

Niels Henrik Abels matematikkonkurranse

Første runde 2025-2026 – Løsninger



6. november 2025

Oppgave 1. La oss si at Marie er a år gammel nå. Da er $a + 1 = 2(a - 3)$, med løsning $a = 7$. Om 14 år er hun $3a = 21$ år gammel. **D**

Oppgave 2. Tallet 2025 er selv et kvadrattall: $2025 = 45^2 = (3^2 \cdot 5)^2 = 3^4 \cdot 5^2$. Et kvadrattall som går opp i 2025 må ha formen $(3^i \cdot 5^j)^2 = 3^{2i} \cdot 5^{2j}$, med $0 \leq i \leq 2$ og $j = 0$ eller 1. Det gir tre muligheter for i og to for j , i alt $3 \cdot 2 = 6$. (Fullstendig liste: $1^2, 3^2, 9^2, 5^2, 15^2, 45^2$.) **E**

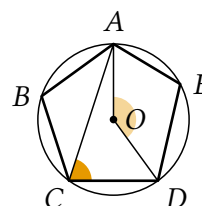
Oppgave 3. Hvis Anna velger den svarte buksen, kan hun velge fritt blant de fire skjortene, og enten de hvite eller de røde skoene. Det gir $4 \times 2 = 8$ muligheter. Hvis hun velger den blå buksen i stedet, har hun bare tre skjorter å velge i, men hun kan fritt velge blant de tre skoparene. Det blir $3 \times 3 = 9$ muligheter. Alt i alt har hun $9 + 8 = 17$ mulige valg.

Alternativ løsning: Anna har $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ mulige antrekk. Men hun vil ikke kombinere svart bukse og svarte sko, som utelukker fire av mulighetene (en for hver skjorte). Hun vil heller ikke kombinere blå bukse med blå skjorte, som utelukker tre muligheter til (en for hvert par sko). Tilsammen har hun utelukket sju mulige antrekk. **B**

Oppgave 4. Hvis vi ganger den første ligningen med $\frac{21}{2}$ og den andre med 3, får vi $105a + 63b = -42$ og $63b + 27c = 15$. Trekk så den første av disse fra den andre. **E**

Oppgave 5. Med $a = 2$ og $b = 0$ ser vi umiddelbart at ingen av alternativene A, B, C eller E holder. (I tilfelle du skulle tro at $b = 0$ er et veldig spesielt tilfelle, kan du prøve med $b = 12$ i stedet.) Både a og b må være partall, så D holder. **D**

Oppgave 6. La O være sentrum i den omskrevne sirkelen. Siden $\angle AOD = \frac{2}{5} \cdot 360^\circ = 144^\circ$ er en sentralvinkel, er den tilhørende periferivinkelen $\angle ACD$ halvparten så stor. .. **D**



Oppgave 7. Opplysningene gir at $r + 3 = q$, $q + r = 5$, $5 + q = p$. De to første ligningene gir $(r + 3) + r = 5$, så $r = 1$. Da er $q = r + 3 = 4$, $p = 5 + q = 9$, og endelig $p + q + r = 9 + 4 + 1 = 14$ **D**

Oppgave 8. Den ytre sirkelen har tre ganger så stort areal som den indre sirkelen. Siden arealet er proporsjonalt med kvadratet av radien, er forholdet mellom radiene lik $\sqrt{3}$ **C**



Oppgave 9. Vi har $a_{n+1} = n + 1 - a_n = n + 1 - (n - a_{n-1}) = a_{n-1} + 1$, slik at $a_{n+2k} = a_n + k$ for alle naturlige tall k . Det gir $a_{2025} = a_1 + 1012 = 1013$. . . **D**

Oppgave 10. Her er en liste over kvadrattall. Den inneholder alle nabopar $n^2, (n+1)^2$ med ett av de gitte tallene mellom de to:

n	24	25	26	28	29	31	32	44	45
n^2	576	625	676	784	841	961	1024	1936	2025

Om vi skriver $a(x)$ for avstanden fra x til nærmeste kvadrattall, blir dermed $a(600) = 24, a(650) = 25, a(810) = 26, a(999) = 25, a(2000) = 25$. Av disse er $a(810)$ størst. **C**

Noen tall er lettere å kvadrere enn andre. Har du først kvadratet av et tall, er formelen $(n \pm 1)^2 = n^2 \pm 2n + 1$ hendig for å kvadrere nabotallene.

