dokumentasjon av at to behandlinger har like god effekt (ekvivalens), er det ikke tilstrekkelig at man ikke finner statistisk signifikant forskjell mellom dem. Antall pasienter som er inkludert i en studie, vil påvirke *p*-verdien. Med få pasienter inkludert i et forsøk vil det være nesten umulig å avdekke selv store forskjeller mellom behandlinger. Studier der man ikke finner statistisk signifikant forskjell mellom behandlinger, refereres noen ganger til som «negative studier». Dette uttrykket er uheldig fordi det synes å indikere at studien har vist at det ikke er forskjell mellom to behandlinger, mens det som vanligvis er tilfellet, er at det ikke er *vist* forskjell. De to utsagnene er ikke like. Manglende dokumentasjon av effekt er ikke det samme som dokumentasjon av mangel på effekt.

I praksis vil man vurdere hvorvidt to behandlinger er like gode ved hjelp av 95% konfidensintervaller. Man må på forhånd definere den største forskjellen man vil akseptere for likevel å kunne betrakte de to behandlingene som ekvivalente, dvs. en forskjell som er så liten at den ikke har klinisk betydning. Dersom det estimerte 95% konfidensintervallet for forskjell har en øvre grense som er mindre enn denne forhåndsdefinerte forskjellen, betraktes dette som at man har vist at den nye behandlingen ikke er dårligere enn standardbehandling (non-inferiority).

Undersøkelsens styrke

En viktig del av planleggingen av en legemiddelutprøvning består i å anslå hvor mange pasienter som skal inkluderes i forsøket. Dette gjøres vanligvis ved at man først definerer den minste forskjellen mellom to behandlinger som det vil være betydningsfullt å oppdage (en forskjell som vil ha klinisk betydning), deretter bestemmer ønsket sannsynlighet for å oppdage denne (teststyrke eller «power», oftest satt til 80% eller 90%) og ut fra disse valgene beregner hvor mange pasienter som må inkluderes.

Statistisk signifikans vs klinisk betydning

Det er vesentlig å skille mellom begrepene statistisk signifikans og klinisk betydning. Statistisk signifikans forteller ikke noe annet enn at det er mindre enn 5% sannsynlighet for at den demonstrerte forskjellen mellom to grupper skyldes tilfeldighet og ikke det faktum at pasientgruppene har fått forskjellig behandling. Klinisk betydning betyr at den forskjellen som er funnet, er stor nok til at den har betydning for en pasients symptomer eller prognose. I forsøk som inkluderer svært mange pasienter, vil man kunne avdekke forskjeller som er så små at de overhodet ikke har klinisk betydning, for eksempel en forskjell i blodtrykk i ulike behandlingsgrupper på <1 mmHg. Hvor store forskjeller som skal til for at det skal ha klinisk betydning å oppdage dem, vil avhenge av hvilken sykdom det er snakk om. Innen kreftbehandling vil en 10% økning av sannsynligheten for å overleve for eksempel minst 5 år etter diagnose betraktes et stort fremskritt, mens en 10% endring i varighet av et symptom ved luftveisinfeksjon (for eksempel hoste) vil ha liten klinisk betydning.

Multiplisitet

Det er ofte mulig (og ønskelig) å måle effekt av behandling på flere forskjellige måter. I utprøvninger av forskjellige typer cellegift vil for eksempel både overlevelse, tid til tilbakefall, tumorrespons (dvs. at en svulst reduseres i volum), toksisitet og livskvalitet være relevante mål på behandlingseffekt. Dermed kan et problem man ofte refererer til som multiplisitet oppstå. Vurderinger av effekt baseres vanligvis på *p*-verdier, og grensen for statistisk signifikans settes som regel til 5 %. Dersom det i virkeligheten ikke er forskjell i effekt av behandlingene, har man altså 5 % sannsynlighet for feilaktig å konkludere med at det er forskjell. Jo flere signifikanstester som utføres, desto større er sannsynligheten for minst ett slikt falskt positivt funn. Dette forsøker man å unngå ved å definere en primær effektvariabel og gjøre det tydelig at andre sammenlikninger skal betraktes som sekundære og vektlegges mindre.

