Å få et godt begrep for den deriverte

Novemberkonferansen 2017

Tor Espen Kristensen

Trondheim 28. november 2017

Stord vidaregåande skule/Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

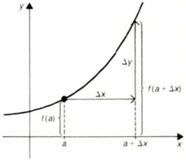
1.4 Den deriverte til ein funksjon, $f'(a)$

På figur 1.1 har vi teikna grafen til ein funksjon f. Verdien av høvet

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

fortel oss kor raskt funksjonen gjennomsnittieg forandrar seg i det gjevne intervallet. Ved at vi gjer Δx mindre og mindre, blir høvet eit stadig betre mål på kor raskt funksjonen er i ferd med å forandre seg nett i den augneblinken då $x = a$.

Fig. 1.1



Dette motiverer oss til å definere den deriverte av funksjonen f for $x = a$ slik:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Vi må ha klart for oss at $f'(a)$ er eit tal som fortel oss kor raskt funksjonen f er i ferd med å forandre seg nett i den augneblinken då $x = a$.

Vi bruker denne framgangsmåten for å finne verdien av $f'(a)$:

0) Erstatt x med parentes ( ) i funksjonsuttrykket til f.

1) Rekn ut funksjonsverdiane $f(a)$ og $f(a + \Delta x)$.

2) Rekn ut forandringa i y ved at $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$.

3) Kort brøken $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ under føresetnad av at $\Delta x \neq 0$.

4) Rekn ut grenseverdien $f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

I steg 2) ovanfor er det viktig å setje dei nødvendige parantesane, elles blir det lett forteiknsfeil. Vi viser dette for funksjonen f gjeven ved at

$$f(x) = -x^2 + 3x$$

Vi skal finne den deriverte i ein generell augneblink x, altså $f'(x)$:

0) $f(\ ) = -(\ )^2 + 3(\ )$

1) $f(x) = -(x)^2 + 3(x) = -x^2 + 3x$

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= -(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) \\ &= -(x^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) + 3x + 3 \cdot \Delta x \\ &= -x^2 - 2x \cdot \Delta x - (\Delta x)^2 + 3x + 3 \cdot \Delta x \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) &= [-x^2 - 2x \cdot \Delta x - (\Delta x)^2 + 3x + 3 \cdot \Delta x] - [-x^2 + 3x] \\ &= -x^2 - 2x \cdot \Delta x - (\Delta x)^2 + 3x + 3 \cdot \Delta x + x^2 - 3x \\ &= -2x \cdot \Delta x + 3 \cdot \Delta x - (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2x \cdot \Delta x + 3 \cdot \Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x} \cdot (-2x + 3 - \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = -2x + 3 - \Delta x$$

4) $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-2x + 3 - \Delta x) = -2x + 3$$

Oppgåve 1.10 Finn den deriverte av funksjonane i dei gjevne augneblinkane ved å bruke stega 0) — 4).

a) $f(x) = x^2$.	Finn $f'(3)$ og $f'(-1)$.
b) $g(x) = 2x^2$.	Finn $g'(0)$ og $g'(\frac{1}{2})$.
c) $f(x) = x^2 - 3x$.	Finn $f'(2)$ og $f'(-3)$.
d) $f(t) = t - 2t^2$.	Finn $f'(0)$ og $f'(-2)$.
e) $h(x) = \frac{1}{x}$.	Finn $h'(1)$ og $h'(-1)$.

Oppgåve 1.11 Finn dei deriverte av desse funksjonane i ein generell augneblink ved å bruke stega 0) — 4).

a) $f(x) = x^2$	b) $f(x) = x^3$	c) $f(x) = x$
d) $f(x) = C$	e) $g(x) = 2x^2 + 1$	f) $f(x) = 3x - x^2$
g) $g(t) = 2t^2 - 3t$	h) $h(t) = -2t + t^2$	

1.5 Derivasjonsreglar

Det er tungvint å bruke framgangsmåten 0) — 4) kvar gong vi skal derivere ein funksjon. Heldigvis finst det nokre reglar som forenklar rekninga for oss. I oppgåve 1.11 har vi funne desse resultata:

$$\begin{aligned} f(x) &= C & f'(x) &= 0 \\ f(x) &= x & f'(x) &= 1 \\ f(x) &= x^2 & f'(x) &= 2x \\ f(x) &= x^3 & f'(x) &= 3x^2 \end{aligned}$$

