

UNDERSØKENDE MATEMATIKK- UNDERVISNING I VIDEREGÅENDE SKOLE

KOMMUNIKASJON - MOTIVASJON - FORSTÅELSE





© 2010 Matematikksenteret, Trondheim

1. utgave / 1. opplag 2010

ISBN 978-82-997163-6-9 (Trykt)

ISBN 978-82-997163-7-6 (PDF)

Bok

Prosjektleder Matematikksenteret: Gerd Åsta Bones

Prosjektleder Snöball Film AS: Knut Åge Teigen

Omslagsfoto: Snöball Film AS

Formgiving: Idé & Layout AS

Grafisk tilrettelegging og ombrekking: Tor-Arne Njåmo, Snöball Film AS

Språkvask: Jan R. Tislevoll

Brødtekst: Myriad Pro 10 pkt

Papir: 100g Arctic Silk

Trykk: Dicentia Norway AS, 2010

Filmer

Produksjonsselskap: Snöball Film AS, www.snoball.no

Produsent og regi: Knut Åge Teigen

Foto: Joachim Foss Rønning, Jan Kielland, Kjetil Fodnes og Thorbjørn Magnus

Lyd: Cathrine Heltzener og Håvard Sethre

Klipp: Kjetil Fodnes, Thorbjørn Magnus og Kathrine Granlund

Etterarbeid: Kathrine Granlund og Tor-Arne Njåmo

Nettsted (www.skoleipraksis.no/matematikk-vgs): Tor-Arne Njåmo

Alle henvendelser om boka kan rettes til:

Matematikksenteret, NTNU, 7491 Trondheim

E-post: ms@matematikksenteret.no

www.matematikksenteret.no

Materialet i denne publikasjonen er omfattet av åndsverkslovens bestemmelser. Uten særskilt avtale med Matematikksenteret er enhver eksemplarframstilling og tilgjengeliggjøring bare tillatt i den utstrekning det er hjemlet i lov eller i avtale med Kopinor, interesseorganisasjon for rettighetshavere til åndsverk. Utnyttelse i strid med lov eller avtale kan medføre erstatningsansvar og inndragning og kan straffes med bøter eller fengsel.



Innhold

Forord	4
Innledning	5
1 Innføring i uoppstilte likninger	8
2 Uoppstilte likningssett	12
3 Hundrekartet – mønster og bevis	18
4 Andregradsfunksjoner I: Introduksjon til andregradsfunksjoner	28
5 Andregradsfunksjoner II: Å utforske sammenhengen mellom funksjonsuttrykk og graf	32
6 Andregradsfunksjoner III: Areal og omkrets av rektangler	38
7 Andregradsfunksjoner IV: Nullpunkter til andregradsfunksjoner	42
8 Andregradsfunksjoner V: Nullpunkter og faktorisering	46
9 Introduksjon til trigonometri	50
10 Pytagoras' setning	54
Kopieringsoriginaler	60

Filmliste

Innføring i uoppstilte likninger	18.50 min
Uoppstilte likningssett	28.23 min
Hundrekartet – mønster og bevis	30.07 min
Introduksjon til andregradsfunksjoner	24.12 min
Introduksjon til trigonometri	24.06 min

FORORD

Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen – Matematikksenteret – er et nasjonalt ressurscenter for matematikkdiraktisk kompetanse. Senteret skal legge vekt på å utvikle arbeidsmetoder og eksempler på undervisningsmateriell som bidrar til å gjøre matematikkopplæringen variert, spennende og levende for elever og studenter på et høyt faglig nivå.

Matematikksenteret presenterer med denne boka ideer til god matematikkundervisning i videregående skole. Vi ønsker å inspirere matematikklærere til å bruke varierte undervisningsformer. La elevene utfordres av utforskningsoppgaver, la dem se systemer og sammenhenger og utvikle forståelse for faget, la dem utvikle alle de grunnleggende ferdighetene også innenfor matematikken.

Boka inneholder ti ulike undervisningsopplegg, fra ulike deler av læreplanen, i hovedsak rettet mot 1. trinn i videregående skole. I filmene på dvd-platen som ligger ved boka, kan du se fem av undervisningsoppleggene gjennomført i praksis. Både filmene og boka er også fritt tilgjengelig på www.skoleipraksis.no/matematikk-vgs. Der ligger også alle elevarkene i nynorsk versjon.

Undervisningsoppleggene er utviklet av Anne-Mari Jensen, Kjersti Wæge og Ingvill M. Stedøy-Johansen. Snøball Film AS har stått for filmingen. En stor takk til Arne Amdal og Ingvill M. Stedøy-Johansen som sammen med Anne-Mari Jensen er lærere i de filmede undervisningsoppleggene. Gerd Åsta Bones ved Matematikksenteret har hatt ansvaret for formgivning av denne boka og koordinering av prosjektet.

Vårt ønske er at boka og filmene vil inspirere matematikklærerne i videregående skole til å ta i bruk noen av oppleggene i egen klasse. Vi utfordrer lærerne til å bruke varierte arbeidsformer gjennom hele matematikkopplæringen. Vi ønsker at elevene skal ha glede av, forstå og se nytten av faget og kunne bruke det i videre skolegang, hverdagsliv og yrkesliv.

Vennlig hilsen


Anne-Mari Jensen
lektor, Meløy videregående skole


Kjersti Wæge
førsteamanuensis, PLU, NTNU

INNLEDNING

Undersøkende matematikkundervisning

I en undersøkende matematikkundervisning er det fokus på elevenes tenking og resonnering. Det legges stor vekt på at elevene selv skal finne løsningsstrategier, metoder og løsninger. Elevene skal ikke forsøke å finne «den ene riktige løsningen» eller «gjette hva læreren tenker». De blir oppfordret til å finne egne løsningsstrategier, forklare hvordan de tenker, og forklare hvorfor det blir riktig.

Flere forskningsstudier viser at elever som erfarer en undersøkende matematikkundervisning utvikler større forståelse og presterer bedre i matematikk enn elever som erfarer en mer tradisjonell matematikkundervisning (Boaler 1998; Cobb, Wood, Yackel & Perlwitz, 1992; McCaffrey et al. 2001).

Kommunikasjon

Lærerens kommunikasjon med elevene er avgjørende for å lykkes med en mer undersøkende matematikkundervisning. Læreren må stille åpne spørsmål i stedet for lukkede spørsmål med korte og entydige svar.

I sin kommunikasjon med eleven må læreren la eleven få sjansen til å forklare hvordan hun tenker og eventuelt hvor problemet ligger. Det er avgjørende at læreren tar seg tid til å lytte til eleven. Læreren kan dermed ta utgangspunkt i det eleven har tenkt og begynne derfra når han skal hjelpe eleven videre i arbeidet. Som vi kan se i noen av filmene, er det enkelte ganger tilstrekkelig at læreren gjør elevene oppmerksom på hva oppgaven går ut på. Andre ganger kan det være nok å stille et spørsmål eller gi et hint som får eleven videre i tenkeprosessen.

For å lykkes med denne typen kommunikasjon er det viktig at læreren forbereder seg godt på forhånd. Læreren må ha tenkt gjennom hvilke problemer elevene kan støte på, og hvilke spørsmål eller hint som kan hjelpe dem videre uten at man gir dem løsningen. Lærere har ofte en tendens til å forklare eleven hvordan han eller hun skal løse oppgaven,



og gjerne også hvorfor det blir sånn, uten å gi eleven sjansen til å finne løsningen selv. La elevene få sjansen til å finne egne løsningsstrategier og til å forklare hvordan de tenker. Bruk dette som et utgangspunkt for læringen i faget. Mange lærere vil sannsynligvis bli overrasket over hvor mye elevene er i stand til å finne ut selv.

For å kunne gjennomføre undersøkende matematikkundervisning i en klasse med 30 elever kan det være hensiktsmessig å la elevene arbeide i par. To og to par kan videre sitte sammen i grupper. Da har de sjansen til å diskutere og utveksle ideer mens de arbeider med oppgavene. Med en slik organisering blir det også lettere for læreren å få den faglige oversikten i klassen, og han kan veilede flere elever samtidig.

Motivasjon

Elevene må oppleve mestring i matematikktimene, og de må føle at de lærer noe nytt. Det er avgjørende for elevenes motivasjon at oppgavene er passe utfordrende (Ryan & Deci 2002). Elevene liker verken å arbeide med oppgaver som er for enkle eller for vanskelige (Wæge 2007). Inngangsterskelen til oppleggene bør være så lav at det er mulig for alle elevene å arbeide med det matematiske problemet. Samtidig må det være mulig for de sterke elevene å strekke seg så langt som mulig. Målet er å utvikle oppgaver som gir elevene muligheter til å arbeide på ulike nivåer. Denne typen oppgaver kaller vi gjerne rike oppgaver.

Ifølge sosialkonstruktivistisk læringsteori konstruerer elevene sin kunnskap ut fra de erfaringene de har (Glaserfeld 1995a). Elevene oppfatter ting ulikt og det er ikke nødvendigvis en bestemt løsningsmetode som er den beste for alle. Det er viktig for elevenes motivasjon at de får sjansen til tenke selv og å utvikle egne løsningsstrategier (Wæge 2007).

Undervisningsoppleggene i boka legger opp til at elevene skal få muligheten til å se systemer og finne egne metoder. Måten læreren kommuniserer med elevene på, er avgjørende for å kunne gi elevene denne muligheten.

Forståelse

Skemp (1976) skiller mellom instrumentell og relasjonell forståelse. Instrumentell forståelse innebærer å lære et økende antall regler og formler som hjelper eleven til å finne løsningen på oppgavene. Eleven vet *hvordan* han skal løse oppgaven. Relasjonell forståelse innebærer å bygge opp begrepsmessige strukturer og se sammenhenger mellom begrepene. Det innebærer å vite både *hvordan* du skal løse en oppgave og *hvorfor* det blir sånn.

Elevenes forestillinger om hva matematikk og matematikkundervisning er, vil påvirke motivasjonen deres i faget (Kloosterman 1996, 2002). Elever som har en forestilling om at matematikk dreier seg om å bruke regler og formler, vil sannsynligvis være motivert for å lære regler og formler. De vil ikke være motivert for å utvikle relasjonell forståelse og for å se sammenhenger i matematikk. Elever som har en forestilling om at matematikkundervisning innebærer at læreren viser regler og eksempler på tavla, sånn at elevene deretter kan løse oppgaver, vil sannsynligvis være motivert for denne typen undervisning.

Undervisningsoppleggene i boka legger opp til at elevene skal utvikle relasjonell forståelse og se sammenhenger i matematikken. Når læreren skal gjennomføre oppleggene i boka, er det viktig at han forteller elevene hensikten med opplegget og at de vil bli utfordret i forhold til å utvikle egne metoder og forklare hvordan de tenker.

Grunnleggende ferdigheter

De grunnleggende ferdighetene skal være integrert i kompetansemålene i LK06. Våre undervisningsopplegg fokuserer på at elevene skal stille spørsmål, argumentere og forklare en tankegang ved hjelp av matematikk. Det innebærer at de skal kommunisere ideer, drøfte problemer og løsningsstrategier med andre og sette ord på oppdagelser og ideer, både skriftlig og muntlig. De skal øve på å uttrykke seg ved hjelp av matematiske symboler og det formelle språket i faget. De skal utforske og løse matematiske problemer hvor det ikke finnes en bestemt framgangsmåte som er kjent for dem. Elevene skal bruke varierte strategier og vurdere hvor rimelige svarene er. De bruker digitale verktøy i utforskningen av problemene.

Referanser

Boaler, J. (1998). *Open and closed mathematics: Student experiences and understandings*. Journal for Research in Mathematics Education, 29(1), 41-62

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., & Perlwitz, M. (1992). *A follow-up assessment of a second-grade problemcentered mathematics project*. Educational Studies in Mathematics, 23, 483-504

Glaserfeld, E. v. (1995a). Chapter 3: *Piaget's Constructivist Theory of Knowing* & Chapter 5: *Reflection and Abstraction Radical constructivism. A way of knowing and learning* (pp. 53-75 & 89-128). London: Falmer Press

Kloosterman, P. (1996). *Students' Beliefs About Knowing and Learning Mathematics: Implications for Motivation*. In M. Carr (Ed.), *Motivation in Mathematics* (pp. 131-156). Cresskill: Hampton Press, Inc.

Kloosterman, P. (2002). *Beliefs about mathematics and mathematics learning in the secondary school: measurement and implications for motivation*. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education* (pp. 247-269). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers

McCaffrey, D. F., Hamilton, L. S., Stecher, B. M., Klein, S. P., Bugliari, D., & Robyn, A. (2001). *Interactions among instructional practices, curriculum, and student achievement: The case of standard-based high school mathematics*. Journal for Research in Mathematics Education, 32(5), 493-517

Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2002). *Overview of Self-Determination Theory: An Organismic Dialectical Perspective*. In E. L. Deci & R. M. Ryan (Eds.), *Handbook of Self-Determination Research* (pp. 3-33). New York: The University of Rochester Press

Skemp, R. R. (1976). *Relational and Instrumental Understanding. Mathematics teaching*, Bulletin of the Association of Teachers of Mathematics, 77, 20-26.

Wæge, K. (2007). *Elevenes motivasjon for å lære matematikk og undersøkende matematikkundervisning*. Norwegian University of Science and Technology, Trondheim





INNFØRING I UOPPSTILTE LIKNINGER



Kompetansemål: Tall og algebra

- Omforme en praktisk problemstilling til en likning, løse den og vurdere hvor gyldig løsningen er (1T)

Læringsmål

- Elevene skal kunne omforme praktiske problemstillinger til likninger
- Elevene skal kunne se sammenhenger mellom praktiske problemstillinger og likninger
- Elevene skal kunne løse likningene og vurdere hvor gyldig løsningene er
- Elevene skal få en økt forståelse av hva en likning er, og av hva den ukjente betyr

Arbeidsform

La elevene arbeide parvis. Det er viktig å oppmuntre til samtale og diskusjon om faglig arbeid. Elevene skal skrive ned det de oppdager, både med ord og matematiske symboler

Tidsbruk og valg av tidspunkt

Selve opplegget vil ta omtrent 1 time. Vi anbefaler at det blir satt av 1–2 timer slik at elevene kan arbeide med oppgaver fra læreboka etter at opplegget er gjennomført. Velg oppgaver med ulik vanskelighetsgrad fra boka og la elevene velge, under veiledning av læreren, hvilke oppgaver (vanskelighetsgrad) de vil arbeide med. Dette opplegget er en introduksjon til uoppstilte likninger.

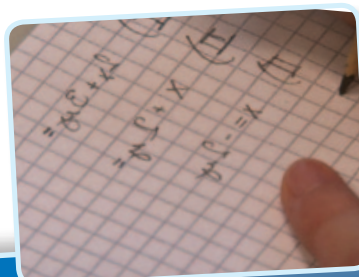
Utstyr

Tellebrikker (kan bestilles hos www.lar-lek.se)

Undervisningsopplegget

På de neste sidene blir oppgavene til dette undervisningsopplegget presentert med kommentarer til læreren. Elevene skal arbeide med oppgavene i par. Oppgavearket finner du som kopieringsoriginal på side 61.

Før du gjennomfører opplegget er det viktig at du tenker nøye gjennom hvilke spørsmål eller hint du kan gi til elevene dersom de får problemer. Ikke gi elevene svarene. Opplegget forutsetter at læreren ikke forteller elevene hvordan de skal sette opp likningene. La elevene slite en stund før du gir direkte hjelp. Tenk også over hvordan du kan få i gang en diskusjon i oppgave 5.





1 Du skal bruke 10 brikker til å lage 3 kolonner slik at

- den røde kolonnen inneholder 3 flere enn den blå kolonnen
- den grønne kolonnen inneholder 1 flere enn den blå kolonnen

La brikkene/kolonnene ligge til oppgave 5.

2 Løs oppgaven ved hjelp av likninger.

Kommentar til læreren

Her er det viktig at elevene finner egne måter å sette opp likningene på. Noen elever vil sannsynligvis bruke x , y og z for de ukjente, andre vil bruke r , g og b , mens noen kanskje vil skrive *rød*, *grønn* og *blå*. Det er viktig at elevene innser at de ikke alltid må bruke x , y og z , men at de kan bruke bokstaver som er logiske i forhold til oppgaven. Om de bruker r , g og b kan det være lettere for mange elever å forstå hva likninger egentlig er.

Du kan gjerne stille gode spørsmål og gi hint til elever som vil ha hjelp og som du vet sliter med matematikk. Vent i det lengste med å gi dem direkte hjelp. Hvis du ser at flinke elever strever med oppgaven, så la dem holde på en stund før du gir dem hjelp. Våre erfaringer er at de som regel finner ut at det selv til slutt.

3 Bruk 10 brikker til å lage 3 kolonner slik at

- den blå kolonnen inneholder 3 færre enn den røde kolonnen
- den grønne kolonnen inneholder 2 færre enn den røde kolonnen

La brikkene/kolonnene ligge til oppgave 5.

4 Løs oppgaven ved hjelp av likninger.

Kommentar til læreren

Disse oppgavene har litt høyere vanskelighetsgrad enn oppgave 1 og 2.



INNØRING I UOPPSTILTE LIKNINGER

- 5** Sammenlikn kolonnene og likningsuttrykkene fra oppgave 1 og oppgave 3. Forklar hva du ser og hvorfor.