Et alternativ til å peke ut en primær variabel er å korrigere for multiplisitet. En alminnelig brukt og svært enkel metode er en såkalt Bonferroni-korreksjon, der man multipliserer *p*-verdien med antall signifikanstester som er utført. Ulempen med en slik korreksjon er at man taper teststyrke, dvs. blir så streng at man kan gå glipp av interessante, reelle forskjeller mellom behandlingene. Det gjelder derfor å planlegge på forhånd hvilke sammenlikninger som skal gjøres. Multiplisitetsproblemer vil også kunne oppstå når det gjøres subgruppeanalyser eller ved parvise sammenlikninger av flere forskjellige behandlinger. For eksempel er de absurde resultatene subgruppeanalyser kan føre til, utmerket illustrert i en studie av effekten av acetylsalisylsyre ved hjerteinfarkt. Her demonstreres det at effekten tilsynelatende er avhengig av hvilket stjernetegn man er født i!

Oppsummering

Statistiske metoder hjelper oss med å skille mellom sanne effekter og tilfeldig variasjon. Kunnskap om forsøksplanlegging og styrker og svakheter ved forskjellige statistiske metoder er helt grunnleggende for å fremskaffe holdbare og troverdige konklusjoner om effekt av legemidler og annen medisinsk behandling.

Plenum 4, tirsdag kl 12.15 – 13.00

Mike Naylor er gjesteprofessor ved Matematikksenteret. Han har vært matematikklærer i 15 år på alle trinn fra barnehage til universitet. De siste 10 årene har han vært professor i matematikk-didaktikk ved Western Washington University i USA. Han har nylig flyttet til Norge. Naylor har skrevet flere bøker og artikler om matematikkdidaktikk. Han har også skrivet barnebøker om matematikk, bøker om kunst og matematikk, og matematisk musikk.

Probability and Beyond!

One of the most exciting aspects of studying probability is the way in which probability ideas quickly lead to many other ideas. Probability study can and should begin with experiments and games. These activities lay the groundwork to develop intuition about chance and appreciation for the "law of large numbers", the idea that the more times an experiment is repeated, the more representative the results are of the actual probabilities involved in a situation. As the study of probability deepens, students begin to use ideas from geometry, algebra, graph theory, and number theory; they connect ideas of logic, distributions, counting methods, and combinatorics; and they have opportunities to participate in modeling and use technology. Studying probability gives many chances for students to connect ideas, both within mathematics… and beyond.

As an example, let us consider a simple problem I have used with my students for many years. We will soon see how this problem can connect to some very deep and exciting concepts!

The dishwashing problem (part 1)

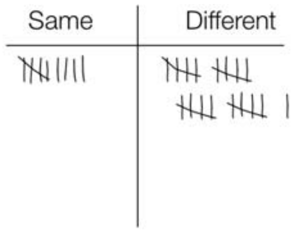
> My sister and I always argue over washing the dishes. We decide play a game each day to decide who shall wash them. We place 2 red chips and 2 black chips in a bag, mix them up, and take out 2. If the chips are the same color (both red or both black) then I wash the dishes. If the chips are different colors (one red and one black) then my sister mush wash the dishes. After a few weeks, my sister begins to think this method is not fair. Is it fair? What are the probabilities involved?

I invite you to read no further until you have thought about this problem. There are many ways to solve it!

Here are some solution methods I have seen used by students:

1. Experimental

This problem is easy to model with colored chips or other objects. After repeated trials, it seems that the chips are different colors far more often than they are the same color. Modeling the experiment often gives ideas for how the problem can be analyzed more deeply.