Dei tre siste resultata kan vi samle i denne regelen:

$$f(x) = x^n \qquad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

I kapittel 9 skal vi prove at denne regelen gjeld for alle heile tal n ulik null. Vi kan difor rekne slik:

$$f(x) = x^9 \qquad f'(x) = 9 \cdot x^{9-1} = 9x^8$$

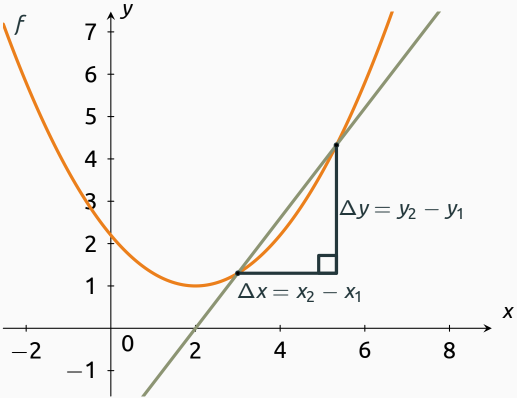
$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \qquad f'(x) = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^4} = x^{-4} \qquad f'(x) = -4 \cdot x^{-4-1} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$$

Dei to siste derivasjonane gjeld sjølvsagt berre for $x \neq 0$. Vi summerer opp desse fyrste resultata.

Elevers funksjonsbegrep...

- Elever har ofte et statisk funksjonsbegrep. Det vil si at de tenker på ett punkt om gangen. (Monk, 1994)
- En del elever tenker på funksjoner som en formel. En grafisk representasjon uten formel har lite mening for en del elever. (Dreyfus, 1989)



Funksjon=formel?

…many students thinking that a function should be given by a single formula. (Tall, 1996)

Oppgave

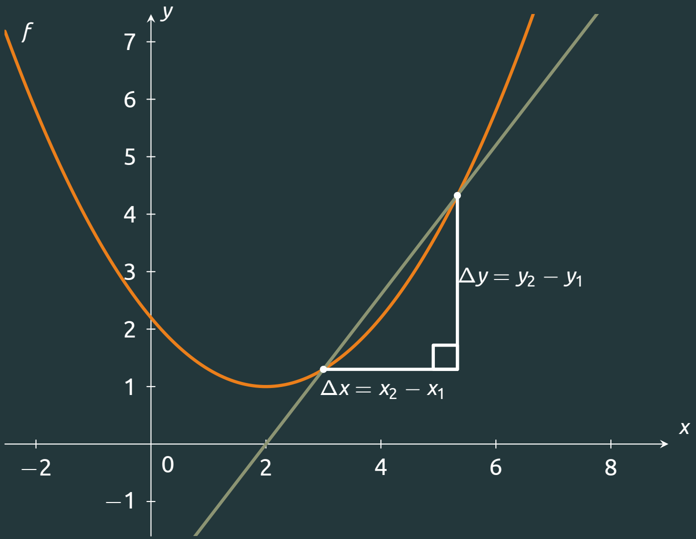
Funksjonen f har to nullpunkt, $x = 1$ og $x = 4$. Grafen til f har også et toppunkt i $(3, 4)$.
Funksjonen g er gitt ved

$$g(x) = -5 \cdot f(x+2)$$

a) Bestem eventuelle nullpunkt til g.

b) Har grafen til g noen topp- eller bunnpunkt?

Hva er $0{,}9999\ldots$**?**



y
x
f
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2
0
2
4
6
8
Δy = y₂ − y₁
Δx = x₂ − x₁

Studenters (!) funksjonsbegrep...

In summary research has found student understanding of central calculus concepts to be exceptionally primitive. Students demonstrate virtually no intuition about the concepts and processes of calculus. They diligently mimic examples and crank out homework problems that are predictably identical to the examples in the text. (Ferrini-Mundy and Gragam, 1991)

Fire stadier

Park (2013) identifiserer fire stadier i elevers forståelse av den deriverte:

Stadium 1: En punkt-spesifikk verdi

Stadium 2: En samling av verdier i ulike punkt

Stadium 3: En funksjon

Stadium 4: En operator

> The results in this study showthat students have difficulty with the derivative in general, and the derivative as a function in particular.

Derivasjon=et sett med regler?

$$k' = 0 \tag{1}$$

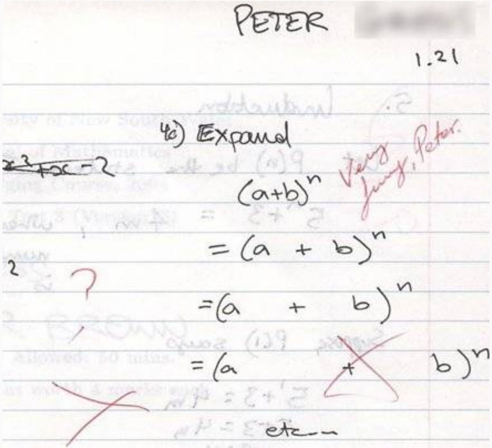
$$(ku)' = ku' \,, \text{ der } k \in \mathbb{R} \tag{2}$$

$$(x^r)' = rx^{r-1} \tag{3}$$

$$(u+v)' = u' + v' \tag{4}$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv' \tag{5}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{6}$$