Kommentar til læreren

Elever tror ofte at når de skal omforme praktiske situasjoner til likninger, så er det bare en måte å velge x (den ukjente i likningen) på. De stiller ofte følgende spørsmål: «Hva skal jeg velge som x ?», «Har jeg valgt riktig x ?» Vi vil at elevene, gjennom å gjøre disse oppgavene, skal forstå at hva de velger som x , ikke er avgjørende for å løse oppgaven. De vil få samme løsning uansett. Selvfølgelig vil det i enkelte oppgaver være hensiktsmessig å velge en bestemt ukjent som x , men et av målene i dette opplegget er å vise at sammenhengen mellom de ukjente er konstant, uavhengig av hva de velger som x .

- 6** Bruk 13 brikker til å lage 3 kolonner slik at
- den røde kolonnen inneholder 2 flere enn den blå kolonnen
 - den grønne kolonnen inneholder 3 færre enn den røde kolonnen

- 7** Løs oppgaven ved hjelp av likninger.

Kommentar til læreren

Disse oppgavene har høyere vanskelighetsgrad enn de tidligere oppgavene, da vi ikke tar utgangspunkt i den samme fargen i begge setningene.

- 8** Bruk 12 brikker til å lage 3 kolonner slik at
- den røde kolonnen inneholder 2 flere enn den blå kolonnen
 - den grønne kolonnen inneholder 3 færre enn den røde kolonnen

- 9** Lag minst to liknende oppgaver selv.

Kommentar til læreren

Det finnes ingen heltallig løsning i oppgave 8. Siden dette er en praktisk problemstilling, finnes det ikke en løsning på oppgaven. La elevene forklare (bevise) at det ikke finnes en løsning ved å bruke brikkene. Du kan utfordre de flinke elevene til å vise at det ikke finnes en heltallig løsning ved regning.

Forberedelse til oppsummering

På hvilke måter har elevene løst den praktiske delen av oppgaven? Har de brukt ulike strategier? Snakk med elevene og hør hvordan de tenkte da de løste den praktiske delen av oppgaven. Gjør tilsvarende med den teoretiske delen av oppgaven.

Be elevene forklare hvorfor det ikke finnes noen løsning på oppgave 8. Hvis noen elever mener at løsningen deres er gyldig, la dem begrunne det. Diskuter gjerne dette med gyldighet av løsninger.

Hvis du ser at noen elever har gjort noe du gjerne vil at de andre elevene skal få innblikk i, kan du avtale med dem på forhånd at de skal komme til tavla under oppsummeringen. Dette er et viktig grep, spesielt dersom elevene ikke er vant til å presentere løsningene sine i plenum. Det kan føles tryggere for elevene når de på forhånd vet at de skal komme til tavla, og når de vet hva læreren ønsker at de skal presentere. Om du avtaler med noen elever på forhånd sikrer du også at ulike metoder og strategier blir vist under oppsummeringen.

Felles oppsummering og diskusjon

Ta utgangspunkt i elevenes løsninger og det du har observert når du har gått rundt i klasserommet.

Praktisk del

- La elevene vise hvordan de løste den praktiske delen av oppgaven på overhead. Hvilke strategier har de brukt? La dem forklare selv. Har de valgt en bevisst strategi, eller har de prøvd og feilet?

Teoretisk del

- La elevene vise hvordan de løste de teoretiske oppgavene. Diskuter eventuelle ulike oppsett av likninger. La elevene forklare hvordan de har tenkt.
- I oppgave 5 vil elevene se at de får de samme kolonnene som i oppgave 1 og oppgave 3, og dermed samme svar på likningene. Er likningene de samme? Hvordan er dette mulig?
- Mange elever tror at når man skal stille opp likninger, så er det bare en riktig måte å gjøre det på. Oppgaven over viser at det er mange måter å stille opp likninger på for det samme problemet.
- Hvorfor finnes det ikke noen løsning på oppgave 8? Kan elevene forklare det på forskjellige måter?

Utvidelse

- Det er viktig at elevene arbeider med oppgaver fra læreboka i etterkant av opplegget. Elevene kan få i lekse å løse noen av oppgavene de har laget selv.



UOPPSTILTE LIKNINGSSETT



Kompetansemål: Tall og algebra

- Omforme en praktisk problemstilling til et likningssystem, løse det og vurdere hvor gyldig løsningen er (1T)

Læringsmål

- Elevene skal kunne omforme praktiske problemstillinger til likningssett
- Elevene skal kunne se sammenhenger mellom praktiske problemstillinger, oppsetting av likningssett, løsning av disse og systematisk tenking
- Elevene skal kunne løse likningssettene og vurdere hvor gyldig løsningene er
- Elevenes skal få en økt forståelse av hva en likning er, og av hva den ukjente betyr

Tidsbruk og valg av tidspunkt

Selve opplegget vil ta 1–2 timer. Vi anbefaler at det blir satt av 2 timer slik at elevene etter opplegget kan arbeide med oppgaver fra læreboka. Velg oppgaver med ulik vanskelighetsgrad fra boka og la elevene velge, under veiledning av læreren, hvilke oppgaver (vanskelighetsgrad) de vil arbeide med. Hvor mange timer elevene skal arbeide med oppgaver fra boka må vurderes for hver enkelt klasse. Opplegget kan benyttes som en innføring til likningssystemer av første grad med to ukjente. Det er spesielt godt egnet som en innføring av addisjonsmetoden, men kan også brukes til repetisjon.

Arbeidsform

La elevene arbeide parvis. Det er viktig å oppmuntre til samtale og diskusjon om faglig arbeid. Elevene skal skrive ned det de oppdager, både med ord og matematiske symboler.

Utstyr

Til oppgave 1:

2 vekter, skruer og muttere

Alternativ 1

To skruer og to muttere skrudd sammen til ett stykke

To skruer og en mutter skrudd sammen til ett stykke

Alternativ 2

To skruer og en mutter skrudd sammen til ett stykke

En skrue og tre muttere skrudd sammen til ett stykke

Alternativ 3

To skruer og to muttere skrudd sammen til ett stykke

En skrue og tre muttere skrudd sammen til ett stykke

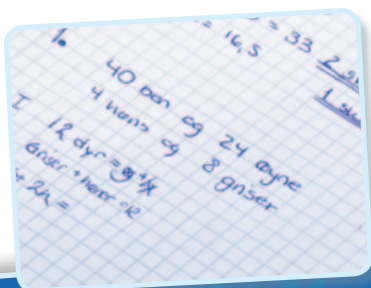
Alternativ 4

To skruer og tre muttere skrudd sammen til ett stykke

To skruer og to muttere skrudd sammen til ett stykke

Til oppgave 2:

40 fyrstikker og 24 tellebrikker (kan bestilles hos www.lar-lek.se)





Undervisningsopplegget

På de neste sidene blir oppgavene til dette undervisningsopplegget presentert med kommentarer til læreren. Elevene skal samarbeide i par om å løse oppgavene. Oppgavene finner du som kopieringsoriginal på side 62.

Før du gjennomfører opplegget, er det viktig at du tenker nøye gjennom hvilke spørsmål eller hint du kan gi til elevene dersom de får problemer. Ikke gi elevene svarene. Opplegget forutsetter at læreren ikke forteller elevene hvordan de skal sette opp likningsettene.

Introduksjon

Presenter planen for timene og læringsmålene. Elevene organiseres i par. Hvert par får utdelt en pose med skruer og muttere som er skrudd sammen. Det er ikke lov å skru delene fra hverandre.

Ikke fortell elevene at du har satt fram vekter ved tavla. La elevene finne ut selv at de er nødt til å få vite hvor mye de sammenskrudde skruene og mutterne veier.

Oppgave 1

Skruer og muttere

Utstyr: Hver gruppe får utdelt et sett med skruer og muttere. Eksempel:

2 skruer og 1 mutter er skrudd sammen 
 2 skruer og 2 muttere er skrudd sammen 

Hvor mye veier en skrue? Hvor mye veier en mutter? Det er ikke lov til å skru dem løs fra hverandre.

Kommentar til læreren

Gå rundt blant elevene og se hvordan de løser oppgaven. Bruker elevene likninger, eller tenker de systematisk uten å bruke likninger? Be elevene forklare hvordan de tenker: «Hvordan tenkte du?»

Noen sett med skruer og muttere er slik at det er ganske lett å finne svarene uten å sette opp en likning mens med andre sett er det vanskeligere. Hvis du kjenner klassen godt, kan du planlegge på forhånd hvilke elever som skal ha de ulike posene. La gjerne elevene bytte poser etter hvert som de finner vekten til skruene og mutterne i posen de har fått.

Utfordre elevene til å finne løsningen på flere måter:

- Dersom elevene har løst oppgaven uten å bruke likninger kan du først be dem forklare hvordan de har tenkt. Kan du sette opp likninger som viser sammenhengen mellom vekten av skruer og muttere? Kan du løse likningssystemet? Ser du noen sammenheng mellom de ulike metodene du har brukt? I så fall, kan du forklare denne sammenhengen? Gi elevene hint eller still gode spørsmål hvis det er aktuelt.



UOPPSTILTE LIKNINGSSETT

- Dersom elevene har løst oppgaven ved hjelp av likninger kan du først be dem forklare hvordan de har tenkt. Kan du finne en løsning ved å tenke systematisk uten å bruke likninger? Er det en sammenheng mellom måter å løse likninger på og praktisk tenking for å finne svarene? I så fall, kan du forklare denne sammenhengene? Gi elevene hint eller still gode spørsmål dersom det er aktuelt.
- Det er viktig at elevene finner egne måter å sette opp likningene på. Noen elever vil sannsynligvis bruke x og y for de ukjente, andre vil bruke s og m , mens noen kanskje vil skrive skruer og muttere. Det er viktig at elevene innser at de ikke alltid må bruke x og y , men at de kan bruke bokstaver som er logiske i forhold til oppgaven. Ved å bruke s og m kan det være lettere for mange elever å forstå hva likninger egentlig er.
- Hvis elevene spør om de har fått riktig svar, gir du dem en skrue og en mutter og ber dem veie dem selv for å sjekke løsningene sine.

Forberedelse til oppsummering

Det er to hovedmål med oppsummeringen. Det første målet er å vise at man kan finne løsningen på flere måter, og at det er en sammenheng mellom de forskjellige metodene. Det andre målet er å vise spesifikt at man kan sette opp et likningssystem og løse det, og at denne metoden kan illustreres, eller har sammenheng med å tenke systematisk med utgangspunkt i den praktiske oppgaven.

Vår erfaring er at addisjonsmetoden er den metoden som passer best til å forklare den praktiske systematiske tenkingen/resonneringen i denne oppgaven. Dersom opplegget brukes til repetisjon, tar du utgangspunkt i metodene elevene har brukt tidligere.

Hvis du ser at noen elever har gjort noe du gjerne vil at de andre elevene skal få innblikk i, så kan du avtale med dem på forhånd at de skal komme til tavla under oppsummeringen. Det er et viktig grep, spesielt dersom elevene ikke er vant til å presentere løsningene sine på tavla. Det kan føles tryggere for elevene når de på forhånd vet at de skal komme til tavla og når de vet hva læreren ønsker at de skal presentere. Ved å avtale med noen elever på forhånd sikrer du at ulike metoder og strategier blir vist under oppsummeringen.

Felles oppsummering og diskusjon

Ta utgangspunkt i elevenes løsninger og det du har observert når du har gått rundt i klasse-rommet. La elevene forklare hva de har gjort, og hvordan de har tenkt. Utnytt det de har funnet og forsøk å lage en struktur på det slik at de to målene med oppsummeringen blir nådd.

Oppgave 2: Griser og høns

Utstyr: 40 fyrstikker og 24 brikker

På gården til Truls er det griser og høns. I følge Truls, har disse dyrene til sammen 40 ben og 24 øyne.

- 1 Finn ut hvor mange griser og hvor mange høns Truls har på gården sin, både ved hjelp av fyrstikker og brikker, og ved hjelp av likninger.
- 2 Anta deretter at et ukjent antall stålormer sniker seg inn på gården. Det totale antall øyne og ben er det samme som før. Hvor mange griser, hvor mange høns og hvor mange stålormer har Truls på gården sin nå?

Kommentar til læreren

Denne oppgaven har høyere vanskelighetsgrad enn oppgaven med skruer og muttere.

Gå rundt blant elevene og se hvordan de løser oppgaven. Bruker elevene likninger eller tenker de systematisk uten å bruke likninger? Be elevene forklare hvordan de tenker: «Hvordan tenkte du?»

Utfordre elevene til å finne løsningen på flere måter:

- Dersom elevene har løst oppgaven uten å bruke likninger kan du først be dem forklare hvordan de har tenkt. Kan du sette opp likninger som viser sammenhengen mellom griser og høns? Kan du løse likningssystemet? Ser du noen sammenheng mellom de ulike metodene du har brukt? I så fall, kan du forklare denne sammenhengen? Gi elevene hint eller still gode spørsmål dersom det er aktuelt.
- Dersom elevene har løst oppgaven ved hjelp av likninger kan du først be dem forklare hvordan de har tenkt. Kan du finne en løsning ved å tenke systematisk uten å bruke likninger? Er det en sammenheng mellom måter å løse likninger på og praktisk tenking for å finne svarene? I så fall, kan du forklare denne sammenhengen? Gi elevene hint eller still gode spørsmål dersom det er aktuelt.
- Det er viktig at elevene finner egne måter å sette opp likningene på. Noen elever vil sannsynligvis bruke x og y for de ukjente, andre vil bruke g og h , mens noen kanskje vil skrive griser og høns. Det er viktig at elevene innser at de ikke alltid må bruke x og y , men at de kan bruke bokstaver som er logiske i forhold til oppgaven. Om de bruker g og h , kan det være lettere for mange elever å forstå hva likninger egentlig er.
- I oppgave 2 må elevene tenke logisk og prøve og feile, praktisk og/eller ved regning.

Forberedelse til oppsummering

Målet med oppsummeringen er å vise at man kan finne løsningen på flere måter, og at det er en sammenheng mellom de forskjellige metodene.

Felles oppsummering og diskusjon

Ta utgangspunkt i elevenes løsninger og det du har observert når du har gått rundt i klasserommet. La elevene forklare hva de har gjort og hvordan de har tenkt. Utnytt det de har funnet, og forsøk å lage en struktur på det slik at målet med oppsummeringen blir nådd.

Videre arbeid

Det er viktig at elevene arbeider med oppgaver fra læreboka etter å ha gjennomført dette undervisningsopplegget. Som vi har skrevet ovenfor: Velg oppgaver med ulik vanskelighetsgrad fra boka og la elevene velge, under veiledning av læreren, hvilke oppgaver (vanskelighetsgrad) de vil arbeide med. Hvor mange timer elevene skal arbeide med oppgaver fra boka, må vurderes for hver enkelt klasse.



HUNDREKARTET – MØNSTER OG BEVIS



Kompetansemål: Tall og algebra

- Finne og analysere rekursive og eksplisitte formler for tallmønstre med og uten digitale hjelpemidler, og gjennomføre og presentere enkle bevis knyttet til disse formlene (R2)

Læringsmål

- Å kunne utforske matematisk ved å samle erfaringer, systematisere, se sammenhenger og generalisere
- Å kunne stille nye spørsmål i matematikk på grunnlag av problemer man arbeider med
- Å utvikle flere strategier for å løse problemer
- Å kunne se hva som kreves av et bevis, og å kunne gjennomføre et matematisk bevis

Arbeidsform

La elevene arbeide parvis. Det er viktig å oppmuntre til samtale og diskusjon om faglig arbeid. Elevene skal skrive ned det de oppdager, både med ord og matematiske symboler.

Tidsbruk

En dobbelttime. Elevene må ha arbeidet en del med algebra på forhånd.

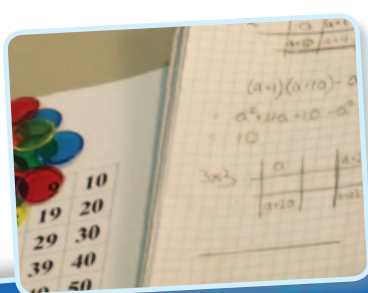
Utstyr

Hundrekart og tellebrikker (kan bestilles hos www.lar-lek.se)
Kopieringsoriginal av hundrekartet finner du på side 63.

Undervisningsopplegget:

Denne oppgaven er åpen i den forstand at det ikke er formulert spørsmål hvor elevene skal finne de riktige svarene. Det er et opplegg hvor elevene skal arbeide med utforskning.

Utgangspunktet er hundrekart og plastbrikker, og matematikken må tas i bruk som et verktøy for å observere, eksperimentere, gjette på systemer, prøve ut og verifisere eller forkaste gjetningen. De må analysere, systematisere og generalisere. De inviteres også selv til å formulere nye problemstillinger med utgangspunkt i systemet de forsker på. Og til slutt kreves at de skal bevise at systemene de har funnet, er allmenngyldige.





I slike utforskningsoppgaver får elevene erfaring i å tenke matematisk. Vi ønsker at de skal utvikle et repertoar av strategier for å løse matematiske problemer, og at de skal oppleve at matematikk er mer enn å bruke faste innlærte metoder til å løse bestemte typer oppgaver. Det gjelder ikke bare å huske regler og prosedyrer, men å være kreativ og våge å prøve seg fram og gjøre sine egne erfaringer.