2. Logical Reasoning

A student might reason as follows: *If the first chip removed from the bag is black, that leaves 1 black and 2 red chips in the bag, so there is a 1 in 3 chance that the next chip will have the same color but a 2 in 3 chance that the chip will be different. The same argument can be made if the first chip taken in red. The game is not fair.*

3. List possibilities

Label the chips r1, r2, b1, and b2, and make a list of all possible pairings, perhaps as follows:

r1-r2	r1-b1	r1-b2
r2-r1	r2-b1	r2-b2
b1-r1	b1-r2	b1-b2
b2-r1	b2-r2	b2-b1

Of these 12 possible pairs, 4 of them have the colors the same and 8 of them have the colors different. The chance of matching colors is 4 in 12 while the chance of different colors is 8 in 12. The game is not fair.

4. List pairs

Using a slightly different counting method, use up all the possibilities which contain the first chip. Then move to all the possibilities with the second chip and do not use the first chip again. Continuing in this manner gives the following listing:

r1-r2	r1-b1	r1-b2
	r2-b1	r2-b2
		b1-b2

This time there are 6 possibilities. 2 of them have the same colors, 4 of them have different colors. The game is not fair.

Note: In the first counting method (number 3, above) each of the possibilities was listed twice (r1-r2 and r2-r1, for example). Dividing the number of possibilities by 2 produces 12/2 = 6 possibilities, the number we find in this method.

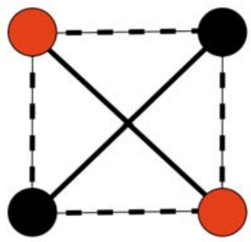
5. Make a table / chart

Another was to organize the possibilities is with a chart, perhaps like this:

	R1	R2	B1	B2
R1	x	same	different	different
R2	-	x	different	different
B1	-	-	x	same
B2	-	-	-	x

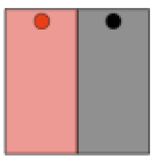
In this chart, an 'x' is placed in any box which is impossible (two different chips are taken, you cannot take the same chip twice) and a '–' is placed in boxes in which the possibility is already counted elsewhere. This gives the same 6 possibilities as in method number 4. Notice that if the boxes marked with a '–' are included, it will give the same 12 possibilities as in method 3. In either case, the probabilities are the same: 1/3 chance of the same colors, 2/3 chance of different colors.

6. Draw a graph

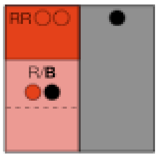


In this picture, the 4 chips are drawn with lines connecting every chip to every other chip. 6 lines are required, and each line represents one possibility. 2 of these lines connect chips that are the same colors (shown as solid lines here), while 4 of these lines connect chips are different colors (shown as dotted lines). The probabilities are thus 2 in 6 (or 1/3) chance of same color, 4 in 6 (or 2/3) chance of different colors.

7. Use an area model

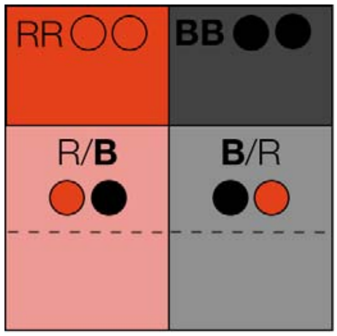


Area models are a useful tool for modeling many probability situations. A rectangle is first drawn to show the "universe of possibilities". Since there is a 50% chance of drawing red or black first, the rectangle is split into two equal halves, one half representing red and the other black.



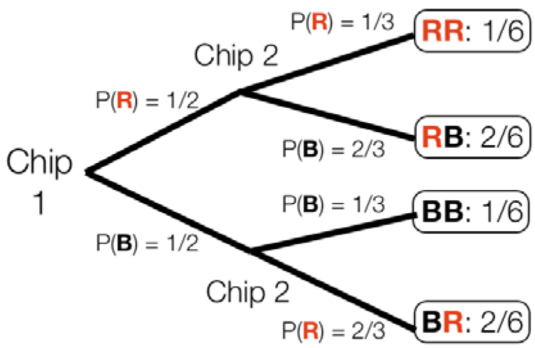
Next the red half is divided into 3 equal regions to show the probabilities for the next chip drawn. One of these probabilities is a matching red chip while the other two are non-matching black chips.