Derivasjon og algebra

There were clear indications from the study that the extent to which algebra is used in introducing aspects of calculus should be kept to a minimum. (Orton, 1983)

A first approach to differentiation may be very informal and may be based largely on numerical and graphical explorations assisted by an electronic calculator. (Orton, 1983)

$$f(x) = x^2 + 2x$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x) - (x^2 + 2x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2x + 2\Delta x - x^2 - 2x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x + 2)}{\cancel{\Delta x}} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x + 2) = \underline{\underline{2x + 2}}.
\end{aligned}$$

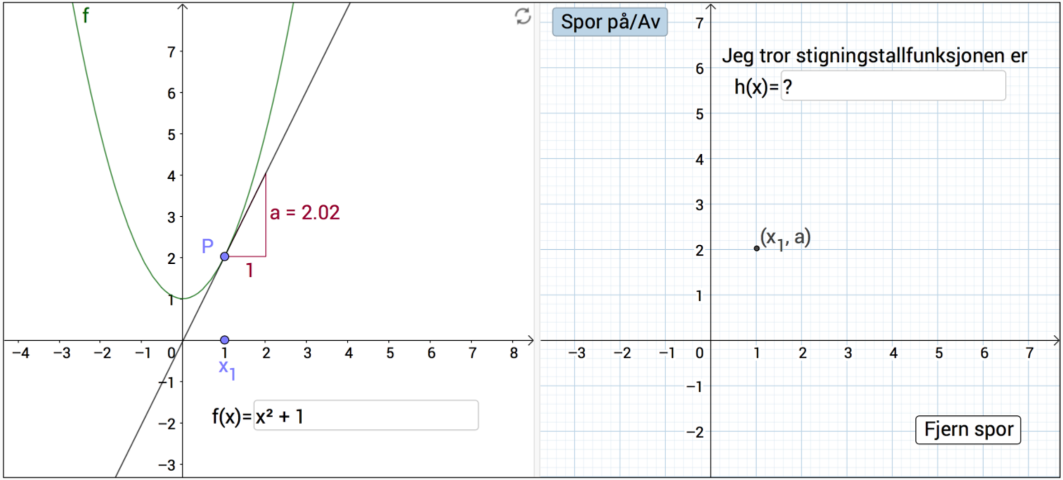
Tilnærminger til den deriverte

Sekanter som går mot tangenter → Definisjon av den deriverte → Regler/Eksempler → Oppgaver

Stigningstall til tangenter → Ny funksjon → Oppgaver/eksempler → Generalisering

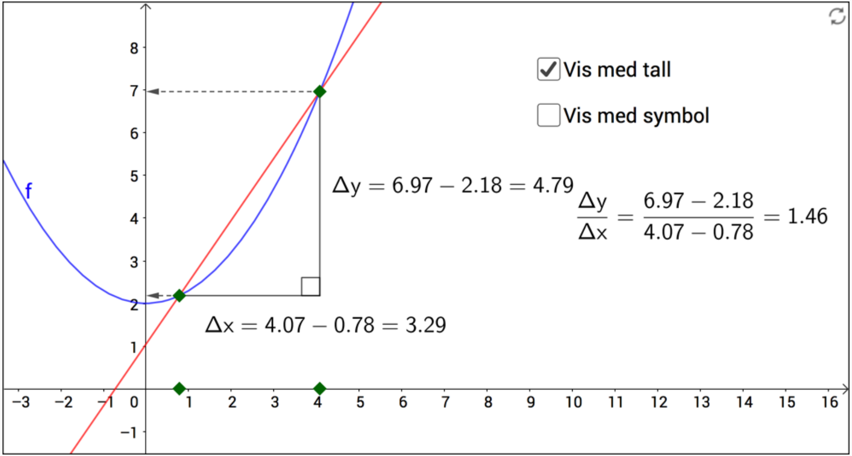
En ny funksjon

https://ggbm.at/UwNDXBmc



En ny funksjon

https://ggbm.at/fFgQ2ahK



Referanser

Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4):356–366.

Ferrini-Mundy, J. and Gragam, K. G. (1991). An Overview of the Calculus Curriculum Reform Effort: Issues for Learning, Teaching, and Curriculum Development. *The American Mathematical Monthly*, 98(7):627–635.

Monk, G. (1994). Students' understanding of function in calculus courses. *Humanistic Mathematics Network Journal*, 1(9):21–27.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14(3):235–250.

Park, J. (2013). Is the derivative a function? If so, how do students talk about it? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(5):624–640.

Tall, D. (1996). Functions and Calculus. *International handbook of mathematics education*, (1976):289–325.