Et slikt arbeid er også en utfordring for læreren. Her kan problemstillingene ta mange ulike retninger, og det finnes ingen fasit. Vi oppmuntrer også læreren til å våge å la elevene ta styring over utforskningsarbeidet.

I dette opplegget vil ulike elever utfordres på ulike nivåer. For noen elever vil det være et mål å kunne se og beskrive mønsteret i 2×2 -kvadrater og kanskje utvide det til større kvadrater. Det kan være en hjelp å få tips om at resultatene kan fylles inn i en tabell.

For andre elever vil det være en passende utfordring å finne et system i alle rektangler og kvadrater. Når de kjenner systemet, kan de da si hvilke rektangler som gir et bestemt svar på regnestykket?

Elevene utfordres også til å bevise de ulike systemene ved å bruke algebra for å generalisere. Noen elever vil kanskje utvikle mønster i andre figurer enn kvadrater og rektangler. De vil støte på nye, men tilsvarende problemer.

Læreplanen sier at «problemløsning hører med til den matematiske kompetansen. Det er å analysere og omforme eit problem til matematisk form, løyse det og vurdere kor gyldig det er. Dette har òg språklege aspekt, som det å resonnerer og kommunisere idear». Dette er ferdigheter som må øves gjennom matematikkundervisningen på alle trinn. I dette opplegget refererer vi til kompetansemål i R2, men det er viktig at elevene tidlig får erfaring med problemløsning. Opplegget med hundrekart gir problemstillinger som kan passe for ulike nivåer og klassetrinn.

På de neste sidene er gangen i arbeidet med en slik undersøkelsesoppgave skissert. Det er ikke laget elevark med oppgaver til dette emnet. Her skal elevene få arbeide mest mulig fritt. Pass på at det settes av tid i slutten av økta til oppsummering.

HUNDREKARTET- MØNSTER OG BEVIS

Gangen i arbeidet

Del først ut hundreark og brikker til elevene:

- 1 Be elevene om å legge brikkene slik at de danner et 2×2 -kvadrat, hvor som helst på hundrekartet. Nedenfor finner du to eksempler på plassering av brikkene.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80

Gi elevene instruksjonene nedenfor. Be dem om å skrive hvilke tall de velger, og utregningene de gjør.

Elevene skal bruke de fire tallene i rutene til et regnestykke etter et bestemt mønster:
Tallene som danner en diagonal fra øvre høyre til nedre venstre hjørne multipliseres med hverandre. Trekk så ifra produktet av tallene i den andre diagonalen.

Be elevene om å finne svaret på regnestykket i eksempelet ovenfor: $2 \cdot 11 - 1 \cdot 12 =$

Sammenlikn svarene elevene har fått. Be elevene undersøke hva som skjer når de legger stadig større kvadrater på hundrekartet. Mange kan trenge hjelp til å velge strategier som kan være nyttige for å se systemer. En slik strategi er å sette resultatene opp i en tabell:

Tallene i kvadratet		Regnestykket øvre høyre • nedre venstre – øvre venstre • nedre høyre	Regn ut
1	2	$2 \cdot 11 - 1 \cdot 12 = 22 - 12 =$	
11	12		
27	28	$28 \cdot 37 - 27 \cdot 38 = 1036 - 1026 =$	
37	38		

- 2 Etter at elevene har arbeidet en stund med dette, kan det passe å ta en plenumssamtale. Hva har de oppdaget? Ser det ut til å være noe system her?
NB! Vent med å forklare eller vise systemet generelt for alle. Det er viktig å forsikre seg om at alle har forstått hva de skal gjøre.

- 3 Be elevene fortsette undersøkelsen av liknende tilfeller. Det betyr at elevene selv må bestemme seg for hva slags lignende tilfeller de vil fortsette å undersøke. Noen vil komme til å legge stadig større kvadrater, andre vil legge rektangler. Det er også mulig å legge fire brikker i andre mønster.

Utfordring til elevene

Formuler skriftlig hva du vil fortsette å undersøke.

Formuler også dine egne gjetninger:

Tror du resultatene vil følge et bestemt mønster?

I tilfelle: Hvilket mønster? Sjekk om det stemmer.

Skriv ned det du erfarer og finner ut.

HUNDREKARTET - MØNSTER OG BEVIS

- 4 Prøv å hjelpe elevene til å finne ut mest mulig selv. Mange kan trenge hjelp til å velge strategier som kan være nyttige for å se systemer.

Størrelse på kvadratet som dannes av brikkene	Svaret på regnestykkene laget med tall etter systemet øvre høyre • nedre venstre – øvre venstre • nedre høyre
2 x 2	
3 x 3	
4 x 4	
...	
8 x 8	
...	
n x n	

- 5 Når elevene har funnet en del systemer, er det tid for å generalisere og vise hvorfor alle kvadratene med samme størrelse gir samme svar.

Anbefal dem å begynne med det enkleste - kvadratet fra pkt. 1.
Hvordan vil de bygge opp et slikt bevis?

- a Det må først presiseres hva man vil bevise. Be elevene skrive det som en *påstand* som skal bevises.
- b Et bevis skal gjelde generelt, så de må generalisere. Gi elevene et hint:
Kall tallet i en av rutene for a . Kan tallene i de andre rutene uttrykkes ved hjelp av a ?
- c Regn ut det generelle tilfellet etter de samme reglene som før. Blir systemet bekreftet?
- d Skriv til slutt en *konklusjon*, den skal relateres til påstanden.

Tilsvarende metode kan brukes til å bevise systemene som skapes dersom brikkene legges ut i andre mønster.

Forberedelse til oppsummering og oppsummering

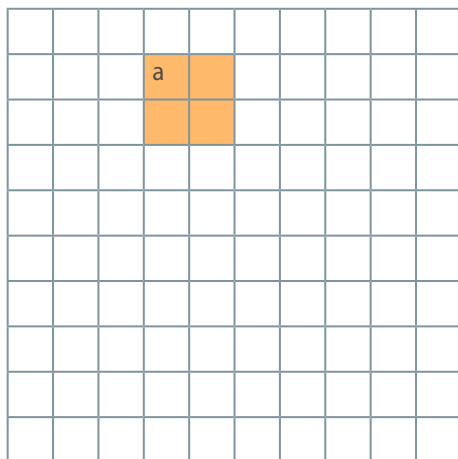
- Har elevene sett ulike systemer? Hvilke?
- Hvilke strategier har de brukt?
- Hva må til for å sette opp et bevis?

Finn i løpet av økta noen elever som kan presentere arbeidet sitt i oppsummeringen. Slik kan man få belyst flere måter å løse problemene på, elevene får øving i å vise og begrunne strategiene sine og eksemplene som trekkes fram kan brukes til en konklusjon.

Forslag til løsninger

Forklaring ved hjelp av algebra:

Hvis vi velger et kvadrat av fire ruter hvor som helst i hundrekartet, og kaller tallet i øverste venstre rute for a , hvordan kan vi da skrive tallene i de tre andre rutene ved hjelp av a ?



HUNDREKARTET - MØNSTER OG BEVIS

Lag nå et regnestykke etter samme regler som i forrige oppgave, men bare ved hjelp av de fire talluttrykkene som inneholder a . Hva blir svaret i dette regnestykket? Stemmer det med det du fant ut i forrige oppgave?

Tallene i de fire rutene kan skrives slik:

a	$a + 1$
$a + 10$	$a + 11$

Og regnestykket blir:

$$(a + 1) \cdot (a + 10) - a \cdot (a + 11) =$$

$$a^2 + a + 10a + 10 - a^2 - 11a = 10$$

Dette vil alltid gjelde i 2×2 -kvadrater i hundrekartet, fordi vi har vist det for et generelt tilfelle.

Oppgave

Elevene kan for eksempel utvide denne oppgaven ved å lage stadig større kvadrater: Legg brikkene i hjørnene av et 3×3 -kvadrat:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Vi lager regnestykke etter samme mønster:
Multipliser tallet i øvre høyre hjørne med tallet i nedre venstre hjørne og trekk fra produktet av tallene i øvre venstre hjørne og nedre høyre hjørne.
I eksempelet over blir regnestykket $3 \cdot 21 - 1 \cdot 23 =$
Hva blir svaret?
- Legg brikkene ut i samme mønster på andre steder på hundrekartet, lag regnestykker og regn ut. Hva ser du?
- Prøv å forklare hvorfor det blir slik du ser. Du kan forklare med ord eller på algebraspråket (dvs. med bokstaver).
- Hva skjer hvis vi i stedet for kvadrater legger brikkene ut i rektangelform?
- Hva blir svaret på regnestykket om vi lager et 2×3 -rektangel?
- Både de turkise og de oransje brikkene nedenfor ligger i 2×3 -mønster, men ikke på samme måte. Vi kan godt kalle formene 2×3 og 3×2 . Blir det forskjell på svarene i regnestykkene i de to tilfellene?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



HUNDREKARTET - MØNSTER OG BEVIS

Oppgave

- Kan du legge brikkene i rektangler slik at svaret på regnestykket blir 30?
Hvordan må de eventuelt legges da?
- Kan du legge brikkene slik at svaret blir 50?
Enn 60? 70? 80? 90? Forklar hva du gjør!
- Er det noen av disse oppgavene som kan løses på flere måter,
dvs. ved å legge ulike rektangler?

Generalisering

Vi tenker oss igjen at vi starter i et tilfeldig valgt tall a . Så tenker vi oss at vi legger brikkene i et tilfeldig valgt rektangel med bredde b og høyde h . Det betyr at tallet i øvre høyre rute blir $a + (b - 1)$ og i nedre venstre hjørne $a + 10(h - 1)$. Hvorfor blir det slik?

			a			$a + (b - 1)$				
			$a + 10(h - 1)$			$(a + 10(h - 1)) + (b - 1)$				

- Finn svaret på regnestykket i hundrekartet på forrige side.
- Forklar hvorfor løsningen ikke er avhengig av tallet a som vi tok utgangspunkt i.
- Sammenlikn løsningen du har fått her med det du har regnet ut tidligere. Stemmer den generelle løsningen med utregningene du har gjort i eksemplene ovenfor?
- Den generelle løsningen kan skrives som $10(b - 1)(h - 1)$.
- Forsøk å arbeide med svaret du fikk til du får det på denne formen.
- Forklar hvorfor denne løsningen sier oss at vi får samme svar om et rektangel «ligger» eller «står på høykant», bare det er like stort.

Andre muligheter for å utvide oppgaven

- I stedet for et 10×10 -ark, kan vi bruke 7×7 , 8×8 eller 9×9 osv.
- Vi kunne også ha forsket på hva som skjer om vi legger andre former enn rektangler.

ANDREGRADSFUNKSJONER I INTRODUKSJON TIL ANDREGRADSFUNKSJONER



Kompetansemål: Funksjoner

- Gjøre greie for funksjonsbegrepet og tegne grafer ved å analysere funksjonsbegrepet (1T)
- Bruke digitale hjelpemidler til å drøfte polynomfunksjoner (1T)
- Undersøke funksjoner som beskriver praktiske situasjoner (1P)

Læringsmål

- Elevene skal bli kjent med andregradsfunksjoner og grafene deres
- Elevene skal bli kjent med navn og begreper knyttet til dette emnet

Aktuelle navn og begreper

Funksjonsnavn, fri variabel, andregradsledd, førstegradsledd, konstantledd, koeffisient, toppunkt, bunnpunkt, skjæringspunkt, parabel

Arbeidsform

Dette er et introduksjonsopplegg hvor elevene blir kjent med funksjonsuttrykk, grafene til andregradsfunksjoner, viktige punkter på grafene, navn og begreper knyttet til andregradsfunksjoner. Utforskningsarbeidet gjøres med digitale hjelpemidler (GeoGebra). Elevene skal også regne ut tabellverdier, de skal plote punkter i et koordinatsystem og tegne graf for hånd.

La elevene arbeide parvis. Det er viktig å oppmuntre til samtale og diskusjon om faglig arbeid. Elevene skal skrive ned det de oppdager, både med ord og matematiske symboler.

Tidsbruk og valg av tidspunkt

En dobbelttime. Opplegget kan brukes i begynnelsen av arbeidet med andregradsfunksjoner/polynomfunksjoner.

Utstyr

PC med GeoGebra

Konvolutter med kort – læreren må gjøre disse klar på forhånd

På side 64 finner du en kopieringsoriginal med uttrykk og utsagn som hører sammen. Klipp etter de stiplede linjene og legg et sett lapper i hver konvolutt. Skriv funksjonsuttrykket $g(x) = 2x^2 - 8x + 6$ utenpå konvoluttene.





Undervisningsopplegget

- 1 Innled timen med å presentere målet for økta: at elevene skal bli kjent med andregradsfunksjoner og grafene deres, og med navn og begreper knyttet til andregradsfunksjoner.
- 2 Be elevene skrive eksempler på andregradsfunksjoner i boka si. De kan gjerne snakke sammen to og to. Elevene får 2–3 minutter på oppgaven. Deretter ber du dem presentere forslagene sine. Skriv forslagene på tavla. Du kan gjerne komme med egne eksempler. Be elevene om å skrive de presenterte eksemplene i boka si.

Be elevene skrive ned hva som er *kjennetegnet på en andregradsfunksjon* og be dem deretter diskutere formuleringene sine to og to.

Læreren må forsikre seg om at det blir tydelig at det er andregradsleddet som er kjennetegnet.

Presenter noen faguttrykk

- *Funksjon*: Et matematisk uttrykk som beskriver en sammenheng mellom to størrelser.
- *Funksjonens navn*. På ungdomsskolen ble alle funksjoner skrevet på formen $y = ax + b$. Nå trenger vi en skrivemåte som er slik at vi kan skille funksjonene fra hverandre. Det er nyttig når vi tegner flere funksjoner i samme koordinatsystem i GeoGebra. Det er viktig at elevene blir klar over at vi kan gi funksjonen navn, og at vi da kan velge selv. Det er vanlig at navnet til en funksjon bare er en bokstav.
- *Den fri variable, x*: Vi kan fritt bestemme hvilken verdi x skal ha.
- *Andregradsledd, førstegradsledd og konstantledd*: Konstantledd og førstegradsledd er det samme som i førstegradsfunksjonen (sammenlikn).
- *Koeffisienter*. Dette begrepet er det greit å ha på plass til vi senere skal snakke om a, b og c i andregradsuttrykk.

ANDREGRADSFUNKSJONER I

INTRODUKSJON TIL ANDREGRADSFUNKSJON

- 3 Velg så ut to eller tre av funksjonene som er foreslått av elevene, og be dem tegne grafene i GeoGebra. Læreren kan selvsagt også supplere med eksempler, for eksempel hvis ingen elever har foreslått andregradsledd med negativ koeffisient.

Flere faguttrykk

- Toppunkt / bunnpunkt
- Skjæringspunkt med y-aksen: Svarer til konstantleddet slik som i førstegradsfunksjonen, dvs. der $x = 0$
- Skjæringspunkt med x-aksen svarer til nullpunkter, dvs. der $y = 0$

Be elevene skrive ned hva de mener er *kjennetegn til grafen til en andregradsfunksjon*, hva som er karakteristisk uansett hvilket funksjonsuttrykk som brukes. Etterpå diskuterer og vurderer dere forslagene i samlet klasse. Innfør navnet *parabel* på denne typen grafer.

- 4 Gi elevene konvoluttene som du har gjort ferdig på forhånd. For å finne fram til uttrykkene som hører sammen, må elevene kjenne funksjonen som oppgaven bygger på (skriv funksjonen utenpå konvolutten), og de må se grafen til funksjonen (bruk GeoGebra). Uttrykkene hører sammen i tripler, en av hver farge.

Oppsummer arbeidet i fellesskap. Det er greit å få en oversikt over alle faguttrykk som hører til emnet, og at misforståelser kommer opp og blir korrigert.

- 5 Det er tid for å tegne en andregradsfunksjon på papiret:

Bruk funksjonen $g(x) = 2x^2 - 8x + 6$ som de allerede har studert.

Be elevene lage en tabell, tegne koordinatsystem, plote punkter og tegne graf. De har samme graf i GeoGebra og kan sammenlikne med den. Hvordan skal en parabel se ut der krumningen er størst? (Den skal ikke være spiss!)

x	-1	0	1	2	3	4	5	
y								

Merk: I oversikten over viktige begreper er ikke begrepene *gyldighetsområde*, *definisjonsmengde* og *verdimengde* tatt med. De bør føyes til vokabularet etter hvert. Men det kan være aktuelt å spørre allerede nå: Når grafen tegnes, hvor begynner den? Og hvor slutter den?

6 Flere øvingsoppgaver i å tegne grafer på papir.

$h(x) = x^2 - 5x + 4$	Her vil bunnpunktet komme mellom to heltall på x-aksen. Sjekk hvordan elevene løser problemet.
$s(x) = -x^2 + 2x + 3$	Har rekkefølgen av leddene noe å si?
$k(x) = 5 - 4x + x^2$	Det er en utfordring å regne tabellverdier med negativ koeffisient i andregadsleddet.

Oppsummering

Timen avsluttes med at elevene oppsummerer i to kolonner på et blankt ark. Ta en kort muntlig oppsummering av det elevene har notert.

Nye begreper	Hva betyr de?