The other half of the model is completed in the same manner. The finished model displays all of the probabilities involved as areas. In this case, the areas which correspond with matching chips take up 1/3 of the rectangle while the areas with non-matching chips take up 2/3 of the rectangle.



8. Use a tree diagram

Another technique is a tree diagram in which various possibilities are drawn as branches of tree labeled with their probabilities. In this case we begin with two possibilities for the first chip, red or black, so the first two branches (to the left in this picture) are labeled each with 1/2. For each of these, there are two possibilities for the next color drawn, so each branch of the tree splits into two, and these branches are labeled with their possibilities: 1/3 and 2/3. Finally, the total probability for any route from the start to the finish on the diagram is found by multiplying the fractions along the path.



All of the probabilities can then be seen: the probability of red-red is 1/6, red-black is 2/6, black-black is 1/6, and black-red is 2/6. Adding up the probabilities for same colors and for different colors gives the results: same color 1/3, different color 2/3.

Connections

There are of course other ways to analyze this problem. Not only are there a surprising number of solution methods, but there are rich connections between all of these methods. In a classroom of students, as they share their methods, these connections become more and more apparent until even unusual methods become intuitively "obvious"! The second part of this problem contains even more surprises...

The dishwashing problem, part 2

My sister and I have decided that our method is not fair. We want to change the number of chips in the bag so that the game will be fair and we can play by the same rules. There can be a different number of black chips than red chips. We will still take 2 chips from the bag; I will wash the dishes if they are the same color and she will wash the dishes if they are different colors. How can it be done?

Once again, you are invited to think about this problem for yourself before reading further. If you have caught a glimpse of a solution below, you can try to come up with a different solution.

This problem is an excellent follow-up question, as it allows students to try out some of the solution methods above. One possible solution is a 3-1 split, 3 black and 1 red for example. Here's three methods for analyzing the solution:

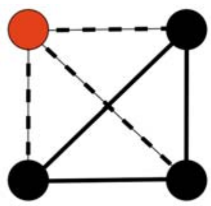
1. List possibilities

Labeling the chips b1, b2, b3, and R, the possibilities are b1-b2, b1-b3, b1-R, b2-b3, b2-R, and b3-R. Of these, 3 of them are matching colors (black-black) and 3 of them are different colors (black-red). The game is fair.

2. Draw a graph

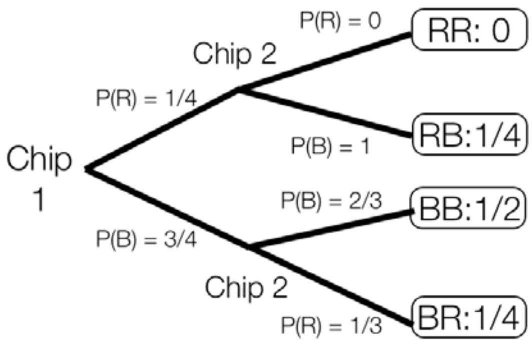
In the same way we made a graph for the 2-2 split, we make a graph with this solution. It can be seen that of the 6 possibilities, 3 are the same and 3 are different.

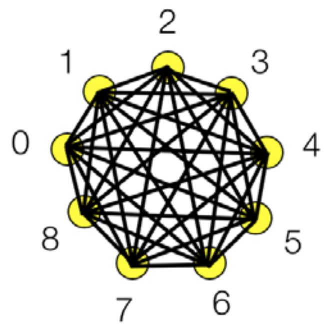
.



3. Make a tree diagram

For purposes of comparison with the first tree diagram, here is the tree diagram for the 3-1 split. The probability of the same color is 1/2, and the probability for different colors is 1/4 + 1/4 = 1/2.

