

Abelkonkurransens finale består av fire oppgaver (åtte punkter) som skal løses i løpet av fire timer. Svarene skal begrunnes og føres på egne ark. **Begynn på nytt ark for hver av de fire oppgavene.**

Du får opptil 10 poeng på hver oppgave. Maksimal poengsum er dermed 40.

Tillatte hjelpemidler er kladdepapir, tospråklige ordbøker og skriveredskaper inklusive passer og linjal, men ikke gradskive.

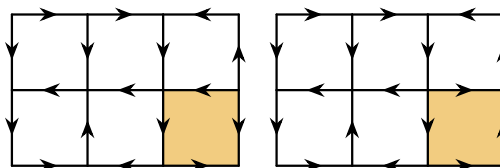
Oppgave 1

- a. Finn alle par av positive heltall a, b der både $a^2 + 2b + 1$ og $b^2 + 2a + 1$ er kvadrattall.
- b. Skriv $S(n) = 1^1 + 2^2 + \dots + n^n$ for hvert positive heltall n . Vis at det finnes uendelig mange positive heltall n som er slik at første siffer i $S(n)$ er lik første siffer i n , samtidig som siste siffer i $S(n)$ er lik siste siffer i n .

Oppgave 2

- a. Harald har en kortstokk med n kort, merket med tallene $1, 2, \dots, n$ i rekkefølge fra topp til bunn. Så reduserer han kortstokken gjentatte ganger: Hver reduksjon går ut på at han tar to nabokort ut av stokken, trekker tallet a på det nederste av de to kortene fra tallet b på det over, skriver differansen, $b - a$, på et blankt kort, og legger det nye kortet på et fritt valgt sted i kortstokken. Etter $n - 1$ slike reduksjoner står han igjen med ett kort. For hvilke positive heltall n kan tallet på dette kortet bli null?
- b. La m og n være positive heltall. Et $m \times n$ -rutenett kalles *orientert* dersom hver enhetskant har en pil i en av de to retningene langs kanten. Et *trekk* består av å rotere en enhetsrute sammen med pilene på rutens fire kanter 90° . To orienterte rutenett kalles *venner* dersom det finnes en følge av trekk som gjør om det første rutenettet til det andre rutenettet. Bestem den største mulige størrelsen på en samling av orienterte $m \times n$ -rutenett slik at ingen to av dem er venner.

Eksempel: Det orienterte 3×2 -rutenettet til høyre fremkommer ved å rotere den skyggelagte ruten i det venstre rutenettet 90° mot klokken.





Oppgave 3

a. Finn alle uendelige følger $a_1, a_2, \dots$ av positive heltall, som er slik at det for alle positive heltall n finnes et positivt heltall k som oppfyller

$$k = \frac{a_n}{a_{n+1}} + \dots + \frac{a_n}{a_{n+k}}.$$

b. Dersom 4052 distinkte heltall $a_1, a_2, \dots, a_{2026}, b_1, b_2, \dots, b_{2026}$ forskjellige fra null er gitt, la M være antallet par av indekser (i, j) slik at $1 \leq i < j \leq 2026$ og

$$2(a_i b_j + a_j b_i)^2 = (a_i^2 + b_i^2)(a_j^2 + b_j^2).$$

Hva er den største verdien for M , gitt alle tillatte valg av de 4052 tallene?

Oppgave 4

a. La D være et indre punkt i trekanten ABC . La E være punktet på linjestykket AC slik at $\angle ADE = \angle ABC$, og F være punktet på linjestykket AB slik at $\angle ADF = \angle ACB$. Vis at omsirkelene til ABC og DEF tangerer hverandre.

b. La ABC være en trekant, og E og F være punktene som oppfyller

$$\angle BCE = \angle EAC = \angle CBF = \angle FAB = 90^\circ.$$

La D være skjæringspunktet til linjene BC og EF . Vis at linjen AD tangerer omsirkelen til ABC .