Videre arbeid

I det videre arbeidet med andregadsfunksjoner og grafer er det naturlig å bruke både papir og blyant og graftegneprogram på PC-en (GeoGebra).

For noen elever kan regning av tabellverdier og/eller plotting inn i koordinatsystemet bli for vanskelig. La disse elevene få bruke graftegneprogrammet, men pass på at eleven klarer å skrive inn funksjonsuttrykket riktig.

Når man kommer til anvendelser der funksjonen beskriver noe konkret: Fokuser på forståelsen av sammenhengen mellom den konkrete situasjonen og forløpet av grafen.



ANDREGRADSFUNKSJONER II

Å UTFORSKE SAMMENHENGEN MELLOM FUNKSJONSUTTRYKK OG GRAF

Kompetansemål: Funksjoner

- Gjøre greie for funksjonsbegrepet og tegne grafer ved å analysere funksjonsbegrepet (1T)
- Bruke digitale hjelpemidler til å drøfte polynomfunksjoner (1T)
- Undersøke funksjoner som beskriver praktiske situasjoner (1P)

Læringsmål

- Elevene skal bli kjent med egenskapene til andregradsfunksjoner og sammenhengen mellom funksjonsuttrykk og graf når koeffisientene i polynomet varierer.

Et nytt begrep elevene skal lære er *ekstremalpunkt*. For å få topp- eller bunnpunkt markert ved hjelp av dataprogrammet GeoGebra må man bruke kommandoen «ekstremalpunkt». Se pkt. 4 på elevarkene.

Arbeidsform

Utforskningsarbeidet gjøres med digitale hjelpemidler (GeoGebra), så elevene må arbeide med (hver sin) PC. La elevene arbeide to eller tre sammen, gjerne rundt én PC. Det vil stimulere samtalen, og det blir vanskeligere å «lure seg unna» med uvedkommende gjøremål på datamaskinen. Det er viktig å oppmuntre til samtale og diskusjon om faglig arbeid. Elevene skal skrive ned det de oppdager, både med ord og matematiske symboler.

Tidsbruk og valg av tidspunkt

Opplegget vil ta en dobbeltime. Opplegget kan brukes som en fortsettelse av opplegget «Andregradsfunksjoner I – Introduksjon til andregradsfunksjoner».

Utstyr

PC med GeoGebra

Undervisningsopplegget

På de neste sidene blir oppgavene til dette undervisningsopplegget presentert med kommentarer til læreren. Oppgavene finner du som kopieringsoriginal på side 65–67. Elevene arbeider med oppgavearkene gjennom hele økta.

Selv om det forutsettes at elevene er litt kjent med GeoGebra, er det tatt med en del forklaringer på hvordan programmet skal brukes i dette opplegget. Det er viktig at læreren har prøvd ut hele opplegget på forhånd. Læreren må vite nøyaktig hva som skal gjøres i de enkelte punktene, og tenke gjennom hvilke problemer som kan oppstå, så vel tekniske som faglige.

Det er viktig at elevene samarbeider. De kan hjelpe hverandre til å forstå, og de kan diskutere løsninger og hvordan de kan formulere seg skriftlig. Det er viktig at samtlige elever skriver – og tegner – underveis i arbeidet, på en slik måte at det er enkelt å finne notatene igjen og bruke dem når de senere fortsetter å arbeide med andregradsfunksjoner.

I oppgavene der elevene skal la en og en koeffisient variere, er det viktig å se nøye etter både hva som forandres på/med grafen, og hva som ikke forandres. Det kan være lurt å stoppe arbeidet iblant, første stopp kan være etter at de fleste har skrevet ned løsninger på pkt. 2. Hør på ulike ideer og forslag til løsninger, og sørg for at alle forstår hva vi mener når vi spør om «hva som forandres, og hva som ikke forandres».

Kommentar til læreren

Innled med å presentere læringsmålet for økta. Presenter deretter den generelle formen til andregradsfunksjonen. La elevene komme med forslag til verdier for a , b og c og skriv opp funksjonsuttrykkene dere får. Det er viktig å ta dette grundig. Her står a , b og c for ukjente tall som er faste, mens x står for ukjente tall som kan variere. Det kan ta litt tid å venne seg til slike skrivemåter. Bruk navnet koeffisient på a , b og c .

Den generelle formen til en andregradsfunksjon er $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Her står a , b og c for faste tall som vi setter inn i uttrykket, koeffisienter. I denne oppgaven skal vi velge mange ulike verdier for koeffisientene a , b og c , og se hvordan de ulike verdiene påvirker formen til funksjonens graf.

ANDREGRADSFUNKSJONER II

Å UTFORSKE SAMMENHENGEN MELLOM FUNKSJONSUTTRYKK OG GRAF

1 Forberedelse i GeoGebra:

For å kunne variere verdien av a , b og c på en enkel måte må man først legge inn *glidere*. Velg *Glider* i nedtrekksmeny nr. 2 fra høyre. Når du så klikker i tegneflata, får du opp et vindu som lar deg velge navn på glider, intervall, animasjonstrinn med mer. Legg inn tre glidere, a , b og c .

Du kan nå klikke på pilen øverst til venstre («flyttepilen»). Når du så peker på punktet på tallinja til a , kan du dra punktet fram og tilbake på linja og samtidig variere verdien til a . Tilsvarende for linjene til b og c . (Du kan forandre egenskapene til ei slik glidelinje ved å peke på den, høyreklikke og velge «egenskaper».)

2 Begynn med å skrive inn i inntastingsfeltet $f(x) = a * x^2 + b * x + c$ etterfulgt av «enter». Da tegnes det en graf i koordinatsystemet.

(Merk: Du må enten ha stjerne (multiplikasjon) eller mellomrom mellom x og en annen bokstav når du skriver i GeoGebra. («Opphøyd i andre» skrives $\text{Alt}+2$.)

Sørg så for at $a = 1$, $b = 1$ og $c = 1$, ved å flytte på gliderne på tallinjene. I algebravinduet står det nå $f(x) = 1x^2 + 1x + 1$.

Velg «flyttepilen» og la verdien til c variere ved å skyve på punktet på glideren.

Oppgave

Hva skjer med grafen når verdien til c varierer mens verdiene til a og b holdes fast? Hva forandres? Og hva forandres ikke? Skriv ned det du observerer.

Kontroll

La a og b få andre verdier, og hold dem fast mens du lar verdien til c variere. Stemmer det du noterte, i alle tilfellene? Noter hva som eventuelt stemmer eller ikke stemmer.

Kommentar til læreren

Det er viktig at elevene formulerer svarene sine skriftlig. Her kan det være naturlig å stanse og høre hva elevene har skrevet. Du kan spørre elevene: «Hvorfor skrev du det slik?» Det er viktig at du stiller spørsmål både til elever som har tenkt riktig, og til elever som har misforstått. Pass på at alle forstår hva som er ment i kontrolloppgaven.

- 3 Ta på nytt utgangspunkt i grafen til $f(x) = 1x^2 + 1x + 1$. Denne gangen skal verdiene til b og c være fast, mens du lar verdien til a variere ved å bruke glideren.

Oppgave

Hva skjer med grafen når verdien til a varierer mens verdiene til b og c holdes fast? Hva forandres? Og hva forandres ikke? Skriv ned det du observerer.

Kontroll

La b og c få andre verdier, og hold dem fast mens du lar verdien til a variere. Stemmer det du noterte, i alle tilfellene? Noter hva som eventuelt stemmer eller ikke stemmer.

Kommentar til læreren

Det er tid for en ny oppsummering i plenum. Hva har de skrevet? Hvorfor? Stemmer reglene og systemet når de kontrollerer med andre verdier av b og c?

- 4 Ta enda en gang utgangspunkt i grafen til $f(x) = 1x^2 + 1x + 1$. Denne gangen skal verdiene til a og c være fast, mens du lar verdien til b variere ved å bruke glideren.

Oppgave

Hva skjer med grafen når verdien til b varierer mens verdiene til a og c holdes fast? Hva forandres? Og hva forandres ikke? Skriv ned det du observerer.

Vi kan bruke sporing til hjelp for å beskrive det som skjer med grafen når vi lar verdien til b variere: I kommandofeltet nederst til høyre finner du «Ekstremalpunkt». Klikk på det. Da står det i inntastingsfeltet «Ekstremalpunkt []». Inne i klammeparentesen skriver vi funksjonens navn: [f]. Det betyr at vi ber programmet markere ekstremalpunkt (= topp- eller bunnpunkt) på grafen til funksjonen f.

Så peker vi på bunnpunktet på grafen, høyreklikker og velger «Slå på sporing». Nå kan du på nytt la b variere på glideren. Sporingen kan gjøre det lettere å beskrive hva som skjer med grafen når verdien til b varierer.

Kontroll

La a og c få andre verdier, og hold dem fast mens du lar verdien til b variere. Stemmer det du noterte, i alle tilfellene? Noter hva som eventuelt stemmer eller ikke stemmer.



ANDREGRADSFUNKSJONER II

Å UTFORSKE SAMMENHENGEN MELLOM FUNKSJONSUTTRYKK OG GRAF

Kommentar til læreren

Pass på at alle får til å sette på sporing. Når elevene bruker sporing, blir det for mange enklere å beskrive hva som skjer med grafen når verdien til b varierer. Har du elever som trenger en ekstra utfordring? Be dem finne funksjonsuttrykket til grafen som tegnes ved sporingen. Så kan de bruke dette til å beskrive hva som skjer når b varierer.

La elevene arbeide i eget tempo. Bruk tid til å lytte til og snakke med elevene, oppmuntre dem til å samtale og diskutere seg imellom. Pass på at de kontrollerer alle løsningene sine ved å tegne i GeoGebra. Det finnes ingen annen fasit til disse oppgavene.

Forberedelse til oppsummering

På hvilke måter har elevene løst oppgavene? Har de brukt ulike strategier? Snakk med elevene og hør hvordan de tenkte da de løste oppgavene. Det bør bli tid til å diskutere i plenum løsningene på oppsummeringsoppgavene, i alle fall på noen av dem.

Om elevene ikke blir ferdige med alle oppgavene, kan resten være lekse til neste gang. Så kan en oppsummering av løsningene være en repetisjon av det som elevene arbeidet med i dette opplegget.

Hvis du ser at noen elever har gjort noe du gjerne vil at de andre elevene skal få innblikk i, så kan du avtale med dem på forhånd at de skal komme til tavla under oppsummeringen. Det er et viktig grep, spesielt dersom elevene ikke er vant til å presentere løsningene sine på tavla. Det kan føles tryggere for elevene når de på forhånd vet at de skal komme til tavla, og når de vet hva læreren ønsker at de skal presentere. Ved å avtale med noen elever på forhånd sikrer du at ulike metoder og strategier blir vist under oppsummeringen.

5 Oppsummeringsoppgaver:

Du har gjennom dette arbeidet notert ned mange viktige ting om hvordan grafen forandrer seg når du varierer koeffisientene i en andregradsfunksjon. Bruk dette til å besvare følgende oppgaver:

- a** Tegn parabelen til funksjonen. $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$ Hva kan du gjøre med funksjonsuttrykket for at grafen skal få et toppunkt i stedet for et bunnpunkt? Skriv opp funksjonsuttrykket du foreslår. Kontroller ved å tegne i GeoGebra.
- b** Tegn grafen til $h(x) = x^2 - 2x + 4$. Hva må du gjøre med funksjonsuttrykket for at grafen skal beholde formen, men skjære y-aksen i $y = -1$? Skriv det nye funksjonsuttrykket. Kontroller ved å tegne i GeoGebra.
- c** Hvordan vil en andregradsfunksjon til en graf som går gjennom origo, se ut? Skriv først et svar, og kontroller ved å tegne.
- d** Tegn grafen til $j(x) = x^2 - 4x + 4$. Hvor mange nullpunkter (= punkter på x-aksen) har grafen? Hva kan du gjøre med funksjonsuttrykket for at grafen skal få to nullpunkter? Og hva kan du gjøre for at grafen ikke skal få nullpunkter i det hele tatt? Skriv forslag til funksjonsuttrykk som oppfyller disse to kravene, og kontroller ved å tegne i GeoGebra.
- e** Tegn grafen $k(x) = 2x^2 + 2x$. Hva kan du gjøre med funksjonsuttrykket for at grafen skal bli smalere / brattere? Skriv uttrykket. Kontroller ved å tegne.
- f** Tegn $t(x) = x^2 - 2x + 3$. Hva kan du gjøre med funksjonsuttrykket for at denne grafen skal bli mer åpen / mindre bratt? Skriv en forklaring, og kontroller ved å tegne.
- g** Tegn $u(x) = 2x^2 - 5x + 4$. Hva kan du gjøre med funksjonsuttrykket for at grafen skal flyttes lenger til venstre? Skriv en forklaring, og kontroller ved å tegne.



ANDREGRADSFUNKSJONER III

AREAL OG OMKRETS AV REKTANGLER

Kompetansemål: Funksjoner

- Gjøre greie for funksjonsbegrepet og tegne grafer ved å analysere funksjonsbegrepet (1T)
- Bruke digitale hjelpemidler til å drøfte polynomfunksjoner (1T)
- Undersøke funksjoner som beskriver praktiske situasjoner (1P)
- Gjøre målinger i praktiske forsøk, formulere en enkel matematisk modell på grunnlag av de observerte data, bruke teknologiske verktøy i utforskning og modellbygging og vurdere modellen og dens gyldighet (2P)

Læringsmål

- Å anvende kunnskapene fra de foregående oppleggene om andregradsfunksjoner
- Å få en forståelse av hva som menes med kurvetilpasning

Arbeidsform

La elevene arbeide parvis. Det er viktig å oppmuntre til samtale og diskusjon om faglig arbeid. Elevene skal skrive ned det de oppdager, både med ord og matematiske symboler.

Tidsbruk og valg av tidspunkt

Opplegget vil ta en dobbelttime.

Utstyr

Kvadratiske brikker (kan bestilles hos www.lar-lek.se)

PC med GeoGebra (eller liknende programvare)

Undervisningsopplegget

På de neste sidene blir oppgavene til dette undervisningsopplegget presentert med kommentarer til læreren. Kopieringsoriginal med oppgavene finner du på side 68.

Opplegget går ut på at elevene lager ulike rektangler, alle med omkrets 24 enheter. En enhet er sidelengden til én brikke. Målet er å komme fram til en funksjon som beskriver arealet av rektangelet som en funksjon av rektangelets lengde. Elevene legger rektangler med de kvadratiske brikkene, eventuelt kan de tegne rektangler på ruteark.

Observasjonene samles i en tabell, der rektangelets lengde er x-verdien og arealet er y-verdien. Elevene kan løse oppgaven med papir og blyant, eller de kan bruke GeoGebra. Hvis de skal få nytte av det de lærte i opplegget «Andregradsfunksjoner – Å utforske sammenhengen mellom funksjonsuttrykk og graf», bør de bruke GeoGebra (eller liknende).

Avslutt med en oppsummering i plenum. Det er viktig at elevene utvikler en god forståelse av begrepene toppunkt og gyldighetsområde. Legg også vekt på gode beskrivelser av hva grafen forteller om rektanglene.

Differensiering

Oppgaven kan utfordre elever på ulike nivåer ved at ikke alle trenger å komme like langt i utforskningen. For noen elever kan det være stor nok utfordring å komme fram til alle punktene, plote dem inn i et koordinatsystem, tegne en glatt, fin graf og se at den har parabelform. Andre kan komme mye lenger i oppgaven.

Uansett er det viktig at samtlige elever er med på samtalen om sammenhengen med grafens form og arealet av de ulike rektanglene. Elever på alle nivåer bør få se at en graf kan fortelle noe om en konkret ting – og det er viktig at de ser hva grafen forteller i dette tilfellet.



ANDREGRADSFUNKSJONER III

AREAL OG OMKRETS AV REKTANGLER

Oppgave

- 1 Lag flere ulike rektangler som alle skal ha omkrets 24 enheter. Bruk kvadratiske brikker, la sidekanten i en brikke ha lengden 1 enhet. Skisser de ulike rektanglene du lager, og sett mål på sidene.
- 2 Lag en tabell med to rader, der lengden av rektanglene skrives i den ene raden (x-verdi) og arealet i den andre raden (y-verdi).

A 2D coordinate system with x and y axes. The x-axis is labeled 'x' and 'lengde' (length). The y-axis is labeled 'y' and 'areal' (area). The grid is divided into 10 columns and 10 rows. The first column is light blue, and the rest are light green. The first row is light blue, and the rest are light green.

Kommentar til læreren

Hvis dette er vanskelig for noen av elevene, kan du gi et hint ved å bruke et eksempel.

- ### 3 Vi skal bruke regresjon i GeoGebra:

Først må tabellverdiene legges inn i regnearket. Velg «Vis» og «Regneark». Skriv x-verdiene fra tabellen ovenfor i den første kolonnen i regnearket og y-verdiene i den andre kolonnen. Marker så alle verdiene, høyreklikk og velg «Lag liste med punkter». I algebra-vinduet kommer så listen opp, den heter «liste 1». Samtidig tegnes alle punktene inn i koordinatsystemet. Det neste du skal gjøre er å skrive «RegPoly[list1,2]» i inntastingsfeltet. Da får du det polynomet som passer best til punktene i liste1. 2-tallet viser at du ber om et andregradspolynom. Polynomet kommer nå opp i algebra-vinduet som en funksjon samtidig som grafen tegnes sammen med punktene.