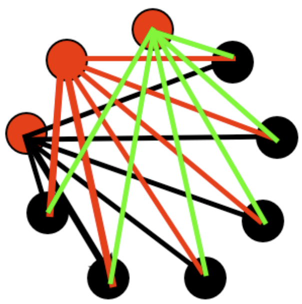




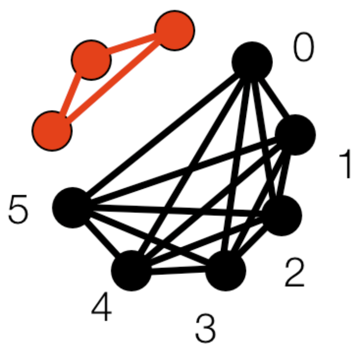
Other solutions

More solutions can be difficult to be find. Giving your students a clue that there is a solution with 9 chips encourages them to try their methods of analysis on a larger and more complex situation, which also leads to some very interesting and rich mathematics.

This second solution is a 6-3 split. To analyze this, we will use a graph because of its compact size. First we count the number of pairs which are different colors. Because there are 3 red chips and each red chip can be paired with 6 different black chips, the number of differently-colored pairs is 3x6 = 18.



Counting pairs of the same color is a little trickier. It's easy to see with the graph that there are 3 ways to connect two red chips. Looking at the black chips, we can reason as follows. The first black chip can be matched with 5 other black chips. The next black chip can be matched with 4 (it has already been matched with the first). The next can be matched with 3, and so on, until we reach the final chip which has 0 new matches that can be made. Thus, the number of black-black pairs is 5+4+3+2+1+0 = 15.



The total number of same color pairs is 15 (black-black) + 3 (red-red) = 18, which is the same number as the differently colored (black-red) pairs. The game is fair!

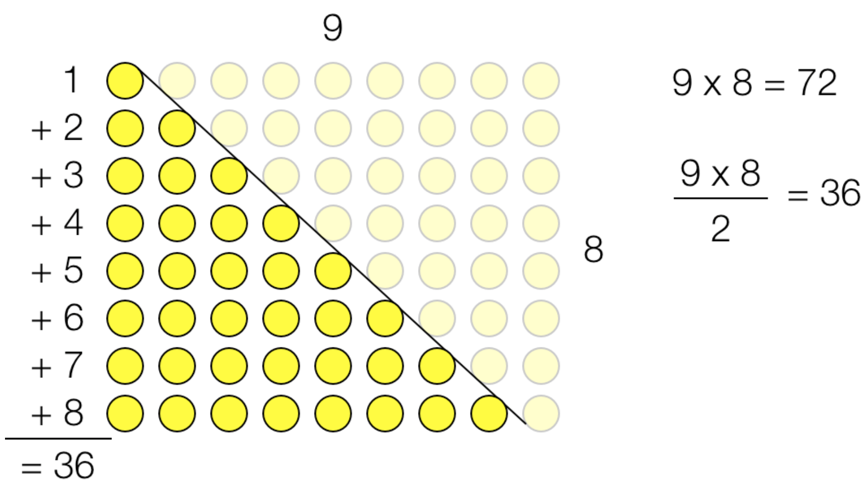
As a check to be certain we did not miss any pairs, let's use the method we just used on the black chips to count the total number of pairs. With 9 chips, the first chip can be paired with 8 others, the second with 7 others, the third with 6, and so on, for a total of 8+7+6+5+4+3+2+1+0 = 36 possible pairs, which coincides with the total number of possibilities found in our initial counts.

Another way to count these pairs is to observed that each of the 9 chips can be pairs with one of the other 8 chips for a total of 9 x 8 = 72 pairings. This number, however, is twice the actual number of pairing because we have double-counted each pair; chip 1 with chip 2, for example, was counted along with the pair chip 2 with chip 1. Therefore the number of pairs is actually 9 x 8 / 2 = 36.

Connection: Geometry

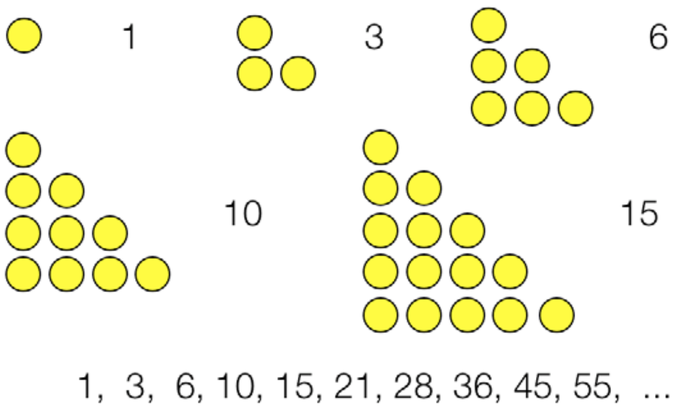
These 2 different counting methods point towards a beautiful relationship. In our first methods we counted 8+7+6+5+4+3+2+1 = 36. In the second method we counted 9 x 8 /2 = 36. These two techniques are connected with geometry.