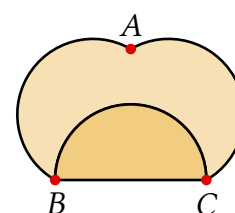
Oppgave 11. Dersom første siffer er i , blir summen av de to andre sifrene lik $20 - i$. La $f(j)$ være antall tosifrede tall slik at summen av sifrene er j . Svaret på oppgaven blir så $f(18) + f(17) + \dots + f(11)$. Mønsteret er tydelig nok: $f(18) = 1$ fordi 99 er eneste mulighet, $f(17) = 2$ (89, 98), $f(16) = 3$ (79, 88, 97) og så videre til $f(11) = 8$. Vi står altså med $1 + 2 + \dots + 8 = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$ muligheter. **C**

Oppgave 12. Siste siffer i kvadratet av et heltall avhenger bare av siste siffer i tallet du kvadrerer. Blant tallene 1 til og med 100, forekommer hvert av sistesifrene 0, 1, 2, ..., 9 like mange (ti) ganger hver, og siste siffer i kvadratene av disse er 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1. Sifferet 0 var ikke blant de det spørres om, men blant de øvrige forekommer 5 bare én gang, mens hvert av de andre forekommer to ganger hver. **C**

Oppgave 13. På én time rekker Nils å male ett gjerde, og Henrik rekker å male $4/5$ gjerde, så de maler tilsammen $9/5$ gjerde. Dermed bruker de $5/9$ timer (33 minutter og 20 sekunder) på å male ett gjerde. **B**

I praksis er det nok umulig å skille mellom alternativene **B** og **C**. Men matematikken tar ikke alltid hensyn til slike innvendinger.

Oppgave 14. Trekk linjestykket BC , og legg til den mørke halvsirkelen i figuren. Den resulterende figuren er trekanten ABC med tillegg av to halvsirkler. Når vi så tar ut den mørke halvsirkelen igjen, står vi tilbake med et areal lik arealet av trekanten ($\sqrt{3}$) pluss én halvsirkel ($\pi/2$). **A**





Oppgave 15. Vinkelsummen i en konveks femkant er $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$ (se nedenfor). La vinklene være $a, a + b, \dots, a + 4b$, med $a > 0$ og $b \geq 0$. Da er $5a + 10b = 540^\circ$, forkortet $a + 2b = 108^\circ$. Så den vinkelen som er 53° , må være enten a eller $a + b$. Men $a + b = 53^\circ$ gir $b = 108^\circ - 53^\circ = 55^\circ$, og dermed $a < 0$, så vi må i stedet ha $a = 53$. Dermed blir $b = 27,5^\circ$, og den største vinkelen blir $a + 4b = 163^\circ$ **C**

For å finne vinkelsummen i en konveks femkant, velg et punkt i det indre av femkanten og trekk et linjestykke fra punktet til hvert hjørne. Det deler femkanten i fem trekanten, total vinkelsum $5 \cdot 180^\circ$. Trekk fra summen 360° av vinklene i det valgte punktet.

Oppgave 16. Vi har $(20n + 25)/(2n + 25) = 10 - 225/(2n + 25)$, så det holder å finne antall divisorer av 225 på formen $2n + 25$, altså oddetall større enn 25. Divisorene til $225 = 3^2 \cdot 5^2$ har formen $3^i \cdot 5^j$ med $0 \leq i \leq 2$ og $0 \leq j \leq 2$. Av disse er bare $3 \cdot 5^2, 3^2 \cdot 5$ og $3^2 \cdot 5^2$ (75, 45 og 225) større enn 25.

Alternativ løsning: Hvis brøken q er et heltall, det vil si $20n + 25 = (2n + 25)q$, må q være et oddetall mindre enn 10. Skriv om ligningen til $(20 - 2q)n = 25(q - 1)$ og sett inn tenkelige verdier for q : $q = 1$ gir $n = 0$, $q = 3$ gir $14n = 50$, $q = 5$ gir $10n = 100$, $q = 7$ gir $6n = 25 \cdot 6$, og $q = 9$ gir $2n = 25 \cdot 8$. Vi ser at n blir et positivt heltall bare for $q = 5, 7$ og 9 **C**