Kommentar til læreren

Her må du som lærer vurdere om det er hensiktsmessig å bruke GeoGebra eller papir og blyant. Med papir og blyant er det lettere å få tegnet en graf, men vi mister muligheten til å få et funksjonsuttrykk. Hvis elevene ikke har mulighet til å klare overgangen fra å ha en rekke punkter til å tegne en graf, er det kanskje bedre å bare få tegnet grafen på papir. Merk: Elevene skal utforske og diskutere, og til slutt skal løsningene skrives. Det er en viktig øving i å uttrykke seg skriftlig i matematikk.

4 Finn et funksjonsuttrykk som passer godt til punktene.

Kommentar til læreren

Elevene må bruke regresjon. For å velge riktig type funksjon må elevene gjenkjenne grafens form som parabel. De må vite at den hører sammen med en andregradsfunksjon. La de flinke elevene få sjansen til å finne ut mest mulig på egen hånd.

5 Hva forteller grafen om de ulike arealene vi kan lage av rektangler med omkrets 24 enheter?

6 Hva er funksjonens gyldighetsområde, dvs. hvilke verdier kan den fri variable, her lengden l , ha?

Kommentar til læreren

Spør elevene hva den minste og største mulige verdien til lengden av rektangelet kan være. Gir det noen mening å bruke x -verdier utenfor disse størrelsene, for eksempel $l = 20$? Lengden l av rektangelet kan ikke være mindre enn 0 og ikke større enn 12, så gyldighetsområdet er intervallet $<0,12>$ eller $0 < x < 12$.

Forberedelse til oppsummering og oppsummering

På hvilke måter har elevene løst oppgavene? Har de brukt ulike strategier? Snakk med elevene og hør hvordan de tenkte da de løste oppgavene. Fokuser på å lytte, spørre, diskutere, honorere gode løsninger, oppklare misforståelser og konkludere.

Det er viktig at elevene utvikler en god forståelse av begrepene toppunkt og gyldighetsområde. Legg også vekt på gode beskrivelser av hva grafen forteller om rektanglene.

Hvis du ser at noen elever har gjort noe du gjerne vil at de andre elevene skal få innblikk i, så kan du avtale med dem på forhånd at de skal komme til tavla under oppsummeringen. Det er et viktig grep, spesielt dersom elevene ikke er vant til å presentere løsningene sine på tavla. Det kan føles tryggere for elevene når de på forhånd vet at de skal komme til tavla, og når de vet hva læreren ønsker at de skal presentere. Ved å avtale med noen elever på forhånd sikrer du at ulike metoder og strategier blir vist under oppsummeringen.



ANDREGRADSFUNKSJONER IV

NULLPUNKTER TIL ANDREGRADSFUNKSJONER

Kompetansemål: Funksjoner

- Gjøre greie for funksjonsbegrepet og tegne grafer ved å analysere funksjonsbegrepet (1T)
- Beregne nullpunkt (1T)
- Bruke digitale hjelpemidler til å drøfte polynomfunksjoner (1T)

Læringsmål

- Å se sammenhengen mellom en andregradsfunksjon og dens nullpunkter

Arbeidsform

La elevene arbeide parvis. De må både skrive, tegne og bruke PC-en. Det er viktig å oppmuntre til samtale og diskusjon om faglig arbeid. Elevene skal skrive ned det de oppdager, både med ord og matematiske symboler.

Tidsbruk og valg av tidspunkt

Opplegget vil ta en dobbelttime.

Utstyr

PC med GeoGebra (eller liknende programvare)

Undervisningsopplegget

Det er svært viktig med samtale og refleksjon. På de neste to sidene gis det tips til arbeidets gang i løpet av økta. Kopieringsoriginaler med oppgavene finner du på side 69. Ved behov for mer øving, så har lærebøkene flere gode øvingsoppgaver i dette emnet.

Målet med opplegget er å gi elevene erfaringer med å se sammenhenger mellom andregradsfunksjoner og nullpunktene deres. Innled timen med å gjøre målet klart for elevene.

1 $f(x) = (x + 2)(x + 3)$

- a Er funksjonen f en andregradsfunksjon? Forklar.
- b Hva mener vi når vi snakker om nullpunktene til en funksjon?
- c Finn nullpunktene til funksjonen f .
- d Er det en sammenheng mellom nullpunktene og funksjonsuttrykket? Forklar.

Kommentar til læreren

Det kan passe å ta en runde i plenum etter oppgave 1. Spør elevene hvordan de har løst oppgavene. Be dem begrunne svarene sine. Pass på at de skriver ned svarene sine i boka. De vil finne nullpunktene $x = -2$ og $x = -3$. Be dem regne ut $f(-2)$ og $f(-3)$. Det er ikke alle som ser at disse to uttrykkene må bli lik 0:

Det at $x = -2$ gjør uttrykket $(x + 2) = 0$, og dermed funksjonsuttrykket lik 0, er en kunnskap som mange trenger gjentatte erfaringer med. At et produkt blir lik 0 når en faktor er lik 0, er noe mange forstår, men å se at vi utnytter denne egenskapen her, kan elevene trenge mange ganger.

2 $g(x) = (x + 1)(x + 4)$

- a Finn nullpunktene til funksjonen g . Gjett først og skriv det du gjetter. Tegn grafen og sjekk svaret ditt.
- b Lag flere eksempler på funksjoner selv. Gjett først hvilke nullpunkter funksjonene dine har, før du tegner grafen og sjekker.

3 $h(x) = (x - 1)(x + 5)$

Finn nullpunktene til funksjonen h . Gjett først. Tegn grafen og sjekk svaret ditt.

4 Funksjonen k har nullpunkter i $x = -2$ og $x = 3$.

Skriv et funksjonsuttrykk som passer. Tegn grafen og kontroller.

5 $p(x) = x^2 - 5x + 4$

Finn nullpunktene til funksjonen p . Gjett først. Tegn grafen og sjekk svaret ditt.

6 Lag oppgaver til hverandre, gjett først og kontroller om svarene stemmer.

Du kan lage oppgaver etter denne «oppskriften»:

Sett inn tall for p , q , r og s i uttrykket nedenfor og multipliser parentesene før du gir oppgaven til en medelev: $f(x) = (px + q)(rx + s)$

For eksempel $f(x) = (x + 3)(2x - 1)$. Her er $p = 1$, $q = 3$, $r = 2$ og $s = -1$.

Da kjenner du nullpunktene (her $x = -3$ og $x = \frac{1}{2}$).



ANDREGRADSFUNKSJONER IV

NULLPUNKTER TIL ANDREGRADSFUNKSJONER

Kommentar til læreren

Sjekk at elevene forstår hva oppgavene her egentlig spør om. Organiser oppgave 6 slik at den passer godt til dine elever.

Forberedelse til oppsummering og oppsummering

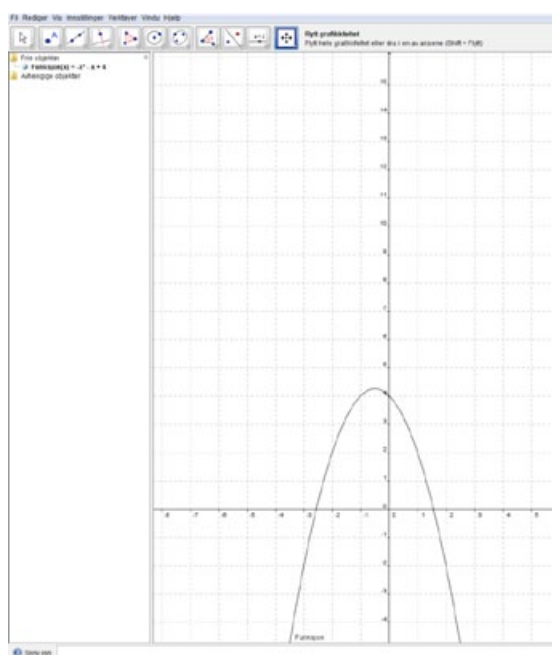
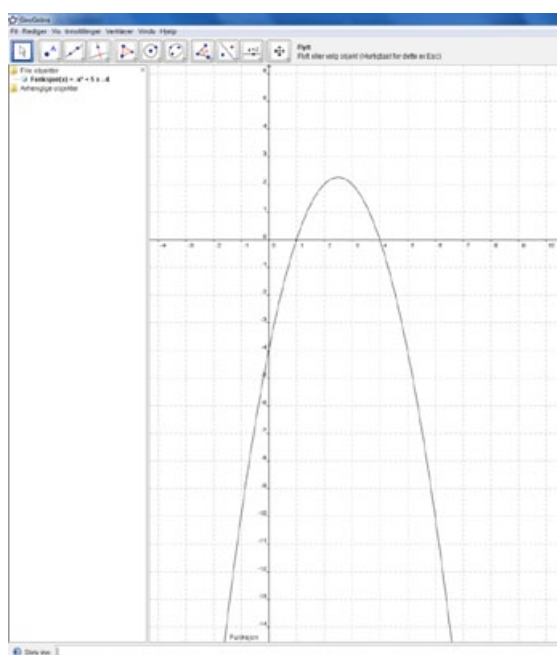
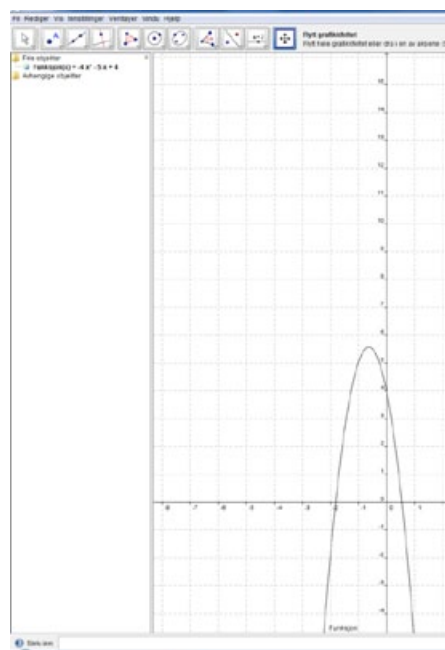
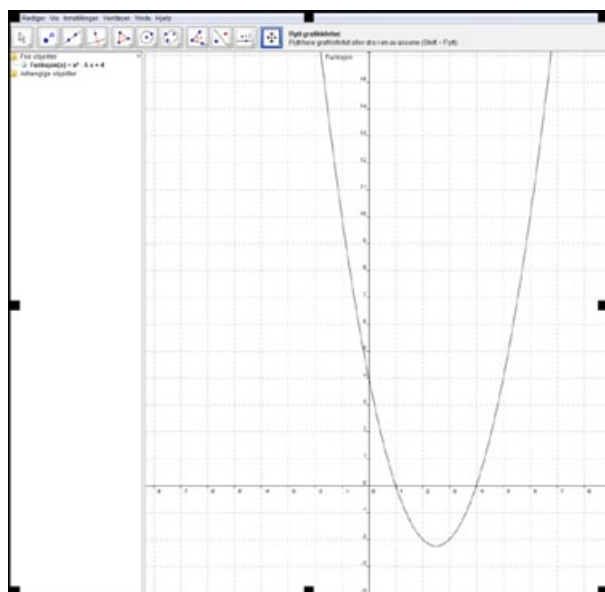
På hvilke måter har elevene løst oppgavene? Har de gjort det på forskjellige måter? Har de brukt ulike strategier? Snakk med elevene og hør hvordan de tenkte da de løste oppgavene.

Kommentar til læreren

Hva er sammenhengen mellom andregradsfunksjonene og nullpunktene til grafene? La elevene presentere sine løsninger, tanker og formuleringer.

Hvis du ser at noen elever har gjort noe du gjerne vil at de andre elevene skal få innblikk i, så kan du avtale med dem på forhånd at de skal komme til tavla under oppsummeringen. Det er et viktig grep, spesielt dersom elevene ikke er vant til å presentere løsningene sine på tavla. Det kan føles tryggere for elevene når de på forhånd vet at de skal komme på tavla, og når de vet hva læreren ønsker at de skal presentere. Ved å avtale med noen elever på forhånd sikrer du at ulike metoder og strategier blir vist under oppsummeringen.

GEOGEBRA FUNKSJONER



ANDREGRADSFUNKSJONER V

NULLPUNKTER OG FAKTORISERING

Kompetansemål: Funksjoner

- Gjøre greie for funksjonsbegrepet og tegne grafer ved å analysere funksjonsbegrepet (1T)
- Beregne nullpunkt (1T)
- Bruke digitale hjelpemidler til å drøfte polynomfunksjoner (1T)

Læringsmål

- Å se sammenhengen mellom et andregradsuttrykk på formen og på faktorisert form ved å finne nullpunktene til andregradsuttrykket

Arbeidsform

La elevene arbeide parvis. De må både skrive, tegne og bruke PC-en. Det er viktig å oppmuntre til samtale og diskusjon om faglig arbeid. Elevene skal skrive ned det de oppdager, både med ord og matematiske symboler.

Tidsbruk og valg av tidspunkt

Opplegget vil ta en dobbelttime.

Utstyr

PC med GeoGebra (eller liknende programvare)

Undervisningsopplegget

På de neste sidene blir oppgavene til dette undervisningsopplegget presentert med kommentarer til læreren. Kopieringsoriginal til oppgavearkene finner du på side 70–72. Lærebøkene har i tillegg flere gode øvingsoppgaver til dette emnet.

Elevene skal arbeide i par. Det er viktig at du som lærer oppmuntrer til samtale og diskusjon mellom elevene. Det er også viktig at elevene skriver ned alle løsninger. I tabellene står fasitsvarene skrevet med rødt.

1 Tegn grafene til følgende to funksjoner i GeoGebra:

$$f(x) = x^2 - 7x + 10 \quad g(x) = (x - 2)(x - 5)$$

- Hva ser du? Hvorfor blir det slik?
- Hva er nullpunktene til de to funksjonene?
Hva er sammenhengen mellom funksjonene f og g ? Forklar hva du ser!
- Vi sier at funksjonen g er skrevet på faktorisert form. Hvorfor?

Kommentar til læreren

Snakk om hva *faktorisert form* betyr.

Det vil sikkert være store variasjoner i hvor lett elevene «tar» dette stoffet. Læreren må vurdere hvor ofte det passer med et skifte mellom elevarbeid/pararbeid og plenumssamtale. Prøv å få fram alt elevene har funnet ut på egen hånd, og bygg videre på det. Prøv så langt det er mulig, å lede dem gjennom et undersøkelsesarbeid hvor de oppdager sammenhenger på egen hånd. Bruk samtidig plenumssamtalene til å avklare misforståelser og feil.

2 I det følgende skal vi studere denne sammenhengen nærmere:

Funksjon på faktorisert form	Nullpunkter	Funksjon på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$
$h(x) = (x + 1)(x + 4)$	$x = -1$ $x = -4$	$h(x) = x^2 + 5x + 4$
$i(x) = (x - 3)(x + 2)$	$x = 3$ $x = -2$	$i(x) = x^2 - x - 6$
$k(x) = (x - 1)(x - 5)$	$x = 1$ $x = 5$	$k(x) = x^2 - 6x + 5$
$f(x) = (x + s)(x + t)$	$x = -s$ $x = -t$	$f(x) = x^2 + (s + t)x + (s \cdot t)$

Hva er sammenhengen mellom tallene s og t inne i parentesene og koeffisientene a , b og c ?

$$a = 1 \qquad b = s + t \qquad c = s \cdot t$$

ANDREGRADSFUNKSJONER V

NULLPUNKTER OG FAKTORISERING

- 3** Mange ganger kan vi trenge å faktorisere andregradsuttrykk. Det er en måte å finne nullpunkter på. Det er også nyttig når vi har brøker eller brøkfunksjoner som inneholder andregradsuttrykk.

Faktoriser andregradsuttrykkene nedenfor ved hjelp av det du lærte i oppgave 2:

Funksjon på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$	Funksjon på faktorisert form	Nullpunkter
$g(x) = x^2 + 5x + 6$	$g(x) = (x + 2)(x + 3)$	$x = -2$ $x = -3$
$h(x) = x^2 + x - 20$	$h(x) = (x - 4)(x + 5)$	$x = 4$ $x = -5$
$i(x) = x^2 - 10x + 24$	$i(x) = (x - 4)(x - 6)$	$x = 4$ $x = 6$
Lag flere oppgaver til hverandre:		$x =$
Multipliser to parenteser med hverandre for å lage et andregradsuttrykk der bare du kjenner nullpunktene. La en annen elev løse oppgaven.		$x =$

- 4** Tegn grafene til funksjonene f og g nedenfor og sammenlikn nullpunktene:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \quad g(x) = 2x^2 - 4x - 6$$

- a** Hva ser du? Hvorfor blir det slik? Skriv.
- b** Vi må vite hvordan vi skal faktorisere et andregradsuttrykk der a ikke er lik 1. Bruk uttrykket for g (x) ovenfor, og sett 2 utenfor parentes:

$$g(x) = 2(\dots\dots\dots)$$

Sammenlikn med uttrykket for f (x). Hva ser du? Forklar.