In the following picture a 9 x 8 array of dots is split in half diagonally to show 9x8/2. The half that remains shows 1+2+3+4+5+6+7+8. It is easy to see then that sum of the integers from 1 to 8 equals half the product of 8 and 9. This result easily generalizes, as we shall do below.



Connection: Triangular Numbers

This idea points the way to another connection: a shortcut method for counting the sum of a sequence of integers 1+2+3+ ... + n. The numbers that are created by various values of *n* in this expression are called "triangular numbers" because they make the shape of a triangle when arranged as dots as shown here.



Using the idea of creating a rectangle and cutting it in half makes it very easy to find triangular numbers, which is the same as finding the sum of a sequence of consecutive integers.

1 x 2 / 2 = 1 = 1
2 x 3 / 2 = 3 = 1+2
3 x 4 / 2 = 6 = 1+2+3
4 x 5 / 2 = 10 = 1+2+3+4
5 x 6 / 2 = 15 = 1+2+3+4+5
6 x 7 / 2 = 21 = 1+2+3+4+5+6

$n \times (n+1) / 2 = 1+2+3+ \dots + n$

A third solution?

Observe the list of triangular numbers. It begins 1, 3, 6, 10. Do those numbers look familiar? 1 and 3 was the first solution to the challenge of making the dishwashing problem fair. 3 and 6 was the second solution. Could 6 and 10 also be a solution? We now have many tools we can use to easily check.

Number of differently colored pairs: 6 x 10 = 60.
Number of red-red pairs: 6 x 5 / 2 = 15, number of black-black pairs: 10 x 9 / 2 = 45, combined number of same colored pairs = 15 + 45 = 60.
Total number of pairs: 16 x 15 / 2 = 120.

We have found a third solution! What about other pairs of triangular numbers? 10 and 15? 15 and 21? 21 and 28?

Connection: Technology

Verifying these possible solutions can take time. A spreadsheet can be programmed to find the probabilities for any number of red and black chips. Set up the spreadsheet so that number of red chips, **r**, is the column headings and the number of black chips, **b**, is the row heading.

Perhaps the easiest way to calculate the probabilities is compare the number of differently colored pairs with the total number of pairs, since the calculation for differently colored pairs is easy: (**r** • **b**). The total number of pairs is found as follows: Since each group has a total number of (**r** + **b**) chips, the number of all possible pairs is (**r** + **b**) • (**r** + **b** – 1) / 2.