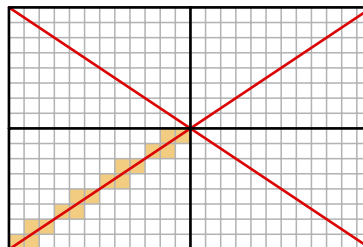
Oppgave 17. Både trekanten og firkanten med gitt omkrets kan gjøres så «flate» som du vil, og dermed få så lite areal som du vil. Dermed kan forholdet mellom arealene bli så stort eller så lite som du vil. **E**

Oppgave 18. Rutenettet i figuren har en rute for hvert «veikryss» i veinettet i oppgaven. Tallet i hver rute angir antall tillatte veier til ruten fra nedre venstre hjørne. Vi finner og fyller inn tallene oppover og mot høyre: Først alle ett-tallene i første rad og kolonne. Deretter må hver rute inneholde summen av de tre tallene i ruten under, til venstre og under til venstre, siden enhver lovlig vei må komme via en av de tre. Eksempel fra figuren: $25 = 13 + 7 + 5$. Slik fyller vi inn tallene 3, 5, 7 i den rekkefølgen, deretter 13 og 25, og så til slutt 63 i den siste ruten. **B**

1	7	25	63
1	5	13	25
1	3	5	7
1	1	1	1



Oppgave 19. Her har vi valgt å illustrere fremgangsmåten med et mye mindre rutenett: 24×16 . Det forenkler løsningen litt å dele opp rutenettet i fire mindre rutenett, som i figuren. Så trenger vi bare telle opp hvor mange ruter som ligger på den ene diagonalen i et 12×8 -rutenett (2431×1638 i oppgaven vi egentlig skal løse), og så gange med fire.



Vi ser litt mer generelt på et $a \times b$ -rutenett, som vi plasserer i første kvadrant i et koordinatsystem med ett hjørne i $(0, 0)$ og det motsatte hjørnet i (a, b) . Så følger vi diagonalen oppover fra $(0, 0)$ til (a, b) , og teller opp rutene vi krysser på veien. Hver gang vi krysser en vertikal linje, kommer vi inn i en ny rute. Det skjer $a - 1$ ganger. Likedan når vi krysser en horisontal linje, $b - 1$ ganger. Teller vi også med ruten vi starter i, skulle det være $1 + (a - 1) + (b - 1) = a + b - 1$ ruter på diagonalen.

Men nå har vi kanskje talt opp for mange ruter! Problemet oppstår når diagonalen krysser et gitterpunkt (x, y) , altså et punkt (x, y) med x og y heltall, $0 < x < a$ og $0 < y < b$, og $y/x = b/a$. Da har vi telt opp en rute for mye, så vi må trekke fra antall slike punkt. (I figuren har vi slike punkt i $(3, 2)$, $(6, 4)$, $(9, 6)$.)

Gitterpunktene på diagonalen er gitt ved $(na/d, nb/d)$, der d er største felles divisor for a og b , og $n = 1, \dots, d - 1$. Alt i alt ligger dermed $a + b - 1 - (d - 1) = a + b - d$ ruter på diagonalen.

Vi må finne største felles divisor for 2431 og 1638. Vi ser umiddelbart at 1638 både er partall og delelig med 9, så vi dividerer, og finner at $1638/18 = 91 = 7 \cdot 13$. Med andre ord er $1638 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$. På den annen side er 2431 (åpenbart) ikke delelig med 2 eller 3, heller ikke med 7, men 13 går opp i 2431, så største felles divisor for de to tallene må være 13. (De som kjenner til Euklids algoritme, kunne brukt den i stedet.)

I dette tilfellet får vi $a + b - d = 2431 + 1638 - 13 = 4056$. Så må vi ikke glemme å gange med fire, og får 16224 ruter som ligger på en diagonal. A

Oppgave 20. Vi har $3^{20} + 4^9 + 6^{10} = 3^{20} + 2 \cdot 3^{10} \cdot 2^9 + 2^{18} = (3^{10} + 2^9)^2$. Men da må $p = q = 3^{10} + 2^9$ være et primtall. For å regne ut siste siffer i p , trenger vi bare regne ut siste siffer i 3^{10} og 2^9 . Siden $3^4 = 81$, er siste siffer i $3^8 = 81^2$ lik 1, og siste siffer i 3^{10} er lik (siste siffer i) $3^2 = 9$. Mange vet at $2^9 = 512$. Dermed er siste siffer i p lik 1 (fordi $9 + 2 = 11$). Så siste siffer i $p + q = 2p$ er 2. A