5 Faktoriser

$$h(x) = 3x^2 + 3x - 60 = 3(\dots\dots\dots) = 3(\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots)$$

$$k(x) = 7x^2 + 35x + 42 = 7(\dots\dots\dots) = 7(\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots)$$

$$m(x) = -2x^2 + 20x - 48 = -2(\dots\dots\dots) = -2(\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots)$$

6 Regelen kan skrives slik:

Hvis $x = p$ og $x = q$ er nullpunktene til en andregradsfunksjon, $f(x) = ax^2 + bx + c$ kan f faktoriseres slik: $f(x) = a(x - p)(x - q)$

Lag to eksempler som viser at regelen stemmer.

Forberedelse til oppsummering og oppsummering

På hvilke måter har elevene løst oppgavene? Har de brukt ulike strategier?

Snakk med elevene og hør hvordan de tenkte da de løste oppgavene.

Kommentar til læreren

Hva har elevene lært? Hva er sammenhengen mellom nullpunktene til en andregradsfunksjon og andregradsfunksjonen på faktorisert form? La elevene presentere sine løsninger, tanker og formuleringer.

Hvis du ser at noen elever har gjort noe du gjerne vil at de andre elevene skal få innblikk i, så kan du avtale med dem på forhånd at de skal komme til tavla under oppsummeringen. Det er et viktig grep, spesielt dersom elevene ikke er vant til å presentere løsningene sine på tavla. Det kan føles tryggere for elevene når de på forhånd vet at de skal komme på tavla, og når de vet hva læreren ønsker at de skal presentere. Ved å avtale med noen elever på forhånd sikrer du at ulike metoder og strategier blir vist under oppsummeringen.



INTRODUKSJON TIL TRIGONOMETRI



Av Ingvill Merete Stedøy-Johansen

Kompetansemål: Geometri

- Gjere greie for definisjonane av sinus, cosinus og tangens og bruke trigonometri til å berekne lengder, vinklar og areal i vilkårlege trekantar (1T)

Læringsmål

Elevene skal kunne:

- forklare hvordan forhold mellom sider i formlike trekantar kan brukes til å definere sinus, cosinus og tangens i rettvinklede trekantar
- bruke sinus, cosinus og tangens til å beregne sider i rettvinklede trekantar
- anvende trigonometri til å finne store høyder når vi kan måle vinkler og avstander på bakken

Nye begreper

Trigonometri, sinus, cosinus, tangens

Arbeidsform

Elevene sitter i grupper på fire rundt et bord. To og to skal arbeide sammen, men de fire har på denne måten mulighet til å diskutere og dele ideer med hverandre underveis. Opplegget starter inne med undersøkende aktiviteter. Deretter går alle ut for å gjøre målinger og samle inn data. Elevene går inn igjen for å gjøre beregninger. Klassen trekker konklusjoner og setter ord på hva de har lært, under ledelse av læreren.

Læreren har en viktig oppgave som igangsetter, «los» og inspirator under hele økta, i tillegg til at han eller hun skal sørge for at de nye begrepene blir innført på en faglig forsvarlig måte.

Tidsbruk og valg av tidspunkt

Det vil ta 90 minutter å gjennomføre dette undervisningsopplegget. Opplegget kan for så vidt gjennomføres når som helst i skoleåret. Det bygger på elevenes kunnskaper fra ungdomstrinnet. Det er naturlig å ta det etter at elevene har gjennomført noen oppgaver og aktiviteter med trekantberegning med bruk av formlikhet og Pytagoras læresetning.





Elevene skal gå fra det kjente (formlike trekanter) til det ukjente (sinus, cosinus og tangens), slik at det blir naturlig for dem å innføre de nye begrepene. De skal raskt få se hva dette kan brukes til i praksis ved å gjøre egne observasjoner, målinger og beregninger. Denne introduksjonen skal gjøre dem i stand til å arbeide videre med trekantberegning. De skal være med å utlede arealsetningen, cosinussetningen og sinussetningen i de kommende timene. På dette nivået anbefales det å bruke nabovinkler for en logisk utvidelse av sinus og cosinus til vinkler mellom 90 og 180 grader.

Utstyr

Geobrett til alle elevparene, geobrett for overhead, strikk, linjal, gradskive, målbånd (10–20 meter er fint), klinometer (kan også lages i papp), lommeregner med trigonometriske funksjoner. Geobrett og klinometer kan bestilles hos www.simplicatus.no eller www.lar-lek.se.

Undervisningsopplegget

Læreren kan på forhånd ha tegnet en trekant på tavla som forklarer hvordan klinometeret virker. Møbler rommet og legg geobrett og strikk på pultene på forhånd for å spare tid. Læreren må også ha tenkt ut to høye ting i skolens nærområde som elevene skal bestemme høyden til. Vi brukte to av skolens bygg.

Læreren bør tenke gjennom hvordan hun eller han skal sette i gang elevene. En fin regel er å si minst mulig, men nok til at elevene kommer i gang. Når de er i gang med ulike utforskinger, går læreren rundt og svarer på spørsmål og kommer med innspill som får elevene videre.

Introduksjon (5 min)

Legg et geobrett på overhead. Legg en vinkel med toppunkt i nederste venstre hjørne. Spør om noen kan lage en rettvinklet trekant der denne vinkelen er med. La en elev komme opp og gjøre det.

Utforsking (15 min)

Oppgave til eleven:

- Lag din egen vinkel med toppunkt i nederste venstre pinne (ikke maken til lærerens).
- Lag ulike rettvinklede trekanter der denne vinkelen er med i trekanten.



INTRODUKSJON TIL TRIGONOMETRI

Kommentar til læreren

Gå rundt og se hva elevene gjør. Noen vil bare lage trekanter med den rette vinkelen rett til høyre for den første vinkelen (langs grunnlinja). Noen vil helt sikkert også lage den rette vinkelen over grunnlinja. Når elevene har laget fire eller fem trekanter, samles dere ved geobrettet på overhead. Få elevene til å lage trekanter.

Spørsmål til elevene: Hva er felles for alle disse trekantene?

Svar: De er formlike.

Spørsmål til elevene: Hva vet dere om formlike trekanter?

Svar: Forholdet mellom to sider i én trekant er lik forholdet mellom to tilsvarende sider i en annen trekant. Introduser begrepene motstående og hosliggende katet.

Innføring av nye matematiske begreper (10 min)

La elevene måle forholdet mellom

- a** Motstående katet og hypotenusen i alle trekantene sine. Snakk litt om gjeldende siffer.
- b** Hosliggende katet og hypotenusen i alle trekantene.
- c** Motstående katet og hosliggende katet i alle trekantene.

Når dere sammen har konstatert at disse forholdene er konstante, er det lekende lett og naturlig å introdusere forholdene i a , b og c som henholdsvis sinus, cosinus og tangens til vinkelen elevene begynte med.

Læreren viser på tavla hvordan vi kan bruke dette til å beregne ukjente sider i en rettvinklet trekant når vi kjenner en vinkel og en side.

Anvendelser, datainnsamling (30 min)

Elevene introduseres for klinometeret. Læreren demonstrerer hvordan det kan brukes til å måle siktevinkel. Elevene tar med målebånd, klinometer, kladdebok og blyant ut.

Gruppene foretar vinkelmålinger og avstandsmålinger ute. Hvert par skal finne siktevinkelen til toppen av to høye ting i tre ulike avstander, for eksempel 5 m, 10 m og 15 m. De skal også notere hvor høyt de vil anslå de ulike tingene de måler, til å være.

Bearbeiding av data, presentasjon av resultater (20 min)

Etter at målingene er foretatt, går alle inn igjen. Elevene bruker sine egne data til å regne ut høydene. Be dem tegne figur. Tegn inn en rettvinklet trekant som kan brukes til å beregne høydene. Diskuter enten samlet eller ved bordene om de skal bruke sinus, cosinus eller tangens. Hvordan skal de kompensere for høyden over bakken hvor de måler vinkelen fra? (Noen elever vil sikkert legge seg ned for å unngå å måtte legge til egen øynehøyde.)

Be elevene sammenlikne de beregnede verdiene med verdiene de gjettet. Hvorfor ble det riktig/feil?

Felles oppsummering og diskusjon

La elevene først få si hva de har lært. Pass på å få med de presise definisjonene av sinus, cosinus og tangens. Utdre dem gjerne til å finne eksempler på situasjoner der trigonometri vil være nyttig for å kunne foreta beregninger.

Nå er det på sin plass å fortelle elevene at de må PUGGE definisjonene av sinus, cosinus og tangens, og at de må lære hva som menes med motstående og hosliggende katet til en vinkel i en rettvinklet trekant.

Avslutt timen med å si at dere skal arbeide videre med trigonometri og se hvordan det også kan brukes til å beregne sider, vinkler og areal i trekanter som ikke er rettvinklet.

Oppgaver til videre arbeid finnes på kopieringsoriginal side 73.

PYTAGORAS' SETNING

Kompetansemål: Geometri

- Bruke geometri i planet til å analysere og løse sammensatte teoretiske og praktiske problemer knyttet til lengder, vinkler og areal (1T)
- Bruke formlikhet og Pytagoras' setning til beregninger og i praktisk arbeid (1P)
- Løse praktiske problemer som gjelder lengder, vinkler, arealer og volum (1P)

Læringsmål

- Å forstå et visuelt bevis for Pytagoras' setning
- Å kunne gjennomføre et bevis
- Å kunne beregne lengder i rettvinklede trekanter ved hjelp av Pytagoras' setning

Arbeidsform

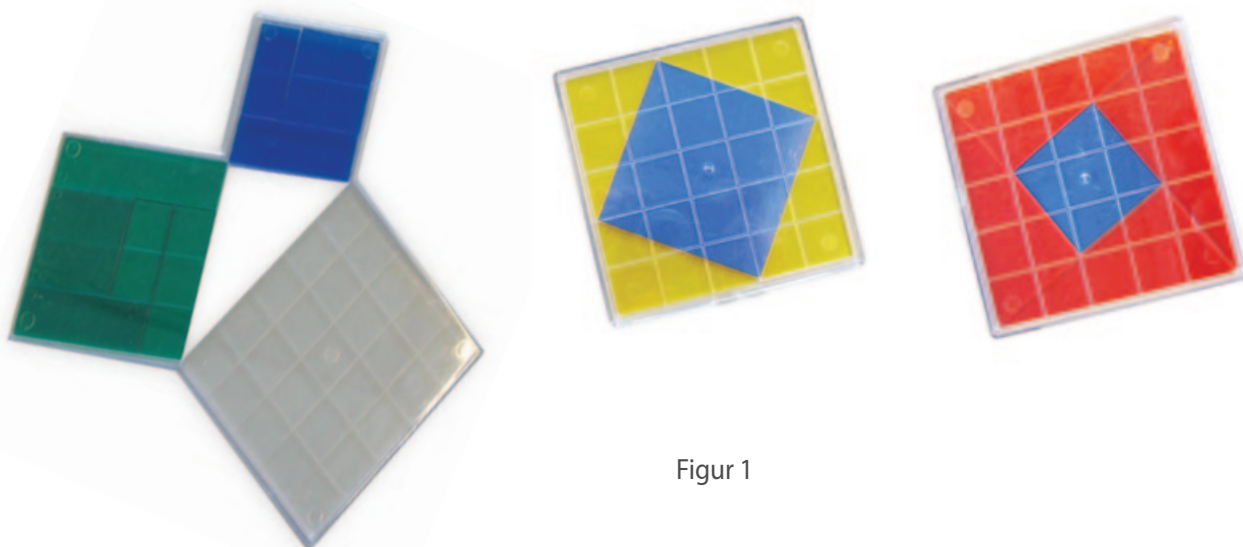
La elevene arbeide parvis. Det er viktig å oppmuntre til samtale og diskusjon om faglig arbeid. Elevene skal skrive ned det de oppdager, både med ord og matematiske symboler.

Tidsbruk og valg av tidspunkt

En dobbelttime. Introduksjon til Pytagoras.

Utstyr

Sett som inneholder tre gjennomsiktige plastesker med fargede brikker. Disse kan bestilles fra nettsiden til ETA Cuisenaire: www.eta-cuisenaire.com. Der søker du på «Pythagorean Theorem Model». Kvadrater i farget papir (se detaljert forklaring i beskrivelsen av opplegget).



Figur 1

Forberedelser

I dette opplegget skal vi bruke esken i midten på figur 1. Til hvert sett: Klipp ut et kvadrat i rødt papir som passer nøyaktig inn i esken. Legg det inn i bunnen av esken. Legg så tilbake de fire gule trekantene og det blå pappkvadratet som ligger i midten. Hvis det ikke ligger noe blått kvadrat i midten (kvadrat på hypotenusen), må slike også klippes ut og legges inn.

Undervisningsopplegget

På de neste sidene blir oppgavene til dette undervisningsopplegget presentert med kommentarer til læreren. Kopieringsoriginaler med oppgaver finner du på side 74-80. Opplegget inneholder et visuelt «bevis» for Pytagoras' setning. Det er mangelfullt som bevis, men likevel ganske overbevisende. Grunnen til at dette ikke er noe fullgodt bevis, er at vi påstår at vi får kvadrater, uten å vise hvorfor det virkelig er slik.

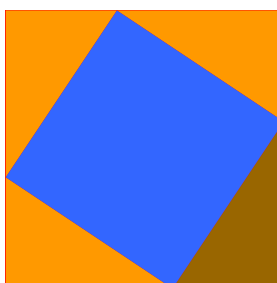
Opplegget er helt «algebrafritt» i pkt. 1–5. Målet er at elevene skal se hvordan de kan løse oppgaver med Pytagoras' setning uten å bruke algebra og løse likninger. Det er nok å ha en figur til hjelp. For en del elever er det et rimelig læringsmål. Det er viktig at også elever som behersker algebra godt, får med seg denne måten å tilnærme seg Pytagoras' setning på.

I pkt. 6 innføres bokstaver som navn på sidene, og vi ender med den kjente formelen for Pytagoras' setning: $a^2 + b^2 = c^2$.

Introduksjon av undervisningsopplegget

Be elevene skrive opp alt de husker om rettvinklede trekanter og Pytagoras' setning. Ta det opp i fellesskap, hør hva elevene allerede kan, og bruk anledningen til å supplere og korrigere eventuelle misforståelser.

- 1 Begynn med esken der brikkene ligger, slik:



Kommentar til læreren

Det ligger et blått pappkvadrat inne i eskene. Hvis dette mangler, bør det legges et slikt kvadrat inn i eskene.

PYTAGORAS' SETNING

- a** Hvorfor kaller vi de fire trekantene for rettvinklede trekanter?

Skriv med egne ord.

- b** Den blå firkanten i midten er et kvadrat, vi kaller den kvadratet på hypotenusen. Hvorfor?

Skriv og forklar.

... (De resterende oppgavene finner du i kopieringsoriginalene.)

- f** Hva kan vi si om arealet av det store blå kvadratet i forhold til arealene av de to røde kvadratene?

Regelen du har funnet, kalles Pytagoras' setning. Skriv regelen i ruta nedenfor.

Kommentar til læreren

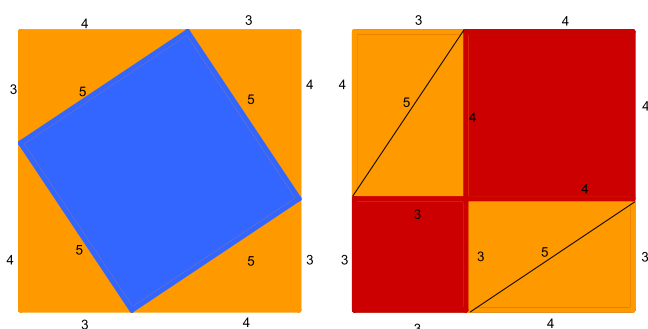
La elevene arbeide seg gjennom pkt. a, hvor de skal prøve å formulere skriftlige svar i alle rutene. Læreren kan benytte anledningen til å se hvordan enkeltelever arbeider, og det er mulighet til å ha små samtaler med dem.

Når elevene er ferdig med dette punktet, bør læreren stoppe opp og samtale med elevene i plenum. Hva har de skrevet? Hvorfor har de skrevet det slik? Det er mange måter å uttrykke seg på, og alle utsagn som er riktige, må verdsettes. Mange elever fanger opp gode tips og ideer fra andres forklaringer. Det er like viktig å kunne være god til å lytte som å være god til å forklare. Samtidig er dette en anledning for læreren til å fange opp og avklare misforståelser.

Hensikten med opplegget er at elevene skal forstå hva Pytagoras' setning egentlig sier om rettvinklede trekantar og kvadratene på sidene. Det er fint om de formulerer setningen i pkt. f med ord, for eksempel «Arealet av det blå kvadratet er like stort som arealene av de røde kvadratene til sammen» eller «Arealet av kvadratet på hypotenusen er like stort som arealet av kvadratene på katetene til sammen».

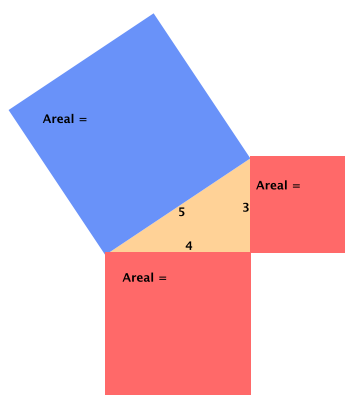
2 Eksempel:

Vi tenker oss at alle de rettvinklede trekantene har en katet som har lengde 3, en katet som har lengde 4, og hypotenus med lengde 5.