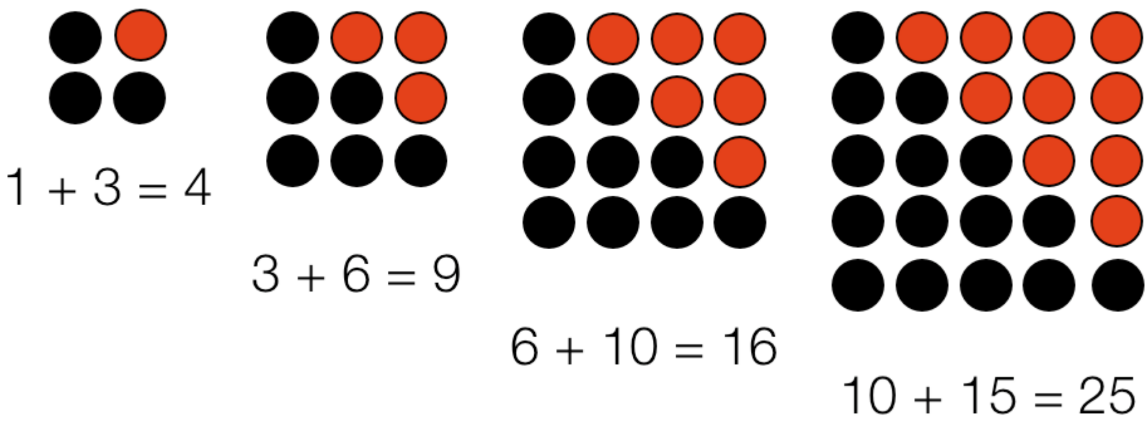
Thus, the probability of the chips being different colors is (**r**•**b**) / (**r**+**b**) • (**r**+**b**–1)/2. Programming this result into a spreadsheet quickly reveals the pattern:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1																		
2		P(s+d)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3		1	1	0.66667	0.5	0.4	0.33333	0.28571	0.25	0.22222	0.2	0.18182	0.16667	0.15385	0.14286	0.13333	0.125	0.11765
4		2	0.66667	0.66667	0.6	0.53333	0.47619	0.42857	0.38889	0.35556	0.32727	0.30303	0.28205	0.26374	0.24762	0.23333	0.22059	0.20915
5		3	0.5	0.6	0.6	0.57143	0.53571	0.5	0.46667	0.43636	0.40909	0.38462	0.36264	0.34286	0.325	0.30882	0.29412	0.2807
6		4	0.4	0.53333	0.57143	0.57143	0.55556	0.53333	0.50909	0.48485	0.46154	0.43956	0.41905	0.4	0.38235	0.36601	0.35088	0.33684
7		5	0.33333	0.47619	0.53571	0.55556	0.55556	0.54545	0.5303	0.51282	0.49451	0.47619	0.45833	0.44118	0.42484	0.40936	0.39474	0.38095
8		6	0.28571	0.42857	0.5	0.53333	0.54545	0.54545	0.53846	0.52747	0.51429	0.5	0.48529	0.47059	0.45614	0.44211	0.42857	0.41558
9		7	0.25	0.38889	0.46667	0.50909	0.5303	0.53846	0.53846	0.53333	0.525	0.51471	0.50327	0.49123	0.47895	0.46667	0.45455	0.44269
10		8	0.22222	0.35556	0.43636	0.48485	0.51282	0.52747	0.53333	0.53333	0.52941	0.52288	0.51462	0.50526	0.49524	0.48485	0.47431	0.46377
11		9	0.2	0.32727	0.40909	0.46154	0.49451	0.51429	0.525	0.52941	0.52941	0.52632	0.52105	0.51429	0.50649	0.49802	0.48913	0.48
12		10	0.18182	0.30303	0.38462	0.43956	0.47619	0.5	0.51471	0.52288	0.52632	0.52632	0.52381	0.51948	0.51383	0.50725	0.5	0.49231
13		11	0.16667	0.28205	0.36264	0.41905	0.45833	0.48529	0.50327	0.51462	0.52105	0.52381	0.52381	0.52174	0.51812	0.51333	0.50769	0.50142
14		12	0.15385	0.26374	0.34286	0.4	0.44118	0.47059	0.49123	0.50526	0.51429	0.51948	0.52174	0.52174	0.52	0.51692	0.51282	0.50794
15		13	0.14286	0.24762	0.325	0.38235	0.42484	0.45614	0.47895	0.49524	0.50649	0.51383	0.51812	0.52	0.52	0.51852	0.51587	0.51232
16		14	0.13333	0.23333	0.30882	0.36601	0.40936	0.44211	0.46667	0.48485	0.49802	0.50725	0.51333	0.51692	0.51852	0.51852	0.51724	0.51494
17		15	0.125	0.22059	0.29412	0.35088	0.39474	0.42857	0.45455	0.47431	0.48913	0.5	0.50769	0.51282	0.51587	0.51724	0.51724	0.51613
18		16	0.11765	0.20915	0.2807	0.33684	0.38095	0.41558	0.44269	0.46377	0.48	0.49231	0.50142	0.50794	0.51232	0.51494	0.51613	0.51613
19		17	0.11111	0.19883	0.26842	0.32381	0.36797	0.40316	0.43116	0.45333	0.47077	0.48433	0.49471	0.50246	0.50805	0.51183	0.51411	0.51515
20		18	0.10526	0.18947	0.25714	0.31169	0.35573	0.3913	0.42	0.44308	0.46154	0.47619	0.48768	0.49655	0.50323	0.50806	0.51136	0.51337
21		19	0.1	0.18095	0.24675	0.3004	0.3442	0.38	0.40923	0.43305	0.45238	0.46798	0.48046	0.49032	0.49798	0.50379	0.50802	0.51092
22		20	0.09524	0.17316	0.23715	0.28986	0.33333	0.36923	0.39886	0.42328	0.44335	0.45977	0.47312	0.48387	0.49242	0.49911	0.5042	0.50794
23		21	0.09091	0.16601	0.22826	0.28	0.32308	0.35897	0.38889	0.41379	0.43448	0.45161	0.46573	0.47727	0.48663	0.49412	0.5	0.5045
24		22	0.08696	0.15942	0.22	0.27077	0.31339	0.34921	0.37931	0.4046	0.42581	0.44355	0.45833	0.47059	0.48067	0.48889	0.4955	0.50071
25		23	0.08333	0.15333	0.21231	0.26211	0.30423	0.3399	0.37011	0.3957	0.41734	0.43561	0.45098	0.46387	0.4746	0.48348	0.49075	0.49663
26		24	0.08	0.14769	0.20513	0.25397	0.29557	0.33103	0.36129	0.3871	0.40909	0.42781	0.4437	0.45714	0.46847	0.47795	0.48583	0.49231

It can easily be seen that yes, the solutions are all pairs of triangular numbers, 1-3, 3-6, 6-10, 10-15, 15-21, and so on! Our counting techniques for verifying solutions have led us to many more solutions!

Connection: Number theory

Another surprise can be found when we look at the total number of chips in each solution. Our first solution was with 4 chips, our second solution with 9, and our third with 16 – all square numbers. The idea that two consecutive triangular numbers add to a square number is an idea from number theory, and can be shown nicely with a dot diagram as follows:



Connection: Algebra

1. The number theory idea can be shown algebraically. First, the nth triangular number is $n \cdot (n+1)/2$. The next triangular number is thus $(n+1) \cdot (n+2)/2$. Summing these and simplifying results in $(n+1)^2$, a square number.

2. We can also algebraically show that if we have two consecutive triangular numbers they make a solution to the dishwashing problem. Let number of red chips = $n \cdot (n+1)/2$, and the number of black chips = $(n+1) \cdot (n+2)/2$.

The number of differently colored pairs is the product of these two numbers. Let's call it D.

$$D = [n \cdot (n+1)/2] \cdot [(n+1) \cdot (n+2)/2].$$

That's the "easy" calculation. The next part is a little trickier. If C is the total number of chips, then

$$C = n \cdot (n+1)/2 + (n+1) \cdot (n+2)/2.$$

then the total number of pairs $T = C \cdot (C-1)/2$, which is the monstrous:

$$T = C \cdot (C-1)/2 = [n \cdot (n+1)/2 + (n+1) \cdot (n+2)/2] \cdot [n \cdot (n+1)/2 + (n+1) \cdot (n+2)/2 - 1] /2.$$

All that remains is to show that that D equals one half of the total number of pairs ($D = T/2$), which can be verified with very careful algebraic manipulation!

Beyond!

Way back at the beginning we had started with a simple problem concerning 4 chips and a question of fairness. Soon, we were examining many representations and making connections between ideas in probability. By following extensions of the problem, we began connecting to ideas from other areas of mathematics and now we find ourselves far, far beyond what we started with!

This is one of the most exciting and rewarding aspects of studying probability. By starting with solid grounding in probability experiments and basic ideas, we can launch into a world of exploration, representation, and connections, and find ourselves examining deep mathematical ideas both within mathematics… and beyond!