PYTAGORAS' SETNING

- a Hvor stort er arealet av det blå kvadratet i dette tilfellet?
 b Hvor store er arealene av de to røde kvadratene?
 c Stemmer regelen til Pytagoras i dette tilfellet? Skriv og forklar.



Kommentar til læreren

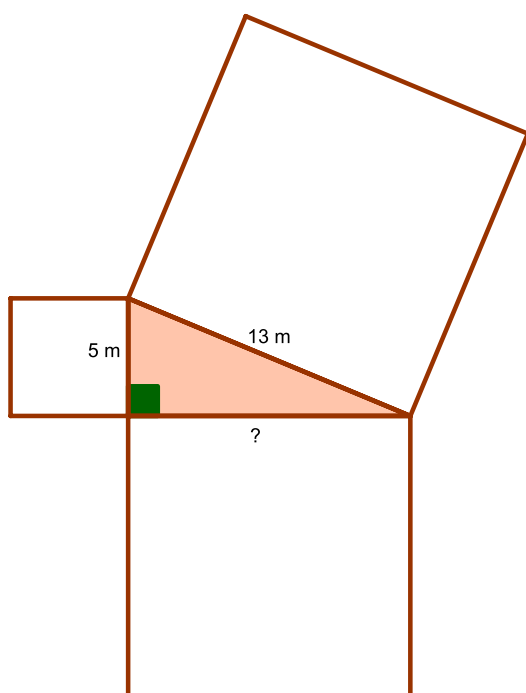
Stans etter pkt. 2 og hør hva elevene har kommet fram til her. Diskusjon/samtale.
 Har elevene forstått sammenhengen mellom de to figurene?

Noen elever bør kanskje stanse etter pkt. 5 og fortsette å løse Pytagoras-problemer med den metoden de har lært. I pkt 6. tar vi i bruk algebra og symboler, og elever som er modne for det må selvsagt bruke algebra. Men med dette opplegget ønsker vi at elevene skal få en bedre forståelse av hva som ligger bak Pytagoras' setning, slik at de ikke bare bruker en regel helt mekanisk.

Når du samtaler om løsninger med elever, så spør «Hvorfor gjør du slik?» eller «Hva har du gjort her?» for å få tak i hva eleven har tenkt. Slike spørsmål bør man også stille til elever som ser ut til å løse alle oppgavene uten problemer.

Sørg for å avslutte økta og oppsummere begrepene og læringsmålene.

- 5 Hypotenusen i en rettvinklet trekant er 13 m lang, og den korteste kateten er 5 m.
Hvor lang er den andre kateten?



Kommentar til læreren

Noen elever bør kanskje stanse etter pkt. 5 og fortsette å løse Pytagoras-problemer med den metoden de har lært.

Oppgavene til pkt. 6 finner du på kopieringsoriginal side 80. I pkt. 6 tar vi i bruk algebra og symboler, og elever som er modne for det, må selvsagt bruke algebra. Med dette opplegget ønsker vi at elevene skal få en bedre forståelse av hva som ligger bak Pytagoras' setning, slik at de ikke bare bruker en regel helt mekanisk.

Sørg for å avslutte økta og oppsummere begrepene og læringsmålene.



Innholdsliste kopieringsoriginaler

1	Innføring i uoppstilte likninger	61
2	Uoppstilte likningssett	62
3	Hundrekartet – mønster og bevis	63
4	Andregradsfunksjoner I: Introduksjon til andregradsfunksjoner	64
5	Andregradsfunksjoner II: Å utforske sammenhengen mellom funksjonsuttrykk og graf	65
6	Andregradsfunksjoner III: Areal og omkrets av rektangler	68
7	Andregradsfunksjoner IV: Nullpunkter til andregradsfunksjoner	69
8	Andregradsfunksjoner V: Nullpunkter og faktorisering	70
9	Introduksjon til trigonometri	73
10	Pytagoras' setning	74

INNFØRING I UOPPSTILTE LIKNINGER

1 Du skal bruke 10 brikker til å lage 3 kolonner slik at

- den røde kolonnen inneholder 3 flere enn den blå kolonnen
- den grønne kolonnen inneholder 1 flere enn den blå kolonnen

La brikkene/kolonnene ligge til oppgave 5.

2 Løs oppgaven ved hjelp av likninger.

3 Bruk 10 brikker til å lage 3 kolonner slik at

- den blå kolonnen inneholder 3 færre enn den røde kolonnen
- den grønne kolonnen inneholder 2 færre enn den røde kolonnen

La brikkene/kolonnene ligge til oppgave 5.

4 Løs oppgaven ved hjelp av likninger.

5 Sammenlikn kolonnene og likningsuttrykkene fra oppgave 1 og oppgave 3.
Forklar hva du ser og hvorfor.

6 Bruk 13 brikker til å lage 3 kolonner slik at

- den røde kolonnen inneholder 2 flere enn den blå kolonnen
- den grønne kolonnen inneholder 3 færre enn den røde kolonnen

7 Løs oppgaven ved hjelp av likninger.

8 Bruk 12 brikker til å lage 3 kolonner slik at

- den røde kolonnen inneholder 2 flere enn den blå kolonnen
- den grønne kolonnen inneholder 3 færre enn den røde kolonnen

9 Lag minst to liknende oppgaver selv.

Ekstraoppgave – problemløsning

Bruk 20 brikker til å lage fire kolonner slik at

- den fjerde kolonnen inneholder like mange brikker som den andre og den tredje kolonnen til sammen
- den første kolonnen inneholder $2\frac{1}{2}$ ganger så mange brikker som det er i den tredje kolonnen

UOPPSTILTE LIKNINGSSETT

Oppgave 1

Skruer og muttere

Utstyr: Hver gruppe får utdelt et sett med skruer og muttere.

Eksempel:

2 skruer og 1 mutter er skrudd sammen



2 skruer og 2 muttere er skrudd sammen



Hvor mye veier en skrue? Hvor mye veier en mutter?

Det er ikke lov til å skru dem løs fra hverandre.

Oppgave 2

Griser og høns

Utstyr: Hver gruppe får utdelt 40 fyrstikker og 24 brikker.

På gården til Truls er det griser og høns. Ifølge Truls, har disse dyrene til sammen 40 ben og 24 øyne.

- 1 Finn ut hvor mange griser og hvor mange høns Truls har på gården sin, både ved hjelp av fyrstikker og brikker, og ved hjelp av likninger.
- 2 Anta deretter at et ukjent antall stålormer sniker seg inn på gården. Det totale antall øyne og ben er det samme som før. Hvor mange griser, hvor mange høns og hvor mange stålormer har Truls på gården sin nå?

HUNDREKARTET – MØNSTER OG BEVIS

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

ANDREGRADSFUNKSJONER I

INTRODUKSJON TIL ANDREGRADSFUNKSJONER

g	<i>funksjonens navn</i>	vi bestemmer hva funksjonen skal hete
x	<i>den fri variable</i>	vi kan velge fritt hvilken verdi denne bokstaven skal stå for
$2x^2$	<i>andregadsleddet</i>	inneholder den fri variable i andre grad
$-8x$	<i>førstegadsleddet</i>	inneholder den fri variable i første grad
6	<i>konstantleddet</i>	inneholder ingen fri variabel
2, -8 og 6	<i>koeffisienter</i>	navnet på tallene som står sammen med de fri variable
(2, -2)	<i>bunnpunkt</i>	punktet der grafen skifter retning fra synkende til stigende
y = 6	<i>x = 0</i>	der grafen skjærer y-aksen
x = 1 og x = 3	<i>nullpunkter</i>	der grafen skjærer x-aksen

ANDREGRADSFUNKSJONER II

Å UTFORSKE SAMMENHENGEN MELLOM FUNKSJONSUTTRYKK OG GRAF

Den generelle formen til en andreggradsfunksjon er $f(x) = ax^2 + bx + c$. Her står a , b og c for faste tall som vi setter inn i uttrykket, koeffisienter. I denne oppgaven skal vi velge mange ulike verdier for koeffisientene a , b og c , og se hvordan de ulike verdiene påvirker formen til funksjonens graf.

1 Forberedelse på GeoGebra:

For å kunne variere verdien av a , b og c på en enkel måte må man først legge inn *glidere*. Velg Glider i nedtrekksmeny nr. 2 fra høyre. Når du så klikker i tegneflata, får du opp et vindu som lar deg velge navn på glider, intervall, animasjonstrinn med mer. Legg inn tre glidere, a , b og c .

Høyreklikk på likheten $a = 1$ og velg «Vis objekt». Gjør det samme med de to andre likhetene. Da har du fått tre tallinjer i tegneflata med et pkt. (glider), en for hver av bokstavene a , b og c .

Du kan nå klikke på pilen øverst til venstre («flyttepilen»). Når du deretter peker på punktet på tallinja til a , kan du dra punktet fram og tilbake på linja og samtidig variere verdien til a . Tilsvarende for linjene til b og c . (Du kan forandre egenskapene til ei slik glidelinje ved å peke på den, høyreklikke og velge «egenskaper».)

2 Begynn med å skrive inn i inntastingsfeltet $f(x) = a * x^2 + b * x + c$ etterfulgt av «enter». Da tegnes det en graf i koordinatsystemet.

Merk: Du må enten ha stjerne (multiplikasjon) eller mellomrom mellom x og en annen bokstav når du skriver i GeoGebra. («Opphøyd i andre» skrives $\text{Alt}+2$.)

Sørg så for at $a = 1$, $b = 1$ og $c = 1$, ved å flytte på gliderne på tallinjene. I algebravinduet står det nå $f(x) = 1x^2 + 1x + 1$.

Velg «flyttepilen» og la verdien til c variere ved å skyve på punktet på glideren.

Oppgave

Hva skjer med grafen når verdien til c varierer mens verdiene til a og b holdes fast? Hva forandres? Og hva forandres ikke? Skriv ned det du observerer.

Kontroll

La a og b få andre verdier, og hold dem fast mens du lar verdien til c variere. Stemmer det du noterte, i alle tilfellene? Noter hva som eventuelt stemmer eller ikke stemmer.

ANDREGRADSFUNKSJONER II

Å UTFORSKE SAMMENHENGEN MELLOM FUNKSJONSUTTRYKK OG GRAF

- 3 Ta på nytt utgangspunkt i grafen til $f(x) = 1x^2 + 1x + 1$.

Denne gangen skal verdiene til b og c være fast, mens du lar verdien til a variere ved å bruke glideren.

Oppgave

Hva skjer med grafen når verdien til a varierer mens verdiene til b og c holdes fast? Hva forandres? Og hva forandres ikke? Skriv ned det du observerer.

Kontroll

La b og c få andre verdier, og hold dem fast mens du lar verdien til a variere. Stemmer det du noterte, i alle tilfellene? Noter hva som eventuelt stemmer eller ikke stemmer.

- 4 Ta enda en gang utgangspunkt i grafen til $f(x) = 1x^2 + 1x + 1$.

Denne gangen skal verdiene til a og c være fast, mens du lar verdien til b variere ved å bruke glideren.

Oppgave

Hva skjer med grafen når verdien til b varierer mens verdiene til a og c holdes fast? Hva forandres? Og hva forandres ikke? Skriv ned det du observerer.

Vi kan bruke sporing til hjelp for å beskrive det som skjer med grafen når vi lar verdien til b variere: I kommandofeltet nederst til høyre finner du «Ekstremalpunkt». Velg det ved å klikke på det. Da står det i inntastingsfeltet «Ekstremalpunkt []». Inne i klammaparentesen skriver vi funksjonens navn: [f]. Det betyr at vi ber programmet markere ekstremalpunkt (= topp- eller bunnpunkt) på grafen til funksjonen f.

Så peker vi på bunnpunktet på grafen, høyreklikker og velger «Slå på sporing». Nå kan du på nytt la b variere på glideren. Sporingen kan gjøre det lettere å beskrive hva som skjer med grafen når verdien til b varierer.

Kontroll

La a og c få andre verdier, og hold dem fast mens du lar verdien til b variere. Stemmer det du noterte, i alle tilfellene? Noter hva som eventuelt stemmer eller ikke stemmer.

ANDREGRADSFUNKSJONER II

Å UTFORSKE SAMMENHENGEN MELLOM FUNKSJONSUTTRYKK OG GRAF

5 Oppsummeringsoppgaver:

Du har gjennom dette arbeidet notert ned mange viktige ting om hvordan grafen forandrer seg når du varierer koeffisientene i en andregradsfunksjon. Bruk dette til å besvare følgende oppgaver:

- a** Tegn parabelen til funksjonen $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$. Hva kan du gjøre med funksjonsuttrykket for at grafen skal få et toppunkt i stedet for et bunnpunkt? Skriv opp funksjonsuttrykket du foreslår. Kontroller ved å tegne i GeoGebra.
- b** Tegn grafen til $h(x) = x^2 - 2x + 4$. Hva må du gjøre med funksjonsuttrykket for at grafen skal beholde formen, men skjære y-aksen i $y = -1$? Skriv det nye funksjonsuttrykket. Kontroller ved å tegne i GeoGebra.
- c** Hvordan vil en andregradsfunksjon til en graf som går gjennom origo, se ut? Skriv først et svar, og kontroller ved å tegne.
- d** Tegn grafen til $j(x) = x^2 - 4x + 4$.
Hvor mange nullpunkter (= punkter på x-aksen) har grafen?
Hva kan du gjøre med funksjonsuttrykket for at grafen skal få to nullpunkter?
Og hva kan du gjøre for at grafen ikke skal få nullpunkter i det hele tatt?
Skriv forslag til funksjonsuttrykk som oppfyller disse to kravene, og kontroller ved å tegne i GeoGebra.
- e** Tegn grafen $k(x) = 2x^2 + 2x$. Hva kan du gjøre med funksjonsuttrykket for at grafen skal bli smalere / brattere? Skriv uttrykket. Kontroller ved å tegne.
- f** Tegn $t(x) = x^2 - 2x + 3$. Hva kan du gjøre med funksjonsuttrykket for at denne grafen skal bli mer åpen / mindre bratt? Skriv en forklaring, og kontroller ved å tegne.
- g** Tegn $u(x) = 2x^2 - 5x + 4$. Hva kan du gjøre med funksjonsuttrykket for at grafen skal flyttes lenger til venstre? Skriv en forklaring, og kontroller ved å tegne.

ANDREGRADSFUNKSJONER III

AREAL OG OMKRETS AV REKTANGLER

- 1 Lag flere ulike rektangler som alle skal ha omkrets 24 enheter. Bruk kvadratiske brikker, la sidekanten i en brikke ha lengden 1 enhet.
- 2 Lag en tabell med to rader, der lengden av rektanglene skrives i den ene raden (x-verdi) og arealet i den andre raden (y-verdi).

x lengde															
y areal															

- 3 Vi skal bruke regresjon i GeoGebra:
Først må tabellverdiene legges inn i regnearket. Velg «Vis» og «Regneark». Skriv x-verdiene fra tabellen ovenfor i den første kolonnen i regnearket og y-verdiene i den andre kolonnen. Marker så alle verdiene, høyreklikk og velg «Lag liste med punkter». I algebravinduet kommer så listen opp, den heter «liste 1». Samtidig tegnes alle punktene inn i koordinatsystemet. Det neste du skal gjøre er å skrive «RegPoly[list1,2]» i inntastingsfeltet. Da får du det polynomet som passer best til punktene i liste 1. 2-tallet viser at du ber om et andregradspolynom. Polynomet kommer nå opp i algebravinduet som en funksjon samtidig som grafen tegnes sammen med punktene.
- 4 Finn et funksjonsuttrykk som passer godt til punktene.
- 5 Hva forteller grafen om de ulike arealene vi kan lage av rektangler med omkrets 24 enheter?
- 6 Hva er funksjonens gyldighetsområde, dvs. hvilke verdier kan den fri variable, her lengden l , ha?

ANDREGRADSFUNKSJONER IV

NULLPUNKTER TIL ANDREGRADSFUNKSJONER

- 1 $f(x) = (x + 2)(x + 3)$
 - a Er funksjonen f en andregadsfunksjon? Forklar.
 - b Hva mener vi når vi snakker om nullpunktene til en funksjon?
 - c Finn nullpunktene til funksjonen f .
 - d Er det en sammenheng mellom nullpunktene og funksjonsuttrykket? Forklar.
- 2 $g(x) = (x + 1)(x + 4)$
 - a Finn nullpunktene til funksjonen g . Gjøtt først og skriv det du gjetter.
Tegn grafen og sjekk svaret ditt.
 - b Lag flere eksempler på funksjoner selv. Gjøtt først hvilke nullpunkter funksjonene dine har, før du tegner grafen og sjekker.
- 3 $h(x) = (x - 1)(x + 5)$
Finn nullpunktene til funksjonen h . Gjøtt først. Tegn grafen og sjekk svaret ditt.
- 4 Funksjonen k har nullpunkter i $x = -2$ og $x = 3$. Skriv opp et funksjonsuttrykk som passer. Tegn grafen og kontroller.
- 5 $p(x) = x^2 - 5x + 4$
Finn nullpunktene til funksjonen p . Gjøtt først. Tegn grafen og sjekk svaret ditt.
- 6 Lag oppgaver til hverandre, gjøtt først og kontroller om svarene stemmer.
Du kan lage oppgaver etter denne «oppskriften»:
Sett inn tall for p , q , r og s i uttrykket nedenfor og multipliser parentesene før du gir oppgaven til en medelev:

$$f(x) = (px + q)(rx + s)$$

For eksempel $f(x) = (x + 3)(2x - 1)$. Her er $p = 1$, $q = 3$, $r = 2$ og $s = -1$.

Da kjenner du nullpunktene (her $x = -3$ og $x = \frac{1}{2}$).

ANDREGRADSFUNKSJONER V

NULLPUNKTER OG FAKTORISERING

Arbeid i par og diskuter løsningene.
Alle må skrive ned løsninger.

1 Tegn grafene til følgende to funksjoner i GeoGebra:

$$f(x) = x^2 - 7x + 10 \quad g(x) = (x - 2)(x - 5)$$

- a** Hva ser du? Hvorfor blir det slik?
- b** Hva er nullpunktene til de to funksjonene?
Hva er sammenhengen mellom funksjonene f og g ? Forklar hva du ser!
- c** Vi sier at funksjonen g er skrevet på faktorisert form. Hvorfor?

2 I det følgende skal vi studere denne sammenhengen nærmere:

Funksjon på faktorisert form	Nullpunkter	Funksjon på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$
$h(x) = (x + 1)(x + 4)$	$x =$ $x =$	$h(x) =$
$i(x) = (x - 3)(x + 2)$	$x =$ $x =$	$i(x) =$
$k(x) = (x - 1)(x - 5)$	$x =$ $x =$	$k(x) =$
$f(x) = (x + s)(x + t)$	$x =$ $x =$	$f(x) =$

Hva er sammenhengen mellom tallene s og t inne i parentesene og koeffisientene a , b og c ?

$a =$

$b =$

$c =$

ANDREGRADSFUNKSJONER V

NULLPUNKTER OG FAKTORISERING

- 3** Mange ganger kan vi trenge å faktorisere andregadsuttrykk. Det er en måte å finne nullpunkter på. Det er også nyttig når vi har brøker eller brøkfunksjoner som inneholder andregadsuttrykk.

Faktoriser andregadsuttrykkene nedenfor ved hjelp av det du lærte i oppgave 2:

Funksjon på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$	Funksjon på faktorisert form	Nullpunkter
$g(x) = x^2 + 5x + 6$	$g(x) =$	$x =$ $x =$
$h(x) = x^2 + x - 20$	$h(x) =$	$x =$ $x =$
$i(x) = x^2 - 10x + 24$	$i(x) =$	$x =$ $x =$
Lag flere oppgaver til hverandre: Multipliser to parenteser med hverandre for å lage et andregadsuttrykk der bare du kjenner nullpunktene. La en annen elev løse oppgaven.		$x =$ $x =$

ANDREGRADSFUNKSJONER V

NULLPUNKTER OG FAKTORISERING

4 Tegn grafene til funksjonene f og g nedenfor og sammenlikn nullpunktene:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \quad g(x) = 2x^2 - 4x - 6$$

a Hva ser du? Hvorfor blir det slik? Skriv.

b Vi må vite hvordan vi skal faktorisere et andregadsuttrykk der a ikke er lik 1.
Bruk uttrykket for g (x) ovenfor, og sett 2 utenfor parentes:

$$g(x) = 2(\dots\dots\dots)$$

Sammenlikn med uttrykket for f (x). Hva ser du? Forklar.

5 Faktoreris

$$h(x) = 3x^2 + 3x - 60 = 3(\dots\dots\dots) = 3(\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots)$$

$$k(x) = 7x^2 + 35x + 42 = 7(\dots\dots\dots) = 7(\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots)$$

$$m(x) = -2x^2 + 20x - 48 = -2(\dots\dots\dots) = -2(\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots)$$

6 Regelen kan skrives slik:

Hvis $x = p$ og $x = q$ er nullpunktene til en andregadsfunksjon $f(x) = ax^2 + bx + c$,
kan f faktorerises slik: $f(x) = a(x - p)(x - q)$

Lag to eksempler som viser at regelen stemmer.

INTRODUKSJON TIL TRIGONOMETRI

- 1 Du står 50 meter unna en bygning. Når du sikter mot toppen av bygningen, er siktevinkelen 20 grader. Hvor høy er bygningen? Husk å ta hensyn til din egen høyde.
- 2 Du står ved havet. Like i nærheten er det et fjell som er 600 meter høyt. Når du sikter mot toppen, er siktevinkelen 17 grader. Hvor langt er det i luftlinje fra der du står og til toppen av fjellet?
- 3 Lag minst 3 oppgaver fra praktiske situasjoner, der du kan bruke sinus, cosinus eller tangens til å løse oppgavene. Lag løsningsforslag.

Etter introduksjon av helningsvinkel

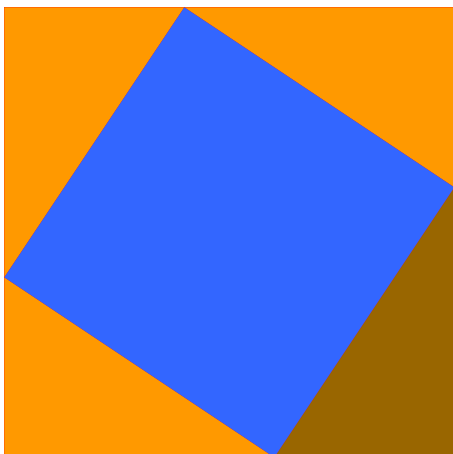
(Tan til helningsvinkelen er vertikal høydeforskjell delt på horisontal avstand fra ett punkt i bakken til et annet, dvs det samme som stigningstallet til ei linje langs bakkeprofilen.)



- 4 Du skal sykle opp en bakke. I bunnen av bakken står det et skilt som viser at helningen på bakken er 15 %. Bakken er 3 km lang. Hvor mye høyere over havet er du når du har syklet til toppen?
- 5 En trapp har helningsvinkel på 30 grader. Gulvet i andre etasje er 4 meter over gulvet i første etasje. Hvor lang er trappa? Hvor mye lenger inn er det øverste trinnet i forhold til det nederste trinnet?

PYTAGORAS' SETNING - ARK 1

1 Begynn med esken der brikkene ligger, slik:

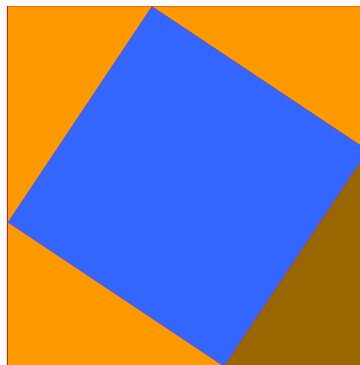
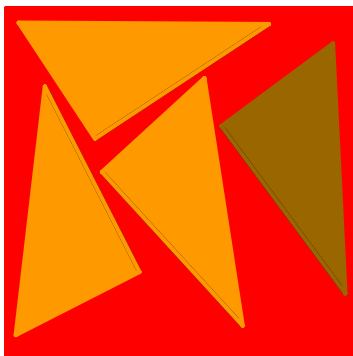


- a Hvorfor kaller vi de fire trekantene for rettvinklede trekanter?
Skriv med egne ord.

- b Den blå firkanten i midten er et kvadrat, vi kaller den kvadratet på hypotenusen.
Hvorfor? Skriv og forklar

PYTAGORAS' SETNING - ARK 2

- c Ta bort det blå kvadratet og fordel de gule trekantene helt tilfeldig på kvadratet slik som på figuren til venstre nedenfor:

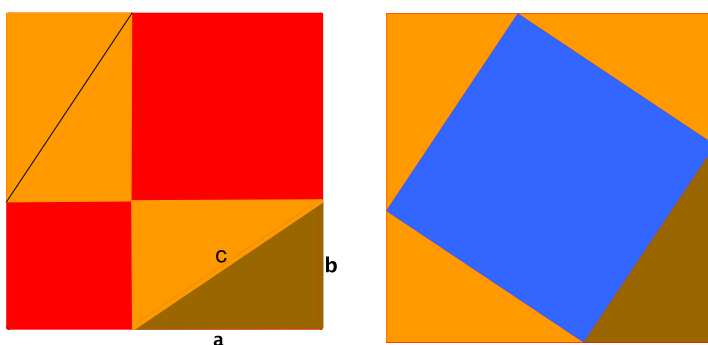


Sammenlikn arealet av det blå kvadratet på figuren til høyre med det røde arealet på figuren til venstre. Hva kan du si om de to arealene? Skriv og forklar.

- d Legg de gule brikkene utover den røde bunnen på forskjellige måter. Vil det forandre størrelsen på det røde arealet? Skriv og forklar.

PYTAGORAS' SETNING - ARK 3

- e Legg de gule trekantene som vist på figuren under til venstre. Forklar hvorfor vi kan kalle de røde kvadratene for kvadrater på katetene. Skriv.



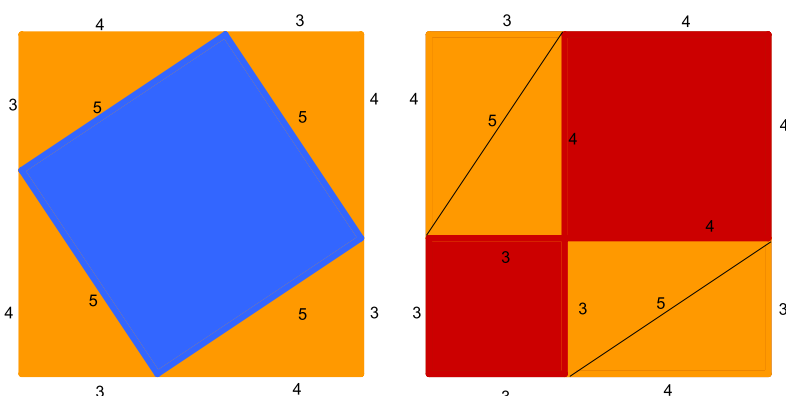
- f Hva kan vi si om arealet av det store blå kvadratet i forhold til arealene av de to røde kvadratene?

Forholdet mellom disse arealene gir oss en sammenheng eller en regel som gjelder for alle rettvinklede trekanter. Den kalles Pytagoras' setning. Skriv regelen i ruta nedenfor.

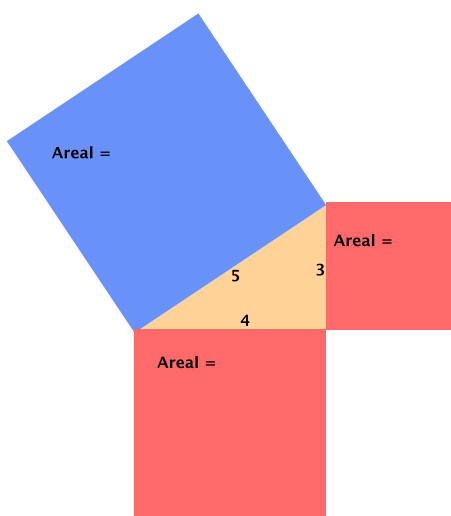
PYTAGORAS' SETNING - ARK 4

2 Eksempel:

Vi tenker oss at alle de rettvinklede trekantene har en katet som har lengde 3, en katet som har lengde 4, og hypotenus med lengde 5.

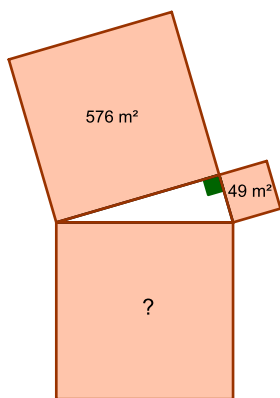


- Hvor stort er arealet av det blå kvadratet i dette tilfellet?
- Hvor store er arealene av de to røde kvadratene?
- Stemmer regelen til Pytagoras i dette tilfellet? Skriv og forklar.



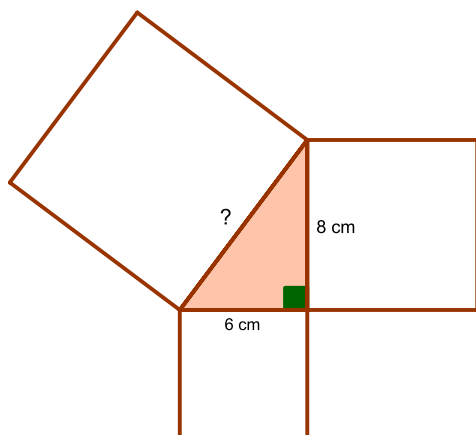
PYTAGORAS' SETNING - ARK 5

- 3 Figuren fra ark 4 kan hjelpe oss når vi skal regne ut ukjente sider i en rettvinklet trekant:
Vi har fått oppgitt arealene til kvadratene på de to katetene i en rettvinklet trekant slik figuren under viser:



- a Hvor stort er arealet av kvadratet på hypotenusen?
b Finn lengden av alle tre sidene i trekanten.

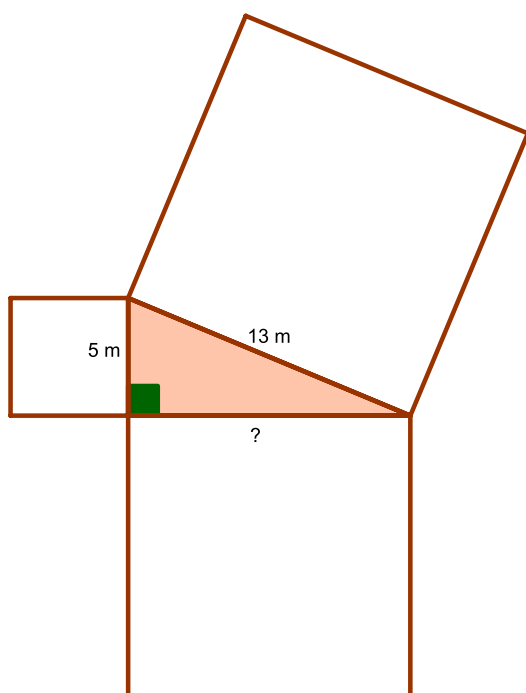
- 4 I en rettvinklet trekant er den ene kateten 8 cm lang og den andre kateten 6 cm.



- a Hvor store er arealene av kvadratene på de to katetene?
b Hvor stort blir arealet til kvadratet på hypotenusen?
c Hvor lang er hypotenusen?

PYTAGORAS' SETNING - ARK 6

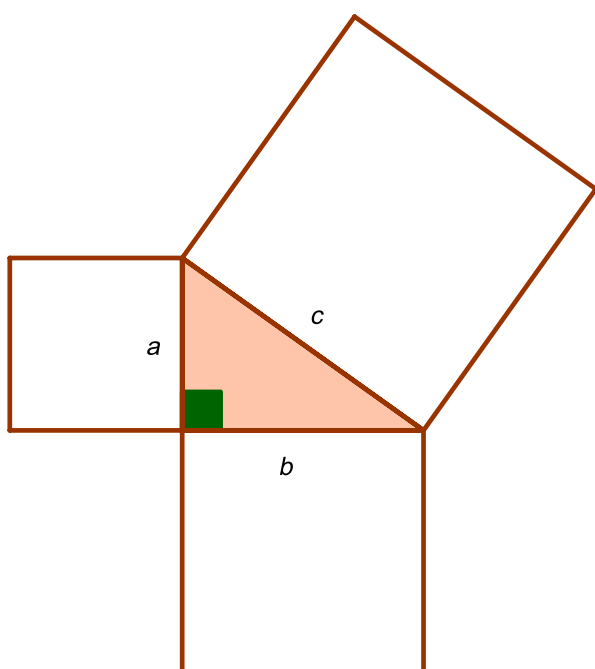
- 5 Hypotenusen i en rettvinklet trekant er 13 m lang, og den korteste kateten er 5 m.
Hvor lang er den andre kateten?



PYTAGORAS' SETNING - ARK 7

6 Vi kan bruke bokstaver for å skrive Pytagoras' regel på en enkel måte.

La de to katetene kalles a og b , og hypotenusen kalles c .



Skriv opp uttrykkene for arealene av de tre kvadratene:

Arealet av kvadratet på kateten a er _____

Arealet av kvadratet på kateten b er _____

Arealet av kvadratet på hypotenusen c er _____

Skriv Pytagoras' setning ved hjelp av a , b og c :





ANNE-MARI JENSEN

Lektor ved Meløy videregående skole, Meløy. Hun har tidligere arbeidet ved Matematikksenteret og er nå ansatt som en av senterets ressurspersoner. Hun underviser ved det studiespesialiserende programområdet på alle trinn ved Meløy vgs. Hun har holdt mange kurs for lærere om elevaktiv matematikkundervisning og arbeidet med flere utviklingsprosjekter på dette området.



KJERSTI WÆGE

Førsteamanuensis i matematikkdiraktikk ved PLU, NTNU. Hun har tidligere vært matematikklærer i videregående skole og gjennomførte sin doktorgrad ved Matematikksenteret. Hun har holdt mange kurs for lærere og arbeidet med flere utviklings- og forskningsprosjekter innenfor matematikkopplæring. Hennes forskningsfelt er elevenes motivasjon i matematikk og koblingen mellom teori og praksis i utdanningen av matematikklærere.

FLERE OPPLEGG LEGGES UT PÅ VÅRE HJEMMESIDER:

www.matematikksenteret.no



Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen